UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

FUNÇÃO AFIM E PROBLEMAS MISTOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

FABRICIA BERNARDINO

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

FUNÇÃO AFIM E PROBLEMAS MISTOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Fabricia Bernardino

Orientadora:
Profa. Dra. Veridiana Rezende

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

Campo Mourão
Setembro de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

B523 Bernardino, Fabrícia

Função afim e problemas mistos: uma investigação com estudantes do ensino médio/ Fabrícia Bernardino.-- Campo Mourão : UNESPAR, 2022.

172 f.: il.

Orientadora: Veridiana Rezende

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, área de concentração: conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, 2022.

Bibliografia: f. 142-147

1. Matemática. 2. Educação matemática. 3. Teoria dos Campos Conceituais. 4. Teoremas em ação. I. Rezende, Veridiana, orient. II. Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. III. Título.

CDD 510.72

Bibliotecária: Lígia Patrícia Torino CRB 9/1278

Fabricia Bernardino

FUNÇÃO AFIM E PROBLEMAS MISTOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Comissão Examinadora:

Veridiana Rezende

Dra. Veridiana Rezende – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná

[illegible]

Dra. Mariana Moran Barroso - Membro da Banca
Universidade Estadual de Maringá

Rosinalda Aurora de Melo Teles

Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles - Membro da Banca
Universidade Federal de Pernambuco

Marli Schmitt Zanella

Dra. Marli Schmitt Zanella - Membro da Banca
Universidade Estadual de Maringá

Resultado: APROVADA

Campo Mourão
Setembro 2022

Dedico o presente trabalho a Deus.

À minha família, pelo apoio incondicional,

em especial ao meu esposo, Danilo, e meus filhos, Luísa e Lucca.

À minha orientadora, Veridiana, pelo apoio e dedicação.

Aos amigos queridos.

A todos que contribuíram de alguma forma com este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me proporcionado saúde, sabedoria, firmeza e perseverança, principalmente nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Amarildo e Ducelina, pelo amor, pelos ensinamentos e exemplos. Obrigada, pai e mãe. Aos meus irmãos, Mariana, Gabriel e Maria por todo amor e carinho.

Ao meu amado esposo, Danilo, pelo apoio, por sempre estar disposto a me auxiliar durante meus estudos e projetos da melhor forma possível, sempre com amor, carinho e cuidado. Muito obrigada, meu amor. Estendo os agradecimentos aos meus sogros, Valdecir e Juraci, por todo suporte.

Aos meus amados filhos, Luísa e Lucca, que mesmo não compreendendo a respeito deste trabalho, me deram força e sustentação por meio de cada sorriso, cada abraço, principalmente quando a mamãe chegava do ambiente de estudos e percebia a maior festa por sua chegada.

À minha amada orientadora, Veridiana, que se tornou uma verdadeira amiga, uma pessoa sábia que me instruiu, me deu forças, ânimo perante as adversidades, minha parceira. Obrigada por seus ensinamentos, paciência, pelas valiosas conversas, leituras cuidadosas, pela empatia com uma orientanda que virou mãe de dois durante o desenvolvimento dessa dissertação, pelo coração bondoso, pela profissional e pessoa excepcional que é. A você Veridiana, todo meu respeito, toda minha admiração, toda minha gratidão. Muito obrigada!

Às queridas professoras da banca examinadora, Rosinalda, Mariana e Marli, pelas correções e sugestões. Suas contribuições e ensinamentos foram fundamentais para esta pesquisa. Muito obrigada!

A todos os professores do PRPGEM, em especial aos professores Everton e Fábio e à professora Maria Ivete, que me deram amparo e auxílio perante as adversidades. Muito obrigada.

Aos colegas do PRPGEM, pela parceria e amizade, em especial às amigas queridas, Cássia, Cristiane, Renata, Renata Vanessa e Suzana Domingues. Obrigada, meninas!

A todos os membros do GEPeDiMa, pelos momentos de aprendizagem, em especial à professora Clélia, Carla, Fabiane, Amanda, Tamires, Karina, Sandra, Regis, Leonardo e Clarice, por todas as contribuições.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho, muito obrigada!

RESUMO

O conceito de função perpassa o estudo da Matemática, desde a Educação Básica ao Ensino Superior. Pesquisas mostram que o estudo desse conceito é complexo e proporciona dificuldades para estudantes de diferentes níveis de ensino. Com base em Vergnaud, este estudo parte do pressuposto que a aprendizagem de um conceito ocorre durante o processo escolar por meio da vivência dos sujeitos com situações diversas. No entanto questiona-se, nesta pesquisa, se a variação de classes e suas respectivas subclasses de situações associadas à função afim torna-se mais ou menos complexa para os estudantes durante a sua resolução. Desse modo, dentre as diversas classes de situações associadas à função afim, esta pesquisa tem por objetivo *analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, intervém na resolução de estudantes do Ensino Médio.* Este estudo está centrado na abordagem qualitativa, e para alcançar o objetivo da pesquisa, foi utilizado como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais, para elaboração do instrumento de pesquisa e análises dos dados obtidos. Foram propostos quatro problemas mistos pertencentes a diferentes subclasses da classe *proporção simples e transformação de medidas* para serem resolvidos individualmente por uma turma de 10 estudantes da 3ª série do Ensino Médio de um colégio estadual do interior do Paraná. A análise dos dados ocorreu à luz da teoria dos Campos Conceituais por meio da produção escrita dos estudantes e gravações de áudio dos diálogos que ocorreram logo após as resoluções das situações. A partir das análises, a conclusão foi que a variação das classes gera dificuldades aos estudantes. Dentre as quatro subclasses contempladas nesta pesquisa, a *proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva)* revelou maior quantidade de estratégias inadequadas e itens em branco. Foi identificada, nas resoluções do instrumento de pesquisa, a mobilização de quatro (04) teoremas em ação verdadeiros e dois (02) teoremas em ação falsos associados ao conceito de função. Ainda foram identificados equívocos e dificuldades dos estudantes com a ideia de generalização de uma função, ou seja, com a representação por meio de uma expressão algébrica para a função afim.

Palavras-chave: Educação Matemática; Teoria dos Campos Conceituais; Função afim; Problemas mistos; Teoremas em ação.

ABSTRACT

Function concept permeates the study of Mathematics, from Basic Education to the Higher Education. Research shows the study of this concept as complex, and it causes difficulties for students of different education levels. Based on Vergnaud, this study assumes that learning a concept occurs during the school process through experiences of subjects with different situations. However, this research questions whether variation of classes and their respective subclasses of situations associated with the affine function becomes more complex or less one for students during their resolution. Therefore, among several classes of situations associated with the affine function, this research has as aim at *analyzing whether variation of class of mixed problems simple proportion and measurement transformation associated with the affine function intervenes in the resolution of high school students*. This study is based on the qualitative approach, and to achieve the research aim, Conceptual Fields Theory was used as a theoretical reference to elaborate the research instrument and analyzing data surveyed. Four mixed problems belonging to different subclasses of the *simple proportion class and measurement transformation* were proposed to be solved individually by a class of 10 3rd grade high school students enrolled in a State School of Paraná countryside. Data analysis occurred in the light of the Conceptual Fields Theory through the students' written production and audio recordings of the dialogues, which have happened after solution of the situations. From the analysis, the conclusion was the variation of classes generates difficulties to the students. Among four subclasses encompassed by this research, *simple proportion (quota) and measurement transformation (unknown initial state and positive transformation)* revealed greater number of inappropriate strategies and blank items. In the resolutions of the research instrument was identified the mobilization of four (04) true theorems in action and two (02) false theorems in action associated with the concept of function. Misconceptions and difficulties were also identified by students with the idea of generalizing a function, in other words, with the representation through an algebraic expression for the affine function.

Keywords: Mathematics Education; Conceptual Fields Theory; Affine function; Mixed Problems; Theorems in action.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de função é considerado fundamental na Matemática (CARAÇA, 1998). O referido conceito auxilia o estudante na compreensão de fenômenos do cotidiano, no estudo de elementos da Matemática e de outras áreas da educação, como Biologia e Química (BRASIL, 2018). Porém, seu estudo é complexo e proporciona dificuldades aos alunos de diferentes níveis de ensino (BERNARDINO, 2019; CALADO, 2020). Para sua compreensão pelos estudantes, são necessários diversos estudos, resolução de situações que podem ser desenvolvidas pelos estudantes desde os anos iniciais da Educação Básica (RODRIGUES, 2021).

O interesse por desenvolver pesquisas associadas ao conceito matemático *função* surgiu enquanto estudante do Curso de Licenciatura em Matemática, por meio da minha[1] participação em projetos de iniciação à pesquisa e de extensão, coordenados pela orientadora desta dissertação. A maioria desses projetos tinham como foco o referido conceito. Do projeto de extensão intitulado *Diálogos entre Escola e Universidade acerca do ensino de Matemática*, participavam professores da Educação Básica, estudantes de graduação e pesquisadores, membros do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão – GEPEMCAM, vinculado à Universidade Estadual do Paraná – Unespar, campus de Campo Mourão.

Durante os dois anos de realização do projeto de extensão, os membros do grupo dedicaram seus estudos especificamente ao conceito de função afim, com vistas a contribuir com o ensino e a aprendizagem do conceito de função na Educação Básica. Ao mesmo tempo, fortalecia-se a aproximação entre docentes e estudantes da Educação Básica e da Universidade. Durante os encontros, com foco na função afim, foram analisados livros didáticos, ocorreram estudos de artigos científicos e discutidos os principais aspectos de teorias da Didática da Matemática, tais como teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Também foram elaboradas coletivamente tarefas sobre função afim, que foram implementadas em salas de aula de Ensino Fundamental II e Ensino Médio pelos estudantes de graduação, com apoio dos docentes da Educação Básica, todos participantes do projeto.

Em decorrência do desenvolvimento do projeto, foi produzido um livro, intitulado *Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade: reflexões acerca do conceito de função*

[1] Nesta breve apresentação da minha relação com o tema e com a pesquisa, optei pela primeira pessoa do singular.

nas aulas de matemática (CEOLIM; REZENDE; HERMANN, 2019). No capítulo que escrevi juntamente com outros quatro pesquisadores (BERNARDINO *et al.*, 2019), bem como a orientadora desta pesquisa, voltamos nossos olhares para as ideias-base do conceito de função, quais sejam: *variável, dependência, regularidade, correspondência e generalização*, possíveis de ser manifestadas por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio.

Ainda durante a graduação, um dos projetos de iniciação científica desenvolvido por mim teve a intenção de analisar a compreensão do conceito de função por estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Para o desenvolvimento desse projeto, primeiramente realizei um estudo de pesquisas sobre função afim e função quadrática, publicadas em periódicos científicos online de Educação Matemática, qualificados pela CAPES[1] como A1, A2 e B1, no quadriênio 2013 a 2016. Esse estudo forneceu base para a organização de um instrumento de pesquisa que foi implementado com estudantes da 1ª série do Ensino Médio. A partir das análises das resoluções dos estudantes, foi observado que os sujeitos da pesquisa não formalizam a expressão algébrica de situações de função afim, e possuem dificuldades com a interpretação de problemas, representação gráfica e operações básicas da Matemática, tais como multiplicação e divisão.

Ao finalizar a graduação em Matemática, ingressei como aluna regular no Curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná - Unespar, com a intenção de dar prosseguimento às pesquisas realizadas anteriormente por mim, enquanto estudante de graduação. Ao mesmo tempo, comecei a participar do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática - GEPeDiMa, liderado pela orientadora desta investigação. Desde o início, o tema da minha pesquisa e teoria de base estavam alinhados às pesquisas desenvolvidas por mim anteriormente, e aos propósitos do GEPeDiMa. A razão é que o referido grupo tem se dedicado ao desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao conceito de função afim, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais idealizada por Gérard Vergnaud.

A teoria dos Campos Conceituais parte do princípio de que um sujeito se desenvolve no decorrer do tempo, e durante o processo escolar. Apesar de ser considerada uma teoria de desenvolvimento cognitivo, ela traz grandes contribuições para a Didática da Matemática (VERGNAUD, 2003). Um dos principais conceitos estabelecidos pelo autor é o de Campo Conceitual, definido como um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos

[1] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

outros (VERGNAUD, 2002). O domínio de um campo conceitual pelo sujeito ocorre ao longo de vários anos. As dificuldades relativas a um conceito são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas por meio de diversas situações, tanto dentro quanto fora da escola (MAGINA *et al*., 2008).

Segundo Vergnaud (1983), um dos pontos mais desafiadores na educação é provavelmente o uso de problemas significativos para que o conhecimento, em seus aspectos teóricos e práticos, seja visto como uma ajuda na resolução de problemas reais pelos estudantes. Nesse sentido, a idealização da Teoria dos Campos Conceituais surge da "necessidade de compreender melhor a aquisição e o desenvolvimento de conhecimentos e competências específicas, em relação a situações e problemas" (VERGNAUD, 1983, p. 126).

Para Gitirana *et al*. (2014), normalmente os estudantes constroem um campo conceitual por meio das experiências que adquirem dia a dia na escola. Para isso, é preciso que o professor planeje e busque o desenvolvimento de experiências didáticas para auxiliar seus alunos na compreensão de um campo conceitual. Nessas experiências, é necessário compreender e considerar as diferentes estruturas dos problemas, a fim de explorar essa diversidade em sala de aula. Ainda, "é importante que o professor tenha uma referência sobre o desenvolvimento dos estudantes na resolução de problemas ao longo dos anos de escolarização, para que possa construir uma expectativa mais realista sobre o que esperar das turmas como um todo" (GITIRANA *et al.*, 2014, p.42)

No sentido de considerar diferentes estruturas de problemas, Vergnaud (1993, 2009) desenvolveu estudos precisos, principalmente relativos ao campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. No que se refere às situações, o campo conceitual das estruturas aditivas consiste em problemas cuja solução exige a operação de adição e/ou a sua inversa, a subtração. Seis classes são estabelecidas pelo autor para o campo conceitual das estruturas aditivas: comparação de medidas; composição de medidas; composição de duas transformações; composição de duas relações; transformação de medidas e transformação de uma relação.

Para Vergnaud (1993), em cada estrutura de problema é possível ocorrer variações que podem tornar um problema mais fácil ou mais complexo. Segundo Magina *et al.* (2008), para que um estudante domine as estruturas aditivas, ele precisa ser capaz de resolver diversos tipos de situações-problema, não basta saber operar com a adição e multiplicação.

Em relação aos problemas do tipo multiplicativo, existem cinco diferentes classes: comparação multiplicativa; isomorfismo de medidas (ou proporção simples); produto cartesiano; função bilinear e proporcionalidade múltipla. As relações presentes são as operações de multiplicação ou divisão; ou seja, o conjunto das situações que requerem uma multiplicação, uma divisão, ou uma combinação dessas operações.

Segundo Gitirana *et al.* (2014), desenvolver competências e concepções depende da escolha dos problemas, ou de uma solução mais adequada em determinada abordagem. Essas autoras alertam que o professor precisa estar atento à complexidade de cada tipo de situação, pois "[...] ao repetir problemas que exijam um mesmo raciocínio, o professor pode levar o estudante a desenvolver concepções, ou mesmo estratégias, que dificultam a aquisição do próprio conceito em foco, limitando a competência de resolução" (GITIRANA *et al.* 2014, p. 42).

Além de problemas aditivos e multiplicativos e suas classificações, Vergnaud (2009a) define *problemas mistos* como situações que exigem operações do campo aditivo e multiplicativo. Em outras palavras, problemas que envolvem pelo menos uma adição ou subtração, e ao mesmo tempo, uma multiplicação ou divisão. No entanto, Vergnaud não apresenta uma classificação para tais situações mistas. Miranda[1] (2019) relata que é possível associar problemas mistos à função afim, pois em sua forma algébrica, uma função afim pode ser modelada como $f(x) = ax + b$, envolvendo, portanto, as operações aditiva e multiplicativa.

Miranda (2019) fez um estudo do conceito de função afim e caracterizou as situações-problema identificadas em livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais. A partir das seis classes de problemas pertencentes à estrutura aditiva e cinco classes de estrutura multiplicativa, indicou a possibilidade de ao menos trinta classes de problemas mistos, que permitem sua modelização na forma: $y = b \pm ax$, com a e b reais positivos. Dentre as possibilidades elencadas por Miranda (2019), consta a classe contemplada nesta investigação: *proporção simples e transformação de medidas*. A escolha dessa classe ocorreu em razão da vasta possibilidade de variações que ela permite.

Quando está diante de uma situação, escolar ou não, ao resolvê-la, o sujeito manifesta esquemas, que se trata da organização invariante da atividade pelo sujeito (VERGNAUD, 2009). Para o pesquisador, um esquema é composto por quatro elementos: uma meta, submetas e expectativas; regras de ação, obtenção e controle de informações; invariantes operatórios; e possibilidade de inferência na situação. Os invariantes operatórios podem ser de dois tipos: conceitos em ação e teoremas em ação. Os teoremas em ação são conhecimentos na forma de proposição, e são passíveis de ser verdadeiros ou falsos.

[1] Participante do GEPeDiMa - Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática.

Para Muniz (2017), considerar os esquemas utilizados pelos estudantes pode significar a construção de uma intervenção pedagógica, não mais a partir dos conhecimentos hipotéticos dos estudantes, mas a partir de uma maior aproximação das capacidades, construções e aquisições reais. Para o pesquisador, assim como para Vergnaud (1996a), em uma investigação pedagógica é possível revelar o processo de conceitualização no qual se encontra cada estudante, e se os conceitos dão conta ou não de fornecer os instrumentos necessários. Isso pode contribuir para práticas pedagógicas efetivas em sala de aula.

Segundo Vergnaud (2009a), há uma relação entre conceitos em ação e teoremas em ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão significados aos conceitos. Um sujeito que utiliza um teorema em ação acredita em sua veracidade, mas esse teorema pode ser falso.

No que se refere ao conceito de função, consta na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) que os estudantes precisam compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações: numérica, algébrica e gráfica, além de utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, identificar regularidades e padrões. Além do raciocínio lógico, isso exige a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.

Ainda, na BNCC (BRASIL, 2018) é relatado que os estudantes precisam investigar relações entre números expressos em tabelas e representá-los no plano cartesiano, identificar regularidades e padrões. Isso exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar algebricamente uma generalização. Porém, estudos (NOGUEIRA; REZENDE; CALADO, 2020; BERNARDINO *et al*., 2019) mostram que o conceito de função não é simples de ser compreendido pelos estudantes, e que a generalização causa muitos erros. Nogueira, Rezende e Calado (2020) relatam que, de doze estudantes, seis do 9º ano do Ensino Fundamental e seis da 3ª série do Ensino Médio, participantes de uma pesquisa feita a partir da resolução de três tarefas sobre função, nenhum dos sujeitos apresentou a generalização para as situações propostas. Bernardino *et al.* (2019) também relatam sobre erros relativos à generalização: dentre treze grupos de estudantes da 1ª série do Ensino Médio, apenas quatro apresentam generalização para a situação proposta.

Gitirana *et al.* (2014) afirmam que uma das grandes contribuições da Teoria dos Campos Conceituais à Educação Matemática é o auxílio nas análises dos fatores que interferem nas resoluções de problemas dos estudantes: as estratégias para resolver um determinado tipo de problema ajudam a elaborar e reelaborar conceitos. Quando o professor busca e encontra êxito em identificar essas estratégias, podem, então, compreender as dificuldades de seus estudantes e auxiliá-los na superação.

Muitas vezes, ao resolver um problema, o estudante faz uso de conceitos e/ou teoremas em ação, e mesmo que frequentemente não sejam capazes de explicitá-los, ou reconhecê-los como um conhecimento matemático, é importante que o professor tenha condições de resgatá-los. Isso porque "é um pilar bastante significativo para o desenvolvimento da aprendizagem. Esse conhecimento forma um dos três pilares da Teoria dos Campos Conceituais, os invariantes operatórios" (GITIRANA *et al.,* 2014, p. 121), que se manifestam de modo implícito nas resoluções dos sujeitos.

No que diz respeito à variação de classes de situações e suas respectivas complexidades, Magina *et al*. (2008) mostram que existem algumas classes que são mais complexas do que outras. Em uma investigação realizada pelas autoras com 782 estudantes dos Anos Iniciais[1] do Ensino Fundamental, que analisou esquemas de estudantes ao resolverem situações do campo conceitual aditivo, foi observado que a variação das classes em suas respectivas subclasses de problemas aditivos acarreta situações mais ou menos complexas para os estudantes resolverem.

Nesse sentido, e considerando os pressupostos apresentados na introdução desta investigação, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: *A variação de subclasses de problemas mistos influencia na complexidade das situações para estudantes do Ensino Médio?*

Com vistas a responder à questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo geral: *analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, interfere na resolução de estudantes do Ensino Médio*.

Esse objetivo geral se desdobra nos seguintes objetivos específicos: *analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem problemas mistos das diferentes subclasses do tipo proporção simples e transformação de medidas;* e *identificar teoremas em ação associados ao conceito de função afim manifestados nas estratégias dos estudantes ao resolverem situações de diferentes subclasses do tipo proporção simples e transformação de medidas.*

Para alcançar os objetivos apresentados, contamos com a participação de dez estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Campo Mourão – PR, que resolveram quatro problemas mistos elaborados para esta investigação, associados ao conceito de função afim. As resoluções dos problemas propostos foram individuais, e a análise dos dados ocorreu

[1] A investigação foi realizada com alunos das antigas 1ª a 4ª séries dos Anos Iniciais.

por meio dos registros escritos e da transcrição da conversa final entre pesquisadora e estudantes.

Em relação à estrutura desta pesquisa, ela está organizada em sete partes: introdução; capítulo 1, no qual são apresentados estudos a respeito do conceito de função, como aspectos históricos e matemáticos; capítulo 2, com o referencial teórico da pesquisa que sustenta o seu desenvolvimento; capítulo 3, procedimentos metodológicos; capítulo 4, no qual apresentamos as situações que constituíram o instrumento de pesquisa, e as possíveis estratégias e invariantes operatórios possíveis de ser mobilizados; capítulo 5, as análises das resoluções dos estudantes; capítulo 6, as considerações finais, e por fim, as referências e apêndices.

1 ESTUDOS PRELIMINARES SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo apresentam-se os estudos preliminares a respeito do conceito de função. O capítulo está organizado em três subseções: a primeira trata de aspectos históricos acerca desse conceito; a segunda descreve os principais aspectos Matemáticos da função, e especificamente da função afim; e o terceiro tópico contempla um estudo de pesquisas em Educação Matemática associadas à função afim.

1.1 Aspectos históricos

O conceito de Função é essencial na Matemática, principalmente por permear grande parte dessa Ciência (EVES, 1995). Souza e Mariani (2005) afirmam que não é conhecido ao certo como emergiu o conceito de função, mas acreditam que tenha surgido de forma intuitiva, da necessidade de resolver problemas práticos nos quais havia interdependência entre duas grandezas distintas.

Ciani, Nogueira e Berns (2019) afirmam que conceitos matemáticos surgiram, e ainda surgem, a partir de problemas importantes, que podem ser práticos ou teóricos, sendo os práticos voltados para a natureza ou a vida; e os teóricos, voltados ao interesse da própria Matemática ou de outras ciências. Os autores afirmam que a palavra função "[...] foi escolhida para designar o que talvez seja a ideia mais importante de toda a Matemática" (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 14).

Para Boyer (1996), até o século XVIII, a Matemática estava limitada a observações da natureza. Para o autor, a Matemática surgiu como parte da vida diária do homem, mas não deve se limitar a isso, visto que conceitos matemáticos também surgem gradualmente de estudos científicos. Para o autor, "a matemática tem sido frequentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos" (BOYER, 1996, p. 435).

Ciani, Nogueira e Berns (2019) relatam que o conceito de função surgiu de problemas práticos, da necessidade de estudar *leis naturais*. Porém, houve uma evolução, e com isso, o conceito atingiu o grau de generalidade atual a partir de necessidades internas da própria Matemática, como o de continuidade. Os autores definem como leis naturais toda regularidade de evolução de um fenômeno. Por meio da observação, podem surgir regularidades, o que permite repetição e previsão, "uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da realidade, é a de procurar, identificar, expressar, tratar e prever regularidades dos fenômenos naturais" (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 25).

Assim, nota-se que o conceito de função passou por diversas modificações com o passar do tempo. Autores, como Maciel e Cardoso (2014), mencionam que, para chegar à definição de função utilizada atualmente, foi necessário o desenvolvimento de outros conceitos, tais como o de variável, domínio, contradomínio, generalização, dependência, expressão algébrica, dentre muitos outros.

Diversas definições foram concebidas pelos matemáticos desde o século XVII. Rossini (2007) relata que, em 1935, jovens matemáticos franceses fundaram a *Associação Bourbaki*, com o objetivo de organizar toda a matemática conhecida até então. Em 1939, esse grupo publicou o primeiro livro de uma coleção[1] que contém todas as definições e todos os principais resultados. Rossini (2007) enfatiza que, da antiguidade até os estudos do grupo Bourbaki, emergiram inúmeras concepções de função, e diferentes maneiras de compreensão. Para a autora, "conhecer as concepções é fundamental em um trabalho sobre funções, pois elas são utilizadas nos livros didáticos e são trabalhadas em sala de aula" (ROSSINI, 2007, p. 208).

Em relação ao termo *função*, Roque (2012) relata que a palavra foi adotada em uma correspondência, trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1698), na falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável. A autora cita que diversos escritos, do século XVII ao início do século XX, fornecem uma lista com a evolução das principais definições relacionadas ao conceito de função. Para ela, teria havido um desenvolvimento linear, durante o qual as definições foram sendo aprimoradas, até culminar com a versão usada atualmente, baseada na linguagem dos conjuntos.

Nos estudos de Bernoulli e Leibniz, por volta de 1698, é discutida a notação mais adequada para uma função. Nessa época, Leibniz já havia introduzido os conceitos de constante e de variável. A definição explícita de função só começou a ser delineada em um artigo de Johann Bernoulli (1667-1748), apresentado em 1718 à Academia de Ciências de Paris, que viria a ter grande divulgação, contendo sua definição de função de uma certa variável com uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes. De acordo com Bernoulli (1718, apud ROQUE, 2012, p. 373) *chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes*.

---

[1] Título da coleção de livros publicados pelo grupo Bourbaki: *Théorie des ensembles (fascicule de résultats).*

Para Roque (2012), essa concepção é a mesma que temos em mente quando associamos uma função à expressão $f(x) = x + 2$, por exemplo. Temos uma quantidade indeterminada x, que é suposta variável; e uma constante, no caso 2. Ponte (1990) cita que o retoque final da definição de Bernoulli viria a ser dado em 1748 por Euler (1707-1783), antigo estudante de Bernoulli, substituindo o termo *quantidade* por *expressão analítica*.

O conceito de função começou a ser identificado na prática como conceito de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações. Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Georg Cantor (1845-1918), o conceito de função acabaria por ser estendido no século XX, de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

Para Ponte (1990), a evolução desse conceito ainda não parou, podendo-se considerar três elementos essenciais na formação do primitivo conceito de função:

> A notação algébrica, portadora de importantes fatores como a simplicidade e o rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas condensando uma grande quantidade de informação; a representação geométrica, proporcionando uma base intuitiva fundamental; e a ligação com os problemas concretos do mundo físico, associada a ideia de regularidade que forneceu a motivação e o impulso fundamental do estudo (PONTE, 1990, p. 4).

O conceito de função acabaria por seguir uma evolução própria, afastando-se desses três elementos, pois começaram a considerar as funções que não correspondem a uma expressão analítica, que não são suscetíveis de representação geométrica simples, e que não têm qualquer relação com problemas concretos do mundo físico. Para Caraça (1998), uma função caracterizada por uma expressão analítica consiste em um tipo de definição em que há um conjunto de operações, de tal modo que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor α de x um único valor β de y. Por exemplo:

$$y = 2x + 5$$

Efetuando as operações indicadas no segundo membro, é possível observar que essa igualdade faz corresponder efetivamente, a cada valor de x, um único valor de y. Com isso, a expressão do segundo membro define uma função $y(x)$.

Para Roque (2012), a identificação entre função e expressão analítica defendida no século XVIII, muitas vezes, está mais presente na cabeça dos estudantes do que sua definição formal. Também há uma confusão na ideia de que uma expressão analítica é uma função, não tendo a conjectura de que uma é a representação da outra. Caraça (1998) enfatiza que o conceito de função não se confunde com o de expressão analítica: esta é apenas um modo de estabelecer a correspondência de duas variáveis, um modo de estabelecer a correspondência.

Segundo Tinoco (2002), a identificação de função como expressão analítica é uma característica marcante, juntamente com outra: a introdução desse conceito como conjunto de pares ordenados e caso particular de variação. Para esta autora, “em ambas [as] características se ignora a origem do conceito, que surgiu para analisar fenômenos de variação” (TINOCO, 2002, p. 49).

Salientamos que expressões analíticas são importantes para o aprendizado do conceito de função. É fundamental, como salienta Ponte (1990), que os estudantes compreendam seu real significado. Assim, o estudo analítico não deve bastar a si próprio, pelo contrário: deve “surgir como base em atividades sistematicamente feitas a partir das representações numérica e gráfica” (PONTE, 1990, p. 7). Com isso, para o ensino de função, devem-se utilizar as suas diversas representações, permitindo um progressivo enriquecimento e aprofundamento do conceito.

De modo geral, a partir dos estudos relatados, é possível observar que, para a construção do conceito de função, foi necessário muito tempo e a contribuição de muitos estudiosos. Como afirmam Calado e Rezende (no prelo), a construção do conceito de função, tal como atualmente é ensinado, ocorreu de forma lenta, e foram necessários mais de 20 séculos de experiências, descobertas e disparidades para a formalização do conceito de função, o que gerou diversas modificações. Destarte, enfatiza-se que a construção desse conceito seja trabalhada com os estudantes no decorrer de toda a escolarização.

1.2 Aspectos Matemáticos da função afim

Nesta seção, apresentamos alguns dos principais aspectos matemáticos para o conceito de função e principalmente de função afim. Para tanto, iniciamos com o exemplo de uma situação de função: consideremos que uma pessoa, em determinado dia, caminhe por 10 quilômetros, e após a caminhada, utilize um carro a uma velocidade de 80 km/h. Tendo as informações, podemos descobrir quanto tempo essa pessoa leva para percorrer de carro qualquer distância. É possível obter, ainda, uma expressão analítica, na qual y seria o espaço percorrido em função do tempo x, que é dado em horas, e 10 seria o valor percorrido antes de utilizar o carro:

$$y\,(x) = 80 \cdot x + 10$$

Alguns dos valores resultantes podem ser observados no quadro 1, a seguir.

Quadro 1: Representação tabular do exemplo apresentado

x	0,5 hora	1 hora	1,5 horas	2 horas
y	50km	90km	130km	170km

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para Caraça (1998), com uma simples tabela como essa, não se pode evidentemente encontrar toda a regularidade, a lei quantitativa dessa função, pois na tabela estão indicados apenas alguns pares de valores da correspondência. Logo, existem infinitos outros, mas ela pode auxiliar na esquematização da lei dessa função. Com isso, Caraça questiona em que consiste, no fundo, essa tabela. Dois conjuntos de números, o dos tempos, que representamos por x; e o dos espaços, que representamos por y, possuem pontos em correspondência um com o outro. Podemos afirmar que essa correspondência é unívoca, pois para cada tempo existe um único espaço percorrido. A lei está na forma como ocorre a correspondência do conjunto x com o conjunto y: se a correspondência mudar, consequentemente mudarão o espaço, a variação e a lei. Assim, "uma lei se consiste na forma de correspondência entre dois conjuntos" (CARAÇA, 1998, p. 127).

Para tornar a correspondência facilmente maleável, é possível arranjar uma representação simbólica para os conjuntos. Assim, coloca-se o conceito de variável: "Seja (E) um conjunto qualquer de números, finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo: x" (CARAÇA, 1998, p. 127). Logo, a esse símbolo, no caso (x), que representa qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável. Com isso, tomando como base o exemplo, temos que x é a variável do conjunto dos tempos; e y, a variável do conjunto dos espaços. A lei que consiste na existência de uma dada correspondência entre x e y, como afirmamos, é uma correspondência unívoca. Dizemos que a variável y está em função da variável x, e escrevemos simbolicamente:

$$y = f(x)$$

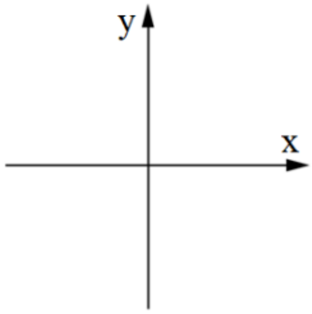
Assim, x é a variável independente e y a variável dependente. Para Ponte (1990), a ideia de correspondência é, sem dúvida, uma das ideias basilares da Matemática.

A definição de função encontrada com mais frequência nos livros é: "Dados dois conjuntos X e Y, uma função f: $X \rightarrow Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função" (ROQUE, 2012, p. 370). Boyer (1996) afirma que se deve a Euler a notação $f(x)$ para uma função em x.

A definição de função afim é apresentada da seguinte forma: "Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$" (LIMA *et al.*, 2006, p. 87). Para Miranda (2019), esse tipo de definição formal do conceito de função afim indica que ela é reconhecida por sua expressão analítica, na forma $y = ax + b$, sendo a, $b \in \mathbb{R}$.

As funções também podem ser representadas no plano cartesiano. Para tanto, sejam no plano duas retas concorrentes que, por comodidade se tornam perpendiculares entre si, e orientado o eixo X, (na horizontal) e o eixo Y (na vertical), podemos tomar cada um dos eixos para cada uma das variáveis relacionadas em uma função. Sobre o eixo X, interpretamos geometricamente aquele conjunto de números reais que é domínio da variável x; e sobre o eixo Y, o conjunto de números reais que é o domínio de y.

Figura 1: Plano Cartesiano

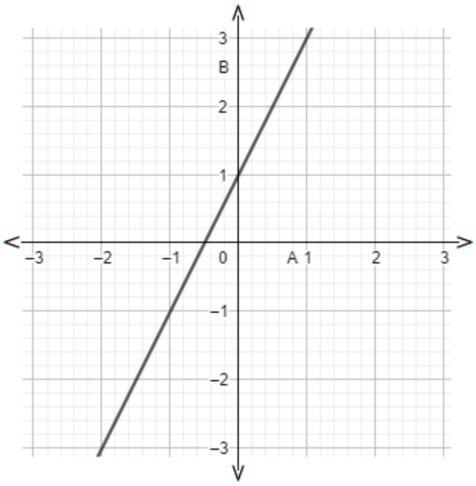


Fonte: Elaborado pela autora (2022).

As duas variáveis aparecem representadas, ou interpretadas, independentemente uma da outra. É possível, além disso, utilizar o plano definido pelos dois eixos para fazer construções geométricas que definam correspondências entre as duas variáveis, isto é, construções que definam funções $y(x)$. Assim,

> Seja um sistema de referência cartesiano e uma curva (c) que não seja cortada em mais de um ponto por uma paralela ao eixo Y. Essa curva permite definir uma função y(x), para o que basta fazer o seguinte: Seja P um ponto qualquer da curva e tiremos, por ele, perpendiculares aos eixos, as quais os encontram nos pontos A e B, sejam a e b os números reais (relativos) iguais, respectivamente, as medidas algébricas de AO e OB. Suponhamos feita uma construção análoga para cada ponto da curva e façamos corresponder a cada número a o número b obtido pela construção indicada (CARAÇA, 1998, p. 133).

Figura 2: Representação de uma função



Fonte: Caraça (1998, p. 134).

Portanto, fica definida uma correspondência do conjunto dos valores pertencentes ao conjunto x (variável x) com os valores pertencentes ao conjunto y (variável y); logo, é definida uma função.

Para Caraça (1998), na representação gráfica encontra-se um complexo problema, pois além de o estudante interpretar simultaneamente dois conjuntos de números, deve-se arranjar uma maneira de, nessa interpretação, representar a correspondência das variáveis relacionadas.

Alguns autores, como Garcia e Rezende (2018), e Ceolim *et al.* (2019), dentre outros, apresentam dificuldades dos estudantes em relação à representação de função por meio de gráficos cartesianos. Caraça (1998) relata que a compreensão e construção de um gráfico é tarefa complexa, por isso se faz necessária a articulação em sala de aula de diversas representações do conceito de função.

1.3 Pesquisas associadas ao conceito de função afim

Nesta subseção apresenta-se um estudo de artigos que tratam, de alguma forma, do tema função afim. Os textos estudados estão publicados em periódicos científicos online da área de Ensino, específicos de Educação Matemática e qualificados pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES (Qualis 2013 – 2016) com os estratos A1, A2 e B1. O período selecionado para levantamento dos artigos foi de 2007 a 2022.

Para o estudo, realizamos uma busca na página de cada periódico pelas palavras *função* e *funções*. Dentre os artigos encontrados, selecionamos apenas os que tratam, de alguma forma, de função afim.

Vinte e dois (22) artigos foram identificados tratando especificamente sobre função afim. Realizamos uma leitura de cada artigo, e extraímos os principais elementos: objetivo, sujeitos, procedimentos metodológicos e principais resultados. Levando em consideração o quantitativo de manuscritos, organizamos as informações em quatro (04) agrupamentos por temáticas, conforme quadro 2.

Quadro 2: Agrupamentos e quantidade de artigos identificados no estudo

Agrupamentos	Quantidade de artigos
Pesquisa bibliográfica	7
Abordagem diferenciada para a sala de aula	9
Pesquisas envolvendo professores ou futuros professores	3
Análise de livros de didáticos	3

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Apresentamos, a seguir, uma síntese das leituras dos manuscritos. Para cada agrupamento de artigos, elaboramos um quadro contendo título, autores, ano de publicação, revista e objetivos, seguido de uma síntese de cada artigo.

No quadro 3 apresentam-se informações a respeito do agrupamento 1, *pesquisa bibliográfica*.

Quadro 3: Artigos referentes a pesquisa bibliográfica

Título	**Autores**	**Revista, ano**	**Objetivo**
Aprendizagem Docente e Desenvolvimento de Estratégias Metodológicas no Contexto do PIBID: reflexões sobre o GeoGebra como recurso para o ensino de funções	Bruna Maria Vieira Gonçalves; Francisco José de Lima	Bolema 2020	Discutir a possibilidade de (re)elaboração do ensino de Matemática, mediante uma reflexão sobre os efeitos da formação inicial, por intermédio do Pibid, no desenvolvimento da prática docente do licenciando no ensino de função.
O conceito de função na formação de professores de matemática: a importância do enriquecimento da imagem conceitual e o seu favorecimento por meio da modelação	Jerson Sandro Santos de Souza; Rogério Fernando Pires; Leandro de Oliveira Souza	Educação Matemática em Revista (RS) 2019	Apresentar reflexões sobre a importância do professor de matemática apropriar-se de um repertório mais amplo e complexo de informações e representações para o ensino da função.
Reflexões sobre o ensino de funções sob a perspectiva do enfoque ontosemiótico.	Luísa Silva Andrade; Carmen Teresa Kaiber	Educação Matemática em Revista (RS) 2013	Discutir os aspectos do processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função.

Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura	Vinícus Pazuch; Alessandro Jacques Ribeiro	Educação Matemática Pesquisa 2017	Apresenta uma revisão de literatura sobre o conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função
Dissertações brasileiras relacionadas ao ensino de função afim sob a perspectiva das teorias da Didática da Matemática	Suzana Domingues da Silva; Clélia Maria Ignatius Nogueira	Educação Matemática Pesquisa 2021	Identificar as dissertações de mestrado que se utilizaram de alguma teoria da didática da matemática como subsídios par o ensino das funções.
Mapeando o Campo Conceitual da função afim: primeiros passos	Clélia Maria Ignatius Nogueira; Veridiana Rezende	Educação Matemática Pesquisa 2019	Explicitar o Campo Conceitual das Funções.
O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica	Édrei Henrique Lourenço; Paulo César Oliveira	Educação Matemática Pesquisa 2014	Verificar os resultados alcançados sobre o conceito de função pelas dissertações e teses defendidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para cada uma das pesquisas contempladas no quadro 3, apresentamos, a seguir, uma síntese com breves discussões.

Gonçalves e Lima (2020) apresentam um estudo a respeito da (re)elaboração do ensino de Matemática mediante uma reflexão sobre os efeitos da formação inicial por intermédio do PIBID, no desenvolvimento da prática docente do licenciando. Os pesquisadores analisaram relatórios e registros sobre o PIBID no período de 2014 a 2017. A partir da pesquisa, é destacado que o estudo de função com o auxílio do software GeoGebra pode contribuir na apropriação de conhecimentos práticos e teóricos, pois o software coopera com o desenvolvimento da aprendizagem de estudantes, relativo ao conceito de função.

Souza, Pires e Souza (2019) apresentam um estudo relativo à importância de o professor se apropriar de um repertório mais amplo e complexo de informações e representações, se a intenção for propiciar um ensino de funções que favoreça a aprendizagem. Com isso, buscaram identificar, a partir de diferentes teorias, alternativas para o ensino das funções. Segundo os pesquisadores, a modelação apresentou-se como excelente alternativa, e a partir desse levantamento, foram apresentadas e discutidas as potencialidades de duas atividades de modelação, a serem trabalhadas com futuros professores de matemática. Segundo os autores, as atividades fornecem muitas possibilidades favoráveis ao estudo do conceito de função, o que garante ao estudante mais possibilidades de compreensão do conceito em questão.

Andrade e Kaiber (2013) estudaram aspectos do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função baseados nos significados institucionais destacados no componente epistêmico *linguagem*, e estabelecidos no enfoque ontossemiótico do conhecimento e a instrução matemática (EOS). As pesquisadoras apresentam atividades embasadas nesse constructo teórico na tentativa de favorecer a construção do conceito de função mediante situações-problema que potencializem o desenvolvimento de elementos linguísticos e representacionais na Matemática. Andrade e Kaiber (2013) afirmam que é possível perceber, no ensino da função, explorações de representações desse conceito, em especial a gráfica. Com isso, as autoras almejam que outros elementos linguísticos e representacionais sejam explorados no ensino da função, e que a compreensão seja ampliada a partir do desenvolvimento e articulação de diferentes formas de representação.

Pazuch e Ribeiro (2017) apresentam uma revisão de literatura a respeito do conhecimento de professores sobre o conceito de função. A pesquisa teve como objetivo investigar os conhecimentos algébricos e geométricos mobilizados por professores em relação aos processos de planejar e de ministrar aulas sobre função na Educação Básica. Para tanto, os pesquisadores realizaram um levantamento na literatura nacional e internacional de periódicos avaliados como B1, A2 e A1, nos anos de 2006 a 2015, de pesquisas que contemplaram o conhecimento profissional de professores de matemática de forma abrangente e em relação ao conceito de função. Pazuch e Ribeiro (2017) levaram em consideração três aspectos na pesquisa: os referenciais teóricos; as compreensões acerca do conhecimento profissional docente; e o que as pesquisas sobre conhecimento profissional docente comunicam a respeito do conceito de função. A partir do estudo, os pesquisadores indicaram resultados que dizem respeito à potencialidade da investigação dos conhecimentos mobilizados pelos professores em processos de formação inicial e continuada. Em relação aos referenciais teóricos, os pesquisadores citam os estudos relativos ao conhecimento pedagógico das funções; o conhecimento matemático para o ensino; as concepções desse conceito e sua natureza epistemológica; bem como a imagem conceitual e a produção de significados; dentre outros. Em relação às compreensões acerca do conhecimento profissional docente, são amplamente encontradas noções teóricas de Shulman, ao tratarem, nas pesquisas, a respeito de compreensões do conhecimento profissional do professor. No que diz respeito ao que as pesquisas comunicam sobre o conhecimento profissional docente do conceito de função, os pesquisadores elencam que são contemplados três focos de análises: questão de pesquisa ou objetivos; processos metodológicos; e resultados. Em relação à questão de pesquisa, são exploradas as compreensões do conceito pelos professores. Nos processos metodológicos, são destacados o uso de questionários, protocolos de questões, observação da prática, dentre outros. Em relação aos resultados, são destacadas construções conceituais delineadas, dificuldades nas resoluções, equívocos/erros, e lacunas nos processos de formação inicial e continuada de professores acerca do conceito de função.

A investigação de Silva e Nogueira (2021) teve como objetivo realizar um levantamento bibliográfico acerca de dissertações de mestrado que utilizaram teorias da Didática da Matemática como aporte teórico e/ou metodológico para o ensino e a aprendizagem do conceito de função afim. Foram encontradas oitenta e oito dissertações de mestrado profissional e vinte e oito relativas a mestrados acadêmicos. As análises de Silva e Nogueira (2021) foram direcionadas às quatorze dissertações de mestrado acadêmico nas quais os estudos foram sobre função afim. Dentre elas, dez utilizam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval; e quatro utilizam a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

Nogueira e Rezende (2019) relatam experiências iniciais de um estudo que tem como objetivo principal explicitar o Campo Conceitual das funções. As pesquisadoras afirmam que, para a compreensão de um conceito, são necessárias diferentes situações, diversos conceitos, símbolos, propriedades e teoremas interligados a um mesmo conceito formando um campo conceitual. Assim, baseadas na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud, as referidas autoras, juntamente com outros pesquisadores do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa, vêm desenvolvendo pesquisas com o propósito de explicitar o Campo Conceitual das Funções. Para tanto, as pesquisas desenvolvidas têm como objetivo identificar e classificar situações matemáticas presentes no Campo Conceitual das funções e conhecimentos mobilizados por sujeitos de diferentes níveis de escolaridade, ao resolverem situações-problema relacionadas ao conceito em questão. Como resultados, são apresentados registros sobre as ideias-base das funções, tais como variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização, que podem ser desenvolvidas desde os anos iniciais da Educação Básica, de maneira informal, de modo a favorecer a compreensão das funções no futuro.

Lourenço e Oliveira (2014) relatam um estudo no qual são verificados os resultados alcançados pelas dissertações e teses defendidas no Programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, que abordaram o conceito de função à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica. Assim, o referido estudo busca apresentar as contribuições que a Teoria traz frente ao ensino e à aprendizagem do conceito de função. A partir do estudo, foram encontrados dezesseis trabalhos, desenvolvidos de 2002-2011. Como resultado, os pesquisadores relatam sobre os benefícios observados referentes à aprendizagem na Educação Básica. Nos trabalhos analisados, houve preocupação com o objeto matemático aprendido. Assim, os estudos apontam que, quanto mais diversidade dos tipos de representação de um mesmo objeto matemático é apresentado aos estudantes, melhor o conhecimento é adquirido, o que se mostra eficaz para a aprendizagem do conceito de função.

As pesquisas associadas ao agrupamento 2, abordagem diferenciada para a sala de aula, são apresentadas no quadro 4.

Quadro 4: Artigos referentes a abordagens diferenciadas para o ensino de funções

Título	Autores	Revista, ano	Objetivo
Matemática em pixels: o ensino de funções aplicado a criação de filtros de imagens digitais	Gabriel Teixeira Antunes; Cinthya Maria Schneider Meneghetti	Educação Matemática em Revista (RS) 2021	Apresentar um estudo sobre manipulação de imagens digitais a partir de filtros de cor e do conceito de função afim e composição de funções.
A influência do Geogebra na resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau	André Tenório; Marcia Eliane Furtado de Oliveira; Thaís Tenório	JIEM 2015	Investigar os efeitos de empregar o Geogebra na resolução de exercícios e problemas de funções polinomiais do 1° grau
Ideias básicas de função no 9º ano do ensino fundamental: uma sequência de atividades com o auxílio do software Winplot	Karina de Oliveira Castro	Revemat 2011	Propor uma sequência de atividades que contemple ideias básicas de Função, com o auxílio do software Winplot.
Tarefas Alternativas para o ensino e aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio	Renata Meneghetti; Julyette Priscila Redling	Bolema 2012	Implementar atividades alternativas em um minicurso para a aprendizagem de funções.
Avaliação Formativa e as Sequências Didáticas: uma possibilidade para o ensino e a aprendizagem de Função Afim no 1º ano do Ensino Médio.	Luciana Vanessa Almeida Almeida Buranello; Jair Lopes Junior	Educação Matemática em revista 2017	Investigar quais são as possibilidades de realizar uma avaliação formativa quando se ensina função afim no primeiro ano do ensino médio, considerando como instrumento avaliativo uma sequência didática
O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural	José Divino Neves; Marilene Ribeiro Resende	Emp 2016	Analisar o processo ensino-aprendizagem do conceito de função nos anos finais do Ensino Fundamental
Investigação Matemática: Possibilidade para o Ensino de Função Polinomial do 1º Grau	Rosimiro Araujo do Nascimento; Marli Teresinha Quartieri	Jornal internacional de estudos em educação matemática 2020	Investigar como estudantes do 1º ano possibilitam o ensino e aprendizagem da função afim ao explorarem, de modo colaborativo, uma atividade investigativa
Aprendizagem significativa na educação de jovens e adultos: uma proposta para o ensino de função afim utilizando resolução de problemas	Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues; Lívia Ladeira Gomes; Carla Fernanda Siqueira Barreto de Freitas dos Santos; Lívia Azelman de Faria Abreu	RS 2019	Verificar se a resolução de problemas elaborados a partir da realidade de alunos da EJA contribui para uma aprendizagem significativa de função afim.

Construção do conceito de função no Ensino Fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas	Alex Sandro Gomes Leão; Vanilde Bisognin	Educação Matemática em Revista (Rio Grande do Sul) 2009	Analisar a contribuição da metodologia da resolução de problemas no estudo do conceito de função.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A seguir, apresenta-se uma síntese de cada uma das investigações do agrupamento 2. Antunes e Meneghetti (2021) relatam sobre um estudo que teve como objetivo a manipulação de imagens digitais a partir de filtros de cor. São abordados os conceitos de função afim e composição de funções, podendo ser ampliados para o estudo de noções geométricas relacionadas a esses conteúdos. Os pesquisadores apresentam uma sequência didática na qual os estudantes podem compreender sobre criação de filtros de imagens digitais a partir dos conceitos em questão e do objeto virtual de aprendizagem apresentado. Antunes e Meneghetti (2021) almejam que os estudantes possam compreender como funciona uma imagem digital, e afirmam que a proposta apresentada relaciona os conteúdos de funções necessários para a construção de conhecimentos matemáticos do aluno do Ensino Médio com o recurso de processamento digital de imagens.

Tenório, Oliveira e Tenório (2015) realizaram uma pesquisa com o objetivo de investigar uma abordagem em que foi utilizado o Geogebra na resolução de exercícios e problemas de funções polinomiais do 1º grau em escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro. Os sujeitos da pesquisa foram 59 alunos de duas turmas do 1º ano do Ensino Médio. A resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau, com e sem o uso do GeoGebra, foi analisada pelos pesquisadores. A proficiência dos alunos foi comparada na resolução de exercícios e problemas, com e sem o uso do software. Foram analisadas as percepções dos alunos sobre o GeoGebra. Os pesquisadores concluíram que, segundo as percepções dos alunos, o GeoGebra auxiliou na aprendizagem de funções e na resolução das questões propostas.

Castro (2011) relata, em sua pesquisa, os resultados de um trabalho realizado em uma disciplina de Mestrado Profissional, acerca de uma proposta para as aulas de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental relacionada ao conceito de função. Baseada em outras pesquisas, a autora elenca as ideias básicas para o conceito de função, e para o seu trabalho, ela considera três dessas ideias básicas: dependência, regularidade e generalização. Assim, para cada uma dessas ideias básicas, Castro (2011) apresenta atividades matemáticas utilizando como recurso tecnológico o Winplot, e as propõe serem implementadas em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental.

Meneghetti e Redling (2012) tiveram como objetivo analisar o potencial didático-pedagógico de tarefas matemáticas no Ensino Médio para o conteúdo de funções. No artigo, as pesquisadoras relatam a aplicação de duas tarefas matemáticas alternativas, relacionadas à investigação matemática e resolução de problemas para o ensino e aprendizagem de funções. As tarefas foram aplicadas a alunos do Ensino Médio, para que a partir dessas questões, as pesquisadoras pudessem reconhecer os principais pontos de aprendizagem do conteúdo de funções por parte desses alunos. As tarefas elaboradas foram aplicadas em um minicurso a uma classe de treze alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo. Foi verificado que a abordagem se mostrou como alternativa para o favorecimento de uma aprendizagem mais significativa para o ensino de funções, visto que permitiu o estabelecimento de uma relação entre o que os alunos já sabiam e o que lhes estava sendo apresentado.

A pesquisa de Buranello e Lopes Júnior (2017) teve como objetivo investigar quais as possibilidades de realizar uma avaliação formativa, quando se ensina função afim no primeiro ano do Ensino Médio, considerando como instrumento avaliativo uma sequência didática. Segundo os autores, a avaliação formativa promove uma aferição que esteja a serviço da aprendizagem dos alunos. Buranello e Lopes Júnior (2017) afirmam que, dos 38 sujeitos participantes da investigação, apenas 6 tinham noção do significado da palavra *função*, e concluem, a partir do estudo, que a avaliação formativa pode se concretizar por meio de uma sequência didática, possibilitando ao professor corrigir caminhos e realizar intervenções imediatas na sala de aula.

Neves e Resende (2016) apresentam os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função no 9º ano do Ensino Fundamental, bem como desenvolver o pensamento cognitivo dos estudantes sobre o conceito em questão. Para tanto, os pesquisadores contaram com uma sequência didática de três conjuntos de atividades, elaboradas, desenvolvidas e analisadas na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. As tarefas foram elaboradas de forma colaborativa com professores de matemática envolvidos em um projeto de pesquisa, e foram definidas pensando na orientação do desenvolvimento do pensamento dos estudantes sobre o tema abordado. Sendo assim, a pesquisa foi desenvolvida a partir de um experimento didático organizado em quatro etapas: levantamento bibliográfico; diagnóstico da realidade e elaboração do experimento; desenvolvimento das atividades; e análise dos dados. Foram consideradas, nas análises, falas e produções dos estudantes. Neves e Resende (2016) atribuem grande importância, no desenvolvimento da pesquisa, a mediação e intervenção do professor na organização, planejamento, incentivo, acompanhamento e orientação durante as resoluções. A partir do estudo e das respostas apresentadas, os pesquisadores relatam que existem indícios de que os alunos se apropriaram de elementos necessários na compreensão do conceito de função, e que o trabalho favoreceu a apropriação de significados e de sentidos para função.

Nascimento e Quartieri (2020) estudaram a respeito do ensino de função na 1ª série do Ensino Médio. A pesquisa teve como objetivo principal possibilitar o ensino e aprendizagem da função polinomial do 1º grau envolvendo estudantes em grupos colaborativos. Assim, os estudantes foram indagados a raciocinar a respeito do processo de ensino e de aprendizagem. A tarefa foi dividida em dois momentos: no primeiro ocorreu uma pesquisa de preço realizada em duas lojas; no segundo foi realizada a investigação em sala de aula, que contou com a participação de vinte e seis estudantes da 1ª série do Ensino Médio de um curso Técnico em Agropecuária. É destacado pelos pesquisadores que a turma ainda não havia estudado sobre o conceito de função. Os autores concluíram que, a partir do estudo, os estudantes utilizaram dos conceitos já aprendidos para compreender outro conceito matemático, o que segundo os pesquisadores, foi obtido a partir da divisão da turma em grupos colaborativos.

Rodrigues *et al.* (2019) apresentam um estudo que teve como objetivo verificar se a resolução de problemas elaborados a partir da realidade de alunos da 1ª série do Ensino Médio da Educação de Jovens Adultos (EJA) contribui com a aprendizagem do conceito de função afim. Para tanto, os pesquisadores desenvolveram uma sequência didática que foi dividida em três momentos. No primeiro, por meio de questionário e entrevista, foi traçado o perfil dos estudantes, diagnosticaram-se os conhecimentos prévios deles acerca de conteúdos matemáticos, e foi pesquisado a respeito do contexto social no qual os estudantes estão inseridos para tentar elaborar problemas que tenham sentido para eles. No segundo momento foram implementados os problemas acerca do conceito de função afim, e posteriormente houve sua formalização. Por fim, no terceiro momento, foi aplicada uma atividade de verificação na qual as etapas anteriores foram avaliadas a partir de um questionário final. Segundo Rodrigues *et al.* (2019), os resultados obtidos apontam que o ensino através de resolução de problemas atrelados às situações do cotidiano dos alunos pode contribuir de forma positiva para a construção do conceito de função afim.

Leão e Bisognin (2009) buscaram utilizar a metodologia de resolução de problemas no estudo de funções no Ensino Fundamental, baseados na Teoria de Conceito Imagem e Conceito Definição, de Tall e Vinner (1981). A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental em Itaqui, Rio Grande do Sul. Esses alunos resolveram 4 (quatro) situações problema (chamada pelos autores de Unidades de Ensino), e as resoluções foram avaliadas segundo as anotações do Diário de Campo do professor responsável pela disciplina e pela pesquisa, e pelos registros dos alunos. Ao fim, os autores relatam que a pesquisa oportunizou aos alunos a construção de diferentes imagens conceituais, e eles compreenderam o conceito de função mesmo sem a formalização matemática. Além disso, Leão e Bisognin (2009) completam que os alunos foram capazes de trabalhar com o conceito de função em diferentes situações-problema. Sendo assim, a metodologia de resolução de problemas baseado na teoria de Tall e Vinner (1981) contribuiu de forma significativa para a compreensão do conceito.

No quadro 5, apresentamos os artigos que envolveram professores ou futuros professores da Educação Básica.

Quadro 5: Artigos que envolvem professores ou futuros professores da Educação Básica

Título	**Autores**	**Revista, ano**	**Objetivo**
Como ensinar o conceito de Função?	Graça Luzia Dominguez Santos; Jonei Cerqueira Barbosa	Educação matemática em revista 2017	Apresentar uma reflexão sobre o ensino do conceito de função
Função: concepções manifestadas por um grupo de professores	Rogério Fernando Pires, Vera Merline, Sandra Magina	Educação Matemática em Revista 2015	Investigar as concepções sobre função manifestadas por um grupo de professores
Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores	Renata Rossini	Educação Matemática Pesquisa 2007	Apresentar a análise da produção de professores que construíram e aplicaram uma sequência didática na sala de aula

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Santos e Barbosa (2017) apresentam uma reflexão a respeito do ensino do conceito de função, mais especificamente formas de explicitar esse conceito. Os autores afirmam que o conceito de função é um conjunto constituído pelas diferentes formas possíveis de comunicá-lo, e identificam sete formas de comunicação: tabela; máquina de transformação; diagrama; expressão algébrica; generalização; gráfico e definição. Os pesquisadores afirmam que cada uma dessas formas possui suas especificidades e potencialidades. Com isso, a partir das escolhas de comunicação do professor, são eleitas estratégias pedagógicas mais adequadas para destacar as noções componentes do conceito em questão, que sejam importantes em cada momento do ensino.

A pesquisa de Pires, Merline e Magina (2015) foi realizada com um grupo de 14 professores de Matemática, por meio de um curso de formação de professores. A pesquisa foi feita em três etapas, e para iniciar, foi solicitado que os participantes respondessem à seguinte questão: O que é função? Depois, foi escrita no quadro a palavra *função*, e solicitado para que os participantes montassem, coletivamente, um mapa conceitual. Nesse mapa surgiram palavras como: variáveis dependente e independente, gráfico, grandeza, relações entre grandezas, domínio, imagem, plano cartesiano, entre outras. O segundo momento foi dedicado ao trabalho com atividades relacionadas ao comportamento da função, a partir do estudo de gráficos em ambiente computacional (GeoGebra). Por fim, no terceiro momento foi promovida uma discussão com a finalidade de debater sobre continuidade e descontinuidade de função. Para terminar, foi aplicada novamente a mesma questão: O que é função? Segundo os autores, os estudos permitiram analisar o material coletado e fazer uma reflexão em relação ao conteúdo analisado, permitindo compreender melhor a ação de um objeto matemático e perceber que nele não está envolvido apenas o conhecimento de um indivíduo, mas também o contexto em que esse indivíduo está inserido e as suas crenças. Foi visto, também, que as respostas dadas pelos professores estão relacionadas com as suas atuações em sala de aula. Segundo os autores do trabalho, a realização do encontro de formação pode não ter acarretado grandes alterações nas concepções que os professores traziam consigo. No entanto, eles analisam que, no segundo momento, os participantes apresentaram respostas mais concisas, as quais traziam elementos que apontaram mais de um tipo de concepção.

A pesquisa de Rossini (2007) teve por objetivo apresentar uma análise da produção de professores da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, participantes de um projeto de formação continuada. Os sujeitos dessa pesquisa foram dez professores de escolas públicas de São Paulo e uma acadêmica do curso de Matemática, que foram divididos em três grupos. Primeiramente, os grupos analisaram livros didáticos; depois indicaram, entre seus integrantes, o que achavam importante na introdução do conceito de função na sala de aula. A partir disso, foi-se moldando cada um desses exercícios escolhidos até que chegassem a um ponto em que concordassem na exatidão do problema. Para Rossini (2007), com a pesquisa, foi possível expor os pontos importantes das dificuldades docentes, as superações em termos de tarefas, técnicas e discurso de cunho tecnológico. O árduo trabalho dos professores com o escrever e reescrever enunciados e tarefas, a superação de angústias e dúvidas levou os autores da pesquisa a uma reflexão, como formadores de professores, sobre o ensino/aprendizagem de função.

No quadro 6, apresentamos os artigos que tratavam sobre a análise de livros didáticos.

Quadro 6: Artigos referentes a análise de livros didáticos

Título	Autores	Revista, ano	Objetivo
O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a Educação Matemática crítica: uma análise dos conceitos de função e funções polinomiais do 1º e 2º graus no livro didático mais adotado no PNLD 2015	Elenilton Vieira Godoy; Cecy Leite Alves Carreta	Educação matemática em Revista (SP) 2018	Verificar se as exigências presentes no Edital 2013 do Programa Nacional do Livro Didático contemplam ideias da tendência teórica Educação Matemática Crítica e apresentar os resultados da análise feita com o livro do 1º ano do Ensino Médio mais vendido no último PNLD
Uma Análise de Problemas de Função Afim Fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais	Clarice de Almeida Miranda; Veridiana Rezende; Clélia Maria Ignatius Nogueira	Jornal internacional de estudos em educação matemática 2021	analisar estruturas de problemas de função afim e estabelecer sua classificação.
Registros de representação semiótica da função afim: análise de livros didáticos de matemática no ensino médio	Deise Pedroso Maggio; Maria Arlita da Silveira Soares; Cátia Maria Nehring	REVEMAT 2010	Analisar livros didáticos de Matemática, referente à função afim, sob a luz da teoria dos Registros de Representação

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os autores Godoy e Carreta (2018) apresentam um recorte da dissertação de um dos autores, que teve como objetivo verificar se as exigências presentes no edital 2013 do Programa Nacional do Livro Didático contemplam ideias da tendência teórica Educação Matemática Crítica, bem como analisar se as mesmas ideias estão presentes em um livro didático da 1ª série do Ensino Médio, o mais vendido na época. O estudo foi voltado aos conceitos de função e funções polinomiais do primeiro e do segundo grau. Os pesquisadores, a partir das análises realizadas, indicam que foram encontrados números insatisfatórios de propostas que contribuam para o desenvolvimento da Educação Matemática Crítica no livro da 1ª série do Ensino Médio.

Miranda, Rezende e Nogueira (2021) apresentam um estudo relativo à análise das estruturas de problemas de função afim inseridos em um livro didático destinado à 1ª série do Ensino Médio. As análises das situações foram realizadas com base na Teoria dos Campos Conceituais. A partir dos estudos, foi concluído que os problemas de função afim podem ser classificados como problemas mistos, os quais envolvem as estruturas aditivas e multiplicativas. Apesar de haver problemas parecidos e que podem ser classificados pela mesma classe, pode haver variações quanto à estrutura de cada problema, e isso pode indicar um nível de dificuldade mais elevado. Por meio desse artigo, as pesquisadoras apresentam um pouco das ideias do GEPeDiMa, grupo do qual a proponente deste trabalho também faz parte e que tem como principal objetivo o mapeamento do campo conceitual das funções. Com isso, Miranda, Rezende e Nogueira (2021) mostram que é possível estabelecer uma classificação para problemas de função afim, e que a partir dessas classificações é possível ter ciência e selecionar diferentes situações com variação nas estruturas dos enunciados, possibilitando aos estudantes melhor compreensão do conceito em questão.

Maggio, Soares e Nehring (2010) apresentam um estudo de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, no que concerne aos diferentes registros de representação semiótica propostos por Duval, e o conceito de função afim. Esse estudo é decorrente de um trabalho realizado em uma disciplina de Estágio de um curso de Matemática. As autoras concluem o trabalho destacando as diferenças existentes entre as duas obras analisadas, no que diz respeito aos registros de representação semiótica.

As pesquisas de Rossini (2007), Maggio, Soares e Nehring (2010), Castro (2011), Meneghetti e Redling (2012), e de Pires, Merline e Magina (2015) mostram que alunos do Ensino Médio, acadêmicos e professores de Matemática possuem dificuldades em relação ao conceito de função afim, e detalham sobre a história da matemática, ideias básicas e jogos no ensino desse conceito como auxiliadores no ensino da função afim, não aparecendo, portanto, dados relacionados a problemas mistos.

A partir das pesquisas em periódicos científicos e dos estudos que foram apresentados nesta subseção, referentes aos artigos encontrados, observamos dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização (MENEGHETTI; REDLING, 2012; BURANELLO; LOPES JÚNIOR, 2017; NEVES; RESENDE, 2016), e de professores da Educação Básica (PIRES; MERLINE; MAGINA, 2015; ROSSINI, 2007) em relação ao conceito de função afim. Destacamos que foram encontrados apenas três artigos que tratam do conceito de função com base na Teoria dos Campos Conceituais, sendo os referidos artigos produzidos por participantes do GEPeDiMa, grupo do qual fazemos parte, mas nenhuma das pesquisas encontradas está relacionada ao Ensino Médio. Também não foram identificados artigos relativos às diferentes classes de problemas mistos relacionados ao conceito de função afim para serem resolvidos com estudantes do Ensino Médio.

Diante do exposto até aqui, afirmamos a respeito da necessidade da realização de estudos relacionados às estruturas de problemas de função afim. Assim, justificamos que a presente investigação se difere das demais elencadas, pois em nossas buscas e estudos relacionados ao conceito de função afim, não identificamos pesquisas com o objetivo de *analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, intervém na resolução de estudantes do Ensino Médio.*

Ainda, o objetivo desta investigação foi determinado a partir do estudo de outras pesquisas, conforme citado anteriormente, (MENEGHETTI; REDLING, 2012; BURANELLO; LOPES JÚNIOR, 2017; NEVES; RESENDE, 2016), nas quais foram observadas dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização a respeito do conceito de função.

Apresentamos, a seguir, no Capítulo 2, de forma detalhada, o embasamento teórico do desenvolvimento desta pesquisa, a Teoria dos Campos Conceituais idealizada por Gérard Vergnaud.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados os principais elementos da teoria que sustenta o desenvolvimento desta pesquisa, a Teoria dos Campos Conceituais. Também contém uma síntese das principais ideias, como campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas, problemas mistos, bem como a classe de problemas mistos utilizada na pesquisa.

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida por Gérard Vergnaud, nasceu na década de 1980, com a finalidade de explicar o processo da conceitualização das estruturas aditivas, multiplicativas, das relações espaço-número, da álgebra e, portanto, é parte do campo da Educação Matemática. Contudo, no que se refere a compreender os processos cognitivos no decorrer do desenvolvimento de um sujeito, ela tem contribuído com os mais variados campos científicos, tais como Física, Biologia, Psicologia, dentre outros.

A Teoria dos Campos Conceituais é caracterizada principalmente por ser uma teoria cognitivista, e por meio dela é possível compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos. Vergnaud (1993) enfatiza que a teoria busca propiciar uma estrutura coerente e princípios necessários no estudo do desenvolvimento e da aprendizagem. Segundo Vergnaud (1998), a compreensão de um conceito é um processo de longo prazo, e diz respeito a todos os domínios do conhecimento, mas a gestão desse processo é especialmente difícil na Matemática, pois implica uma grande variedade de situações, procedimentos e símbolos. Para Vergnaud (1996a), a TCC não é uma teoria específica da Matemática, mas surgiu da necessidade de explicar as estruturas aditivas e estruturas multiplicativas da álgebra.

Segundo Vergnaud (1996a), quando o interesse é a aprendizagem de um sujeito, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, e para um conceito fazer sentido para um sujeito, ele só pode ser adquirido por meio de situações-problema, que podem ser práticas ou teóricas. Vergnaud (1996a) relata que é possível distinguir duas classes de situações vivenciadas por um estudante no processo de aprendizagem: a primeira diz respeito ao conhecimento que esse sujeito já possui para a realização de uma atividade; e a segunda trata do conhecimento que ele não possui, e que é preciso para a resolução. Na segunda classe de situação, se fazem necessárias reflexões e estudos quando se busca o conhecimento.

Nas resoluções de atividades matemáticas, será necessário que o estudante utilize uma dessas classes, ou ambas, além de precisar organizar seus esquemas em suas resoluções. Para o pesquisador, "esquema é uma organização invariável de atividade para uma dada classe de situações" (VERGNAUD, 2011, p. 43)[1].

Vergnaud (2011) enfatiza que, nos esquemas, a organização é invariável, não o comportamento do estudante: mesmo que existam ações relativamente estereotipadas, não há uma imagem padronizada comportamental. Para Vergnaud (1996a), um esquema é sempre universal, pois está associado a uma classe de situação, e ela geralmente não está acabada. Sendo assim, um esquema é uma forma organizada que expressa o conhecimento do estudante em determinada classe de situação. Ele não organiza apenas o comportamento observável de um estudante, mas também a atividade dos pensamentos que não se manifestam de forma explícita.

Para Vergnaud (1993), os esquemas interessam às duas classes de situações, mas de forma diferente em cada uma delas, pois não funciona de forma idêntica nas duas classes vivenciadas durante o estudo de um conceito. Na classe em que o estudante possui o conhecimento necessário, pode-se observar condutas automatizadas, quando troca um membro de lado da igualdade muda o sinal, isolar uma incógnita de um lado da igualdade, por exemplo, que necessitam de apenas um esquema. Na classe que são necessárias reflexões e que o estudante precisa buscar novos conhecimentos, observa-se a utilização de um maior número de esquemas, e esses são manipulados de forma abrangente pelo estudante, são analisados, organizados e combinados entre si. Essas manipulações são necessárias para que ocorra a aprendizagem, pois para Vergnaud (1993), os esquemas devem ser acomodados, descombinados e recombinados, porque é disso que se originam novas descobertas.

Ainda para Vergnaud (1993), a automatização vista na primeira classe de situação deixa clara a disposição invariante das ações presentes nos esquemas, mas uma organização invariante também pode vir acompanhada de decisões conscientes. A automatização não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é ou não apropriada. Com isso, Vergnaud (1993) menciona que os esquemas são vistos com mais facilidade na primeira classe de situação, já que o sujeito possui as competências necessárias. Porém, mesmo sendo menos na segunda classe que existe uma hesitação, possivelmente muitas

---

[1] « Le schème est une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations donnée » (VERGNAUD, 2011, p. 43).

tentativas ainda podem ser observadas nos esquemas, seja após o êxito, ou por meio dos comportamentos durante a situação.

Vergnaud (1996a) afirma que, nos esquemas, estão presentes os conhecimentos dos estudantes e os elementos cognitivos que permitem que a ação de um sujeito seja operatória; além disso, as competências matemáticas são sustentadas pelos esquemas. Segundo Vergnaud (1998), os professores são mediadores, devem auxiliar os estudantes a desenvolver seu repertório de esquemas e representações, e proporcionar a eles situações frutíferas. Essa mediação pode ser com ou sem o uso da fala, como por exemplo, as expressões faciais e gestos do professor, "ao desenvolver seus esquemas, os estudantes se tornam capazes de enfrentar situações cada vez mais complexas" (VERGNAUD, 1998, p.181).

Para Vergnaud (1996a), o esquema, por possuir propriedades específicas de organização da ação do sujeito em uma classe de situações, é um conceito fundamental da psicologia cognitiva e da didática. Para Vergnaud (1996b), os algoritmos são esquemas, pois são uma forma de organização de uma atividade, mas se trata de uma pequena parte dos esquemas. Para Vergnaud (1996a; 2011), um esquema é formado por quatro componentes:

1. uma meta, submetas e expectativas - são ideias essenciais, antecipações do objetivo que se referem aos procedimentos traçados ao iniciar a resolução das situações e aos efeitos esperados;
2. regras de ação, obtenção e controle de informações - essas regras constituem a parte geradora do esquema, as ações do sujeito, mas não somente, também levam as informações necessárias para a atividade, permitem garantir que o sujeito fez o que pensou;
3. invariantes operatórios - conceitos em ação e teoremas em ação. Contém os conhecimentos implícitos ou explícitos; os conceitos em ação permitem tirar as informações relevantes do ambiente e selecionar os teoremas em ação necessários;
4. possibilidade de inferência na situação que permitem *calcular* as regras e antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios de que dispõe o sujeito.

Vergnaud (2011) afirma que um indivíduo possui vários tipos de conhecimento, e os utiliza para identificar objetos e seus relacionamentos, e a partir de então, estabelecer metas e regras para que seus pensamentos, ações, manipulações sejam relevantes. Esse conhecimento é o conhecimento em ação, que Vergnaud (2011) designa pelo termo *invariantes operatórios*. O autor indica que esses conhecimentos não são necessariamente explícitos ou explicáveis, nem mesmo conscientes, em algumas vezes, pelo sujeito. O pesquisador afirma que o conceito de invariante operatório permite “[...] falar em mesmos termos sobre a identificação de objetos e suas propriedades pela percepção e interpretação de informações em situações nas quais há espaço para incerteza, hipótese e raciocínio que se relaciona com objetos complexos” (VERGNAUD, 2011, p. 45)[1].

Para Vergnaud (1996a), existem três tipos lógicos de invariantes operatórios:

1. Proposição, que pode ser verdadeira ou falsa.

Vergnaud (1996a) apresenta dois exemplos de proposição: entre os 5 e os 7 anos, as crianças descobrem que não é necessário voltar a contar tudo para encontrar o cardinal AUB se já obtiveram um resultado para A e B. Assim sendo, percebem que é possível explicitar esse conhecimento através de um teorema em ação:

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (A) + \text{Card } (B)$$

$$\text{desde que } A \cap B = \emptyset$$

Para Vergnaud (1996a), a ausência de quantificador indica que a propriedade não se aplica a todos os elementos, que esse teorema não tem uma validade universal, e apenas uma eficiência local. Segundo exemplo: entre 8 e 10 anos, os estudantes compreendem que, na venda de algum produto, se a quantidade desse produto for multiplicada por 2, por 3, por 10, por 100, o seu preço será 2, 3, 10 ou 100 vezes superior. Esse conhecimento pode ser expresso através de um teorema em ação:

$$f(nx) = nf(x), n, x \in \mathbb{Z}_+$$

2. Função proposicional, não existe a possibilidade de ser verdadeira ou falsa, mas é necessária na construção das proposições.

Para Vergnaud (1996a), a relação entre proposição e função proposicional é dialética, não há uma sem outra. Conceitos como o de cardinal, transformação, estado inicial, dentre outros, são raramente explicitados pelos estudantes. Embora se utilizem deles em suas ações, Vergnaud (1996a) os denomina como conceitos em ação. Um conceito em ação é diferente de um teorema em ação, pois os teoremas em ação são funções proposicionais, enquanto um conceito em ação é algo útil no momento. Vergnaud (1996b) afirma que um teorema em ação pode ser verdadeiro ou falso; enquanto um conceito em ação, não: ele é apenas pertinente ou não nas resoluções de um estudante. Para Magina *et al.* (2008), são relações matemáticas que

[1] « [...] de parler dans les mêmes termes à la fois de l’identification des objets et de leurs propriétés par la perception, de l’interprétation des informations dans les situations où il y a place pour l’incertitude et l’hypothèse, et des raisonnements qui portent sur des objets complexes » (VERGNAUD, 2011, p. 45).

os estudantes levam em consideração quando escolhem uma operação para uma resolução. Eles são teoremas no sentido convencional, e a maioria deles são utilizados de forma implícita: “[...]seu âmbito de validade é normalmente menor que o âmbito dos teoremas. Algumas vezes, seu domínio de validade é considerado verdadeiro apenas para um conjunto de problemas, podem até mesmo ser utilizados de modo errado” (MAGINA *et al.,* 2008, p. 16)

3. Argumentos, para Vergnaud (1996a) podem ser objetos materiais, personagens, números, relações, e até mesmo proposições. Para o pesquisador, “[..] quem fala em função proposicional e proposição, fala em argumento” (VERGNAUD, 1996a, p. 164).

Vergnaud (1996a) enfatiza que, nas funções proposicionais, existem:

- funções com um argumento - as propriedades, por exemplo, “é azul”;
- com dois argumentos - relações binárias, por exemplo, “... está à direita de ...”;
- com três argumentos - ternárias, por exemplo, “... está entre ... e ...”;
- com quatro argumentos - as quaternárias, por exemplo, “... está para ... assim como ... está para ...” (VERGNAUD, 1996a, p. 164, *passim*).

Para Vergnaud (2007), é por meio do conceito de invariante operatório que é possível identificar um objeto e compreender suas propriedades. Por meio dessa identificação, o estudante pode observar o que é verdadeiro, falso, objetivo ou subjetivo. Vergnaud (2007) afirma que, mesmo que várias pessoas tenham diante dos olhos, no caso da Matemática, um conceito, ele pode ter diferentes significados para cada um. Para o pesquisador, somos levados a dar um lugar de importância para objetos sobre os quais não temos informações além das provenientes da percepção: “os conceitos de número, quantidade, transformação geométrica, de compartimentação e produção de dimensões, todos representam um salto em relação à percepção, sem imaginação não haveria ciência” (VERGNAUD, 2007, p. 11).

Segundo Vergnaud (2007), a possibilidade de as crianças construírem objetos de pensamento hipotéticos e obter algo coerente entre as propriedades da ação e as informações obtidas de situações muito distantes da percepção é uma construção delicada. O professor precisa selecionar situações que auxiliem o estudante na seleção de informações e inferências pertinentes, e isso gera a formação de esquemas e invariantes operatórios. Vergnaud (1998) afirma que as crianças possuem conhecimento intuitivo sobre espaço, quantidade, relação de ordem e características, mas a intuição deve ser analisada, pois não há como reduzir o conhecimento matemático a qualquer outro quadro conceitual. Para isso, o pesquisador utiliza dois conceitos principais, os de teorema em ação e conceito em ação, que são invariantes operatórios, e os coloca como componentes essenciais dos esquemas.

Para Vergnaud (1998), conceitos em ação podem ou não ser pertinentes em uma situação: “[...] os conceitos em ação permitem retirar do meio informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo (VERGNAUD, 2009b, p. 22).

Um teorema em ação pode ser verdadeiro ou falso, é uma proposição tida como verdadeira na ação do sujeito (VERGNAUD, 2009b), e pode ser localmente verdadeiro. Magina *et al.* (2008) mencionam que os teoremas em ação são um caminho para que professores e pesquisadores possam analisar as estratégias intuitivas dos estudantes para, assim, poder auxiliá-los a transformar em conhecimentos explícitos. Para Vergnaud (1998), há uma relação dialética entre conceitos em ação e teoremas em ação, pois “conceitos são ingredientes de teoremas, e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seu conteúdo” (VERGNAUD, 1998, p. 174).

Um conceito é tão importante na TCC que Vergnaud (2009b) apresenta uma definição do ponto de vista psicológico. Para Vergnaud (2009b), um conceito pode ser definido como uma terna de três conjuntos diferentes, (S, I, R), sendo:

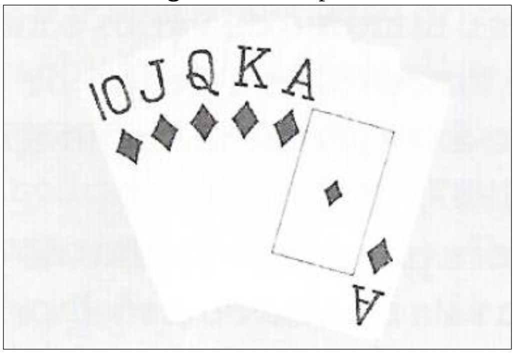
- S, a realidade, o conjunto de situações que dão sentido ao conceito: “[...] tornam o conceito significativo” (MAGINA, *et al.*, 2008, p. 7);
- I, representações, “conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações” (MAGINA, *et al.*, 2008, p. 7);
- R, significante, “conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráficas...) que permitem representar os conceitos e suas relações, e consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam” (VERGNAUD, 2009b, p. 29).

Vergnaud (2009a) afirma que um conceito é parte essencial do conhecimento, mas não somente. O conhecimento consiste, para além dos conceitos, significados, significantes, símbolos e noções que “refletem ao mesmo tempo o mundo material e a atividade do sujeito nesse mundo material” (VERGNAUD, 2009a, p. 19).

Para Vergnaud (2009b), os invariantes operatórios são representados por meio de significantes que, como citado anteriormente, são as representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos, suas relações, as situações e os esquemas que elas evocam. A representação, tão utilizada na Matemática, para Vergnaud (2009a), é uma noção que não se reduz a símbolos ou signos, visto que a representação de um número por meio da escrita é distinta do número em si.

Segundo Magina *et al.* (2008), a representação é a interação entre o significado (I) e o significante (R), e compreender essa interação não é simples, nem ocorre espontaneamente: precisa de muito esforço do professor e do estudante. Magina *et al.* (2008) apresentam um exemplo para diferenciar a representação (R, I) e a realidade (S) utilizando os números naturais.

Figura 3: Exemplo 1



Fonte: Magina *et al.* (2008, p. 9).

As autoras formulam questões como as seguintes: “quantas cartas estão representadas? 5, ou V? Em termos matemáticos, o que significa 5? E V?” (MAGINA, *et al.*, 2008, p. 9). A partir desse exemplo, é possível diferenciar a representação da realidade, no caso, tem-se duas formas de representar uma mesma ideia do número cinco (significado). Assim, para Magina *et al.* (2008), é possível observar dois signos (dois significantes) que representam uma mesma ideia (significado); no caso, o número cinco para representar a quantidade de cartas (S-referente).

Para Vergnaud (1993), no estudo do desenvolvimento e funcionamento de um conceito, durante a aprendizagem ou na utilização desse conceito, é preciso considerar esses três planos (significantes, significado e referente) ao mesmo tempo. “Geralmente não há bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações. Não se pode, pois, reduzir o significado aos significantes nem às situações” (VERGNAUD, 1993, p. 9).

Vergnaud (1993) utiliza o conceito de situação com o sentido de tarefa: “a ideia é que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas” (VERGNAUD, 1993, p. 9).

Vergnaud (2009b) estuda um conjunto de situações e de conceitos interligados, denominado campo conceitual. Para o pesquisador, um conceito não pode ser examinado e apreendido isoladamente, pois são necessárias diversas situações vivenciadas ao longo de todo o período escolar para que o estudante possa compreendê-lo. Para Magina *et al.* (2008), a compreensão de um conceito não emerge apenas de uma situação, assim como uma única situação sempre envolve outros conceitos.

Apresentamos, a seguir, as situações que compõem o Campo Conceitual das estruturas aditivas, uma vez que tal Campo Conceitual é requisito para a compreensão dos problemas mistos, que constituem o instrumento da presente pesquisa.

2.2 Campo Conceitual das estruturas aditivas

Vergnaud realizou um estudo exaustivo em relação aos problemas dos campos aditivo e multiplicativo. Por problemas de tipo aditivo, entende-se aqueles cuja solução exige tão somente adições, subtrações ou uma combinação entre elas, além dos conceitos e teoremas que possibilitam a resolução e análise de tais situações. Para Vergnaud (2009a), existem vários tipos de relações aditivas, e a dificuldade em cada tipo de relação é distinta, por isso a importância de diversificar as situações e suas relações ao serem propostas aos estudantes.

Magina *et al.* (2008) citam que, para um estudante dominar as estruturas aditivas, ele precisa ser capaz de resolver diversos tipos de situações-problema, não basta apenas saber operar por meio de cálculos e algoritmos. Para Vergnaud (2009a), em cada classe de problemas, é possível ocorrer variações que podem tornar um problema tanto mais fácil quanto mais complexo.

Vergnaud (2009a) elenca seis categorias de estruturas aditivas:

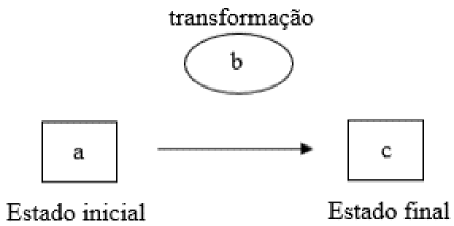
- comparação de medidas - uma relação liga duas medidas;
- composição de medidas - duas medidas compõem-se para resultar em uma terceira medida;
- composição de duas transformações - duas transformações compõem-se para resultar em uma transformação;
- composição de duas relações - dois estados relativos (relações) compõem-se para resultar em um estado relativo.
- transformação de medidas - uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida; e
- transformação de uma relação - uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo.

Nas estruturas aditivas, segundo Magina *et al.* (2008), existem três grupos básicos de problemas: comparação, composição e transformação. Os problemas de comparação são aqueles "[...] que comparam duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido" (MAGINA *et al.*, 2008, p. 26).

Os tipos de composição "compreende as situações que envolvem parte-todo – juntar uma parte com outra parte para obter o todo, ou subtrair uma parte do todo para obter outra parte" (MAGINA *et al.*, 2008, p. 25).

Os problemas de transformação "tratam de situações em que a ideia temporal está envolvida, no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma (com perda/ganho; acréscimo/decréscimo etc.), chegando ao estado final com outra quantidade" (MAGINA *et al.*, 2008, p. 26).

Explicitamos, a seguir, a categoria transformação de medidas, por ser a classe que contemplamos nesta pesquisa. Na transformação de medidas, uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra. Vergnaud (2009a) representa essa categoria pelo seguinte esquema sagital:



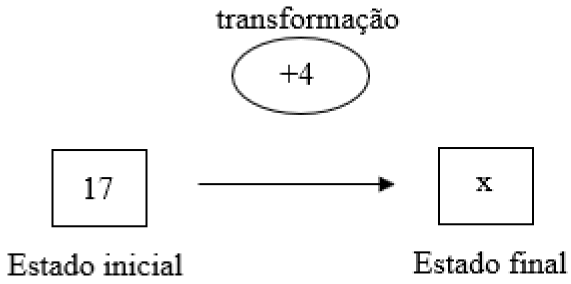
Para a transformação de medidas, Vergnaud (2009a) apresenta seis classes de problemas, conforme sintetizadas no quadro abaixo.

Quadro 7: Variações de problemas da categoria transformação de medidas

com a transformação $b > 0$	Se pergunta o estado final (c), conhecendo o estado inicial (a) e a transformação (b) (exemplo 2.4)	Se pergunta a transformação (b), conhecendo o estado inicial (a) e o estado final (c) (exemplo 2.5)	Se pergunta o estado inicial (a), conhecendo a transformação (b) e o estado final (c) (exemplo 2.6)
com a transformação $b < 0$	Se pergunta o estado final (c), conhecendo o estado inicial (a) e a transformação (b) (exemplo 2.7)	Se pergunta a transformação (b), conhecendo o estado inicial (a) e o estado final (c) (exemplo 2.8)	Se pergunta o estado inicial (a), conhecendo a transformação (b) e o estado final (c) (exemplo 2.9)

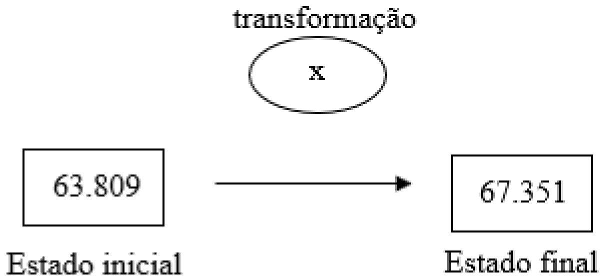
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para a primeira classe de problemas na qual se pergunta o estado final (c), conhecendo o estado inicial (a) e a transformação positiva (b), Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: “Havia 17 pessoas dentro de um ônibus, subiram 4. Quantas pessoas estão ali dentro agora?” (VERGNAUD, 2009a, p. 208).



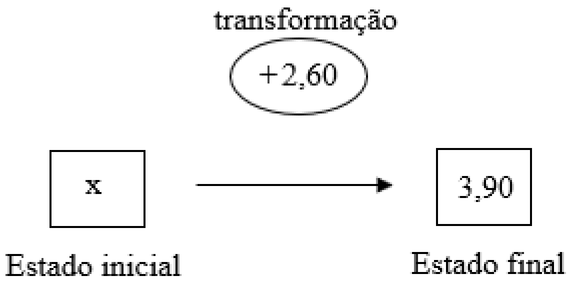
Vergnaud (2009a) afirma que o cálculo neste exemplo é simples, pois se aplica uma transformação direta ao estado inicial, a transformação no caso, é uma adição sempre possível.

Para a segunda classe de problemas, na qual se pergunta a transformação positiva (b), conhecendo o estado inicial (a) e o estado final (c), Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: “Um paulistano viaja de carro em férias. Ao sair de São Paulo seu velocímetro marca 63.809 km; na volta marca 67.351 km. Quantos quilômetros ele percorreu durante as férias?” (VERGNAUD, 2009a, p. 208).



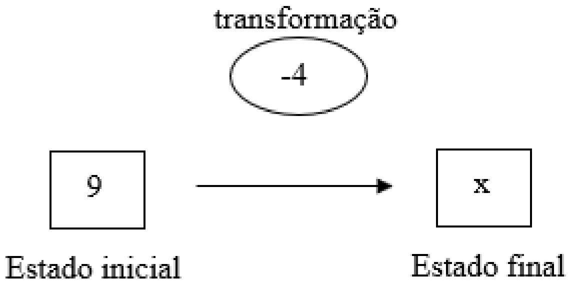
Para Vergnaud (2009a) este é um cálculo mais complexo pois a transformação não é obtida tão rapidamente quanto o estado final do exemplo anterior, ainda, o valor de x no caso, é um valor relacional, pois o estudante, pensando em relação ao estado inicial, obtém o final por uma adição, enquanto se pensar a partir do estado final obtém o inicial por meio de uma subtração, a diferença, consiste em buscar a subtração entre os estados inicial e final.

Para a terceira classe de problemas, na qual se pergunta o estado inicial (a), conhecendo a transformação positiva (b), e o estado final (c) Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: “Henrique acaba de achar R$ 2,60 na calçada. Ele os colocou no seu moedeiro. Ele tem agora, em tudo R$ 3,90. Quanto dinheiro ele tinha em seu moedeiro antes do achado?” (VERGNAUD, 2009a, p. 208).



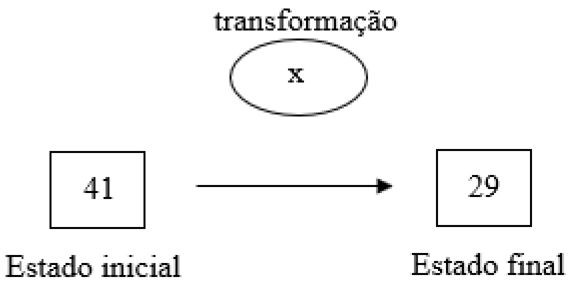
Neste tipo, temos que encontrar o estado inicial, utilizando a transformação e o estado final, Vergnaud (2009a) afirma que ocorrem muitos erros e tentativas, pois necessita de uma inversão da transformação dada, isto quando se busca uma resolução canônica (válida em todos os casos possíveis), porém, pode ser que os estudantes busquem alternativas nas quais pode haver apenas uma validade local.

Para a quarta classe de problemas, na qual se pergunta o estado final (c), conhecendo o estado inicial (a) e a transformação negativa (b) Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: “João tem 9 balas. Ele deu 4 para sua irmãzinha. Com quantas ele ficou?” (VERGNAUD, 2009a, p. 208).



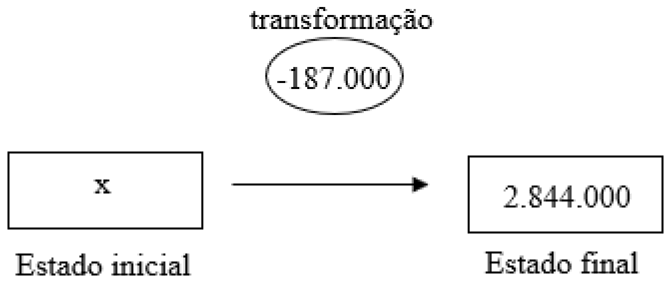
Vergnaud (2009a) afirma que o cálculo neste exemplo é simples, pois se aplica uma transformação direta ao estado inicial, a transformação direta é uma subtração. Para o autor, a subtração não deve ser definida como a inversa da adição pois tem significado próprio.

Em relação a quinta classe de problemas, na qual se pergunta a transformação negativa (b), conhecendo o estado inicial (a) e o estado final (c) Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: “Paulo acabou agora um jogo de bolinhas de gude. Ele tinha 41 bolinhas antes de jogar. E agora ele tem 29. Quantas bolinhas ele perdeu?” (VERGNAUD, 2009a, p. 208).



Para Vergnaud (2009a), assim como no exemplo anterior, este também é um cálculo mais complexo, e há dois tipos de ação possíveis, “complemento” ou “diferença”, no primeiro, há a busca, sem efetuar a subtração, para isso se acrescenta/retira do estado inicial para chegar ao final, o segundo, consiste em buscar pela subtração entre os estados inicial e final o valor da transformação, este, supõe um cálculo mais elaborado, enquanto o primeiro, utiliza-se de um cálculo mental.

Para a sexta classe de problemas, na qual se pergunta o estado inicial (a), conhecendo a transformação negativa (b), e o estado final (c) Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: “Em 1974, a população de Paris era de 2.844.000 habitantes. Em cinco anos a cidade havia perdido 187.000 habitantes. Quantos habitantes Paris tinha em 1969?” (VERGNAUD, 2009a, p. 209).



Nesse tipo de classe, Vergnaud (2009a) afirma que é preciso uma inversão da transformação, que se apresenta negativa, para obter o estado inicial. Isso pode parecer simples ao leitor, mas segundo Vergnaud (2009a), é algo muito complexo.

Assim sendo, Vergnaud (2009a) mostra que a complexidade dos problemas do tipo aditivo varia, além de outros fatores, em função das diferentes classes de problemas de uma mesma categoria. Para o pesquisador, a dificuldade desigual dos problemas advém das categorias, das classes e de outros fatores, como por exemplo, se a atividade requer um cálculo mais simples, mais complexo, ou até mesmo a ordem e apresentação das informações.

Os estudos de Magina *et al.* (2008) vão ao encontro dos estudos de Vergnaud, e mostram como essas variações são necessárias em sala de aula para que os estudantes busquem resoluções pertinentes, e não apenas algo robótico. Com isso, para Vergnaud (2009a), visto que um problema pode necessitar de muitas outras situações e diversos estudos para obter a resolução, não é de espantar que os estudantes busquem soluções não canônicas. Isso é importante, essas buscas podem ser úteis, pois com a atenção e abordagens do professor, os estudantes “preparam a descoberta de soluções canônicas” (VERGNAUD, 2009a, p. 211). Para isso, o professor precisa estar atento às resoluções dos estudantes e aos seus questionamentos, para não invalidar as resoluções diferentes e rejeitá-las. Por meio das resoluções é que o professor tem a possibilidade de entender, visualizar o que o estudante aprendeu ou não.

A seguir, apresentamos o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas, os problemas mistos, dos quais é constituído o instrumento de pesquisa desta investigação, e são compostos pela junção das estruturas multiplicativas com as estruturas aditivas.

2.3 Campo Conceitual das estruturas multiplicativas

Por problemas de tipo multiplicativos entende-se aqueles cuja solução envolve uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação entre elas. Vergnaud (1983) afirma que as estruturas multiplicativas possuem uma organização intrínseca própria que não é redutível a aspectos aditivos, mas dependem parcialmente das estruturas aditivas. O pesquisador cita que multiplicação, divisão, fração, razão, número racional, função linear e não linear, análise dimensional e espaço vetorial não são independentes entre si e estão presentes nos primeiros problemas que os estudantes conhecem.

Para Vergnaud (2009a), as estruturas multiplicativas, além de estarem em conjuntos de composições numéricas (multiplicações, divisões, regras de três simples e composta etc.), também estão em composições sobre dimensões. Essas dimensões permitem "elucidar completamente as relações presentes em uma multiplicação e mostrar, desse modo, que a multiplicação a mais simples coloca, de fato, em jogo um cálculo relacional que envolve quatro quantidades e vários tipos de operações" (VERGNAUD, 2009a, p. 246).

Gitirana *et al.* (2014) afirmam que, ao trabalhar multiplicação e adição em sala de aula, é comum que seja ensinado ao estudante que multiplicar é o mesmo que somar repetidas vezes. Há uma continuidade entre adição e multiplicação, mas em relação aos significados, existe uma descontinuidade entre os problemas de adição e de multiplicação. Para as autoras, é preciso um olhar atento para esse tipo de pensamento, pois "[...] olhar a multiplicação como adição repetida pode causar uma barreira na própria comutatividade da multiplicação" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 25).

Para Gitirana *et al.* (2014), é importante enfatizar a multiplicação como uma relação quaternária, com uso das propriedades de proporcionalidade e multiplicação por um escalar (a razão). Em uma relação quaternária, há correspondência entre quatro medidas: duas a duas de mesma espécie, sendo três medidas conhecidas e uma desconhecida.

Para Vergnaud (1983; 1996a), os problemas do tipo multiplicativos podem ser classificados em cinco classes:

- comparação multiplicativa;
- isomorfismo de medidas (ou proporção simples);
- produto cartesiano;
- função bilinear; e
- proporcionalidade múltipla.

Como nesta pesquisa utilizamos a classe isomorfismo de medidas (ou proporção simples), explicitamos sobre ela a seguir.

Para Vergnaud (2009a), a proporção simples coloca em jogo quatro quantidades, e nos problemas mais simples, uma dessas quantidades será sempre igual a um. Há três grandes classes de problemas, que variam conforme estejam dispostos os dados: multiplicação; divisão - busca do valor unitário; e divisão - busca da quantidade de unidades.

Quadro 8: Classes de problemas

Multiplicação	$1 \longrightarrow a$ $b \longrightarrow x$
Divisão: busca do valor unitário	$1 \longrightarrow x$ $b \longrightarrow c$
Divisão: busca da quantidade de unidades	$1 \longrightarrow a$ $x \longrightarrow c$

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009a).

Para Vergnaud (2009a), cada uma das cinco classes de problemas do tipo multiplicativo se subdivide em numerosas subclasses, nas quais há diversidade de dificuldades por parte dos estudantes. Como exemplos, podemos observar: quando trata de números inteiros e pequenos ou números inteiros grandes; e quando envolvem números decimais que sejam inferiores a um ou superiores. Estes últimos, segundo Vergnaud (2009a), são difíceis para maior parte dos estudantes.

A classe de problemas de proporção simples pode ser subdividida em quatro tipos: multiplicação um para muitos; partição ou distribuição; cota; e quarta proporcional, que variam de acordo com a medida desconhecida.

Na classe de problemas proporção simples do tipo multiplicação um para muitos, o valor unitário é conhecido e deseja-se encontrar o valor da segunda grandeza de mesma espécie. Apresentamos, a seguir, um exemplo desse tipo de problema: "Minha mãe quer comprar tecido a R$24,80 o metro para fazer um vestido e um paletó. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar?" (VERGNAUD, 2009a, p. 239).

Quadro 9: Esquema de correspondência do tipo multiplicação um para muitos

Metros	Reais
1 →	24,80
3,50 →	x

Fonte: Vergnaud (2009a, p. 240).

Do exemplo, podemos observar que 1 metro está relacionado com $R\$24{,}80$, assim como $3{,}50$ metros estão relacionados com x reais. Esse exemplo, apresenta números decimais, o que torna um problema mais complexo para os estudantes. O enunciado pode ser representado algebricamente por: $x\ = 24{,}80 \cdot 3{,}50 =\ 86{,}80$; ou seja, a mãe deverá gastar R$86,80 para comprar 3,50 metros de tecido. É importante destacar que os exemplos citados para explicitar cada classe possuem mais de uma forma de resolução, que podem envolver teoremas em ação diferentes. Para Gitirana *et al.* (2014), nos problemas de proporção simples, é possível variar o valor desconhecido. Por exemplo, tendo o valor da unidade, pode-se requerer o valor de muitos; ou tendo o valor de muitos, é requisitado o valor correspondente à unidade. No exemplo apresentado acima, pede-se o valor de muitos tendo a unidade. Na próxima classe, veremos quando tendo o valor de muitos e é requisitado o valor correspondente à unidade.

Desse modo, na classe de problemas proporção simples do tipo partição ou distribuição, conhece-se o valor de muitos, o elo de correspondência entre duas grandezas de natureza diferente, e deseja-se descobrir o valor unitário. Apresentamos, a seguir, um exemplo desse tipo de problema: "Paguei R$12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa?" (VERGNAUD, 2009a, p. 240).

Quadro 10: Esquema de correspondência do tipo partição

Garrafas	Reais
1 →	x
3 →	12

Fonte: Vergnaud (2009a, p. 240).

Nesse exemplo, o custo referente a 3 garrafas é $R\$\ 12{,}00$, e pede que se encontre o custo correspondente a uma unidade. O enunciado pode ser representado algebricamente por:

$$3 \cdot x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

com isso, uma garrafa custa R$4,00.

Na classe de problemas proporção simples do tipo cota, o valor unitário é dado, e precisa-se encontrar o número de unidades correspondentes a uma grandeza de outra espécie dada. Apresentamos, a seguir, um exemplo desse tipo de problema: “Pedro tem R$12,00 e quer comprar pacotes de bala a R$4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?” (VERGNAUD, 2009a, p. 240).

Quadro 11: Esquema de correspondência do tipo cota

Pacotes	Reais
1 →	4
x →	12

Fonte: Vergnaud (2009a, p. 240).

Nesse exemplo, $\mathbf{1}$ pacote custa $\boldsymbol{R\$\ 4{,}00}$, e deseja-se descobrir quantos pacotes Pedro comprou com $\boldsymbol{R\$\ 12{,}00}$. Esse enunciado pode ser representado algebricamente por:

$$4 \cdot x = 12$$

$$x = \frac{12}{4}$$

$$x = 3$$

Portanto, ele pode comprar 3 pacotes. Para Gitirana *et al.* (2014), os estudantes apresentam dificuldades em associar esse tipo de problema com a divisão, e resolvem problemas desse tipo utilizando agrupamentos com sucessivas subtrações; em seguida, contam quantos grupos conseguiram formar e formulam suas respostas.

Mesmo sem a utilização da divisão, para Gitirana *et al.* (2014, p. 62), “esse é um resultado da divisão em uma situação de proporção simples, a divisão como cota”. Porém, para as autoras, isso vêm da ênfase que a escola dá ao abordar a divisão como partição, o que pode provocar problemas futuros: que os estudantes não consigam identificar razão na divisão como cota e passem a não resolverem problemas desse tipo por divisão.

Na classe de problemas proporção simples do tipo quarta proporcional, o valor correspondente à unidade não é dado e nem solicitado. Apresentamos, a seguir, um exemplo desse tipo de problema: "3 novelos de lã pesam 200 gramas. São necessários 8 para fazer um pulôver. Qual vai ser o peso do pulôver?" (VERGNAUD, 2009a, p. 240).

Quadro 12: Esquema de correspondência do tipo quarta proporcional

Novelos	Gramas
3 →	200
8 →	x

Fonte: Vergnaud (2009a, p. 240).

Nesse exemplo, 3 novelos pesam 200 gramas, e deseja-se descobrir quantas gramas terá um pulôver feito com 8 novelos. Esse enunciado pode ser representado algebricamente por:

$$3 \cdot x = 200 \cdot 8$$

$$3x = 1600$$

$$x = \frac{1600}{3}$$

$$x \cong 533{,}33$$

Portanto, o pulôver pesará aproximadamente 533,33 gramas. O fato novo, no problema, consiste em que nenhum dos dados apresentados informa a unidade. Para Gitirana *et al.* (2014), por muito tempo, esse tipo de problema foi resolvido por *regra de três*, mas pode ainda haver variações nesse tipo de problema. Por exemplo, se os dados de mesma grandeza são ou não múltiplos; se forem múltiplos, o problema pode ser resolvido aplicando a razão observada. Um exemplo utilizando os dados do exemplo anterior seria: *3 novelos de lã pesam 210 gramas. São necessários 9 para fazer um pulôver. Qual vai ser o peso do pulôver?* Observe que, agora, temos medidas múltiplas; logo, a razão obtida seria a de 3: resolvendo a multiplicação de 210 por 3 (razão observada), irá obter o valor de 630 gramas. Observe o quadro 13 a seguir:

Quadro 13: Esquema de correspondência do tipo quarta proporcional

	Novelos	Gramas	
· 3	3 →	210	· 3
	9 →	x	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para Gitirana *et al.* (2014, p. 70), "a regra de três passa a ser utilizada como regra prática e sem significado para o estudante. Ela é responsável também por muitos erros dos estudantes ao lidarem com os problemas de grandezas diretamente proporcionais, classificados como quarta proporcional". Como vimos, ainda dentro de uma mesma classe, é possível haver dificuldades diferentes inerentes aos dados de um problema, e há, ainda, diversas outras formas de resolução além da regra de três, e diversos teoremas em ação a serem utilizados. É preciso que o professor esteja atento a essas variações e resoluções dos estudantes, bem como aos seus erros, como ocorre na utilização desenfreada da regra de três. Assim, é importante uma discussão didática, com exemplos e explicações sobre possíveis repercussões na prática do professor, isso porque, "a partir da compreensão da natureza do erro é possível desenvolver alternativas educacionais que favoreçam a superação das dificuldades ou dos erros apresentados" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 94).

Apresentamos, a seguir, os problemas mistos, originados da combinação do Campo Conceitual das estruturas aditivas com o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas.

2.4 Problemas mistos

Para Vergnaud (2009a), após o estudo das relações elementares conforme estabelecidas para os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, é importante propor aos estudantes problemas com maior complexidade, que envolvam várias relações. Nesse sentido, Vergnaud (2009a) define problemas mistos como situações associadas a operações do Campo Conceitual Aditivo e do Campo Conceitual Multiplicativo. Em outras palavras, são problemas que envolvem pelo menos uma adição ou subtração e, ao mesmo tempo, pelo menos uma multiplicação ou divisão.

Para exemplificar problema misto, Vergnaud (2009a) apresenta o seguinte exemplo: "Um comerciante de camisas compra 3 dúzias de camisas a R$ 360,00 a dúzia e revende-as a R$ 40,00 a peça. Colocar as informações em uma tabela de correspondência fazendo a previsão de uma coluna para os lucros. Encontrar todas as perguntas que cabem nessa tabela e todos os caminhos que permitam encontrar apenas o lucro total do comerciante de camisas" (VERGNAUD, 2009a, p. 288).

Segundo Vergnaud (2009a), nesse problema existem relações multiplicativas (há correspondência entre quantidades de naturezas diferentes) e aditivas (lucro = preço de venda – preço de custo).

Quadro 14: Esquema de correspondência do problema misto apresentado

dúzias de camisa	camisas	preço de compra	preço de venda	lucro
	1	B	40	F
1	12	C	D	G
3	A	360	E	H

Fonte: adaptado de Vergnaud (2009a).

Sendo:

- A: Número total de camisas;
- B: Preço de compra de uma camisa;
- C: Preço de compra de uma dúzia de camisas;
- D: Preço de venda de uma dúzia de camisas;
- E: Preço de venda de três dúzias de camisas;
- F: Lucro da venda de uma camisa;
- G: Lucro da venda de uma dúzia de camisas; e
- H: Lucro da venda de três dúzias de camisas.

Para Vergnaud (2009a), após estabelecer as correspondências, fica simples identificar os possíveis caminhos de resolução. Para o referido pesquisador, levar o estudante a refletir e perceber a equivalência desses caminhos é frutífero para uma aprendizagem aprofundada. Contudo, para isso, o próprio estudante precisa formular suas perguntas e destacar as informações. O professor poderá auxiliá-lo a estabelecer uma ou várias representações, e no caso de erro, “recorrer a uma reconstrução material e gesticulada da situação dada no enunciado e reestabelecer os elos entre a situação material e as representações que dela são feitas (enunciado, esquemas, ...)” (VERGNAUD, 2009a, p. 293).

Miranda (2019) afirma que a interpretação algébrica desse tipo de problema misto se aproxima da interpretação de problemas que envolvem o conceito de função afim. Com isso, para a escolha dos problemas mistos da presente pesquisa, nos atentamos à organização dos elementos presentes no enunciado para estudar as relações estabelecidas entre eles.

Para Miranda (2019), as relações presentes nas situações dependem do contexto envolvido e da medida que se busca. Com isso, pode-se “considerar as variações quanto à forma como se estabelecem essas relações em problemas que envolvem o conceito de função afim, considerando as variações indicadas como subclasses de problemas das estruturas aditiva e multiplicativa” (MIRANDA, 2019, p. 73).

Vergnaud (2009a) não apresenta classes de situações para os problemas mistos. O pesquisador afirma que “[...] não é possível elaborar uma classificação completa de problemas complexos porque o número de possibilidades aumenta de forma exponencial em relação ao número de relações elementares envolvidas” (VERGNAUD, 2009a, p. 269).

No entanto, Miranda (2019) indica a possibilidade de classificação de problemas mistos associados à função afim. Em sua dissertação, intitulada *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais*, a pesquisadora indica pelo menos 30 possibilidades de classes para os problemas mistos com base nas classes de problemas dos campos aditivo e multiplicativo propostos por Vergnaud (2009a). Com isso, a pesquisadora afirma que é “pertinente o estudo das relações com campo aditivo, multiplicativo e problemas mistos, no contexto de situações relacionadas ao conceito de função afim” (MIRANDA, 2019, p. 91).

As trinta classes de problemas mistos indicadas são resultantes da junção das seis categorias do campo aditivo com as cinco categorias do campo multiplicativo. Tais categorias podem ou não apresentar situações relacionadas ao conceito de função afim. Miranda (2019) identificou 4 classes de problemas mistos que podem ser modeladas por meio da expressão analítica da função afim, $y = ax + b$, sendo a e b números reais positivos.

Quadro 15: Problemas mistos que podem ser modeladas por uma expressão analítica da função afim

Categoria	Expressão analítica relacionada
proporção simples e composição de medidas	$y = ax \pm b$
proporção simples e transformação de medidas	$y = b \pm ax$
comparação multiplicativa e composição de medidas	$y = ax + b$
proporção simples e composição de transformações e com transformação de medidas	$y = ax + b$

Fonte: Adaptado de Miranda (2019).

Na presente pesquisa, utilizamos a classe *proporção simples e transformação de medidas*. Para esta classe, Miranda (2019) identificou que sua característica é relacionada à ideia de transformação, e apresenta um estado inicial sobre uma transformação variável, resultante de uma proporção simples.

Para a classe de problemas de proporção simples, ainda existe uma subdivisão: multiplicação um para muitos; partição ou distribuição; cota e quarta proporcional. Conforme explicitamos na seção sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, essas subdivisões variam de acordo com os dados dos problemas. Para a classe de problemas *transformação de medidas*, há duas subdivisões. A primeira delas com a transformação positiva: estado inicial desconhecido; estado final desconhecido e transformação desconhecida. A segunda, com a transformação negativa: estado inicial desconhecido; estado final desconhecido e transformação desconhecida. Para a classe de problemas *proporção simples e transformação de medidas*, a partir da qual nosso instrumento de pesquisa é constituído, são estabelecidas vinte e quatro (24) possibilidades de variação, conforme explicitamos a seguir.

Os problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas* são situações nas quais são estabelecidas relações quaternárias das estruturas multiplicativas e relações ternárias das estruturas aditivas. Miranda (2019) afirma que esse tipo de problema assume a seguinte forma analítica da função afim:

$$y = f(x) = b \pm a \cdot x \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0 \text{ e } b > 0$$

Miranda (2019) apresenta uma descrição sobre cada espécie de problema do tipo proporção simples:

Quadro 16: Descrição dos problemas do tipo multiplicativo da classe proporção simples

Classe de problema	Esquema relacional	Descrição
Multiplicação um para muitos	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{\alpha} \\ \boxed{b} & \boxed{x} \end{array}$	A medida que se relaciona à unidade é dada (a unidade 1) e se deseja saber o valor que corresponde à segunda medida de mesma espécie da unidade.
Divisão-partição ou distribuição	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{x} \\ \boxed{b} & \boxed{c} \end{array}$	É dada a correspondência entre duas medidas dadas de natureza distintas e se deseja saber à medida que corresponde à unidade.
Divisão-cotação ou cota	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{\alpha} \\ \boxed{x} & \boxed{c} \end{array}$	A medida que correspondente à unidade (medida igual a 1) é dada e se deseja saber a medida que corresponde a medida de mesma natureza da unidade dada, ou quantas cotas ou grupos, se pode obter com a medida dada.
Quarta proporcional	$\begin{array}{c\|c} \boxed{\alpha} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{x} \end{array}$	A relação de proporcionalidade em que a medida correspondente à unidade não é explicitada e nem mesmo solicitada. Podendo ser mais complexas caso as medidas dadas de mesma natureza não sejam múltiplas umas das outras.

Fonte: Miranda (2019, p. 60).

Apresentamos, no quadro 17, as possibilidades de problemas para a classe proporção simples e transformação de medidas, resultado da combinação entre as quatro variações da classe proporção simples coma as seis variações da classe transformação de medidas, o que possibilitou a formação de 24 possibilidades.

Quadro 17: Possibilidades de problemas de proporção simples e transformação de medidas

<table>
<tr><th>Campo multiplicativo –
classe proporção simples</th><th>Campo aditivo – classe transformação de medidas</th></tr>
<tr><td>Multiplicação um para muitos</td><td rowspan="4">Transformação positiva com o estado inicial desconhecido
Transformação positiva, com o estado final desconhecido.
Transformação positiva, com a transformação desconhecida.
Transformação negativa, com o estado inicial desconhecido.
Transformação negativa, com o estado final desconhecido.
Transformação negativa, com a transformação desconhecida.</td></tr>
<tr><td>Partição</td></tr>
<tr><td>Cota</td></tr>
<tr><td>Quarta proporcional</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Com base em Vergnaud, entendemos que essas diferentes possibilidades permitem aos estudantes manifestarem diferentes estratégias de resolução. A seguir, no capítulo 3, apresentamos os procedimentos metodológicos que nortearam a pesquisa, bem como o problema, objetivos e instrumento de pesquisa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento desta investigação. Apresentam-se o problema de pesquisa, os objetivos, informações sobre os sujeitos colaboradores, estudo piloto e pressupostos estabelecidos para a elaboração do instrumento de pesquisa, como por exemplo, as variáveis didáticas e seus respectivos valores.

3.1 Problema de pesquisa

Com base em nossos estudos, nas justificativas e fundamentação teórica apresentadas nos capítulos precedentes, estabelecemos o seguinte problema de pesquisa: *A variação de subclasses de problemas mistos influencia na complexidade das situações para estudantes do Ensino Médio?*

3.2 Objetivos

Objetivo Geral

Com o propósito de responder o problema de pesquisa, estabeleceu-se como objetivo geral *analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, intervém na resolução de estudantes do Ensino Médio.*

Objetivos específicos

Foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- ✓ *analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem problemas mistos das diferentes subclasses do tipo proporção simples e transformação de medidas; e*
- ✓ *identificar teoremas em ação associados ao conceito de função afim manifestados nas estratégias dos estudantes.*

3.3 Participantes da pesquisa

Os participantes foram dez (10) estudantes de uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública do interior do estado do Paraná com idades entre 17 e 19 anos.

A escolha pela 3ª série do Ensino Médio ocorreu pelo fato de ser a última etapa da Educação Básica. Nesse nível de ensino, espera-se que os estudantes tenham estudado o conceito de função durante o Ensino Fundamental e Médio, conforme previsto pela BNCC (BRASIL, 2018).

3.4 Produção de dados

Em conformidade com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual do Paraná, duas cópias do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e do Termo de Assentimento (TA) foram entregues aos estudantes. Tais documentos continham: as explicações éticas, a finalidade da pesquisa e os procedimentos que seriam realizados com os estudantes. Os TCLE e TA foram encaminhados aos responsáveis pelos estudantes, solicitando o consentimento e assinaturas, para depois realizarmos a coleta de dados.

A proponente desta investigação é professora regente da turma, que possui onze (11) estudantes, dos quais dez (10) aceitaram participar da investigação. Constitui uma turma colaborativa com estudantes de níveis de rendimento diversos em Matemática.

A produção dos dados ocorreu de dois modos: por meio dos registros escritos dos estudantes, ao resolverem em folha de papel quatro situações de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas; e gravação em áudio do diálogo final entre pesquisadora e estudantes.

A implementação ocorreu individualmente em sala, no horário da aula de Matemática. Cada situação foi apresentada aos estudantes individualmente. Após a resolução de uma situação, era recolhida a folha e entregue a próxima situação até finalizarem os quatro problemas mistos.

Antes de iniciarem as resoluções, os estudantes foram orientados a utilizar apenas caneta para resolverem as situações, que não utilizassem borracha e que mantivessem no papel ou rascunho todas as resoluções. As folhas de resolução e os rascunhos foram fornecidos pela pesquisadora. Os estudantes foram informados, também, que resolveriam um problema por vez, individualmente, e que deveriam resolver as situações da forma que considerassem pertinente.

Nessas mesmas condições, foi realizado um estudo piloto, que se encontra detalhado na sequência desta subseção.

A escolha por uma turma na qual a proponente desta investigação fosse professora regente ocorreu pela aproximação com os estudantes da 3ª série do Ensino Médio, pela abertura da escola e equipe pedagógica para a realização da pesquisa. O conceito de função e de função afim não foi trabalhado nas aulas com os estudantes pela professora da turma, proponente desta pesquisa no ano de realização da investigação.

3.5 O estudo piloto

Realizamos o estudo piloto com o propósito de verificar se as situações elaboradas serviriam como instrumento de pesquisa, se os enunciados estavam claros para os estudantes, e se a partir das resoluções das situações seria possível indicar a mobilização de invariantes operatórios. Ainda, o estudo piloto serviu como base para as análises das possíveis estratégias de resolução que serão apresentadas no capítulo 4. O estudo piloto foi realizado com dois (02) estudantes de uma turma da 3ª série do Ensino Médio de um colégio estadual do interior do Paraná. As respectivas turmas do estudo principal e do estudo piloto foram de escolas diferentes.

A professora regente fez o convite na turma, explicou sobre a pesquisa, e dois estudantes se dispuseram a resolver as situações. Antes da implementação, foram entregues os termos de consentimento e assentimento para que os pais pudessem assinar, e agendado um horário para o encontro com a pesquisadora e resolução dos problemas pelos estudantes, que ocorreu na semana seguinte, no horário da aula de Matemática, no laboratório de Matemática.

Os estudantes resolveram duas situações: a situação 1 e a situação 2 do instrumento de pesquisa. Almejávamos utilizar duas (02) aulas para a resolução dos dois problemas, mas foram utilizadas três. A partir do estudo piloto, foi constatado que seriam necessárias no mínimo três (03) aulas para o estudo principal. Ainda, em posse das resoluções dos estudantes, foi constatada a necessidade de uma análise das possíveis resoluções. Utilizamos as resoluções dos estudantes no estudo piloto como base para complementar as análises *a priori* já realizadas, e estabelecer as previsões possíveis para as resoluções dos estudantes.

A partir das análises de duas situações, identificamos a possibilidade de mobilização de quatro (04) teoremas em ação verdadeiros e de dois (02) teoremas em ação falsos associados ao conceito de função.

3.6 Elaboração do instrumento de pesquisa

Com base em Vergnaud (2009a), que afirma que para a compreensão de um conceito, o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações, com referência aos conteúdos e objetivos de aprendizagem propostos na BNCC, e com base nos estudos sobre problemas aditivos, multiplicativos e mistos (MIRANDA, 2019), foi elaborado um instrumento de pesquisa composto por quatro situações-problema mistas do tipo proporção simples e transformação de medidas.

Para elaboração do instrumento, foi mantido um padrão relativo à organização das situações, para observarmos se os estudantes manifestariam ou não dificuldades, conforme a variação das subclasses. Os quatro (04) problemas apresentam a mesma padronização, contendo três (03) itens: a), b) e c). No item a) é questionada alguma informação sobre a situação, como o estado inicial, o estado final, a transformação, dependendo da subclasse a qual a situação pertence. O item a) auxilia o estudante na obtenção de uma expressão algébrica, que será requisitada no item b). No item c), é questionado a respeito da transformação existente em cada situação, e a resolução pode ser obtida por meio da expressão do item b), mas não somente.

3.7 Variáveis didáticas

Almouloud (2016) realizou um estudo com base na teoria das situações didáticas idealizada por Guy Brousseau, e discute os processos de construção ou escolha de situações, cujo objetivo é contribuir para a apropriação de conhecimento pelos estudantes. Para Guy Brousseau (2008), um sujeito se adapta às situações que enfrenta, e as variáveis relativas a um mesmo saber podem apresentar grandes diferenças de complexidade, e em consequência, levar a diferentes estratégias, maneiras diversas de mobilizar um mesmo saber.

Almouloud (2016) menciona a importância da análise das escolhas a serem feitas pelo pesquisador ao elaborar problemas para compor um instrumento de pesquisa, pois existem diversas possibilidades de variações. A variável didática de um problema é aquela cujos valores são escolhidos pelo pesquisador. Elas podem interferir diretamente nos comportamentos e resoluções dos sujeitos participantes da pesquisa.

As variáveis didáticas auxiliam "na identificação de fatores relevantes para avaliar a abordagem didático-pedagógica escolhida, assim como para prever as condições de utilização do material preparado" (ALMOULOUD, 2016, p. 122). Como exemplo de variáveis didáticas existem: a formulação dos enunciados, a natureza dos números (decimais, racionais, negativos, positivos, números com muitos dígitos), presença de figuras, gráficos e tabelas, dentre outras. Para a presente pesquisa, foram selecionadas três variáveis didáticas para a classe dos problemas: proporção simples e transformação de medidas; natureza e magnitude dos números - naturais (unidades, dezenas, centenas...); e grandezas envolvidas: discretas e contínuas.

Almouloud (2016) afirma que os valores das variáveis podem ser modificados para interferir na escolha do conhecimento necessário em uma resolução. Com isso, é preciso que o pesquisador as defina previamente, para analisar o que será requisitado em um problema, as restrições existentes e os conhecimentos que possivelmente serão manifestados nas resoluções.

Para a presente pesquisa, a seleção dos valores das variáveis didáticas ocorreu baseada nos critérios $y = ax \pm b,$ sendo ax a transformação, b o estado inicial e y o estado final. Um dos valores selecionados diz respeito às subclasses. Dentre as vinte e quatro (24) possibilidades de subclasses, foi realizado um recorte: buscamos contemplar as quatro (04) classes de problemas de proporção simples (multiplicação um para muitos, partição, cota e quarta proporcional) e as quatro (04) de transformação de medidas (estado inicial desconhecido, estado final desconhecido, transformação positiva desconhecida e transformação negativa desconhecida). Apresentamos, a seguir, no quadro 18, as variáveis didáticas e respectivos valores adotados para a presente pesquisa.

Quadro 18: Variáveis didáticas e respectivos valores

Variável Didática	Valores
Classe de problema: proporção simples e transformação de medidas	Subclasses de problema: • multiplicação um para muitos com a transformação negativa e estado final desconhecido; • partição com a transformação positiva desconhecida; • cota com transformação positiva e estado inicial desconhecido; • quarta proporcional com a transformação negativa desconhecida.
Valores numéricos	Até a casa dos milhões (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar e milhões).
Grandezas	Discretas e contínuas.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das variáveis escolhidas podemos, com base em Brousseau (2008) e Almouloud (2016), criar condições para o aluno enfrentar o mesmo conhecimento de formas diferentes. Cada uma das variáveis didáticas e respetivos valores foram selecionadas cautelosamente, considerando o contexto da pesquisa e o ano escolar dos estudantes – 3ª série do Ensino Médio.

Apresentamos, no capítulo seguinte, as quatro (04) situações e a análise das possíveis estratégias, bem como invariantes operatórios.

4 APRESENTAÇÃO DAS SITUAÇÕES E ANÁLISES DAS POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se o instrumento de pesquisa e as análises da estrutura e *a priori* para cada uma das quatro situações de problemas mistos que o compõe. Para cada situação foram estabelecidas as variáveis didáticas: classe do problema, natureza e magnitude dos números e tipo de grandeza envolvida; os respectivos valores das variáveis didáticas; o esquema sagital que garante a sua classificação; e as análises *a priori*, ou seja, as possíveis resoluções, adequadas ou não, incluindo os erros e teoremas em ação que possam ser manifestados pelos estudantes.

O instrumento de pesquisa, que consiste em quatro problemas mistos, conforme apresentado aos estudantes, está disponível no apêndice III. Nas estratégias e nos teoremas em ação possíveis de ser manifestados, indicamos pela letra (a) o estado inicial, (b) a transformação, e (c) o estado final.

4.1 Apresentação e análises da situação 1

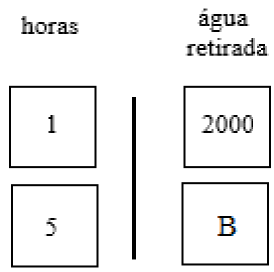
A situação 1 foi estabelecida pelas seguintes variáveis didáticas e respectivos valores:

- *Classe:* proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa);
- *Natureza dos números*: naturais, na casa dos milhares; e
- *Tipo de grandeza*: contínua.

Para esvaziar uma piscina de 30.000L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000L de água por hora.

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?
b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.
c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

A situação 1 pertence à subclasse do tipo multiplicação um para muitos, e a transformação é negativa, pois está sendo retirada água do reservatório. À medida que se relaciona com a unidade (hora), é dada a quantidade de água que a bomba retira por hora, 2000L. Se deseja saber o valor correspondente à segunda medida (litros que a bomba retira) em 5 horas, essa relação pode ser vista conforme o esquema sagital:



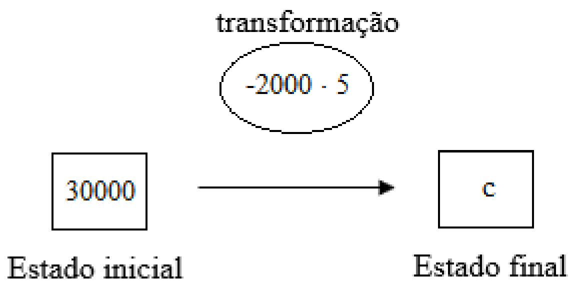
Com isso, podemos escrever:

$$\frac{1}{5} = \frac{2000}{B}$$

$$B = 2000 \cdot 5$$

$$B = 10000$$

Ou seja, sendo B a quantidade de litros de água retirada pela bomba da piscina em cinco horas, temos $B = 10000$ litros. A transformação é negativa, em decorrência da bomba que está em funcionamento retirando água:

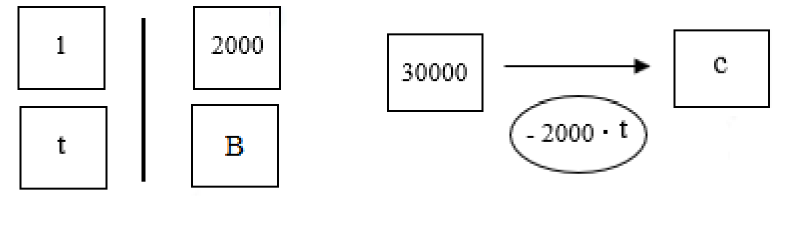


Após 5 horas do funcionamento da bomba, a piscina terá 20.000L de água, visto que a bomba retirou 10.000L em 5 horas.

Com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), apresentam-se, no quadro 19, o esquema sagital e a equação que representa as relações da situação 1; a equação final é representada por q(t) sendo (q) a quantidade de água na piscina em função do tempo (t); a expressão é obtida a partir da descoberta do estado inicial (a), estado final (c) e transformação (b).

Quadro 19: Esquema sagital - classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final (c) desconhecido e transformação (b) negativa)

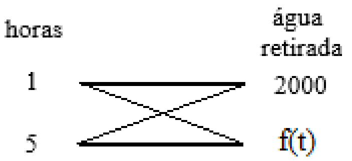
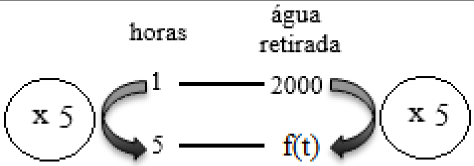
Esquema sagital				Equação
horas	água retirada	estado inicial litros de água	estado final litros de água	$B = 2000 \cdot t$

 	$c = 30000 - B$ $c = 30000 \; - 2000 \cdot t$ $\therefore$ $q(t) = 30000 \; - 2000 \cdot t$

Fonte: A autora, baseada em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

A partir do esquema sagital apresentado no quadro 19 é garantinda a classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa). Apresentamos a seguir, no quando 20, as estratégias e teoremas em ação possíveis de ser desenvolvidos pelos estudantes na resolução do item a) da situação 1.

Quadro 20: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item a) da situação 1

Estratégias de resoluções		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
 $1 \cdot f(t) = b \; \cdot t$ $f(t) = 2000 \; \cdot 5$ $f(t) = 10000$ $c = 30000 - 10000 = 20000$	Adequada	TAV1: $1 \cdot f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t}$ $com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$ TAV2: $c = a + (\pm f(t))$ com $a\ e\ B \in \mathbb{N}$
 $f(t) = 2000 \cdot 5 = 10000$ $c = 30000 - 10000 = 20000$	Adequada	TAV3: $f(nt) = n \cdot f(t)$ com b $e\ t \in \mathbb{N}$ TAV2: $c = a + (\pm f(t))$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$
$2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000$ $= 10000$ $30000 - 10000 = 20000$	Adequada	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) =$ $f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t),$ $com\ t \in \mathbb{N}$ TAV2: $c = a + (\pm f(t))$ com $a\ e\ c \in \mathbb{N}$
$30000 - 2000 \cdot 5$ $= 30000 - 10000$ $= 20000$	Adequada	TAV3: $f(nt) = n \cdot f(t)$ com n $e\ t \in \mathbb{N}$ TAV2: $c = a + (\pm f(t))$ com $a\ e\ c \in \mathbb{N}$
$2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000$ $= 10000$ $30000 - 10000 = 20000$	Adequada	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) =$ $f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t),$ $com\ t \in \mathbb{N}$

$f(t) = b \cdot t$ $f(t) = 2000 \cdot 5 = 10000$	Inadequada (não realiza a subtração da capacidade da piscina pela água retirada pela bomba).	Não identificado

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

TAV1: seja f uma função que associa a quantidade de água que uma bomba retira em qualquer tempo t, então a quantidade de água retirada é obtida a partir da multiplicação da taxa de vazão b pelo tempo t de funcionamento da bomba. Analogamente, a transformação b será resultado da divisão do total de água retirada pelo tempo t que foi necessário. Assim, indicamos a partir da estratégia o TAV1:

TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, $1 \cdot f(t) = b \ \cdot t \ e \ b = \frac{f(t)}{t} com \ b \ e \ t \in \mathbb{N}$

Vergnaud (1996a; 2007) menciona o TAV1, assim como Calado (2020) e Rodrigues (2021), em suas pesquisas relativas à estrutura multiplicativa. Calado (2020) identifica esse teorema nas resoluções de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto Rodrigues (2021) identifica nas estratégias de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

O TAV2 é mencionado por Vergnaud (2007, p. 7): “se uma subtração faz passar do estado inicial (a) para o estado final (c), então uma adição faz passar do estado final (c) para o estado inicial (a)”. No item a), a partir de uma subtração do estado inicial (a) de 30.000 litros pela transformação (b) de 10.000 litros, obtém-se o estado final (c) de 20.000 litros. Apresentamos esse teorema em ação verdadeiro a seguir e o indicamos pela sigla TAV2:

TAV2: $c = a + (\pm\, f(t))$ com $a \ e \ t \in \mathbb{N}$

TAV3: ao considerarmos f uma função que associa a quantidade de horas que a bomba funciona com a quantidade de água que ela retira, podemos utilizar uma notação algébrica para as relações de proporcionalidade. Se o tempo é multiplicado por n, então a quantidade de água retirada também será n vezes maior. Assim, indicamos a partir da estratégia o TAV3:

TAV3: $f(nt) = n \cdot f(t)$ com n $e \ t \in \mathbb{N}$

O TAV3 é mencionado por Vergnaud (1996a; 2007) e Kikuchi (2019), que enfatizam que estudantes entre oito e dez anos de idade já são capazes de mobilizar esse teorema em ação verdadeiro. Ele é identificado também por Rodrigues[1] (2021), em resoluções de estudantes do

[1] Participante do GEPeDiMa - Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática

5º ano do Ensino Fundamental que possuem entre 10 e 11 anos, na resolução de problemas mistos.

Ainda, em relação aos teoremas em ação verdadeiros envolvidos, identificamos o TAV4, o qual é manifestado pelo estudante ao utilizar sucessivas adições para obtenção da resposta. Com fundamento em Vergnaud (2007), indicamos que nessa estratégia é utilizada a propriedade do isomorfismo aditivo, no qual $f(5) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) = 2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000 = 10000$.

TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t), com\ t\ \in \mathbb{N}$

Calado (2020) identificou a mobilização do TAV4 na resolução de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Gitirana *et al.* (2014) alertam que essa estratégia não é viável para números grandes porque, por exemplo, a adição de números com mais de 3 algarismos repetidas vezes gera confusão, bem como resoluções inadequadas.

No item b) é requisitada a expressão da função. A piscina está com 30.000L de água e a bomba retira 2.000L por hora. Logo, a expressão que permite calcular a quantidade de água na piscina em função do tempo (t) em horas é:

$$q(t) = 30000 - 2000t$$

A partir das análises *a priori*, incluindo as análises do estudo piloto, no quadro 21 são apresentadas as estratégias e os teoremas em ação possíveis de ser desenvolvidos pelos estudantes na resolução do item b) da situação 1.

Quadro 21: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item b) da situação 1

Respostas e estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$q(t) = 30000 - 2000t$	Adequada	TAV5: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
$q(t) = -2000t$	Inadequada (não considera o estado inicial de 30000 litros)	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
$q(t) = 30000 + 2000t$	Inadequada (ao invés de subtrair a taxa de vazão, o estudante pode efetuar uma adição)	Não identificado
$q(t) = 30000$	Inadequada (não realiza a subtração da taxa de 2000 litros de água por hora)	TAF2: f$(t) = a \pm f(bt) = a$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
$q(t) = 30000 - t$	Inadequada (não considera um valor correto para a transformação b)	Não identificado

$q(t) = 30000 - 2000$ $q(t) = 28000t$	Inadequada (soma número com variável)	TAF4: $f(t) = bt + c = (b + c) \cdot t$ $com\ b, c\ e\ t \in \mathbb{N}$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A respeito do TAV5, seja f uma função na qual é associada a quantidade de água retirada da piscina com o tempo t de funcionamento da bomba, a relação pode ser obtida a partir de uma notação que estabeleça a proporcionalidade em termos genéricos. Logo, indicamos a modelização do TAV5, pois $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t) = 30000 - f(2000t) = 30000 - 2000 \cdot f(t)$.

TAV5: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$

Calado (2020) identifica, nas resoluções de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, a manifestação do TAV5.

Em relação aos teoremas em ação falsos, no TAF1 é desconsiderado o estado inicial (a), que corresponde ao coeficiente linear da função afim. Assim, temos:

TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$

No TAF2, ao formular a expressão algébrica, é desconsiderada a transformação ocorrida a cada hora, o coeficiente angular:

TAF2: f$(t) = a \pm f(bt) = a\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$

No TAF4, é sinalizada uma estratégia na qual o estudante pode não considerar a diferença entre números e variáveis. Assim, temos:

TAF4: $f(t) = bt + c = (b + c) \cdot t\ com\ b, c\ e\ t \in \mathbb{N}$

No item c) é questionado quanto tempo será necessário para esvaziar a piscina. Para responder, pode-se considerar a expressão algébrica obtida no item b), substituindo a quantidade de água na piscina, que no caso será zero. Assim, será possível obter o tempo para que isso ocorra. Logo:

$$q(t) = 30000 - 2000t$$
$$0 = 30000 - 2000t$$
$$2000t = 30000$$
$$t = \frac{30000}{2000}$$
$$t = 15$$

Portanto, serão necessárias 15 horas para esvaziar o reservatório.

Apresentam-se, no quadro 22, as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item c) e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 22: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item c) da situação 1

Estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$2000 + 2000 + 2000$ $+2000 + \cdots + 2000$ $t = 15h$	Adequada	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t), com\ t\ \in \mathbb{N}$
$30000 = 2000 \cdot 15$ $\therefore 15\ horas$	Adequada	TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e $t = \frac{f(t)}{b} com\ t\ e\ b \in \mathbb{N}$
Efetua de forma direta a divisão: $t = \frac{30000}{2000} = 15h$	Adequada	
$30000 - 2000t = 0$ $-2000t = -30000$ $2000t = 30000$ $t = \frac{30000}{2000} \quad t = 15h$	Adequada	TAV5: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)$, com a e b $\in \mathbb{N}$
$30000 - 2000t = 0$ $t = \frac{30000}{2000} \quad t = 10h$	Inadequada (o estudante pode efetuar algum cálculo de forma incorreta e não obter o tempo de 15 horas)	Não identificado
$30000 - 2000 = 28000$ $28000 - 2000 = 26000$ $26000 - 2000 = 24000$ $\vdots$ $t \neq 15h$	Inadequada (utilizando sucessivas subtrações, o estudante pode efetuar cálculos inadequados e obter uma resposta diferente de 15 horas)	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O TAV4 é indicado a partir do isomorfismo aditivo, para o qual o estudante pode apresentar a seguinte estratégia: $f(1) + f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = 2000 + 2000 + 2000 + \cdots + 2000 = 30000$. O resultado é obtido a partir de sucessivas adições, e nessa estratégia, soma-se quantas vezes foi utilizada a $f(1)$. O TAV1 é indicado a partir da ideia na qual o tempo para esvaziar a piscina é obtido a partir da divisão do estado inicial (a) de 30000 litros pela transformação (b) de 2000 litros. Analogamente, o estudante pode realizar uma multiplicação direta, na qual ele obtenha que número multiplicado por 2000 resulta em 30000, obtendo 15. O TAV5 é indicado para o caso em que o estudante pode considerar a expressão genérica do item b).

4.2 Apresentação e análises da situação 2

O problema misto 2 foi estabelecido pelas seguintes variáveis didáticas e respectivos valores:

- *Classe*: proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação positiva desconhecida);
- *Natureza dos números*: naturais, na casa dos milhares; e
- *Tipo de grandeza*: contínua.

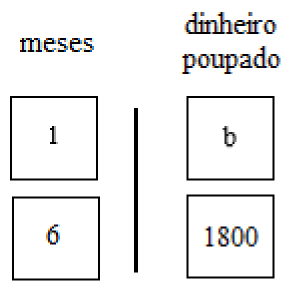
Uma turma de 3° ano deseja fazer uma viagem em dezembro de 2022. Eles já possuem, em uma conta, R$500,00. No mês de janeiro de 2022, começaram a guardar dinheiro:

a) Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?
b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t) em meses.
c) Sabendo que a viagem custará R$4.100,00, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

A situação 2 pertence à subclasse do tipo partição, e busca saber a medida que corresponde à unidade, no caso, quanto a turma está poupando por mês. No item a) é dada a quantia que a turma possui após 6 meses guardando dinheiro, e questiona a respeito de quanto estão juntando por mês. A informação pode ser obtida analisando a correspondência dada entre as duas medidas de natureza distintas: o dinheiro poupado ao todo e o dinheiro poupado mês a mês. Para a resolução, observa-se que o montante da turma após 6 meses, no valor de R$2.300,00, não advém apenas do que estão poupando mês a mês, visto que já possuíam R$500,00. Sendo assim, o montante acumulado de dinheiro poupado é desconhecido, e pode ser obtido por uma subtração do valor que já possuíam no final do 6º mês pela quantia que tinham no início. Tem-se então:

$$2300 - 500 = 1800$$

A relação da situação pode ser vista a seguir, conforme o esquema sagital:



Com isso:

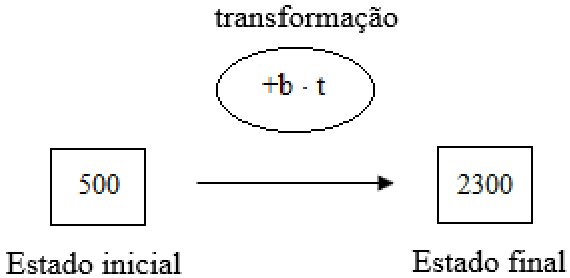
$$\frac{1}{6} = \frac{b}{1800}$$

$$6b = 1800$$

$$b = \frac{1800}{6}$$

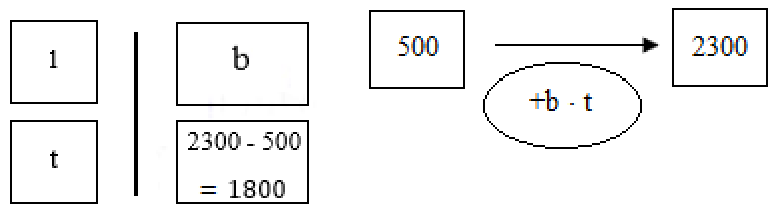
$$b = 300$$

O valor de $b = 300$ corresponde à transformação positiva do problema, que ocorre por meio da expressão $+b \cdot t$, sendo b o valor de R$300,00 e t o tempo em meses. É por meio dessa transformação que o estado inicial - a quantia que já possuíam (R$500,00), é transformado no estado final – a quantia necessária para realizar a viagem.



Com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), o quadro 23 apresenta o esquema sagital e a equação que representa as relações do problema misto 2. A equação final é representada por r(t), sendo (r) a quantia em reais obtida em função do tempo (t):

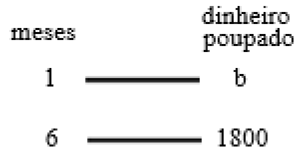
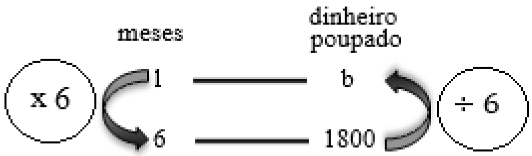
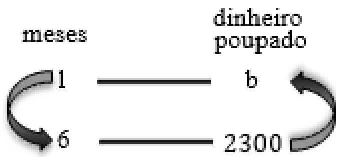
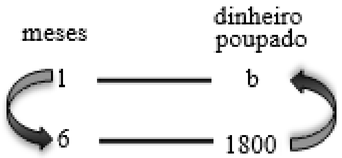
Quadro 23: Esquema sagital - proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação (b) positiva)

Esquema sagital				Equações
meses	dinheiro poupado	estado inicial dinheiro	estado final dinheiro	$t \cdot b = 1800$ 6b= 1800 $b = 300$ $2300 = 500 + b \cdot t$ $2300 = 500 + 300 \cdot t$ $\therefore$ $r(t) = 500 + 300 \cdot t$
				

Fonte: A autora, baseada em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

A partir do esquema sagital apresentado no quadro 23, é garantinda a classe proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação positiva desconhecida) para o problema misto 2. O quadro 24 apresenta as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item a) da situação 2, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 24: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item a) da situação 2

Estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
 $2300 - 500 = 1800$ $1 \cdot 1800 = b \cdot 6 \quad b = \frac{1800}{6} \quad b = 300$ Estão juntando por mês R$300,00	Adequada	TAV1: $1 \cdot f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t}\, com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$ TAV2: $c = a + (\pm b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$
$500 + 6 \cdot b = 2300$ $6b = 2300 - 500$ $6b = 1800$ $b = \frac{1800}{6}$ $b = 300$	Adequada	
 $2300 - 500 = 1800$ $b = \frac{1800}{6} = 300$	Adequada	TAV3: $f(nt) = n \cdot f(t)$ com n $e\ t \in \mathbb{N}$ TAV2: $c = a + (\pm b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$
 $b \neq 300$	Inadequada (não realiza a subtração dos R$500,00 que a turma possuía inicialmente)	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
 $b \neq 300$	Inadequada (o estudante pode realizar cálculos incorretos e obter uma transformação diferente de 300)	Não identificado.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

TAV1: seja f uma função na qual a quantia que possuem está diretamente relacionada ao tempo t, então o valor guardado mês a mês, a transformação (b), é resultado da divisão do que eles possuem pelo tempo t. No caso, $b = \frac{1800}{6}$, e a partir da relação de proporcionalidade, indicamos o TAV1. O TAV2 pode ser mobilizado a partir da subtração do estado final (c) de R$2.300,00 pelo estado inicial (a) de R$500,00. Como resultado, obtém-se a transformação total, gerada após 6 meses guardando R$300,00 por mês, de R$1800. Indicamos o TAV3 a partir da ideia em que, se o tempo (t) é multiplicado por um número natural n, então o respectivo valor guardado a partir do tempo t também será multiplicado por n. No TAF1, é desconsiderado o estado inicial (a), que corresponde ao coeficiente linear da função afim, 500.

No item b) é requisitada a expressão da função, relacionando a quantia em reais com o tempo (t), em meses: eles já possuem R$500,00 e guardam R$300,00 por mês. A função que permite calcular a quantia, após o passar de (t) meses, será dada pela soma do dinheiro guardado inicialmente com o montante poupado mês a mês:

$$q(t) = 500 + 300t$$

A partir das análises *a priori*, incluindo análises do estudo piloto, o quadro 25 apresenta as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item b) do problema misto 2, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 25: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item b) da situação 2

Respostas e estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$q(t) = 500 + 300t$	Adequada	TAV5: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t),$ com a e b ∈ ℕ
$q(t) = 300t$	Inadequada (não considera os R$500,00 que a turma possuía inicialmente)	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
$q(t) = 500 + t$	Inadequada (não considera um valor correto para a quantia guardada por mês)	Não identificado
$q(t) = 500 - 300t$	Inadequada (ao invés de somar a transformação, o estudante pode efetuar uma subtração)	Não identificado
$q(t) = 500$	Inadequada (não realiza a soma da transformação de R$300,00 por mês)	TAF3: f$(t) = a \pm f(bt) = a$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
$q(t) = 800t$	Inadequada (soma número natural com variável)	TAF4: $f(t) = bt + c = (b + c) \cdot t$ $com\ b, c\ e\ t \in \mathbb{N}$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Em relação ao TAV5, consideremos f uma função na qual é associada a quantidade de dinheiro guardado com o tempo t. A relação pode ser obtida a partir de uma notação de proporcionalidade, na qual $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t) = 500 + f(300t) = 500 + 300 \cdot f(t)$.

Indicamos a possibilidade de mobilização de quatro (04) teoremas em ação falsos. O TAF1 pode ser observado a partir da exclusão do estado inicial na expressão; no caso, o coeficiente linear. O TAF3 é indicado a partir da possibilidade de os estudantes desconsiderarem o coeficiente angular. No caso, a transformação (b) de R$300,00. Em relação ao TAF4, ele é indicado para as resoluções que apresentem uma soma de número natural com variável. Assim, temos:

TAF3: $f(t) = bt + c = (b + c) \cdot t \; com \; b, c \; e \; t \in \mathbb{N}$

O item c) questiona quantos meses são necessários guardar dinheiro, sabendo que a viagem custará R$4.100,00. Para tanto, o estudante pode utilizar a expressão algébrica encontrada no item b), substituindo o valor total da viagem, e obter o tempo necessário. Temos, então:

$$q(t) = 500 + 300t$$
$$4100 = 500 + 300t$$
$$4100 - 500 = 300t$$
$$3600 = 300t$$
$$\frac{3600}{300} = 300t$$
$$t = 12$$

Com isso, observa-se que serão necessários doze meses, mesmo guardando a quantia de R$300,00 mensalmente, para realizar a viagem.

A partir das análises *a priori*, incluindo análises do estudo piloto, o quadro 26 apresenta as possíveis estratégias a serem desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item c) do problema misto 2, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 26: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item c) da situação 2

Estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$300 + 300 = 600$ $600 + 300 = 900$ $\vdots$ $3300 + 300 = 3600$ $t = 12 \; meses$	Adequada	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t), \; com \; t \in \mathbb{N}$
$4100 = 500 + 300t$ $4100 - 500 = 300t$ 3600$= 300t$ $t = \frac{3600}{300} \quad t = 12 \; meses$	Adequada	TAV2: $c = a + (\pm b)$ com $a \; e \; b \in \mathbb{N}$
$4100 - 500 = 3600$ $3600 = 300 \cdot 12 \therefore 12 \; meses$	Adequada	
$4100 - 500 = 3600$ $t = \frac{3600}{300} \quad t = 12 \; meses$	Adequada	
$4100 = 500 + 300t$ $4100 - 500 = 300t$ 3600$= 300t$ $t = \frac{3600}{300} \quad t \neq 12 \; meses$	Inadequada (o estudante pode efetuar cálculos incorretos e obter um tempo diferente de 12 meses)	

$4100 - 500 = 3600$ $3600 - 300 = 3300$ $3300 - 300 = 3000$ $\vdots$ $300 - 300 = 0$ $t \neq 12\ meses$	Inadequada (utilizando sucessivas subtrações, o estudante pode efetuar cálculos inadequados e obter uma resposta diferente de 12 meses)	
$t = \frac{4100}{300} \quad t \neq 12\ meses$	Inadequada (o estudante não realiza a subtração do estado inicial de R$500,00)	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O TAV4 pode ser mobilizado na utilização do isomorfismo aditivo, no qual $f(1) + f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = 300 + 300 + 300 + \cdots + 300 = 3600$. O resultado é obtido a partir de sucessivas adições, e nessa estratégia, soma-se quantas vezes foi utilizada a $f(1)$, 12. Indicamos a possibilidade de mobilização do TAV2, já mencionado, caso os estudantes observem que o estado inicial de R$500,00 precisa ser retirado na resolução, pois o valor obtido é constituído de duas partes: do estado inicial de R$500,00; e da transformação de R$300,00 multiplicada pelo tempo em meses. O TAF1 é indicado a partir da relação em que o estado inicial, no caso coeficiente angular de R$300,00, não é considerado.

4.3 Apresentação e análises da situação 3

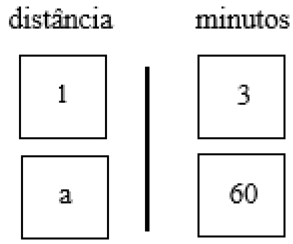
O problema misto 3 foi estabelecido pelas seguintes variáveis didáticas e respectivos valores:

- *Classe:* proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva);
- *Natureza dos números:* naturais, na casa dos milhares; e
- *Tipo de grandeza:* contínua.

Celina participou de um evento esportivo que consistia, em uma parte inicial, de corrida, seguida por uma parte de ciclismo. Ela corre 1km a cada 3 minutos, e pedala a uma velocidade de 45 km/h.

a) Celina correu por 60 minutos. Quantos quilômetros teve a corrida do evento?
b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.
c) Quanto tempo Celina precisou pedalar, sabendo que o percurso total foi de 200km?

O item a) requisita o estado inicial; no caso, quanto Celina correu. Para obter o valor, é preciso observar que ela corre 1 quilômetro a cada 3 minutos, e que a corrida durou 60 minutos. A relação do problema pode ser vista a seguir, conforme o esquema sagital:



Assim, temos:

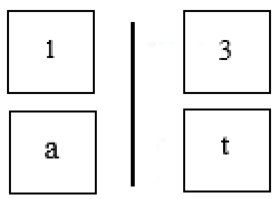
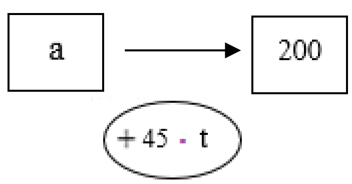
$$3a = 60$$

$$a = \frac{60}{3}$$

$$a = 20km$$

Com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), o quadro 27 apresenta o esquema sagital e a equação que representa as relações do problema misto 3. A equação final é representada por d(t), sendo (d) a distância percorrida em função do tempo (t).

Quadro 27: Esquema sagital - proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial (a) desconhecido e transformação (b) positiva)

Esquema sagital				Equações
distância	minutos	estado inicial distância	estado final distância	$t = 3a$ $60 = 3a$ $a = 20$ $\therefore$ $d(t) = 20 + 45 \cdot t$
				

Fonte: A autora, baseada em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

A partir do esquema sagital proposto, é garantinda a classe proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva) para a situação 3. O quadro 28 apresenta as possíveis estratégias e teoremas em ação para resolução do item a) da situação.

Quadro 28: Possíveis estratégias de resoluções para o item a) da situação 3

Estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
distância minutos 1 —— 3 a —— 60 $1 \cdot 60 = 3 \cdot a$ $3a = 60$ $a = \frac{60}{3}$ $a = 20km$	Adequada	TAV1: $1 \cdot f(a) = a \cdot t\ e$ $a = \frac{f(a)}{t}\ com\ a\ e\ t \in \mathbb{N}$
distância minutos x 20 1 —— 3 x 20 a —— 60 $a = 20km$	Adequada	TAV3: $f(nt) = n \cdot f(t)$ com n $e\ t \in \mathbb{N}$
distância minutos 45 —— 3 a —— 60 $a \neq 20$	Inadequada (o estudante pode fazer uma análise errônea e obter um resultado incorreto)	Não identificado.
distância minutos 1 —— 3 a —— 60 $1 \cdot 60 = 3 \cdot a$ $a \neq 20$ min	Inadequada (o estudante pode apresentar erros nos cálculos, obtendo uma resposta incorreta)	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Indicamos a possibilidade de mobilização do TAV1 a partir da ideia em que, sendo f uma função em que a distância corrida depende do tempo t, então a distância corrida, que representa o estado inicial (a), pode ser obtida a partir da relação de proporcionalidade, na qual $a = \frac{f(a)}{t} = \frac{60}{3} = 20$. O TAV3 pode ser identificado a partir da seguinte relação: considera-se f uma função que associa a distância corrida com o tempo t. Se o tempo for multiplicado por um número natural $n, (3 \cdot n = 60)$, então a distância percorrida naquele tempo também será multiplicada por n. Assim, temos: $f(nt) = n \cdot f(t) \rightarrow f(20 \cdot 3) = 20 \cdot f(3) \rightarrow 20 \cdot 1 = 20$.

O item b) requisitada uma expressão para a situação proposta, que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas que Celina se movimenta. Considerando que ela correu por 20km, e pedala a uma velocidade de 45km/h, a função que permite calcular a distância (d) em função do tempo (t) em horas é dada pela soma do estado inicial 20km com a multiplicação da velocidade média de 45km/h pelo tempo (t) pedalado:

$$d(t) = 20 + 45t$$

O quadro 29 apresenta as possíveis estratégias e teoremas em ação identificados como possíveis para a resolução do item b) da situação 3.

Quadro 29: Possibilidades de estratégias de resoluções do item b) da situação 3

Respostas e estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$q(t) = 20 + 45t$	Adequada	TAV5: a $\pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)$ com a e b ∈ ℕ
$q(t) = 45t$	Inadequada (não considera a corrida de 20km)	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t$ ∈ ℕ
$q(t) = 20 + t$	Inadequada (não considera um valor correto para a quantia de quilômetros que Celina pedala)	Não identificado
$q(t) = 20 - 45t$	Inadequada (ao invés de somar a transformação, o estudante pode efetuar uma subtração)	
$q(t) = 20$	Inadequada (não realiza a soma da transformação de 45km por hora)	TAF3: f$(t) = a \pm f(bt) = a$ $com\ a\ b, e\ t$ ∈ ℕ
$q(t) = 65t$	Inadequada (soma número natural com variável)	TAF4: $f(t) = bt + c = (b + c) \cdot t$ $com\ b, c\ e\ t$ ∈ ℕ

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Consideramos a possibilidade de mobilização do TAV5 a partir de, sendo f uma função em que as relações podem ser obtidas pela associação do percurso da corrida com o da pedalada, é associada a corrida de 20km com a velocidade média que Celina pedala, 45km/h. A relação pode ser obtida a partir de uma notação de proporcionalidade, na qual $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)$.

Se na estratégia for desconsiderado o coeficiente linear da expressão, no caso, a transformação de 20 km, podemos ter a mobilização do TAF1. O TAF3 é indicado para resoluções nas quais é desconsiderado o coeficiente angular: a transformação de 45km/h. Para finalizar as análises e justificativas do item b), indicamos a possibilidade de mobilização do TAF4 para resoluções que apresentem uma soma de número natural com variável.

O item c) questionado quanto tempo levará o percurso, sabendo que ele teve 200km. Para a resolução, é possível substituir os dados na expressão obtida no item b). Temos, então:

$$d(t) = 20 + 45t$$

$$200 = 20 + 45t$$

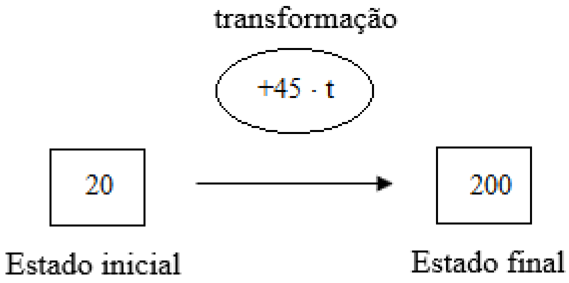
$$200 - 20 = 45t$$

$$180 = 45t$$

$$t = \frac{180}{45}$$

$$t = 4\ horas$$

Para Celina sair do estado inicial e chegar no estado final, há uma transformação positiva, que pode ser obtida pela multiplicação da velocidade média dela pedalando, de 45km, pelo tempo em horas que ela pedala:



A partir das análises *a priori*, incluindo análises do estudo piloto, o quadro 30 apresenta as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item c) do problema misto 3, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 30: Possibilidades de estratégias de resoluções do item c) da situação 3

Estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$200 - 20 = 180$ $45 + 45 + 45 + 45 = 180$ $t = 4\ horas$	Adequada	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t), com\ t\ \in \mathbb{N}$
$200 = 20 + 45t$ $200 - 20 = 45t$ $180 = 45t$ $t = \frac{180}{45} \quad t = 4\ horas$	Adequada	TAV2: $c = a + (\pm\ b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$
$200 - 20 = 45 \cdot 4\ \therefore 4\ horas$	Adequada	
$200 - 20 = 180$ $t = \frac{180}{45} \quad t = 4\ horas$	Adequada	
$200 = 20 + 45t$ $200 - 20 = 45t$ $180 = 45t$ $t = \frac{180}{45} \quad t \neq 4\ horas$	Inadequada (o estudante pode efetuar cálculos incorretos e obter um tempo diferente de 4 horas)	
$180 - 45 = 135$ $135 - 45 = 90$ $90 - 45 = 45$ $45 - 45 = 0$ $t \neq 4\ horas$	Inadequada (utilizando sucessivas subtrações, o estudante pode efetuar cálculos inadequados e obter uma resposta diferente de 4 horas)	Não identificado.
$t = \frac{200}{45} \quad t \neq 4\ horas$	Inadequada (o estudante não realiza a subtração do estado inicial de 20 quilômetros)	TAF3: $\mathrm{f}(t) = a \pm f(bt) =\ a$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Indicamos, para o item c) da situação, a possibilidade de mobilização de três teoremas em ação. O TAV4, a partir de sucessivas adições da transformação de 45km/h até obter 180km.

Então, o estudante realiza a contagem de quantas vezes foi adicionado 45, obtendo o resultado 4. O TAV2 é indicado a partir da subtração do estado inicial de 20km para resolução do item c) e obtenção do tempo que durou o percurso total, que é constituído de duas partes, a corrida de 20km, realizada em 60 minutos; e a velocidade média de 45km/h. Indicamos a mobilização do TAF3 para os casos em que seja desconsiderado o estado inicial de 20km na resolução.

4.4 Apresentação e análises da situação 4

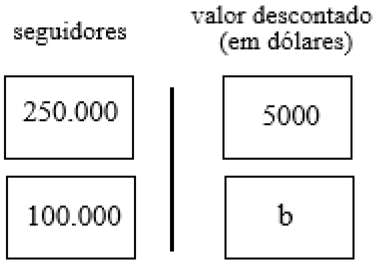
Apesar de o domínio da função afim ser contínuo, optamos por incluir essa situação, que possui grandezas discretas, por tratar de um contexto e linguagem que interessam aos jovens. Assim, o problema misto 4 foi estabelecido pelas seguintes variáveis didáticas e respectivos valores:

- *Classe:* proporção simples (quarta proporcional) e transformação de medidas (transformação negativa desconhecida);
- *Natureza dos números:* naturais, na casa dos milhares; e
- *Tipo de grandeza:* contínua e discreta.

Enzo possui 100.000 seguidores engajados no Instagram. Para receber um salário de 23.000 dólares no mês, ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações. Se deixar de fazer alguma, é descontado, por publicação não feita, um valor proporcional à quantidade de seguidores.

a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?
b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.
c) Em fevereiro, ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer?

A situação 4 pertence à subclasse do tipo quarta proporcional: há uma relação de proporcionalidade, e a medida correspondente à unidade não é explicitada. O item a) questiona quanto Enzo perde. Sabendo que um influencer que possui 250.000 seguidores perde, por publicação não feita, 5.000 dólares, a relação que permite descobrir quanto Enzo perde pode ser vista conforme o esquema sagital:



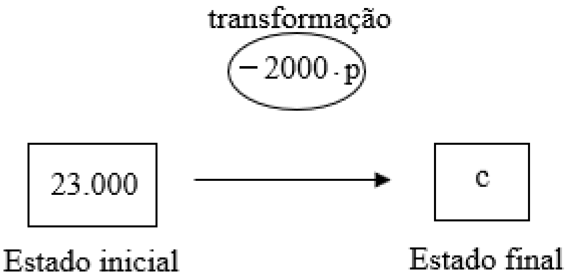
Com isso, podemos escrever:

$$\frac{250.000}{100.000} = \frac{5000}{b}$$

$$250.000b = 500.000.000$$

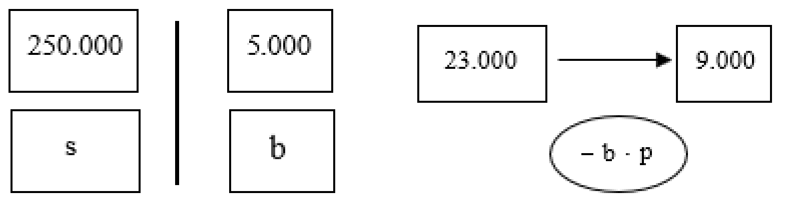
$$b = \frac{500.000.000}{250.000} = 2.000$$

Portanto, Enzo perde, por publicação que não faz, a quantia de 2.000 dólares. Tem-se que o valor a ser recebido é composto por um valor fixo de 23.000 dólares, que pode diminuir, caso Enzo deixe de realizar publicações no mês. A perda dele é a transformação do problema, o que faz com que tenha alteração no estado inicial.



Com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), o quadro 31 apresenta o esquema sagital e a equação que representa as relações do problema misto 4. A equação final é representada por v(p), sendo (v) o valor a ser recebido em função da quantidade de publicações não feitas (p):

Quadro 31: Esquema sagital - subclasse proporção simples e transformação de medidas do tipo quarta proporcional com a transformação positiva e o estado inicial (a) desconhecido

Esquema sagital	Equações
seguidores — valor a receber (em dólares) — estado inicial — estado final 	$250000 \cdot b = 5000 \cdot s$ $250000b = 5000 \cdot 100000$ $b = \frac{500000000}{250000}$ $b = 2000$ $\therefore$ $v(p) = 23000 - 2000p$

Fonte: A autora, baseada em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

A partir das análises, o quadro 32 apresenta as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item a) da situação 4, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 32: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item a) da situação 4

Estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
seguidores valor descontado f(b1) —— b1 f(b) —— b seguidores valor descontado 250.000 —— 5000 100.000 —— b $250000 \cdot b = 5000 \cdot 100000$ $250000b = 500000000$ $b = \frac{500000000}{250000} = 2000$	Adequada	TAV1: $f(b) \cdot b1 = f(b1) \cdot b$ $b = \frac{f(b) \cdot b1}{f(b1)}\ com\ b\ e\ b1 \in \mathbb{N}$
valor descontado (em dólares) x50 5000 —— b x50 250.000 —— 100.000 seguidores $250000 = 5000 \cdot 50\ então, b \cdot 50 = 100000$ $b = \frac{100000}{50} = 2000$	Adequada	TAV3: $f(bn) = n \cdot f(b)$ com b $e\ n \in \mathbb{N}$
seguidores valor descontado (em dólares) 250.000 —— 5000 100.000 —— b $250000 \cdot b = 5000 \cdot 100000$ $250000b = 500000000$ $b = \frac{500000000}{250000}\quad b \neq 2000$	Inadequada (o estudante pode apresentar erros nos cálculos, obtendo uma resposta incorreta)	Não identificado
seguidores valor descontado (em dólares) 250.000 —— 100% 100.000 —— b	Inadequada (o estudante pode fazer uma análise errônea e utilizar porcentagem nos cálculos)	
$b = \frac{5000}{2}$ $b \neq 2000$	Inadequada (o estudante pode dividir o valor que outro influencer perde por um número aleatório, obtendo uma resposta incorreta)	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para a resolução do item a), identificamos a possibilidade de mobilização de dois teoremas em ação verdadeiros. Em relação ao TAV1, seja f uma função em que a quantia (b) perdida por publicação não feita é proporcional ao número de seguidores, então (b), que representa a transformação, pode ser obtido a partir da relação de proporcionalidade em que $f(b) \cdot b1 = f(b1) \cdot b$, sendo f(b1) e (b1), valores relativos ao outro influencer da situação.

TAV3: considera-se f uma relação de proporcionalidade que associa o valor descontado (b, b1) com o número de seguidores. Se o valor descontado (b1) é resultado da divisão da quantidade de seguidores por um número natural n, então o valor (b) descontado de Enzo também será resultado da divisão de seguidores de Enzo por n. Assim, o valor descontado (b) multiplicado por n resulta no número de seguidores de cada influencer, sendo $n = \frac{f(b1)}{b1} = \frac{250000}{5000} = 50$, temos: $f(b) = n \cdot b \rightarrow 100000 = 50 \cdot b \rightarrow b = 2000$.

O item b) requisita uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares, de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas. A expressão algébrica é obtida pela subtração do estado inicial $23.000 com a multiplicação da perda de $2.000 por publicação (p) não feita:

$$v(p) = 23000 - 2000p$$

A partir das análises *a priori*, incluindo análises do estudo piloto, o quadro 33 apresenta as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item b) do problema misto 4, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 33: Possibilidades de estratégias de resoluções para o item b) da situação 4

Respostas e estratégias		Teoremas em ação possíveis de ser manifestados
$v(p) = 23000 - 2000p$	Adequada	TAV5: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)$, com a e b ∈ ℕ
$v(p) = -2000p$	Inadequada (não considera o estado inicial $23.000)	TAF1: $a \pm f(bp) = \pm f(bp)$ $com\ a\ b, e\ p \in \mathbb{N}$
$v(p) = 23000 - p$	Inadequada (não considera um valor correto para a quantia que Enzo perde por publicação não feita)	Não identificado
$v(p) = 23000 + 2000p$	Inadequada (o estudante pode apresentar uma soma ao invés de uma subtração)	
$v(p) = 23000$	Inadequada (não realiza a subtração da transformação de $2000 por publicação)	TAF3: $f(t) = a \pm f(bt) = a$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
$v(p) = 21000p$	Inadequada (soma número natural com variável)	TAF4: $f(t) = bt + c = (b + c) \cdot t$ $com\ b, c\ e\ t \in \mathbb{N}$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Em relação ao TAV5, consideremos f uma função em que é associado o valor a ser recebido com o número de publicações (p) não feitas. A relação pode ser obtida a partir de uma notação na qual $a \pm f(bp) = a - b \cdot f(p) = 23000 - 2000 \cdot f(p)$.

O TAF1 pode ser observado a partir da exclusão do estado inicial na expressão; no caso. o coeficiente linear de $23000. Indicamos o TAF3 para expressões nas quais os estudantes não consideram o coeficiente angular, a transformação (b) de $2000,00. O TAF4 é indicado para resoluções que apresentem uma soma de número natural com variável.

No item c) é dado que, em fevereiro. Enzo recebeu 9.000 dólares, e questiona-se quantas publicações ele deixou de fazer para receber esse salário. Para responder, basta utilizar a expressão obtida no item anterior, substituindo o recebido em fevereiro. Assim, temos:

$$v(p) = 23000 - 2000p$$
$$9000 = 23000 - 2000p$$
$$-14000 = -2000p$$
$$\frac{-14000}{-2000} = p$$
$$p = 7$$

Logo, ele deixou de fazer 7 publicações no mês de fevereiro para obter um salário de 9.000 dólares.

A partir das análises *a priori*, incluindo análises do estudo piloto, o quadro 34 apresenta as possíveis estratégias a ser desenvolvidas pelos estudantes na resolução do item c) do problema misto 4, e os possíveis teoremas em ação envolvidos.

Quadro 34: Possibilidades de estratégias de resoluções no item c) da situação 4

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias</th><th>Teoremas em ação possíveis de ser manifestados</th></tr>
<tr><td>$23000 - 9000 = 14000$
$2000 + 2000 + \cdots + 2000 = 14000$
$p = 7\ publicações$</td><td>Adequada</td><td>TAV4: $f(p + p + p + \cdots + p) = f(p) + f(p) + f(p) + \cdots + f(p), com\ p \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>$9000 = 23000 - 2000p$
$9000 - 23000 = -2000p$
$14000 = 2000p$
$p = \frac{14000}{2000}\quad p = 7\ publicações$</td><td>Adequada</td><td>TAV5: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t),$
com a e b ∈ ℕ</td></tr>
<tr><td>$14000 = 7 \cdot 2000$
$\therefore\ 7\ publicações$</td><td>Adequada</td><td>TAV1: $f(p) = p \cdot b$ e
$p = \frac{f(p)}{b} com\ p\ e\ b \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>$23000 - 9000 = 14000$
$p = \frac{14000}{2000}\quad p = 7\ publicações$</td><td>Adequada</td><td>TAV2: $f(p) = a + b \cdot p$
$com\ p\ e\ b \in \mathbb{N}$</td></tr>
</table>

$9000 = 23000 - 2000p$ $9000 - 23000 = -2000p$ $14000 = 2000p$ $p = \frac{14000}{2000} \quad p \neq 7\ publicações$	Inadequada (o estudante pode efetuar cálculos incorretos e obter um número diferente de 7)	Não identificado
$23000 - 2000 = 21000$ $21000 - 2000 = 19000$ $19000 - 2000 = 17000$ $\vdots$ $11000 - 2000 = 9000$ $p \neq 7\ publicações$	Inadequada (utilizando sucessivas subtrações, o estudante pode efetuar cálculos inadequados e obter uma resposta diferente de 7)	
$p = \frac{9000}{2000} \quad p \neq 7\ publicações$	Inadequada (o estudante não realiza a subtração do salário inicial)	TAF1: $a \pm f(bp) = \pm f(bp)$ $com\ a\ b, e\ p \in \mathbb{N}$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O TAV4 pode ser mobilizado na utilização do isomorfismo aditivo, no qual $f(1) + f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = 2000 + 2000 + \cdots + 2000 = 14000$. O resultado é obtido a partir de sucessivas adições: soma-se quantas vezes foi utilizada a $f(1)$, sete. Em relação ao TAV5, é indicado se, na resolução, os estudantes considerarem f uma função na qual é associado o valor a ser recebido com o número de publicações (p) não feitas; no caso, a partir da expressão algébrica requerida no item b). Indicamos o TAV1 para as resoluções nas quais os estudantes considerem f uma função em que a quantia (b) perdida por publicação não feita é proporcional ao número de seguidores, e efetuem uma multiplicação direta para a obtenção do número de publicações $7 \cdot 2000 = 14000$. O TAV2 é indicado a partir da subtração do estado inicial de 23.000 pelo estado final de 9.000: obtém-se a quantia perdida, 14.000. Para finalizar a resolução, divide-se o valor perdido pela transformação (b) de 2.000, obtendo a resposta de 7 publicações. O TAF1 pode ser observado a partir da exclusão do estado inicial na expressão; no caso, o coeficiente linear de $23000.

Assim, com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), e com o apoio e discussões do GEPeDiMa, estabelecemos o instrumento de pesquisa disponível no apêndice III, contemplando a classe de problemas mistos *proporção simples com transformação de medidas*, e quatro de suas variações. Evidenciamos os esquemas sagitais para cada situação, garantindo a diversidade de subclasses e mantendo um padrão em cada situação, e apresentamos as estratégias e os teoremas em ação possíveis de ser mobilizados nas resoluções. No próximo capítulo são apresentadas as análises das estratégias dos estudantes.

6 ANÁLISES

Neste capítulo são apresentadas as análises das resoluções dos participantes da pesquisa, estudantes da 3ª série do Ensino Médio. Para cada estratégia de resolução dos estudantes, buscou-se identificar os possíveis teoremas em ação verdadeiros e falsos mobilizados por eles.

Para as análises, consideraram-se as produções escritas dos estudantes e o diálogo entre a pesquisadora e os estudantes durante e após a implementação. No texto, as resoluções foram agrupadas conforme estratégias similares utilizadas pelos estudantes. As análises das resoluções dos estudantes permitiram a identificação de teoremas em ação verdadeiros e falsos.

Os participantes da pesquisa são identificados, neste texto, por E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10. Indica-se, por TAF (TAF1, TAF2...), os teoremas em ação falsos; e por TAV (TAV1, TAV2...), os teoremas em ação verdadeiros. Após as análises de cada problema, foi elaborado um quadro sintetizando os invariantes operatórios identificados nas resoluções dos estudantes.

6.1 Análises das resoluções da situação 1

Classe: proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa).

Para esvaziar uma piscina de 30.000L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000L de água por hora.

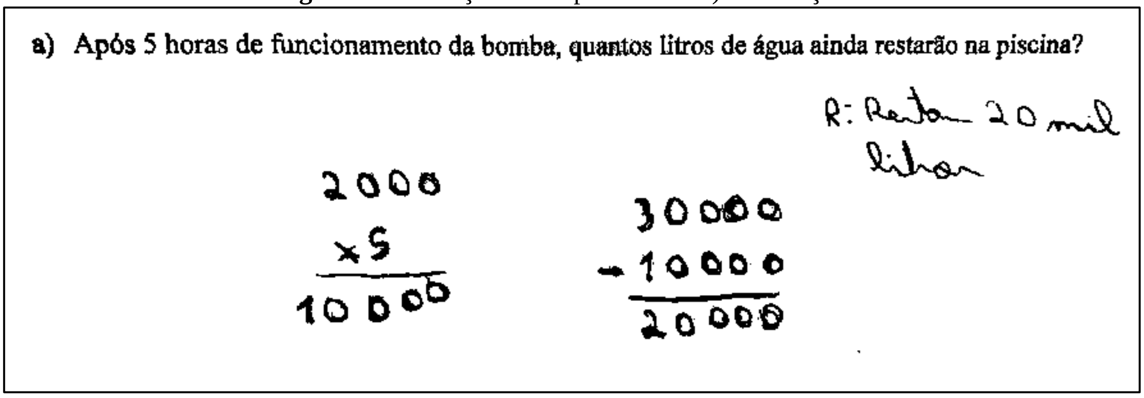
d) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?
e) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.
f) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

6.1.1 Análises do item a)

Dos dez (10) estudantes que resolveram a situação, nove (09) apresentaram estratégias adequadas. O estudante E9 apresentou uma estratégia parcialmente adequada, identificando corretamente a quantidade de água retirada pela bomba, mas não realizou a subtração necessária para identificar quantos litros ainda restavam na piscina.

Em relação às estratégias adequadas, foram identificados dois tipos na resolução do item a). Nove estudantes (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10) utilizaram a seguinte estratégia adequada: observaram que, para cada hora, a bomba retira 2.000 litros de água da piscina, e para descobrir quantos litros a bomba retira em 5 horas de funcionamento, os estudantes multiplicaram o tempo (5 horas) pela quantidade de água retirada por hora (2.000), totalizando 10.000 litros de água. E4 não apresentou estratégia escrita, mas a partir da fala do estudante, a estratégia foi identificada: "*eu fiz de cabeça, professora. A cada uma hora tira 2 mil; então, em 5 horas, é só multiplicar por 5 os 2 mil, que dá 10 mil*[1]. Apresentamos na figura 4 a resolução de E7 que representa a resolução dos nove estudantes mencionados.

Figura 4: Resolução de E7 para o item a) da situação 1



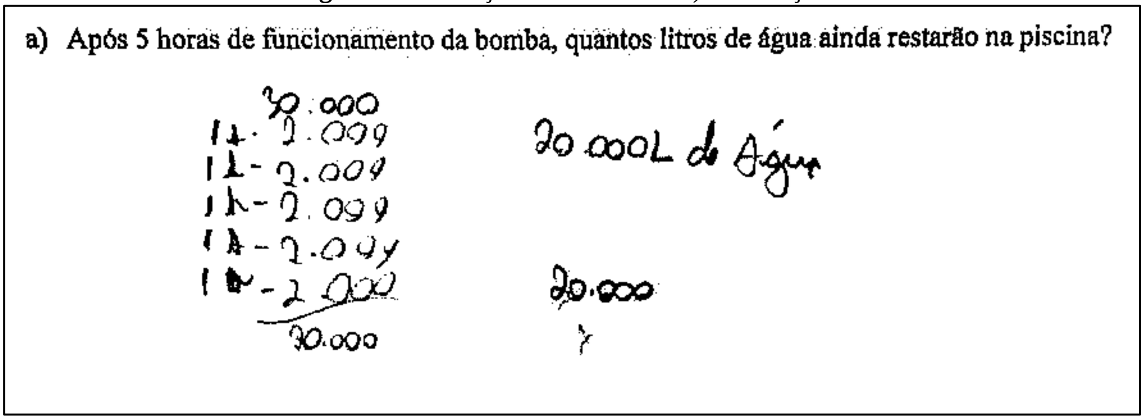
Fonte: Acervo da pesquisa.

Com base em Vergnaud (2007), nota-se que os estudantes E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10 estabeleceram uma relação de proporcionalidade do tipo multiplicação um para muitos, ao observarem que a bomba retira 2.000 litros de água por hora, e que para resolução da situação, basta multiplicar 2.000 por 5 que se obtém a quantidade de água retirada da piscina em cinco horas, 10.000 litros. Assim, se em 1 hora é retirado 2.000 litros; então, para 5 horas será 5 vezes 2.000. No caso, $5 \cdot 2000 = 10000$. Vergnaud (1996a; 2007) menciona o TAV1 ao relatar sobre a propriedade de isomorfismo das funções lineares. Esse teorema em ação também foi identificado no estudo de Rodrigues (2021), ao desenvolver uma pesquisa associada ao conceito de função com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, assim, destacamos que o teorema em ação se mantém, independentemente do nível de escolaridade.

[1] As falas transcritas dos estudantes não passaram por revisões textuais.

A outra estratégia de resolução identificada nesta pesquisa foi utilizada pelo estudante E3, ao resolver a situação por meio de subtrações sucessivas. Apresentamos, a seguir, sua resolução na figura 5.

Figura 5: Resolução de E3 no item a) da situação 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E3 inicia sua resolução com a anotação da capacidade total da piscina, de 30.000 litros; e realiza cinco subtrações de 2.000 litros, pois são cinco horas de funcionamento da bomba retirando 2.000 litros hora, resultando em 20.000 litros restantes. Gitirana *et al.* (2014) alertam que essa estratégia não é viável para números grandes, pois a adição de números com mais de 3 algarismos, por exemplo, repetidas vezes, pode gerar confusão e/ou respostas inadequadas.

Fundamentadas em Vergnaud (2007), interpretamos que E3 estabelece a resolução por meio de um isomorfismo aditivo: $f(t + t + t \dots t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t)$. Desse modo, é possível indicar a manifestação de um teorema em ação verdadeiro, que destacamos a seguir pela sigla TAV4, conforme previsto nas análises *a priori*.

Calado (2020) identificou a mobilização do TAV4 na resolução de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental; e Rodrigues (2021), na resolução de estudantes do 5° ano da mesma etapa da Educação Básica. Após obter que em 5 horas a bomba retira 10.000 litros de água, nove (9) estudantes, E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10 e E4, a partir da fala de E4, explicitada anteriormente, realizaram a subtração da quantidade de 30.000 litros de água com a piscina cheia, pela água retirada pela bomba de 10.000 litros, ficando com 20.000 litros de água na piscina.

A resolução de E9 difere das demais: após multiplicar 2.000 por 5, resultando em 10.000 litros, o estudante apresenta esse resultado como resposta, pois não observou a necessidade de uma subtração dos 30.000 litros de água pelos 10.000. Assim, é possível observar, nas resoluções de E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10 e na fala do estudante E4, a manifestação do TAV2, por meio da subtração na resolução, consistindo na transformação (b) direta do estado inicial (a) de 30.000 para encontrar o estado final (c) de 20.000.

O TAV2 é mencionado por Vergnaud (2007, p. 7) do seguinte modo: "se uma subtração faz passar do estado inicial para o estado final, então uma adição faz passar do estado final para o estado inicial. A seguir, apresentamos o quadro 35, com as estratégias desenvolvidas pelos estudantes e os teoremas em ação manifestados no item a) da situação 1.

Quadro 35: Estratégias de resolução desenvolvidas no item a) da situação 1

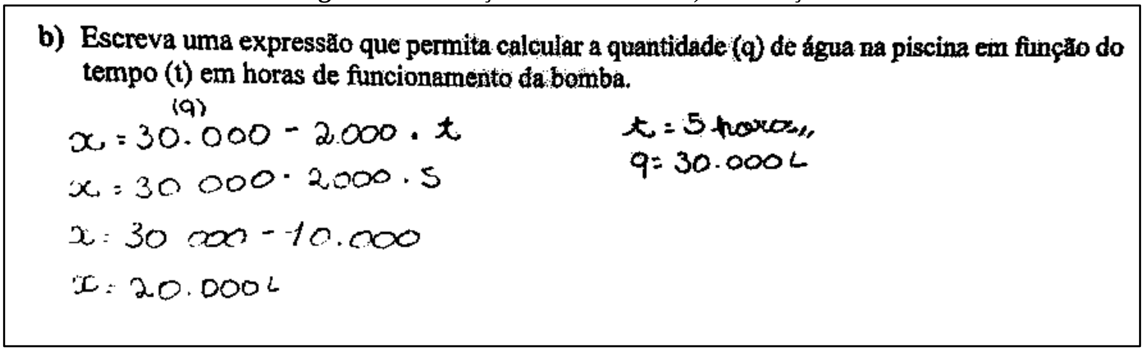
Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Observa que, para cada uma hora, a bomba retira 2.000 litros de água da piscina. Sendo assim, multiplica o tempo (5 horas) pela quantidade de água retirada por hora (2.000), totalizando 10.000 litros de água.	E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10	TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t}$ $com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$
Utiliza sucessivas subtrações para a resolução até que se obtenha cinco vezes, já que são 5 horas.	E3	TAV4: $f(t+t+t+\cdots+t) = f(t)+f(t)+f(t)+\cdots+f(t), com\ t \in \mathbb{N}$
Efetua a transformação (b) direta do estado inicial (a) – 30000, ao subtrair dele a água retirada pela bomba – 10.000 para encontrar o estado final (c) – 20000.	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10	TAV2: $c = a + (\pm\, b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$
Estratégia adequada com resposta inadequada	Estudante	Teorema em ação
Após identificar que a bomba retira 10.000 litros de água da piscina, não realiza a subtração da capacidade total de 30.000 litro pela quantidade de água retirada pela bomba, de 10.000 litros, apresentando como resposta que restarão na piscina 10.000 litros.	E9	Não identificado

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.1.2 Análises do item b)

Na resolução do item b) da situação 1, foram observadas duas estratégias adequadas, de E2 e E5; e oito inadequadas, de E1, E3, E4, E6, E7, E8, E9 e E10. O estudante E2 apresentou uma expressão correta, na qual relaciona a quantidade (q) de água na piscina com o tempo (t) em horas que a bomba funciona, conforme figura 6.

Figura 6: Resolução de E2 no item b) da situação 1



b) **Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.**

(q)
x = 30.000 - 2.000 . t
x = 30 000 · 2.000 · 5
x = 30 000 - 10.000
x = 20.000 L

t = 5 horas
q = 30.000 L

Fonte: Acervo da pesquisa.

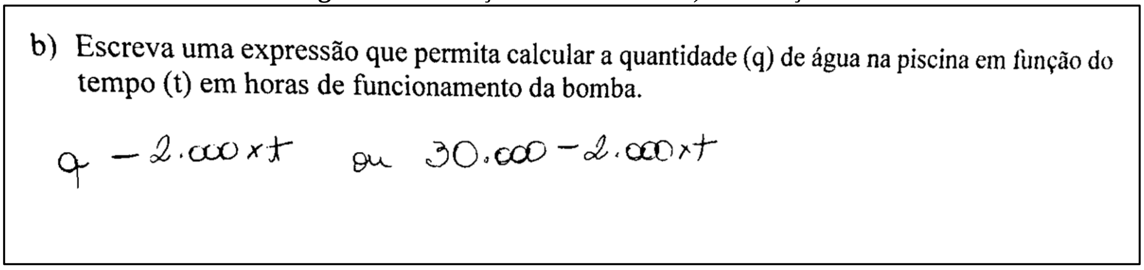
Na resolução de E2, é possível observar a letra x antes da expressão. A letra x é bastante explorada nas aulas de Matemática. Segundo Lucas *et al.* (2014), a ideia apresentada indica pouca variedade de letras para representar variáveis e incógnitas. A pouca utilização e visualização de outras nomenclaturas podem provocar obstáculos para os estudantes. Na investigação realizada, Lucas *et al.* (2014) constataram que o número de respostas em branco e incorretas aumentaram, ao se colocar uma letra menos habitual para simbolizar uma variável ou incógnita.

E2, após a formulação da expressão, apresentou uma complementação para conferir se a estratégia está correta, atribuindo um valor para a variável t da expressão. Mesmo não sendo solicitado, isso é um fato que consideramos positivo. No caso da estratégia do estudante E2, é possível observar a conferência a partir do tempo, 5 horas, substituído na expressão resolvida pelo estudante. Essa ação se repete em outros momentos das análises, com outros estudantes. A conferência de resultados é realizada, de acordo com Zuin (2019), desde os séculos passados, e possui relevância na educação matemática, visto que a partir desse saber, é possível verificar a veracidade de resoluções. Porém, baseadas em Zuin (2019), consideramos que é preciso cautela, pois mesmo os cálculos estando corretos, o estudante pode ter iniciado uma resolução de forma inadequada, o que pode não ser detectado pela conferência local dos cálculos. Assim, seria preciso uma (re)análise de toda a resolução.

O estudante E5 apresentou uma resposta correta, mas se observa, em sua resolução, duas formas de estratégias, sendo a primeira $q - 2000t$ e a segunda $30000 - 2000t$, as duas estão corretas. Elas diferem apenas pelo fato de que, na segunda, o estudante atribui um valor para a variável q; e na primeira, mantém a variável, conforme a figura 7. Questionado a respeito da resolução, o estudante afirmou: *"eu coloquei as duas porque pensei, ou é 30 mil, ou é uma quantidade que a gente não sabe. Já que quando não sabemos um valor, a gente coloca a letra, coloquei a letra q de quantidade.*

Segundo Rosso e Berti (2010), os estudantes, ao resolverem determinada situação, ao invés de apenas pensar sobre a resolução, podem apresentar uma resposta qualquer, ou a que julgam ser a esperada pelo professor. Segundo os autores, isso indica que os estudantes não sustentam suas posições, não participam de forma ativa, e acabam desatentos em suas resoluções. As ideias elencadas por Rosso e Berti (2010) podem ser uma análise pertinente para a estratégia do estudante E5, visto que ele apresenta duas respostas, as duas adequadas, mas houve um intuito de atender às expectativas da professora/pesquisadora.

Figura 7: Resolução de E5 no item b) da situação 1


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

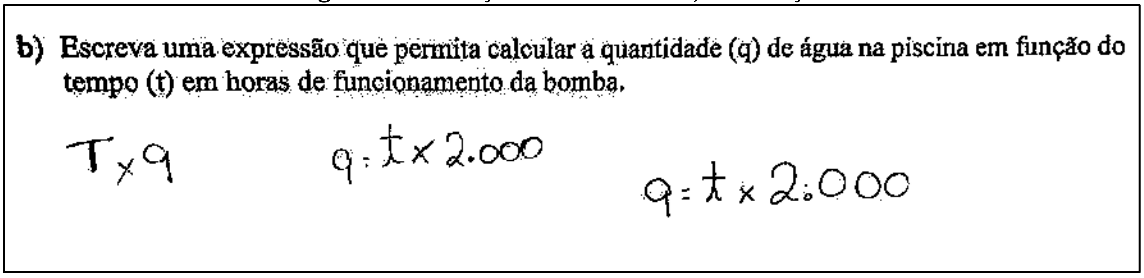
q – 2.000 x t ou 30.000 – 2.000 x t

Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao analisar as resoluções dos estudantes E2 e E5, figuras 6 e 7, é possível observar que a quantia de água na piscina é determinada a partir da subtração da capacidade total da piscina (30000 litros) pela quantidade de água que a bomba retira por hora (2000 litros), multiplicada pelo tempo (em horas). Com base em Vergnaud (2007), afirmamos que o conhecimento mobilizado pelos estudantes, ao considerarem uma função real associando a capacidade total da piscina com a quantidade de água que a bomba retira por hora, por meio de uma expressão algébrica, pode ser modelado na forma de um teorema em ação verdadeiro, associando o isomorfismo das funções lineares à propriedade das relações de proporcionalidade: a expressão, nesse caso particular, representa a quantidade de água da piscina. Assim, com base em Vergnaud (2007) e na análise das resoluções dos estudantes, indicamos a mobilização do TAV5. Calado (2020) também identifica esse teorema em ação verdadeiro nas resoluções de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Os estudantes E1, E4 e E9 apresentaram estratégias inadequadas para o item b), não consideraram a capacidade total da piscina de 30000 litros nas resoluções, e apresentaram apenas a multiplicação da capacidade de 2.000 litros da bomba pelo tempo. Para exemplificar esta estratégia, apresentamos, na figura 8, a resolução de E1.

Figura 8: Resolução de E1 no item b) da situação 1


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

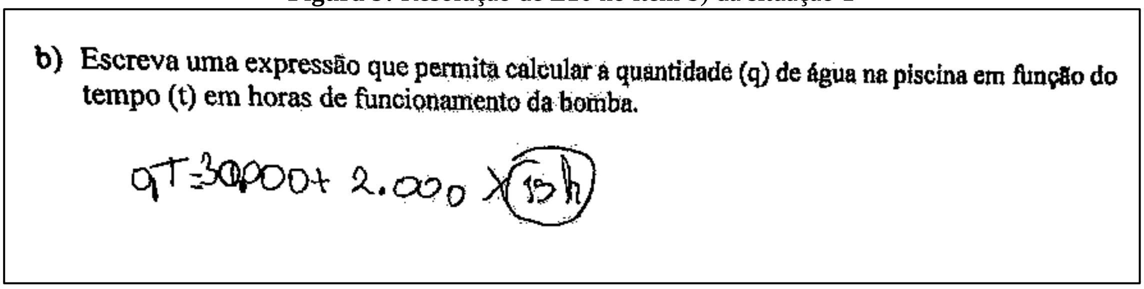
T x q   q: t x 2.000   q = t x 2.000

Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir da resolução dos estudantes, indicamos a mobilização do TAF1, no qual o estudante não considerou o estado inicial (a). Não identificamos o TAF1 nas pesquisas analisadas, mas o indicamos pelo fato de os sujeitos desta investigação terem manifestado essa ideia em mais de uma situação, conforme explicitamos nas análises das situações seguintes.

Outra estratégia inadequada foi identificada na resolução do estudante E10, que ao invés de subtrair da capacidade total da piscina, de 30000 litros, a quantia retirada pela bomba em função do tempo, realizou uma adição: $q(t) = 30000 + 2000 \cdot t$. Isso consiste em um erro, visto que a partir da expressão, a quantidade de água irá aumentar, e não diminuir, conforme o contexto da situação 1. Apresentamos, na figura 9, a resolução do estudante E10.

Figura 9: Resolução de E10 no item b) da situação 1


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

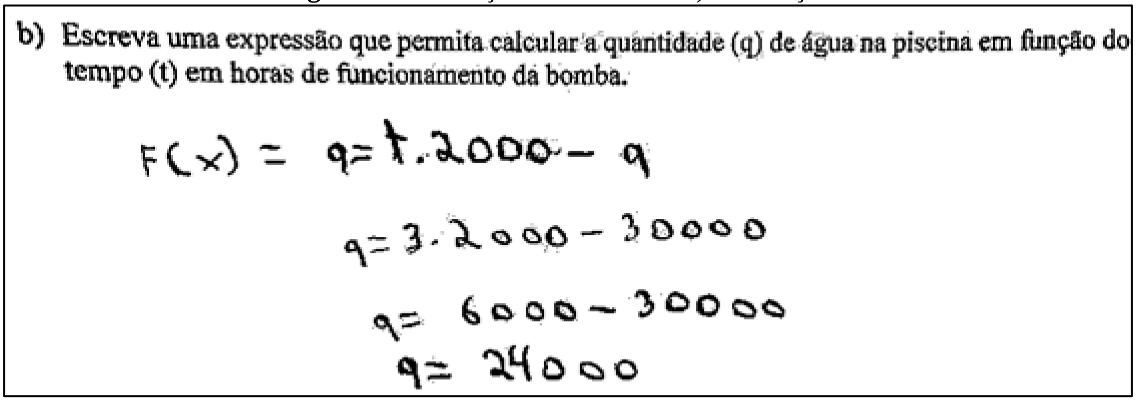
qT=30000+ 2.000 X 15h

Fonte: Acervo da pesquisa.

E10, assim como E2, na resolução do item b), apresentou a ideia de uma conferência de sua resposta. Mesmo que a expressão não esteja correta, a ideia está explícita na estratégia.

Os estudantes E3, E6, E7 e E8 também apresentaram estratégia inadequada para o item b). Ao invés de subtrair da capacidade total de 30.000 litros da quantidade de água retirada pela bomba por hora, eles subtraíram da quantidade de água retirada pela bomba por hora a capacidade total da piscina, apresentando como solução: $f(t) = 2000t - 30000$. Para exemplificar, apresenta-se, na figura 10, a resolução de E7.

Figura 10: Resolução de E7 no item b) da situação 1


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

F(x) = q=t.2000 - q

q=3.2000 - 30000

q= 6000 - 30000

q= 24000

Fonte: Acervo da pesquisa.

E7, após a formulação da expressão, assim como E2 e E10, apresentou uma complementação para conferir se a estratégia estava correta, atribuindo valores para a variável da expressão, mesmo não sendo solicitado. Na resolução é possível, de fato, observar a respeito das ideias de Zuin (2019): o estudante realiza uma conferência, e acredita em sua veracidade, mas há erros, tanto na conferência quanto na estratégia, pois deveria resultar em -24000. No caso da estratégia de E7, é possível observar a conferência a partir do tempo 3 substituído na expressão resolvida pelo estudante.

A partir da resolução relatada dos estudantes E3, E6, E7 e E8, indicamos o TAF5.

TAF5: $a - f(bt) = f(bt) - a \; com \; a \; b, e \; t \in \mathbb{N}$

A seguir apresentamos, no quadro 36, uma síntese das estratégias desenvolvidas pelos estudantes e os teoremas em ação manifestados no item b) da situação 1.

Quadro 36: Estratégias de resolução desenvolvidas no item b) da situação 1

Estratégia adequada	Estudantes	Teorema em ação
Relaciona corretamente a quantidade (q) de água na piscina com o tempo (t) em horas que a bomba funciona.	E2 e E5	TAV5: $f(bt) \pm a = b \cdot f(t) \pm a$, com a e b ∈ ℕ
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teorema em ação
Não consideram a capacidade total da piscina, apresentando como resposta $f(t) = 2000t$.	E1, E4, E9	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt) \; com \; a \; b, e \; t \in \mathbb{N}$
Realiza uma adição da capacidade total da piscina com a quantia de água retirada pela bomba em relação ao tempo.	E10	Não identificado
Subtrai da quantidade de água retirada pela bomba por hora, a capacidade total da piscina.	E3, E6, E7 e E8	TAF5: $a - f(bt) = f(bt) - a \; com \; a \; b, e \; t \in \mathbb{N}$
Adiciona a letra x na resolução, mesmo não sendo uma das variáveis da situação.	E2	Não identificado.

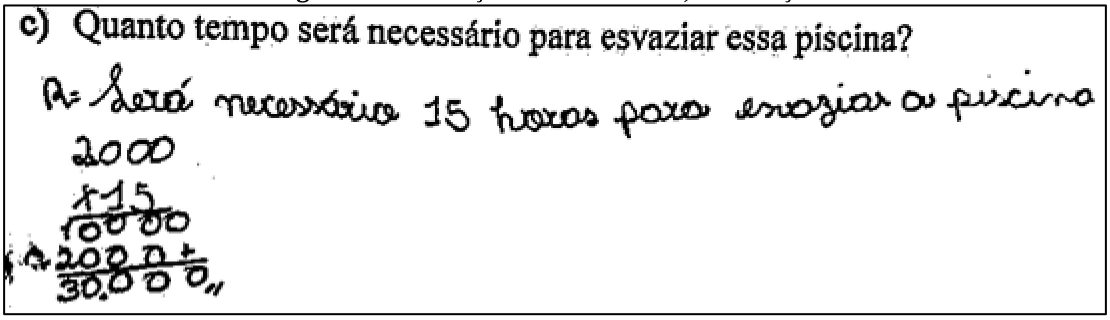
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.1.3 Análises do item c)

Nas análises do item c), foi observado que nove estudantes (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10) apresentaram resoluções adequadas, e que um estudante (E3) apresentou uma estratégia adequada com resposta incorreta. Foram observadas três variações de estratégias adequadas, explicitadas a seguir.

Os estudantes E1 e E2 apresentam resoluções adequadas ao analisarem: que número, no caso o tempo (t), multiplicado pela vazão da bomba de 2.000 litros, resultaria em 30.000 litros. Os estudantes E4, E9 e E10 não apresentaram estratégias escritas, apenas a resposta: 15 horas. Questionados, os três respondem da mesma forma: *"pensei que número vezes 2 dá 30, e é 15"*. A partir da fala dos estudantes, identificamos a estratégia igual àquela apresentada por E1 e E2. Para exemplificar a resolução, apresentamos, na figura 11, o item c) de E2.

Figura 11: Resolução de E2 no item c) da situação 1


c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

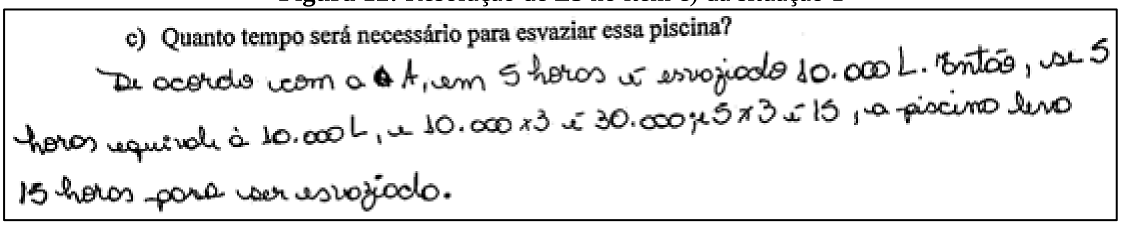
R: Será necessário 15 horas para esvaziar a piscina

2000
x15
10000
+2000
30.000

Fonte: Acervo da pesquisa.

Os estudantes E5, E6 e E7 observaram que, se em 5 horas são retirados 10.000 litros de água; então, para retirar 30.000 litros, que é $3 \cdot 10000$, levará $3 \cdot 5 = 15$, conforme a resolução explicitada por E5.

Figura 12: Resolução de E5 no item c) da situação 1


c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

De acordo com a A, em 5 horas é esvaziado 10.000 L. Então, se 5 horas equivale à 10.000 L, e 10.000 x3 é 30.000 e 5x3 é 15, a piscina leva 15 horas para ser esvaziado.

Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E8 apresentou, como resposta, a divisão indicada a seguir: $\frac{30000}{2000} = 15$. É possível observar que E8 dividiu a capacidade total da piscina pela quantidade de água que a bomba retira por hora, resultando nas 15 horas, de modo adequado.

A partir das análises e da fala dos estudantes, indicamos que E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10 manifestaram a utilização do TAV1, pois estabeleceram uma relação de proporcionalidade do tipo multiplicação um para muitos, ao analisar que: se em 1 hora são retirados 2.000 litros; então, para retirar 30.000 litros, $30000 = 15 \cdot 2000$, levará 15 horas. A partir disso, indica-se que os estudantes manifestaram a utilização do TAV1, em que $f(t) = b \ \cdot t, sendo\ b = \frac{f(t)}{t}\ com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$.

Em relação à resolução inadequada, indicamos a do estudante E3, que respondeu: *"sobrou 20.000 litros, será necessário 10 horas"*. O estudante respondeu que seriam necessárias 10 horas, pois ele considerou que a bomba já retirou 10.000 litros de água, a partir do item a); então, só faltam 20.000 litros para ser retirados. O enunciado do item c) questiona quanto tempo é necessário para esvaziar a piscina. A partir disso, consideramos a resposta do estudante incorreta, mas a estratégia é adequada, visto que os valores são adequados para a situação que ele compreendeu. Consideramos que, mesmo a resposta final estando incorreta, o estudante também manifesta o TAV1, visto que a relação de proporcionalidade pode ser observada quando o estudante estabelece que a transformação (b) de 2000 litros multiplicada pelo tempo t de 10 horas resulta nos 20.000 litros de água que restavam na piscina.

Para sintetizar as análises do item c) da situação 1, foi elaborado o quadro 37, a seguir, com as estratégias desenvolvidas e os teoremas em ação possíveis de ser mobilizados pelos estudantes.

Quadro 37: Estratégias de resolução desenvolvidas no item c) da situação 1

<table>
<tr><th>Estratégias adequadas</th><th>Estudantes</th><th>Teoremas em ação</th></tr>
<tr><td>Identificaram que número multiplicado por 2.000 resulta em 30.000; no caso, 15.</td><td>E1, E2, E4, E9 e E10</td><td rowspan="3">TAV1: $f(t) = b \ \cdot t$, e b = $\frac{f(t)}{t}$
$com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>Dividiu a capacidade total da piscina pela quantidade de água que a bomba retira por hora, resultando nas 15 horas.</td><td>E8</td></tr>
<tr><td>Analisaram que, se em 5 horas são retirados 10.000 litros; então, para retirar 30.000 litros, que é $3 \cdot 10000$, levará $3 \cdot 5 = 15$.</td><td>E5, E6 e E7</td></tr>
<tr><td>Estratégia adequada com resposta inadequada</td><td>Estudantes</td><td>Teorema em ação</td></tr>
<tr><td>Desconsiderou 10.000 litros de água da capacidade da piscina, obtendo um tempo diferente de 15 horas.</td><td>E3</td><td>TAV1: $f(t) = b \ \cdot t$, e b = $\frac{f(t)}{t}$
$com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Em síntese das análises da situação 1, indicamos as estratégias e os teoremas em ação manifestados. Em relação ao item a), foram observadas dez (10) estratégias adequadas e a mobilização de três (03) teoremas em ação verdadeiros, TAV1, TAV2 e TAV4. No item b), houve duas (02) estratégias adequadas e oito (08) inadequadas. Foram mobilizados, nesse item, um (01) teorema em ação verdadeiro (TAV4) e três (03) teoremas em ação falsos (TAF1, TAF2 e TAF5). No item c), foram observadas dez (10) estratégias adequadas e nenhuma inadequada, visto que, no referido item, apenas a resposta final de um dos estudantes estava incorreta, mantendo-se adequada a estratégia. No item c), o TAV1 foi mobilizado por todos os estudantes.

Indicamos que, na situação 1, pertencente à classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa), os sujeitos da pesquisa responderam de forma adequada os itens a) e c); e foram observados diversos erros e estratégias inadequadas na resolução do item b): de dez (10) estratégias, oito (08) foram inadequadas. O item b) de cada situação está associado principalmente à ideia de generalização, uma das ideias essenciais para a compreensão do conceito de função. Como exemplo de erros manifestados no item b), citam-se: os estudantes não consideraram a capacidade total da piscina na expressão algébrica; realizaram a operação de adição ao invés da subtração, desconsiderando que está sendo retirada água da piscina; dentre outros erros. Apresentamos, a seguir, as análises referentes à situação 2.

6.2 **Análises das resoluções da situação 2**

Classe: proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação positiva desconhecida).

Uma turma de 3° ano deseja fazer uma viagem em dezembro de 2022. Eles já possuem em uma conta R$500,00. No mês de janeiro de 2022, começaram a guardar dinheiro:

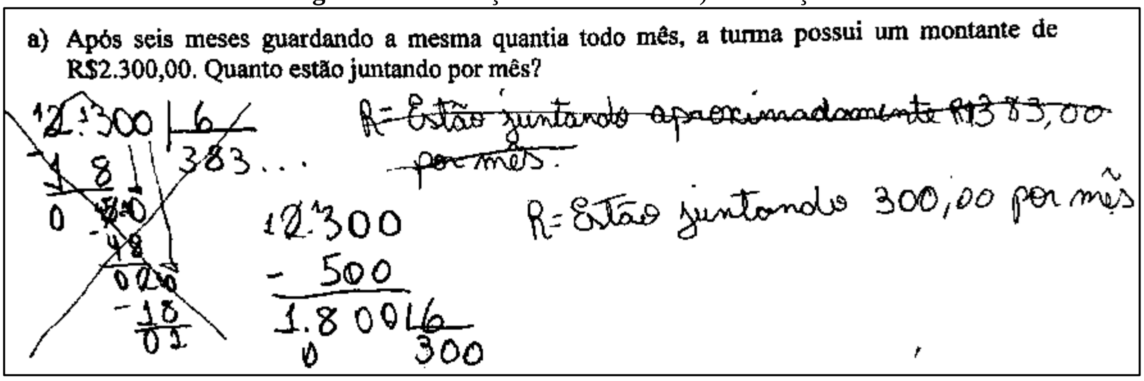
a) Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?
b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.
c) Sabendo que a viagem custará R$4.100,00 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

6.2.1 Análises do item a)

Os dez estudantes resolveram o item a). Dentre as resoluções, foram observadas sete (07) estratégias adequadas (E1, E2, E4, E5, E6, E7 e E9), e três (03) estratégias inadequadas, dos estudantes E3, E8 e E10.

E1 e E6 não resolveram inicialmente o item a) de forma adequada, mas posteriormente, ao resolverem o item b), ambos os estudantes afirmaram: *"tem alguma coisa errada, professora, não está dando certo".* Perante as dúvidas dos estudantes, a pesquisadora respondia que o importante era a forma de resolução, e não a resposta final dos estudantes. Em casos como esse, a pesquisadora também informava que, se o estudante notasse algo errado, ele poderia identificar e explicitar o erro, pois todos teriam o tempo que precisassem para a resolução das tarefas. A partir disso, ambos os estudantes apresentaram uma resolução para o item a), conforme a figura 13.

Figura 13: Resolução de E6 no item a) da situação 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

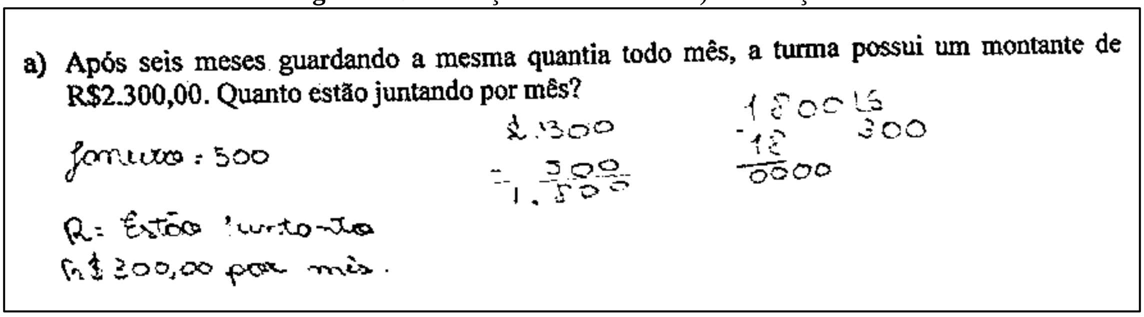
A resolução que contém um risco foi apresentada inicialmente pelos estudantes E1 e E6, e somente após a resolução do item b) que ambos perceberam o erro e apresentaram outra estratégia. Observa-se que E1 e E6, na primeira resolução, não consideraram os R$500,00 que a turma possuía antes de começarem a guardar dinheiro. Após responderem o item b), os estudantes E1 e E6 retomaram o item a), e como pode ser observado, anularam com um risco a resposta que haviam finalizado e apresentaram novos cálculos. Consideramos esse fato positivo, uma vez que a própria situação levou os alunos a refletir e identificar seus próprios erros. Vergnaud (2003) considera essencial que sejam propostas situações que possibilitem a desestabilização de conhecimentos falsos, pois constitui um dos princípios da Teoria dos Campos Conceituais: propor situações que possibilitem aos estudantes refletir sobre suas resoluções.

Para Vergnaud (1990), é importante saber quais meios o estudante utilizou para a resolução de uma situação, visto que as situações em Matemática permitem diversas formas para produzir uma resposta correta. O pesquisador afirma que há a necessidade de analisar os erros dos estudantes, pois é a partir deles que se torna possível conhecer suas dificuldades.

Além de E1 e E6, o estudante E8 também não considerou o estado inicial (a) de R$500,00, mas diferentemente dos colegas, manteve a resposta $b = 383{,}3$ até a finalização da situação 2. Desse modo, é possível indicar a possibilidade de manifestação do TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$, assumindo $b = \frac{2300}{6} = 383{,}3$ no lugar de $b = \frac{2300-500}{6} = \frac{1800}{6} = 300$.

Retomando as estratégias adequadas apresentadas pelos estudantes (E1, E2, E4, E5, E6, E7 e E9), E4 apresentou apenas a resposta adequada, e não registrou a sua estratégia. Porém, quando questionado a respeito das ideias utilizadas, foi constatado que ele utilizou a mesma estratégia dos demais, quando respondeu: *"eu diminuí o que eles tinham no começo, e depois dividi pelos seis meses"*. Para exemplificar a estratégia utilizada por E1, E2, E4, E5, E6, E7 e E9, apresenta-se, na figura 14, a resposta do E2.

Figura 14: Resolução de E2 no item a) da situação 2


a) **Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?**

Janeiro: 500

2.300 − 500 = 1.800

1800 | 6 − 18 = 0000 → 300

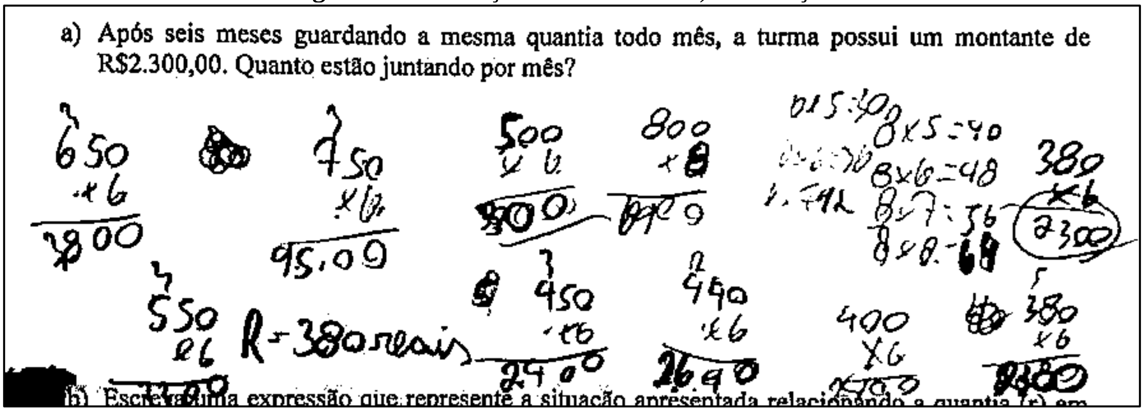
R: Estão juntando R$300,00 por mês.

Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir da análise do item a), indicamos, com base em Vergnaud (2009a), que os estudantes manifestam o TAV1, no qual $f(t) = b \cdot t \quad e\ b = \frac{f(t)}{t}\ com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$, ao estabeleceram uma relação de proporcionalidade do tipo partição na análise de que o valor de R$2.300,00 é obtido a partir de dois valores, sendo R$500,00 o inicial (a), e R$1.800,00 a transformação (b) obtida após seis meses guardando dinheiro.

Os estudantes E3 e E10 apresentaram estratégias inadequadas na resolução do item a). E3, ao ser questionado sobre a forma que pensou para resolver, respondeu: *"eles possuem, após 6 meses, R$2.300,00. Daí eu tinha que descobrir que número vezes 6 dá R$2.300,00. Aí fui* *fazendo a tabuada e cheguei que 6 vezes 380 dá 2300.* Apesentamos, a seguir, na figura 15, a estratégia utilizada pelo estudante E3.

Figura 15: Resolução de E3 no item a) da situação 2

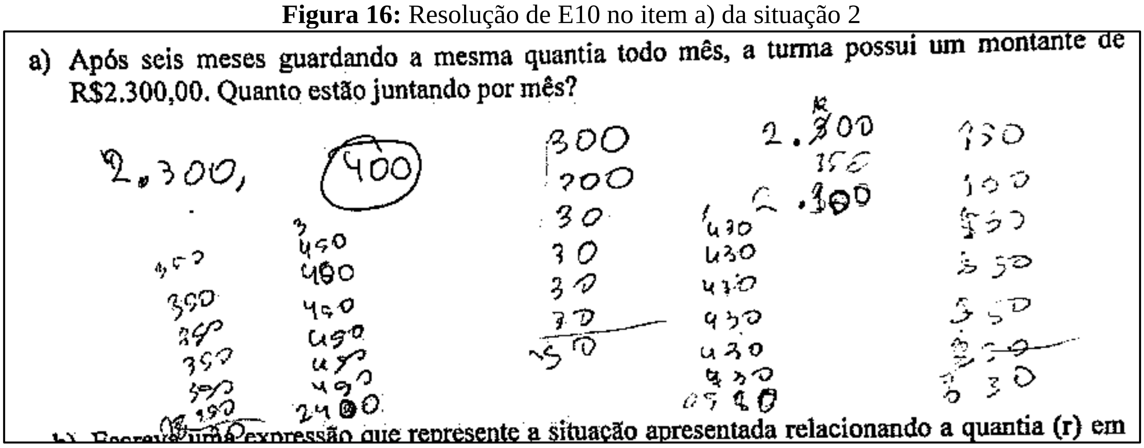


Fonte: Acervo da pesquisa.

E3 realizou diversas multiplicações, buscando, conforme sua fala, que número vezes seis resulta em R$2.300,00. Para obter o valor, bastava o estudante ter realizado uma divisão de R$2.300,00 por 6, mas ele não apresentou essa ideia e realizou diversos cálculos. Policastro e Ribeiro (2021, p. 2), em uma pesquisa sobre o conhecimento de professores a respeito dessa operação, afirmam que algumas das dificuldades em relação à divisão está associada, entre outros aspectos, "à priorização do saber fazer o algoritmo, em detrimento do entendimento e da atribuição de significado a operação".

O estudante E10 afirmou: *"eu fui tentando somar até dar os R$2.300,00. Não cheguei em um valor exato, mas o que mais chegou perto foi o R$400,00". A*presentamos, na figura 16, a estratégia do estudante E10.

Figura 16: Resolução de E10 no item a) da situação 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

A estratégia é adequada, mas conforme Gitirana *et al.* (2014), é preciso um olhar atento para esse tipo de pensamento, visto que a argumentação está baseada apenas em aspectos numéricos, não sendo considerados os aspectos funcionais da situação, assim, é preciso cautela para não criar um problema relativo à compressão da multiplicação. Isso porque "[...] olhar a multiplicação como adição repetida pode causar uma barreira na própria comutatividade da multiplicação" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 25).

Pode-se observar que ambos os estudantes, E3 e E10, realizam várias tentativas para obter o valor que a turma está guardando por mês: E3 utiliza várias multiplicações na resolução; e E10, várias adições. Nota-se que, a partir dessa estratégia, ambos os estudantes mobilizam o TAV4, mas eles não conseguem obter uma resposta adequada, pois não consideraram o valor inicial de R$500,00, que não fazia parte do montante juntado mês a mês. Ainda, os estudantes apresentam erros nos cálculos, como por exemplo: E3 afirmou que $380 \cdot 6 = 2300$, mas deveria resultar em R$2.280,00; E10 realizou uma adição do número 450 por seis vezes, que resulta, segundo o estudante, em R$2.400,00, quando deveria ser R$2.700,00. A partir das estratégias inadequadas dos estudantes, indicamos a mobilização do TAF1, ao não considerarem o estado inicial (a) de R$500,00.

Apresentamos, no quadro 38, as estratégias desenvolvidas pelos estudantes e os teoremas em ação manifestados no item a) da situação 2.

Quadro 38: Estratégias de resolução desenvolvidas no item a) da situação 2

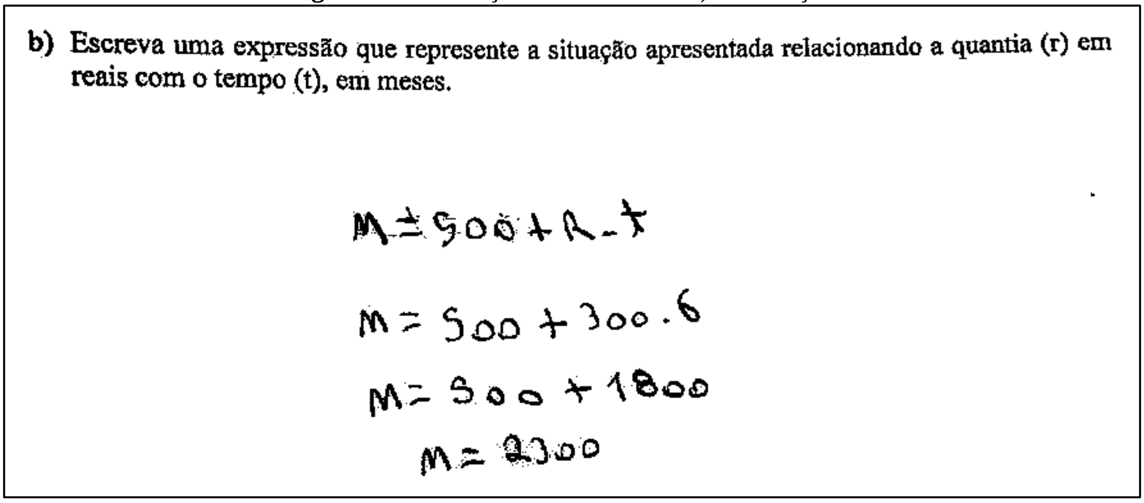
Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Após considerar a diferença entre o estado final (R$2.300) e o estado inicial (R$500,00), resultando em R$1.800,00, obtêm o valor de cada mês ao dividir R$1.800 por 6.	E1, E2, E4, E5, E6, E7 e E9	TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t} com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$
Utilizam sucessivas adições e/ou multiplicações para encontrar que número "vezes" 6 meses, resulta em R$2.300,00.	E3 e E10	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t), com\ t \in \mathbb{N}$
Estratégias inadequadas	**Estudantes**	**Teoremas em ação**
Não consideram o estado inicial (a) de R$500,00 e dividem R$2.300 por 6, quando deveriam dividir R$1.800 por 6.	E1, E6 e E8	TAF1: $f(t) = a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
Não consideram o estado inicial.	E3 e E10	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.2.2 Análises do item b)

Na resolução do item b) da situação 2, foi observada uma (01) estratégia adequada, do estudante E7, seis (06) inadequadas, dos estudantes E1, E2, E3, E5, E9 e E10, e três (03) itens foram deixados sem resposta pelos estudantes E4, E6 e E8. Em relação à estratégia adequada, apresentamos, na figura 17, a resolução de E7.

Figura 17: Resolução de E7 no item b) da situação 2

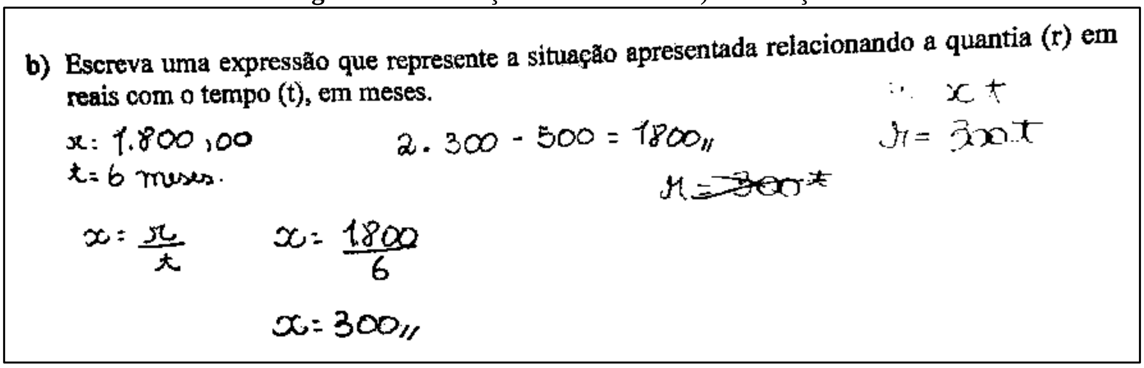


Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante considerou que o valor poupado é determinado por meio da multiplicação do valor guardado por mês pelo tempo (dado em meses) adicionado ao estado inicial (a). Com base em Vergnaud (2007), o conhecimento mobilizado pode ser modelado na forma do TAV5.

Os estudantes E1 e E2 não consideraram, em suas expressões, o valor inicial de R$500,00, e mobilizaram o TAF1. Para exemplificar a estratégia utilizada, apresentamos a resolução de E1 na figura 18.

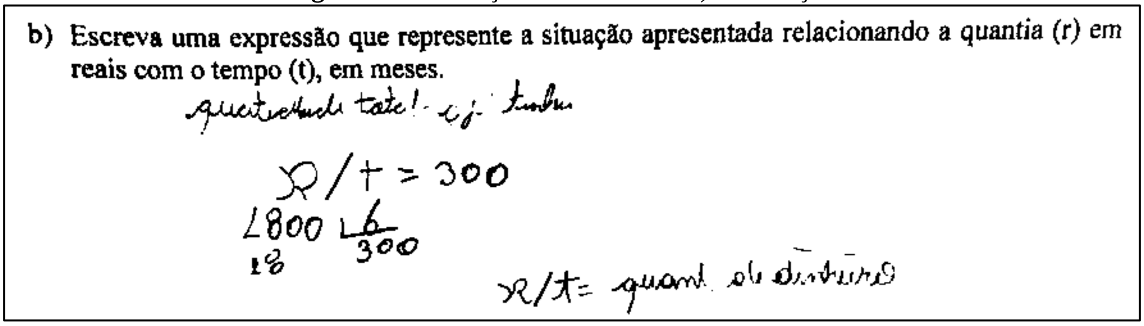
Figura 18: Resolução de E1 no item b) da situação 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

Os estudantes E3, E9 e E10 apresentaram estratégias inadequadas similares, nas quais o valor poupado por mês é resultado da divisão do valor total pelo tempo $r(t) = \frac{r}{t}$, quando deveria ser $r(t) = 500 + 300 \cdot t$. A partir das análises das resoluções dos estudantes, indicamos que eles apresentaram uma expressão que representa a quantia guardada por mês, ao invés de uma expressão que representa a quantia total. O estudante E9 apresentou, também, uma conferência de seus cálculos, ao explicitar a divisão de $\frac{1800}{6}$ para exemplificar a estratégia. A figura 19 mostra a resolução do E9.

Figura 19: Resolução de E9 no item b) da situação 2


b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

$R/t = 300$

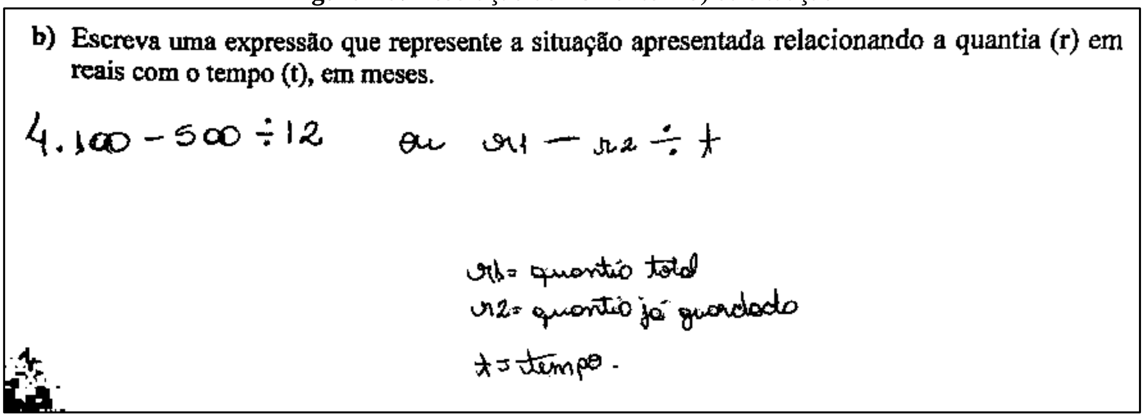
$1800 \div 6 = 300$

R/t = quant. de dinheiro

Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E5 sinalizou que a expressão é obtida a partir da subtração da quantia total (r1) pela quantia já guardada (r2) dividida pelo tempo (t). A resolução do estudante consta na figura 20.

Figura 20: Resolução de E5 no item b) da situação 2


b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

$4.100 - 500 \div 12$ ou $r1 - r2 \div t$

r1= quantia total

r2= quantia já guardada

t= tempo.

Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E5 também apresentou uma conferência de sua resposta antes da expressão algébrica. Questionado, E5 afirmou: *"a quantia que a turma possui pode ser obtida a partir da subtração do que eles precisam pelo que eles já têm, dividido pelo tempo que pouparam. Daí, coloquei em letras para a expressão. Péra, tem duas coisas iguais, né? A quantia que possui e já tem é a mesma coisa. Vish! não sei, professora".* A partir da análise da resposta escrita e da fala do estudante, consideramos possíveis duas interpretações. A primeira indica que o estudante possui conhecimentos relativos à ordem das operações. Se E5 tem conhecimento dessa ideia, ele realizaria primeiramente a divisão $500 \div 12 \cong 41{,}6$, e então, a subtração. A estratégia é inadequada, pois não terá correspondência com a situação 2. Uma segunda interpretação pode ser obtida a partir da ideia de que o estudante não considerou a ordem das operações: ele resolveria a subtração, para depois a divisão. Consistiria em um erro de cálculo, mas ele obteria, a partir da expressão, a transformação (b) de R$300,00.

Ozores (2016) desenvolveu uma investigação a respeito de erros do Ensino Fundamental que são mantidos até o final do Ensino Médio. A autora afirma que, dentre as dúvidas observadas, consta a ordem das operações. Para a pesquisadora, dúvidas a respeito desse saber deveriam ser eliminadas ainda no Ensino Fundamental. Ozores (2016) considera esse um problema recorrente, e não uma percepção individual.

Apresenta-se, no quadro 39, as estratégias desenvolvidas pelos estudantes e os teoremas em ação manifestados no item b) da situação 2.

Quadro 39: Estratégias de resolução desenvolvidas no item b) da situação 2

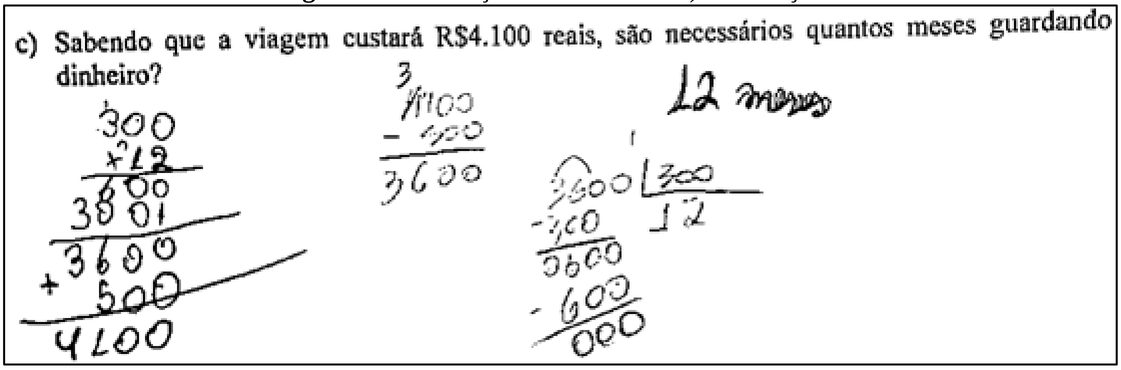
Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Relaciona corretamente a quantidade (r) de reais que a turma possui com o tempo (t) em meses que estão guardando dinheiro.	E7	TAV5: $f(bt) \pm a = b \cdot f(t) \pm a$, com a e b ∈ ℕ
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Não consideram o estado inicial (a) de R$500,00 na expressão algébrica.	E1 e E2	TAF1: $\mathrm{f}(t) = a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t$ ∈ ℕ
Dividem o valor total pelo tempo.	E3, E9 e E10	Não identificado.
Divide o valor que a turma já tem pelo tempo que pouparam. Após isso, subtrai o resultado do valor total necessário.	E5	
Não foi apresentada nenhuma resposta ou estratégia.	E4, E6 e E8	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.2.3 Análises do item c)

Nas análises das resoluções do item c), foram observadas seis (06) estratégias adequadas, três (03) inadequadas e um (01) item em branco, deixado pelo estudante E10. Em relação às seis estratégias adequadas, identificamos quatro (04) formas de resolução. Os estudantes E4, E7 e E9 identificaram que a turma precisa, ao todo, de R$4.100,00, e que já possuem R$500,00. Logo, falta a quantia de R$3.600,00. A partir disso, dividiram os R$3.600,00 por R$300,00, que a turma está juntando por mês, identificado no item a). Para exemplificar as respostas dos estudantes, apresentamos, na figura 21, a resposta de E9.

Figura 21: Resolução de E9 no item c) da situação 2

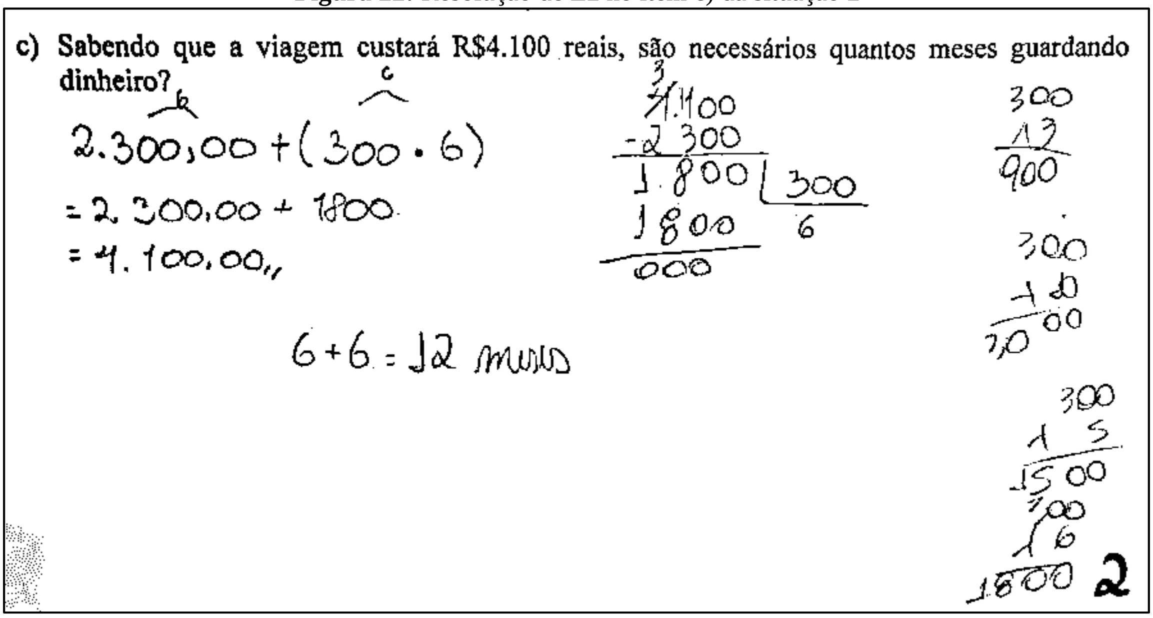


Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir das análises, identificamos que os estudantes mobilizaram, nas resoluções, o TAV2 e o TAV1. O TAV2 foi manifestado ao efetuar a subtração do estado final (c), de R$4.100,00, pelo estado inicial (a), de R$500,00, obtendo a transformação (b) de R$3.600. O TAV1 foi mobilizado pelos estudantes ao estabelecerem a relação existente entre a transformação total de R$3.600,00 e a transformação mensal de R$300,00 para obtenção do tempo (t) de 12 meses necessários para obter o montante total que a turma precisa.

A segunda forma de resolução foi identificada na resposta do E2, que utilizou os dados do item a), ou seja, a turma possui R$2.300,00 após seis meses. Sendo assim, faltam R$1800,00, que o estudante dividiu por R$300,00, e obteve mais seis meses, totalizando 12 meses. Assim como E7 e E9, o estudante E2 mobilizou, em sua estratégia, o TAV1 e o TAV2. Consta a seguir, na figura 22, a resolução de E2.

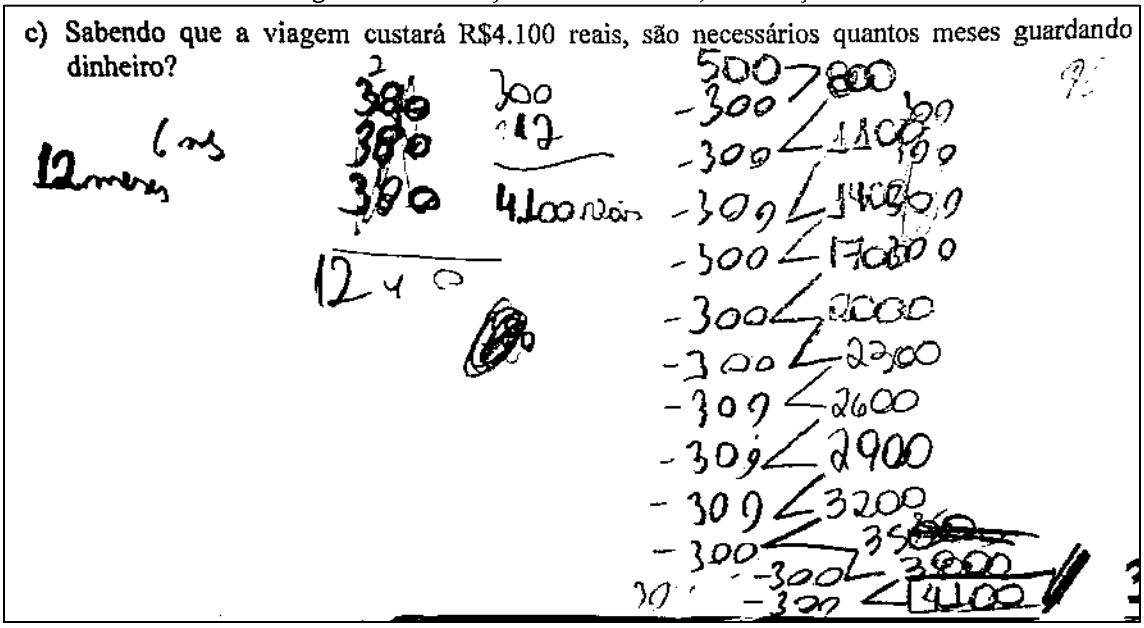
Figura 22: Resolução de E2 no item c) da situação 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

A terceira forma de resolução adequada foi observada na estratégia de E3, que utilizou sucessivas adições da transformação (b) de R$300,00, a partir do estado inicial (a) de R$500,00, até obter o valor de R$4.100,00. Apresentamos, a seguir, na figura 23, a resposta do E3.

Figura 23: Resolução de E3 no item c) da situação 2

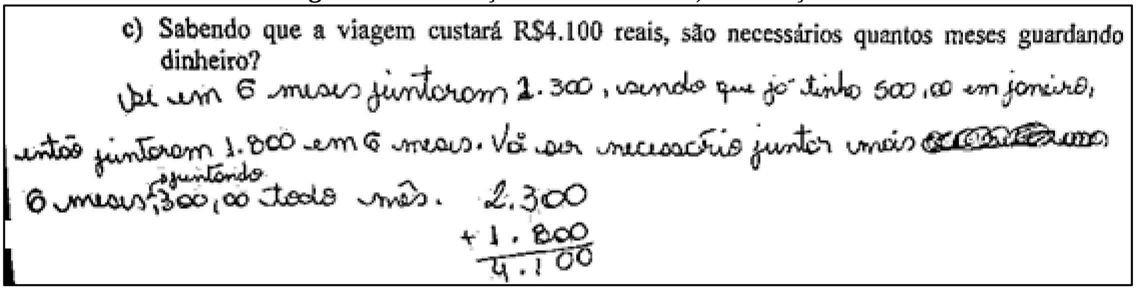


Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E3 apresentou, em suas resoluções, ideias elementares. No item a) da situação 2, ele utilizou diversas multiplicações a partir da tentativa e erro; e no item c), sucessivas adições. Identificamos, na resposta do estudante E3, a mobilização do TAV4, ao utilizar sucessivas adições para obtenção da resposta. A multiplicação foi substituída, pelo estudante E3, ao utilizar sucessivas adições para resolução. Segundo Piaget (1986), o desenvolvimento da multiplicação é naturalmente mais complexo que o da adição. A multiplicação é realizada a partir de uma composição simultânea, e não a partir de sucessivas operações. O autor justifica: “[...] o desenvolvimento das multiplicações é muito mais complexo e comporta quantificações implícitas mais numerosas” (PIAGET, 1986, p. 72). Sendo assim, a utilização de sucessivas adições não constitui uma estratégia inadequada, mas conforme Gitirana *et al*. (2014), pode causar problemas na compressão da multiplicação.

Outra estratégia adequada foi identificada na resposta de E5, que também mobilizou o TAV1 e o TAV2. Apresentamos a seguir, na figura 24, a resposta de E5.

Figura 24: Resolução de E5 no item c) da situação 2



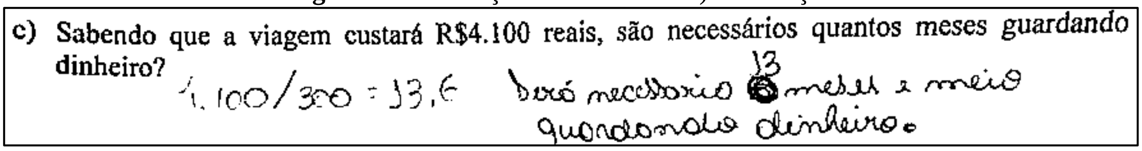
c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

Se em 6 meses juntaram 1.300, sendo que já tinha 500,00 em janeiro, então juntaram 1.800 em 6 meses. Vai ser necessário juntar mais 6 meses juntando 300,00 todo mês. 2.300 + 1.800 = 4.100

Fonte: Acervo da pesquisa.

Em relação às três (03) estratégias inadequadas do item c), foram observadas duas formas de resolução: a primeira apresentada pelo estudante E1; e a segunda, pelos estudantes E6 e E8, conforme figura 25.

Figura 25: Resolução de E1 no item c) da situação 2



c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

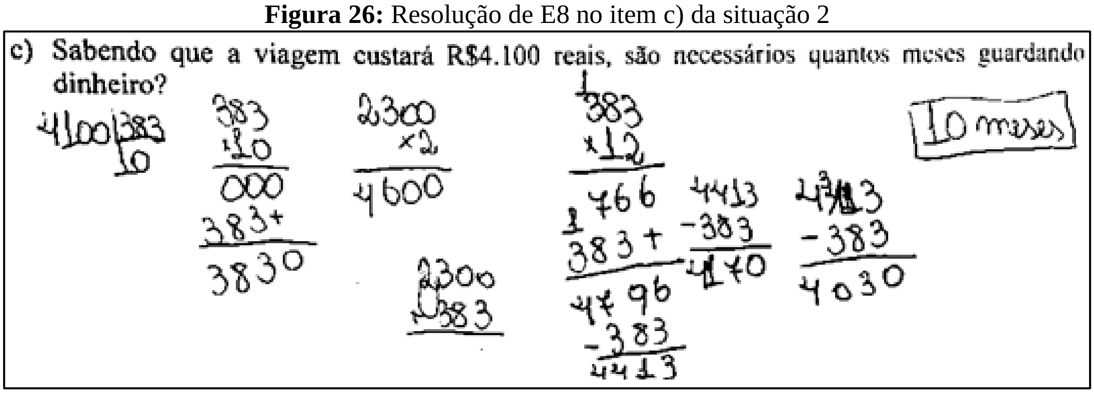
4.100/300 = 13,6 Será necessário 13 meses e meio guardando dinheiro.

Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E1 não considerou o estado inicial de R$500,00, e dividiu o valor total de R$4.100,00 pelo valor que é guardado por mês, mobilizando o TAF1. Essa estratégia incorreta, na qual não é considerado o estado inicial (a) da situação, é comumente utilizada pelos estudantes, enfatizando a mobilização do teorema em ação falso sinalizado.

Os estudantes E6 e E8 apresentaram várias tentativas para a resolução do item, efetuaram várias multiplicações com o valor errôneo que obtiveram no item a) para a transformação (b), de R$383,00 ao invés de R$300,00. Desconsiderando o valor incorreto, os estudantes não subtraíram o estado final (c), e novamente mobilizaram o TAF1. Consta a seguir, na figura 26, a resposta do E8 para sinalizar as respostas dos estudantes.

Figura 26: Resolução de E8 no item c) da situação 2



c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

Fonte: Acervo da pesquisa.

A seguir, apresentamos o quadro 40, com as estratégias desenvolvidas pelos estudantes e os teoremas em ação manifestados no item c) da situação 2.

Quadro 40: Estratégias de resolução desenvolvidas no item c) da situação 2

Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Identificaram que a turma precisa, ao todo, de R$4.100,00, e que já possuem R$500,00; então, faltam R$3.600,00. Para obter o tempo preciso para ter o valor total, os estudantes dividiram os R$3.600,00 pela quantia guardada por mês de R$300,00.	E4, E7 e E9	TAV2: $c = a + (\pm\, b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$ TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t} com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$
Percebeu que a turma possui R$2.300,00 após seis meses e que faltam R$1.800,00. Assim, dividiu os R$1.800,00 por R$300,00, obtendo mais seis meses, totalizando, assim, doze meses.	E2	TAV2: $c = a + (\pm\, b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$ TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t} com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$
Utilizou sucessivas adições da transformação (b) de R$300,00 até obter R$4.100,00.	E3	TAV4: $f(t + t + t + \cdots + t) = f(t) + f(t) + f(t) + \cdots + f(t), com\ t \in \mathbb{N}$
Observou que a turma tem R$1.800,00 após seis meses, e faltam exatamente R$1.800,00; então, faltam mais 6 meses.	E5	TAV2: $c = a + (\pm\, b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$ TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e b = $\frac{f(t)}{t} com\ b\ e\ t \in \mathbb{N}$
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Não considerou o estado inicial e dividiu o valor total pela quantia que é guardada por mês.	E1	TAF1: $\mathrm{f}(t) = a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
Apresentaram várias tentativas com valores errôneos. Como estratégias, utilizaram sucessivas adições e/ou multiplicações, e em todas elas desconsideraram o estado inicial.	E6 e E8	
Não foi apresentada nenhuma resposta ou estratégia.	E10	Não identificado

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A partir das estratégias e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes na resolução da situação 2, constatamos que, em relação ao item a), foram observadas sete (07) estratégias adequadas e cinco (05) estratégias inadequadas, totalizando doze (12) estratégias. Dois estudantes (E1 e E6) apresentam duas formas de resolução, que aparecem como adequada e como inadequada, pois são duas estratégias na mesma resolução. No item a), foram mobilizados dois (02) teoremas em ação verdadeiro (TAV1, TAV4) e um (01) teorema em ação falso (TAF1).

No item b), houve uma (01) estratégia adequada, seis (06) inadequadas e três (03) itens deixados em branco. Foram mobilizados um (01) teorema em ação verdadeiro (TAV5) e um (01) teorema em ação falso (TAF2). No item c), foram observadas seis (06) estratégias adequadas, três (03) inadequadas e um (01) item em branco. Foram mobilizados três (03) teoremas em ação verdadeiros (TAV1, TAV2, TAV4) e um (01) teorema em ação falso (TAF1).

Assim como na situação 1, foram apresentadas estratégias adequadas nos itens a); e c) e muitas inadequadas, nove (09), no item b), que trata da expressão algébrica. Mesmo os alunos apresentando estratégias adequadas para os itens a) e c), já foram observadas mais estratégias inadequadas e erros, de interpretação e cálculos, por exemplo, o que pode ser um indicativo de que a mudança na classe gera dificuldades para os estudantes. Em outras palavras, a subclasse proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação positiva desconhecida) indica ser mais complexa que a subclasse proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa), de acordo com as resoluções, acertos e erros manifestados pelos estudantes.

Enquanto no item a) da situação 1 foi observada apenas uma (01) estratégia inadequada, no item a) da situação 2 foram observadas cinco (05) estratégias inadequadas. Em relação ao item c), na situação 1, não foram observadas estratégias inadequadas. Um dos estudantes apresentou resposta incorreta, mas a estratégia manteve-se adequada. Em relação à situação 2, foram observadas três (03) estratégias inadequadas; e ainda, o item c) foi deixando em branco por um dos estudantes (E10).

Na situação, 1 tem-se o estado inicial (a) e a transformação (b), e busca-se o estado final (c). Na situação 2, tem-se estado inicial (a) e final (c), e busca-se a transformação positiva (b). A partir das análises, é possível observar que a busca pela transformação causou mais dificuldades aos estudantes. O cálculo necessário para a situação 1 constitui em uma aplicação direta da transformação negativa de 2.000 litros ao estado inicial de 30.000 litros, enquanto na situação 2, para resolução, é necessário buscar a transformação a partir da retirada do estado inicial de R$500,00 da transformação total de R$2.300,00. Isso valida a ideia de Vergnaud (2009a), na qual os cálculos necessários em cada classe não possuem a mesma complexidade.

Ainda, a partir das análises das situações 1 e 2, reafirmamos que no item b), que trata de expressão algébrica, os estudantes continuaram apresentando estratégias inadequadas. Na situação 2, o número de itens deixados em branco aumentou: na situação 1, todos os estudantes tentaram apresentar resposta, e na situação 2 foram observados três (03) itens em branco, que indica que os estudantes não têm ideias para iniciar a resolução da situação proposta.

Em relação aos teoremas em ação falsos, os estudantes seguiram manifestando o TAF1. Na situação 1, ele foi mobilizado por três (03) estudantes (E1, E4 e E9) no item b), e na situação 2 por dez (10) vezes, sendo cinco (05) estudantes (E1, E3, E6, E8 e E10) no item a); dois (02) deles (E1 e E2) no item b); e três (03) (E1, E6 e E8) no item c). As informações são observadas novamente nas análises das situações seguintes. Apresentamos, a seguir, as análises referentes à situação 3.

6.3 Análises das resoluções da situação 3

Classe: proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva).

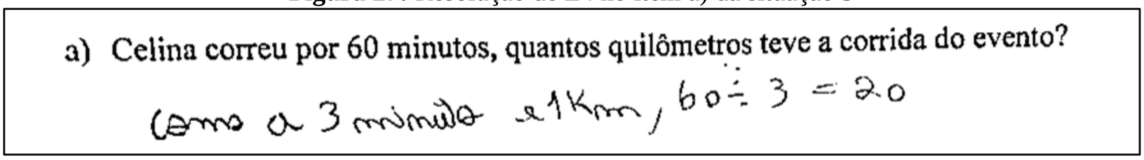
Celina participou de um evento esportivo que consistia, em uma parte inicial, de corrida, seguida por uma parte de ciclismo. Ela corre 1km a cada 3 minutos, e pedala a uma velocidade de 45 km/h.

d) Celina correu por 60 minutos. Quantos quilômetros teve a corrida do evento?
e) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.
f) Quanto tempo Celina precisou pedalar, sabendo que o percurso total foi de 200km?

6.3.1 Análises do item a)

No item a) da situação 3, foram observadas sete (07) estratégias adequadas e três (03) inadequadas. Em relação às estratégias adequadas, foram identificadas duas formas de resolução. Os estudantes E3, E4, E6, E7, E8 e E9 identificaram que Celina corre um quilômetro a cada três minutos. Sendo assim, para identificar quantos quilômetros Celina correu, sabendo que ela correu por 60 minutos, basta dividir os 60 minutos por três, resultando em 20 quilômetros. Para exemplificar a estratégia dos estudantes E3, E4, E6, E7, E8 e E9, apresentamos, na figura 27, a estratégia do estudante E4.

Figura 27: Resolução de E4 no item a) da situação 3


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

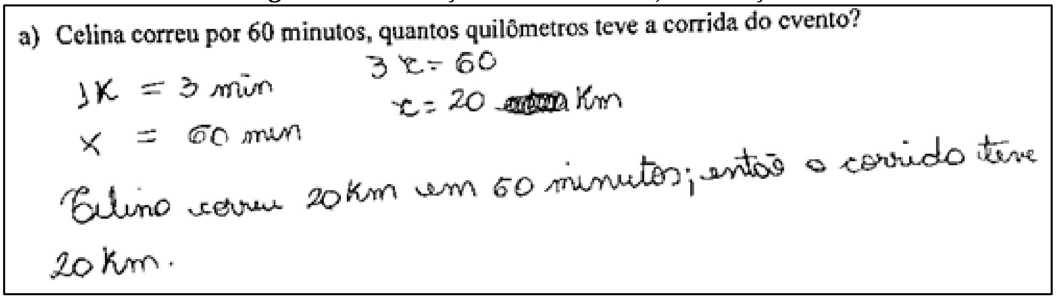
Como a 3 minuto e 1Km, 60 ÷ 3 = 20

Fonte: Acervo da pesquisa.

O TAV1 é mencionado por Vergnaud (1996a; 2007) e Kikuchi (2019), que enfatizam que estudantes entre oito e dez anos de idade já são capazes de mobilizar esse teorema em ação verdadeiro. Este teorema em ação também foi identificado por Rodrigues (2021), em resoluções de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, que possuem entre 10 e 11 anos, na resolução de problemas mistos.

A outra estratégia adequada observada foi utilizada pelo estudante E5, que apresentou uma relação de proporcionalidade do tipo cota, ao estabelecer que, se para cada 1 quilômetro são necessários 3 minutos; então, para a quilômetros (sendo a o estado inicial da situação), serão necessários 60 minutos. A partir da relação, o estudante estabeleceu que Celina correu por 20 quilômetros, assim como os demais, que apresentaram uma estratégia adequada, manifestaram a mobilização do TAV1. A diferença foi a forma como o estudante relaciona os dados da situação, por meio de uma relação de proporcionalidade. A seguir, na figura 28, consta a resolução do E5.

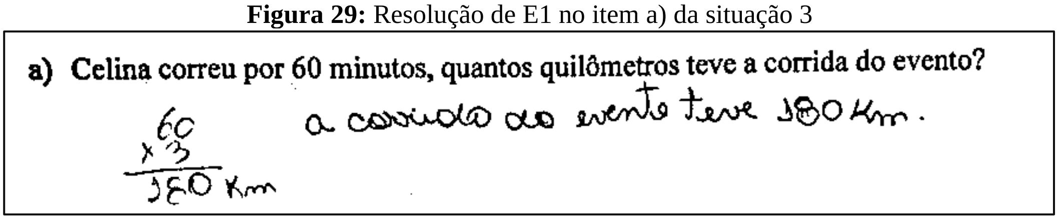
Figura 28: Resolução de E5 no item a) da situação 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Em relação às estratégias inadequadas, que foram três (03), observamos duas formas de resolução. Os estudantes E1 e E10, ao invés de dividir o tempo pela distância percorrida $\frac{60}{3} = 20$, multiplicaram, obtendo $60 \cdot 3 = 180$. Isso constitui um erro, porque não é uma relação adequada para a situação. Ozores (2016) cita, em sua pesquisa, *erros sistemáticos*, que ocorrem quando um estudante não compreende o que está sendo questionado em uma situação, e apenas reproduz processos que comumente utiliza na Matemática, pelo fato de necessitar apresentar um resultado. Para exemplificar a estratégia, apresenta-se, na figura 29, a estratégia do estudante E1.

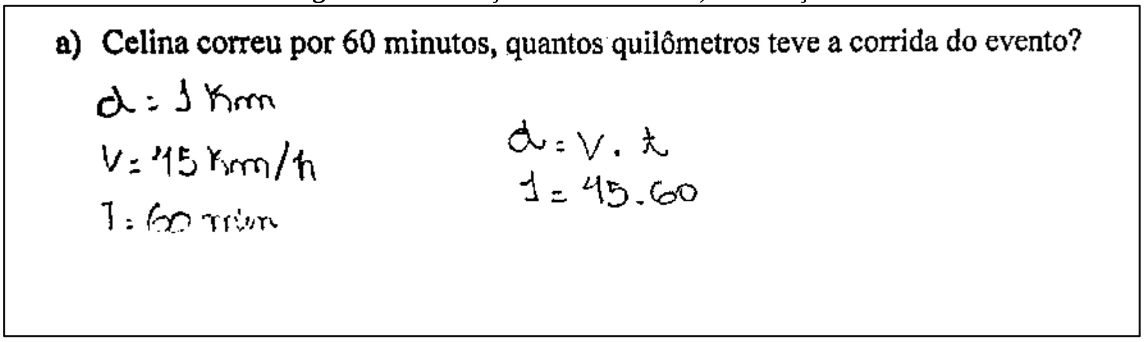
Figura 29: Resolução de E1 no item a) da situação 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E2 também realizou um cálculo inadequado: ao invés de relacionar os dados da corrida para a resolução do item a), ele utilizou os dados do ciclismo, em que Celina pedala a uma velocidade de 45km/h. Assim, obteve um resultado incoerente com a situação apresentada. Identificamos que o estudante não realizou uma análise coerente da situação, e como E1, apresentou erros sistemáticos e apenas utilizou, em sua resolução, dados que fizeram sentido naquele momento. Consta, a seguir, a resposta do estudante, na figura 30.

Figura 30: Resolução de E2 no item a) da situação 3


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

d = 1 km
V = 45 km/h
T = 60 min

d = V . t
1 = 45.60

Fonte: Acervo da pesquisa.

Não identificamos, nas estratégias dos estudantes, a mobilização de um teorema em ação falso, visto que eles apresentam erros pontuais de interpretação da situação.

Apresentamos o quadro 41, a seguir, com as estratégias desenvolvidas pelos estudantes e os teoremas em ação manifestados no item a) da situação 3.

Quadro 41: Estratégias de resolução desenvolvidas no item a) da situação 3

Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Identificaram que Celina corre um quilômetro a cada três minutos, e que ela correu por 60 minutos. Para resolver, dividiram 60 minutos por 3, resultando em 20 quilômetros.	E3, E4, E6, E7, E8 e E9	TAV1: $f(t) = b \cdot t$ e $b = \frac{f(t)}{t}$ com b e $t \in \mathbb{N}$
Estabelece que, se para cada 1 quilômetro são necessários 3 minutos; então, para a quilômetros serão necessários 60 minutos. Após uma regra de três, obteve 20 quilômetros como resultado.	E5	
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Realizaram uma multiplicação do tempo que ela correu, 60 minutos, pelo tempo que ela precisa para correr 1 quilometro, 3 minutos, ao invés de dividir.	E1 e E10	Não identificado.
O item é sobre a corrida e o estudante utilizou os dados do ciclismo.	E2	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.3.2 Análises do item b)

Na resolução do item b) da situação 3, não foram observadas estratégias adequadas. Todos os estudantes apresentam resposta, mas todas incorretas. Foram observadas cinco (05) formas de resolução. Os estudantes E1, E3 e E5 apresentam $d = t$ como resposta inadequada.

Na expressão, consideraram que a distância se iguala ao tempo, o que não corresponde à situação 3, visto que a expressão correta seria $d(t) = 20 + 45 \cdot t$. Assim, os estudantes não consideraram a distância da corrida de Celina, obtida no item a), e não fizeram a relação dessa distância com a velocidade de 45km/h que Celina pedala.

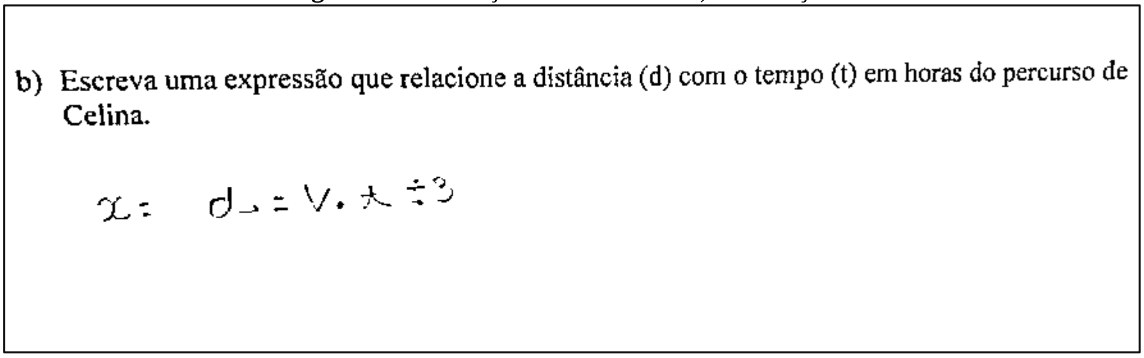
Os estudantes E4, E6 e E8 repetiram a resposta do item anterior, apresentando como resultado $\frac{60}{3} = 20$. Os estudantes consideraram para resposta apenas a distância corrida por Celina, e ignoraram que o evento consistia em duas partes: a inicial de corrida, que resultou em vinte quilômetros; e a segunda, na qual Celina pedala a uma velocidade de 45km/h.

Os estudantes E9 e E10 apresentaram como resposta a divisão $\frac{60}{t}$, que também não corresponde à situação 3. Os estudantes dividiram 60, tempo que Celina correu no evento, pela variável t, que também representa o tempo.

A partir das análises do item b) da situação 3, observamos que os estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E9 e E10 não analisaram corretamente as informações contidas no enunciado. As respostas observadas não se assemelham à resposta correta, e nem mesmo a uma expressão algébrica de função afim.

O estudante E2 também apresentou uma estratégia inadequada, conforme a figura 31.

Figura 31: Resolução de E2 no item b) da situação 3



b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

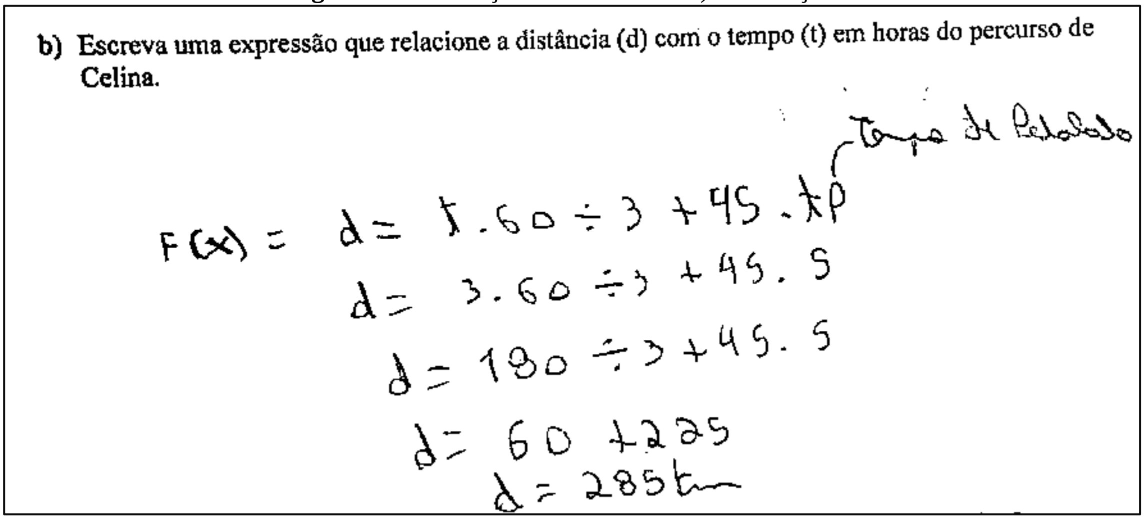
$x: \; d = V \cdot t \div 3$

Fonte: Acervo da pesquisa.

É possível observar que o estudante E2 não considerou o estado inicial (a) na expressão; no caso, a distância percorrida por Celina, de 20 quilômetros. Assim, manifestou a mobilização do TAF1. Ele realizou uma multiplicação da velocidade pelo tempo, uma ideia adequada, mas apresentou a necessidade de dividir esse tempo por três. Ainda em relação à resposta do estudante E2, é possível observar, antes da expressão, a variável x, que não tem conexão com a resposta. Isso reforça a ideia de Lucas *et al.* (2014), que constataram que o número de itens em branco e incorretos aumentaram, ao se colocar uma letra menos habitual para simbolizar uma variável ou incógnita.

O estudante E7 também apresentou uma estratégia inadequada, conforme a figura 32.

Figura 32: Resolução de E7 no item b) da situação 3


b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

Tempo de Pedalado

$F(x) = d = t.60 \div 3 + 45.tp$

$d = 3.60 \div 3 + 45.5$

$d = 180 \div 3 + 45.5$

$d = 60 + 225$

$d = 285km$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na primeira parte da expressão apresentada pelo estudante, $t \cdot 60 \div 3$, se resolvida a divisão, teríamos: $t \cdot 20$. O erro do estudante nessa parte da expressão consistiu em adicionar a variável t junto ao estado inicial (a) de 20. Em relação à segunda parte da expressão, $45 \cdot tp$, sendo tp o tempo que Celina pedala, está correta. Assim, o erro do estudante consistiu na variável t, que ele adicionou no início. O estudante, assim como E2, também adiciona em sua estratégia, um pouco distante da expressão, a letra x; no caso, $f(x)$. Calado (2020) também sinaliza a respeito da recorrência de os estudantes utilizarem, mesmo quando não solicitada, somente a letra x para representar uma quantidade qualquer. Para pesquisadora, esse fato revela que os sujeitos possivelmente atrelam uma variável somente à letra x. Para finalizar a resolução, a obtenção da expressão, o E7 adicionou valores para a variável t e tp, obtendo valores que não correspondem à situação 3.

Para formulação de uma expressão algébrica, o estudante precisa compreender que a situação possui uma regularidade. No caso do item b) da situação 3, a regularidade é gerada a partir da velocidade de 45km/h que Celina pedala. Com base nas análises das situações 1, 2 e 3, consideramos que os estudantes não compreendem essa ideia Matemática. Consta na BNCC relativa ao Ensino Fundamental (BRASIL, 2017) que a concepção da regularidade, descrição de padrões observáveis, inicia-se ainda nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, e que tais ideias devem ser aprofundadas no decorrer da escolarização.

A partir do exposto, nota-se que essa dificuldade apresentada pelos estudantes em relação à ideia de regularidade e à formulação da expressão algébrica vem desde o Ensino Fundamental. Para Ozores (2016), isso acarreta bloqueios para os estudantes sobre conceitos matemáticos: um novo tema não será compreendido, visto que a dificuldade não foi sanada. Para a pesquisadora, o aluno, ao não compreender um novo conteúdo, "[...] tenta mascarar a dificuldade que possui, originada por dúvidas não esclarecidas anteriormente" (OZORES, 2016, p. 16).

Assim, baseadas em Vergnaud (2002, 2003, 2009a), reafirmamos a importância de um Campo Conceitual bem estabelecido, a partir de um conjunto de situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros durante todo o processo escolar.

Quadro 42: Estratégias de resolução desenvolvidas no item b) da situação 3

<table>
<tr><th>Estratégias inadequadas</th><th>Estudantes</th><th>Teoremas em ação</th></tr>
<tr><td>Apresentaram $d = t$ como resposta, e consideraram que a distância se iguala ao tempo, o que não corresponde à situação 3.</td><td>E1, E3 e E5</td><td rowspan="3">Não identificado</td></tr>
<tr><td>Dividiram 60 por 3, resultando em 20. Consideraram apenas a distância corrida por Celina e desconsideraram a parte do ciclismo.</td><td>E4, E6 e E8</td></tr>
<tr><td>Dividiram o tempo que Celina correu no evento, 60 minutos, pela variável t, que também representa o tempo.</td><td>E9 e E10</td></tr>
<tr><td>Não considerou o estado inicial (a) de 20 quilômetros na expressão, e multiplicou a velocidade pelo tempo, uma ideia adequada, mas apresentou a necessidade de dividir esse tempo por três.</td><td>E2</td><td>TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>Adicionou a variável t junto ao estado inicial (a) de 20, assim: $20t = \frac{60}{3} \cdot t$.</td><td>E7</td><td>Não identificado</td></tr>
<tr><td>Adicionou a letra x na resolução, mesmo não sendo uma das variáveis da situação.</td><td>E2</td><td>Não identificado</td></tr>
</table>

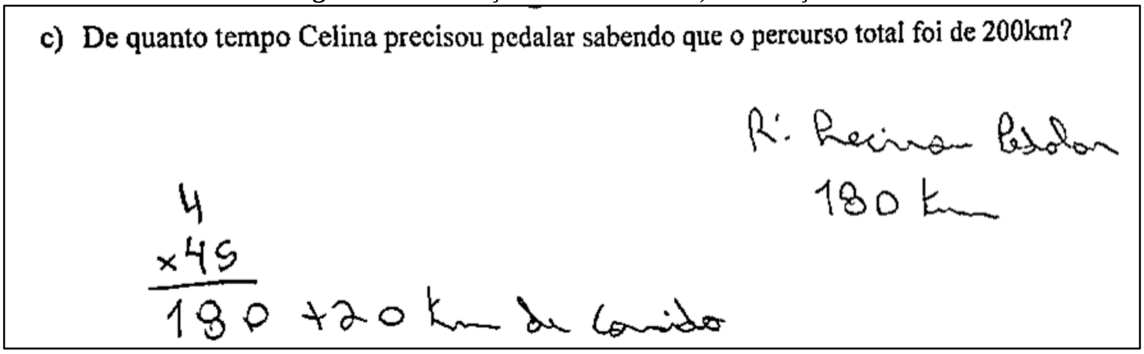
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.3.3 Análises do item c)

Nas análises das resoluções do item c), foram identificadas duas (02) estratégias adequadas, dos estudantes E7 e E9; e sete (07) estratégias inadequadas, dos estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E8 e E10. O item c) foi deixado em branco pelo estudante E2.

Em relação às estratégias adequadas, os dois estudantes (E7 e E9) resolveram da mesma forma: multiplicaram a velocidade que Celina pedala, 45km/h, por 4, resultando em 180 quilômetros, mas existem particularidades. A resposta do E7 pode ser observada na figura 33.

Figura 33: Resolução de E7 no item c) da situação 3


c) De quanto tempo Celina precisou pedalar sabendo que o percurso total foi de 200km?

R: Precisou Pedalar 180 km

4
×45
180 +20 km da corrida

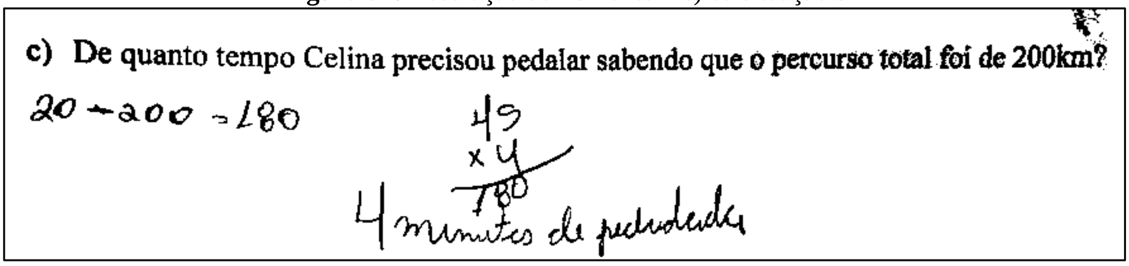
Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante multiplicou a velocidade de 45km/h por 4, e após a obtenção do resultado, ele adicionou 20 quilômetros da corrida. A resposta final do estudante não está adequada, pois é questionado, no item c), quanto tempo Celina precisou pedalar. Porém, o estudante não apresentou, como resposta, o número 4 (4 horas), que aparece na resolução e responde que ela pedalou por 180 quilômetros. Novamente, pode ser observada apenas uma necessidade em apresentar uma resposta final: o estudante utilizou valores adequados e uma estratégia adequada, mas respondeu de forma incorreta.

Esta pesquisa constitui um estudo de caso, não havendo intervenções. Porém, em estratégias observadas, acreditamos que uma intervenção poderia gerar aspectos positivos em que os estudantes teriam a oportunidade de corrigir os próprios erros. Esta constitui uma proposta para pesquisas futuras: a partir de problemas mistos de função afim, oportunizar aos estudantes discussões durante as resoluções, na busca pela construção de novos conhecimentos a partir do erro.

O estudante E9 também apresentou resolução incorreta, conforme a figura 34.

Figura 34: Resolução de E9 no item c) da situação 3


c) De quanto tempo Celina precisou pedalar sabendo que o percurso total foi de 200km?

20 - 200 = 180

45
×4
180

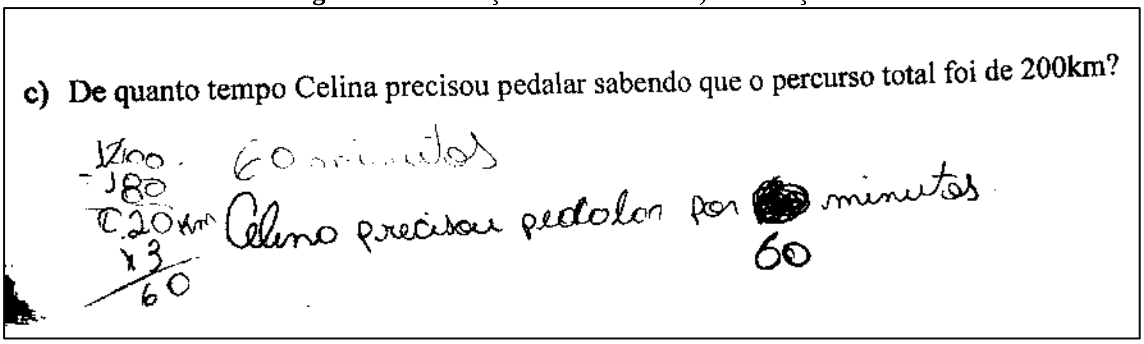
4 minutos de pedalada

Fonte: Acervo da pesquisa.

Assim como o E7, o estudante E9 também multiplicou a velocidade de 45km/h por 4, resultando em 180. O estado inicial foi considerado corretamente, 20, mas é possível observar que o estudante alterou a ordem dos fatores, 20 e 200, sinalizando a subtração de $20 - 200 = 180$. Isso consiste em um erro, visto que o resultado desse cálculo deveria ser de -180. Por fim, observemos a resposta final do estudante, que também está incorreta: ao invés de responder 4 horas, ele respondeu 4 minutos. A partir da análise, novamente indicamos a apresentação de uma resposta incoerente, resultado de um erro sistemático em que o estudante não compreende a situação.

Em relação às estratégias inadequadas, foram observadas três (03) formas. O estudante E1 realizou uma subtração de 200km por 180km, obtendo a corrida de 20km. Porém, não conseguiu finalizar os cálculos: o estudante multiplicou o resultado por 3. Isso constitui outro erro: percebe-se que E1 foi utilizando valores da situação de forma aleatória, sem, de fato, fazer uma análise do que era necessário para a resolução, conforme a figura 35.

Figura 35: Resolução de E1 no item c) da situação 3

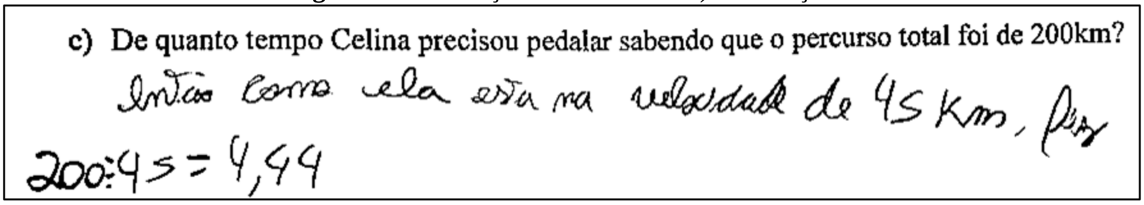


Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E3 não considerou o estado inicial (a) de 20km nos cálculos, manifestando a mobilização do TAF1. Após, ele dividiu o percurso total de 200km por 3. Questionado a respeito da estratégia, ele respondeu: *"eu pensei assim: se ela corre 1km a cada 3 minutos, para eu saber quanto tempo levou os 200km, basta dividir 200 por 3, o que deu 64 minutos. Ela correu por uma hora e quatro minutos".* A partir da resposta escrita e da fala do estudante, na conversa final, pode-se perceber novamente que ele não identificou que o percurso consistiu em duas partes, uma de corrida e outra de pedalada, resultando, assim, na estratégia inadequada evidenciada.

Os estudantes E4, E5, E6, E8 e E10 apresentaram a mesma estratégia de resolução, conforme a figura 36, que mostra a estratégia de E4, para exemplificar as resoluções citadas.

Figura 36: Resolução de E4 no item c) da situação 3


c) De quanto tempo Celina precisou pedalar sabendo que o percurso total foi de 200km?

Intão como ela esta na velocidade de 45 Km, fiz

200:45 = 4,44

Fonte: Acervo da pesquisa.

Os estudantes não consideraram o estado inicial (a) de 20km, e dividiram 200 por 45, o que consistiu em um erro, mobilizando o TAF1.

Quadro 43: Estratégias de resolução desenvolvidas no item c) da situação 3

Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Multiplicaram a velocidade que Celina pedala, 45km/h, por 4, resultando em 180km.	E7 e E9	Não identificado
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Subtraiu dos 200km a corrida de 20km, mas não finalizou os cálculos.	E1	Não identificado
Não considerou o estado inicial (a) de 20km e dividiu 200 por 3.	E3	TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ $com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$
Não consideraram o estado inicial (a) de 20km, e dividiram 200 por 45.	E4, E5, E6, E8 e E10	
Não foi apresentada nenhuma resposta ou estratégia.	E2	Não identificado

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Em síntese das análises da situação 3, indicamos as estratégias e os teoremas em ação manifestados pelos estudantes. Em relação ao item a), foram observadas sete (07) estratégias adequadas, três (03) inadequadas, e a mobilização de um (01) teorema em ação verdadeiro (TAV1). No item b), as dez (10) estratégias apresentadas foram inadequadas, e identificamos a mobilização de um (01) teorema em ação falso (TAF1). No item c), foram observadas duas (02) estratégias adequadas, sete (07) inadequadas, uma em branco, e identificada a mobilização de um teorema em ação falso (TAF1).

Indicamos que, na situação 3, pertencente à classe proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva), os sujeitos da pesquisa responderam de forma adequada o item a). Nos itens b) e c), foram observados diversos erros de cálculos, de expressões sem conexão com a situação, e um número maior de itens branco, quando comparados às situações 1 e 2.

Assim como nos itens b) da situação 1 e 2, na situação 3, os estudantes não conseguiram apresentar uma expressão algébrica adequada. Dois estudantes demostraram necessidade de adicionar a incógnita x, mesmo já havendo letras suficientes na expressão. Ainda, foram observados erros referentes à interpretação do problema. A partir das análises, percebe-se que os estudantes costumam adicionar a letra x nos cálculos, mesmo quando não é necessária ou requisitada, o que permite perceber um problema, uma automação: a utilização tornou-se automática, sem significado. Para Vergnaud (1993), o funcionamento cognitivo dos estudantes envolve operações que se automatizam progressivamente. O estudante confia em sua resolução baseado em seu conhecimento, implícito ou explicito das relações entre o algoritmo e as características do problema a ser resolvido.

A seguir são apresentadas as análises referentes à situação 4 e as informações obtidas são novamente observadas.

6.4 Análises das resoluções da situação 4

Classe: proporção simples (quarta proporcional) e transformação de medidas (transformação negativa desconhecida).

Enzo possui 100.000 seguidores engajados no Instagram. Para receber um salário de 23.000 dólares no mês, ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações. Se deixar de fazer alguma, é descontado, por publicação não feita, um valor proporcional à quantidade de seguidores.

d) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?
e) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares, de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.
f) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer?

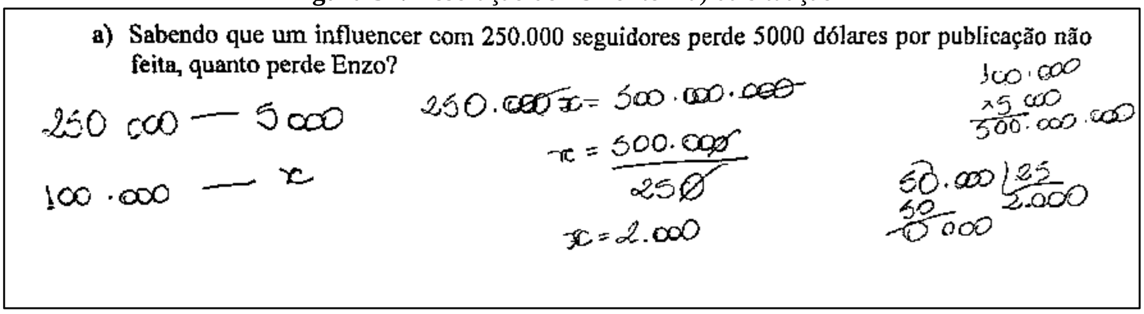
6.4.1 Análises do item a)

Nove (09) estudantes resolveram a situação 4, e o estudante E2 deixou de resolver a situação, pois faltou no segundo dia de implementação. Dentre as resoluções, foram observadas seis (06) estratégias adequadas, de E1, E4, E5, E6, E7 e E8, e três (03) estratégias inadequadas, dos estudantes E3, E9 e E10.

Antes de apresentar as estratégias adequadas, informamos que, durante a implementação da situação 4, os estudantes apresentaram diversos questionamentos. Por exemplo, como deveriam resolver, se não estava faltando informação, e a pesquisadora respondia que eles precisavam ler com calma a situação, extrair as informações pertinentes, e que não estavam faltando informações. Posteriormente, E7 questionou a pesquisadora: *"professora, é por regra de três que faz, né"?* A pesquisadora informou que não poderia responder o questionamento, pediu que o estudante analisasse as informações e que utilizasse a estratégia que considerasse adequada. Os outros estudantes, mesmo estando sentados distantes, escutaram o questionamento dele. Após as análises da situação 4, conforme explicitado em seguida, não consideramos que a fala do E7 gerou interferência em relação ao número de respostas corretas, visto que não houve alterações em comparação com as situações anteriores, mas pode ter interferido nas estratégias dos demais.

Em relação às estratégias adequadas, foi observada apenas uma forma de resolução. Os estudantes E1, E4, E5, E6, E7 e E8 utilizaram a *regra de três,* em que há a variação proporcional direta entre duas grandezas. Consiste em aplicar uma propriedade de proporcionalidade na qual o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Para exemplificar a estratégia utilizada, apresentamos, na figura 37, a resposta de E5.

Figura 37: Resolução de E5 no item a) da situação 4

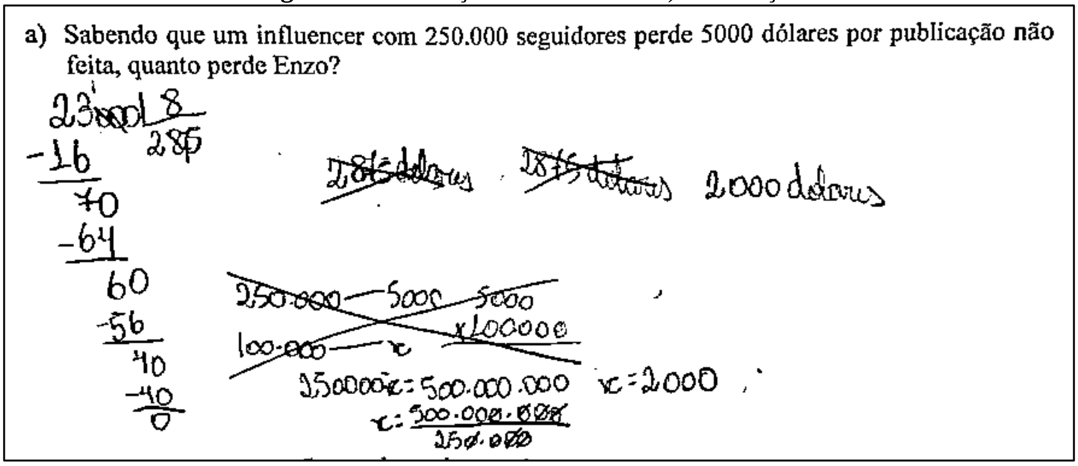


Fonte: Acervo da pesquisa.

Os estudantes observaram que um influencer com 250 mil seguidores perde 5 mil dólares por publicação não feita. Assim, Enzo, que possui 100 mil seguidores, perderá x dólares, que após os cálculos, se obtém o valor de 2 mil dólares por publicação. A partir da estratégia, apresentada indicamos a mobilização do TAV1.

O estudante E8 apresentou duas formas de resolução: uma conforme a estratégia de E5, sinalizada na figura 37; e outra na qual ele divide o salário de 23 mil dólares por 8. O estudante utilizou como estratégia, nessa parte da resolução, a ideia de que basta dividir o salário total pela quantidade mínima de publicações que devem ser feitas, 8, para obter quanto Enzo ganha e perde por publicação. A partir dos cálculos, E8 obteve que Enzo perde 2875 dólares por publicação, conforme pode ser observado na sua resposta, na figura 38.

Figura 38: Resolução de E8 no item a) da situação 4

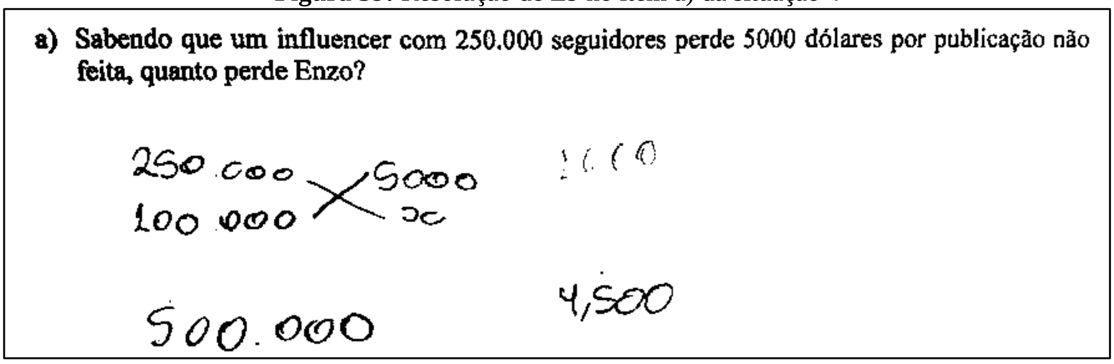


Fonte: Acervo da pesquisa.

Após obter essa resposta, o estudante fez outra tentativa, utilizando a regra de três, e obteve a quantia correta de 2 mil dólares. Consideramos um fato positivo, visto que o estudante, a partir do erro, conseguiu obter uma resolução adequada para a situação.

Em relação às estratégias inadequadas, E9 sinalizou, também, a utilização da regra de três, mas não finalizou a resolução. Questionado a respeito, ele respondeu: *"não consegui fazer essas contas"*. A resposta do estudante pode ser observada na figura 39.

Figura 39: Resolução de E9 no item a) da situação 4

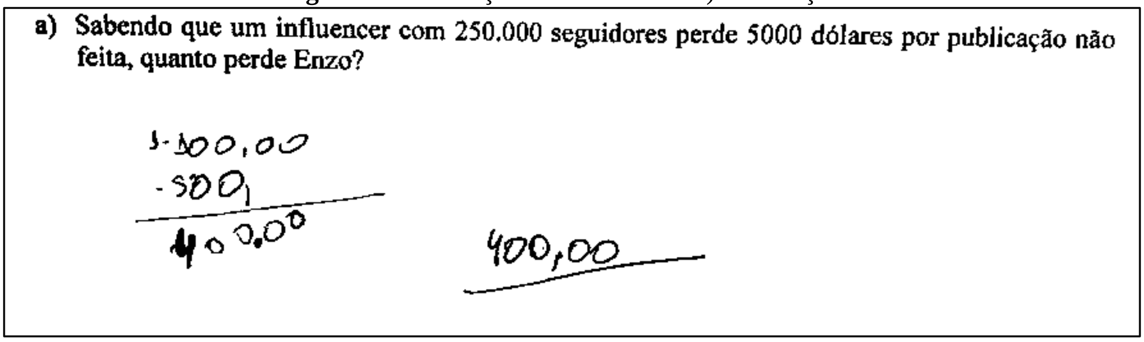


Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir da análise da resolução de E9, constatamos que o estudante apresenta uma automação por meio da relação de proporcionalidade, pois ele afirmou não saber resolver e dificuldades em relação às operações de multiplicação e divisão de números com mais de três casas decimais. Charnay (1996) afirma que é uma questão essencial da Matemática fazer com que os conhecimentos ensinados tenham sentido para o estudante. Segundo o autor, é necessário muito mais do que uma repetição, o estudante precisa "[...] ressignificar em situações novas, adaptar, transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas" (CHARNAY, 1996, p. 44).

E10 apresentou uma estratégia inadequada. Questionado a respeito da resolução, ele respondeu apenas: *"não sei fazer"*. E10 subtraiu, dos 100 mil seguidores, os 5 mil dólares. A partir da ideia, também indicamos a mobilização de uma automação prejudicial, visto que o estudante apenas utilizou os valores do enunciado de forma aleatória, sem significado. Ainda, podem ser observados erros nos cálculos, como por exemplo, posição dos números do milhar e da centena, conforme figura 40.

Figura 40: Resolução de E10 no item a) da situação 4


a) **Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?**

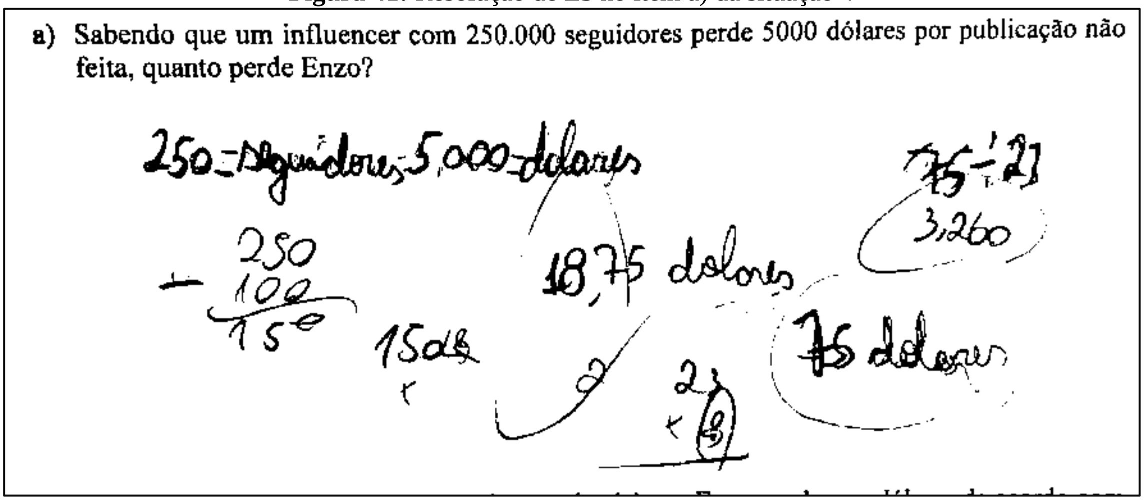
1.100,00
-500,
400,00

400,00

Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E3 também apresentou estratégia inadequada. Inicialmente, ele subtraiu a quantidade de seguidores de um influencer, 250 mil, e de Enzo, 100 mil, obtendo a diferença de 150 mil seguidores, e dividiu esse valor por 8, obtendo a resposta inadequada de 18,75 dólares por publicação, conforme figura 41.

Figura 41: Resolução de E3 no item a) da situação 4


a) **Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?**

250=seguidores 5.000=dolares

250
− 100
150

15dls

18,75 dolares

75 ÷ 21
3,260

75 dolares

2
x 8

Fonte: Acervo da pesquisa.

Apresentamos, a seguir, no quadro 44, uma sistematização das análises referentes ao item a) da situação 4.

Quadro 44: Estratégias de resolução desenvolvidas no item a) da situação 4

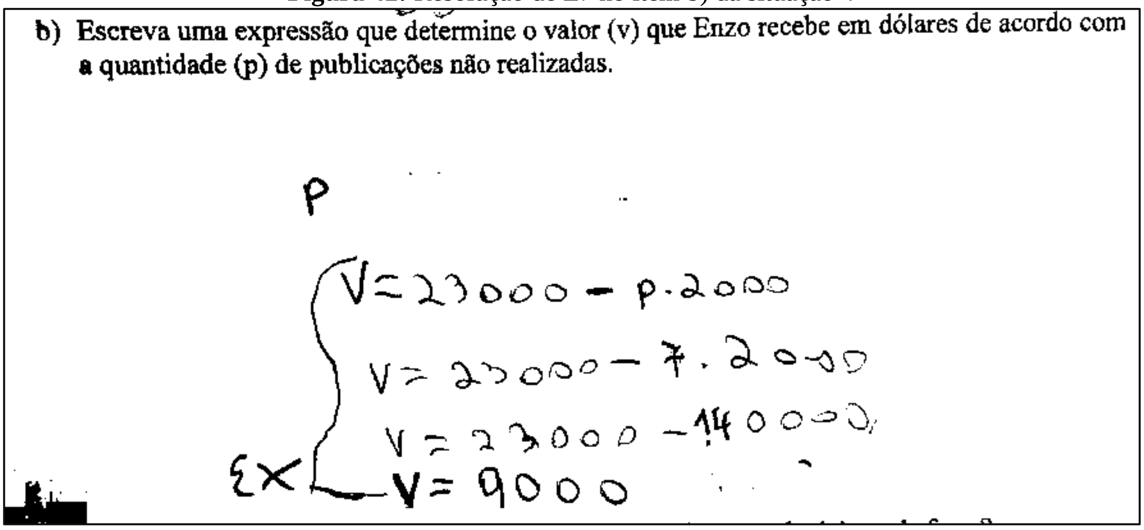
Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Utilizaram a regra de três: um influencer com 250 mil seguidores perde 5 mil; assim, Enzo, que possui 100 mil seguidores, perderá x dólares. Após os cálculos, obtiveram o valor de 2 mil dólares por publicação.	E1, E4, E5, E6, E7 e E8	TAV1: $f(b) \cdot b1 = f(b1) \cdot b$ $b = \frac{f(b) \cdot b1}{f(b1)}\ com\ b\ e\ b1 \in \mathbb{N}$
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Utilizou a regra de três, mas não finalizou a resolução.	E9	Não identificado
Subtrai dos 100 mil seguidores os 5 mil dólares.	E10	
Subtraiu, de 250 mil seguidores, os 100 mil, obtendo a diferença de 150 mil seguidores. Após, dividiu 150 mil por 8, obtendo a resposta inadequada de 18,75 dólares por publicação.	E3	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.4.2 Análises do item b)

Na resolução do item b) da situação 4, foi observada uma (01) estratégia adequada, a do estudante E7; cinco (05) inadequadas, dos estudantes E1, E3, E4, E6, e E8; e três (03) itens foram deixados sem resposta pelos estudantes E5, E9 e E10. Em relação à estratégia adequada, apresentamos, na figura 42, a resolução de E7.

Figura 42: Resolução de E7 no item b) da situação 4

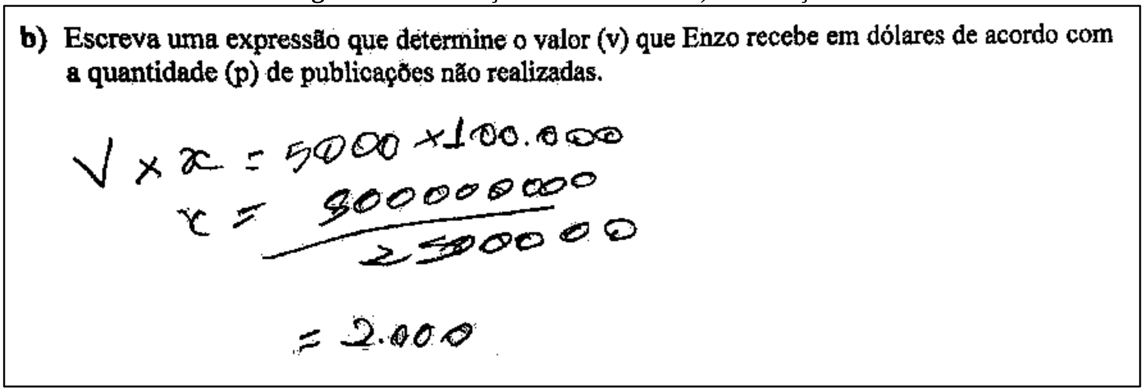


Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante apresentou uma estratégia adequada, na qual é retirada do salário inicial de 23 mil dólares a quantia de $2000 \cdot p$, sendo 2 mil a quantia que Enzo perde por publicação não feita; e p, o número de publicações. O estudante manifestou a mobilização do TAV1. É possível observar, no canto inferior esquerdo da resposta do estudante, a incógnita x, que não faz parte da resolução, mas foi deixada pelo estudante na estratégia.

Em relação às estratégias inadequadas, foram observadas três (03) formas de resolução. O estudante E1 apresentou $v = p$. O estudante E4 respondeu com a frase: *regra de três*. Questionado a respeito, o estudante respondeu: *"pensei na forma que foi resolvida a questão, regra de três"*. Os estudantes E3, E6 e E8 apresentaram como expressão $v \cdot x$, conforme a estratégia de E6, apresentada na figura 43.

Figura 43: Resolução de E6 no item b) da situação 4


b) **Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.**

Fonte: Acervo da pesquisa.

Os estudantes E6 e E8 apresentaram, como estratégia, parte da resolução do item a), que eles resolveram por regra de três e obtiveram como resposta 2 mil dólares. No enunciado consta uma pergunta na qual se deve expressar o valor (v), que Enzo recebe de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas. O estudante E6 utilizou a letra v para representar o valor, conforme o enunciado informa, mas não utilizou p, e sim x.

Quadro 45: Estratégias de resolução desenvolvidas no item b) da situação 4

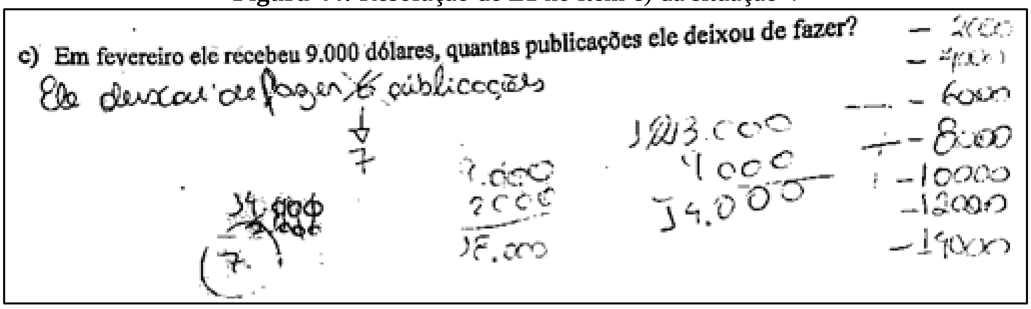
Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Retirou do salário inicial de 23 mil dólares a quantia de $2000 \cdot p$, obtendo v(p)=23000-2000p.	E7	TAV1: $f(b) \cdot b1 = f(b1) \cdot b$ $b = \frac{f(b) \cdot b1}{f(b1)}$ $com\ b\ e\ b1 \in \mathbb{N}$
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Apresenta $v = p$.	E1	Não identificado
Responde com a frase: *regra de três*.	E4	
Apresentaram como expressão $v \cdot x$.	E3, E6 e E8	
Não foi apresentada nenhuma resposta ou estratégia.	E5, E9 e E10	
Adicionaram a letra x na resolução, mesmo não sendo uma das variáveis da situação.	E6 e E7	Não identificado

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

6.4.3 Análises do item c)

Nas análises das resoluções do item c), foram observadas cinco (05) estratégias adequadas, dos estudantes E1, E5, E6, E7 e E8; e uma (01) inadequada, do estudante E4. Os estudantes E3, E9 e E10 apresentam apenas resposta incorreta, sem estratégia. Em relação às cinco (05) estratégias adequadas, identificamos duas (02) formas de resolução. O estudante E1 realizou uma subtração do salário completo de 23 mil dólares, pelo salário que Enzo recebeu em fevereiro, 9 mil dólares, obtendo quanto ele perdeu, 14 mil dólares. Após isso, o estudante começou uma anotação, na qual ele faz sucessivas adições do valor que Enzo perde por publicação não feita, 2 mil dólares, obtendo a resposta correta, que ele deixou de realizar 7 publicações, conforme pode ser observado na figura 44.

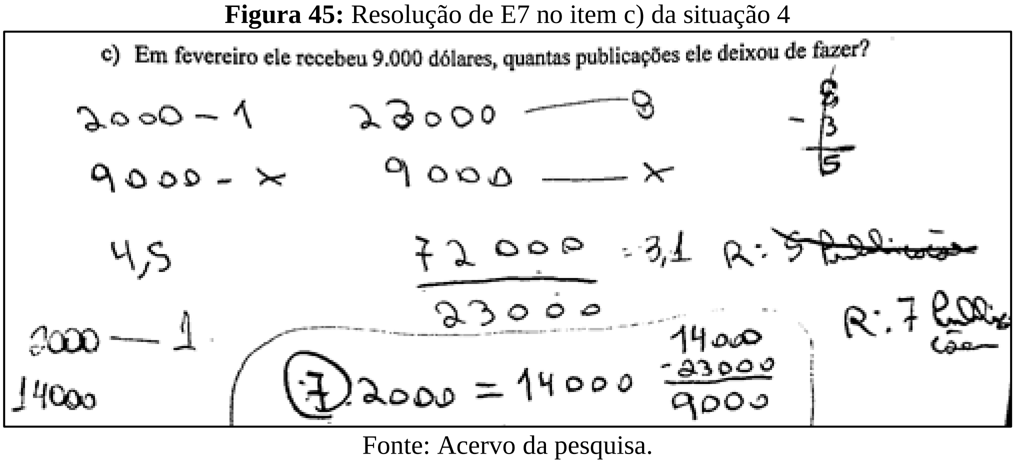
Figura 44: Resolução de E1 no item c) da situação 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E1 manifestou, a partir da resolução por sucessivas adições, o TAV4. O estudante E7 apresentou três (03) estratégias para resolução do item c), uma adequada e duas inadequadas, conforme a figura 45.

Figura 45: Resolução de E7 no item c) da situação 4

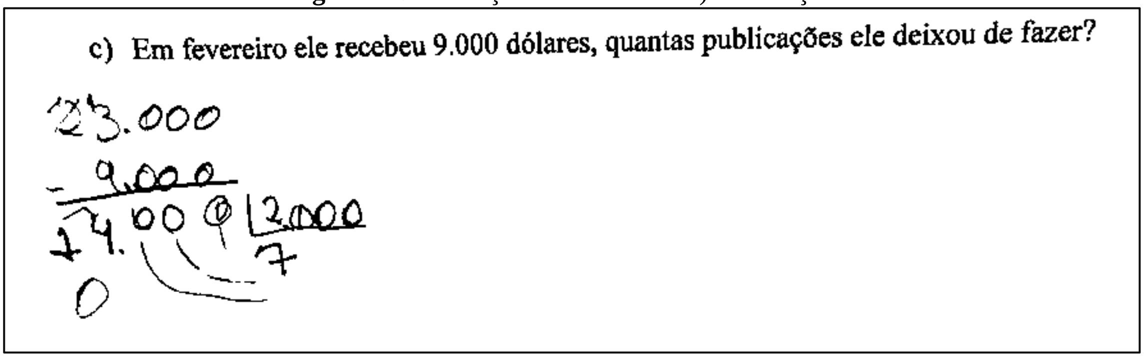


Fonte: Acervo da pesquisa.

Incialmente, o estudante tentou utilizar a regra de três para resolução do item, estratégia que é inadequada, pois não há proporcionalidade nos dados que ele utiliza. Na primeira regra de três, 2 mil é o valor que Enzo perde por cada publicação, mas 9 mil é o salário que ele recebeu: são dados de naturezas diferentes. Na segunda regra de três ocorre o mesmo, mas em relação as publicações: 8 é o número mínimo de publicação que Enzo precisa fazer, enquanto x é o número de publicações que ele teria deixado de fazer. O estudante, a partir dessas resoluções, apresenta uma automação: identificamos que ele não compreende totalmente a respeito das relações que apresenta. Por fim, após as tentativas inadequadas, pode-se observar uma estratégia adequada, na qual ele obtém que Enzo perdeu 14 mil dólares, e apresenta: $7 \cdot 2000 = 14000$. Questionado a respeito das resoluções inadequadas, o estudante afirmou que não sabe por que deu errado, e em relação a estratégia adequada ele afirmou: *"eu pensei que número vezes 2000 vai resultar nos 14000, e dá 7"*.

Os estudantes E5, E6 e E8 apresentaram a mesma estratégia adequada: dividiram o valor que Enzo perde ao todo, 14 mil, pelo valor que ele perde por publicação, 2 mil, obtendo que ele deixou de realizar 7 publicações. Para exemplificar a estratégia utilizada pelos estudantes, apresentamos, na figura 46, a resolução de E6.

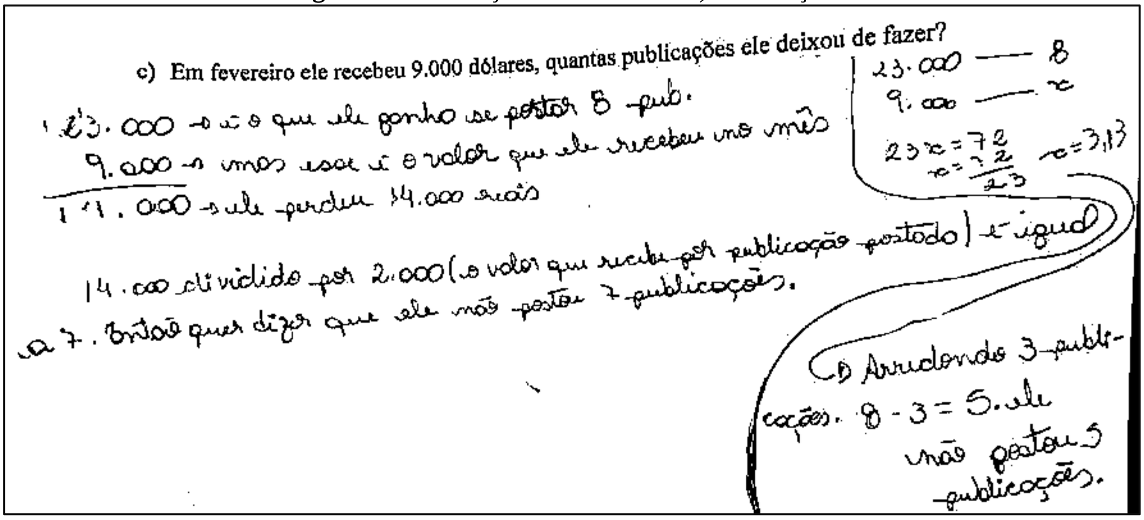
Figura 46: Resolução de E6 no item c) da situação 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante E5, conforme relatado acima, apresentou uma estratégia adequada, mas na resolução dele é possível observar, também, outra estratégia, adequada; porém, que resulta em uma resposta incorreta, conforme a figura 47.

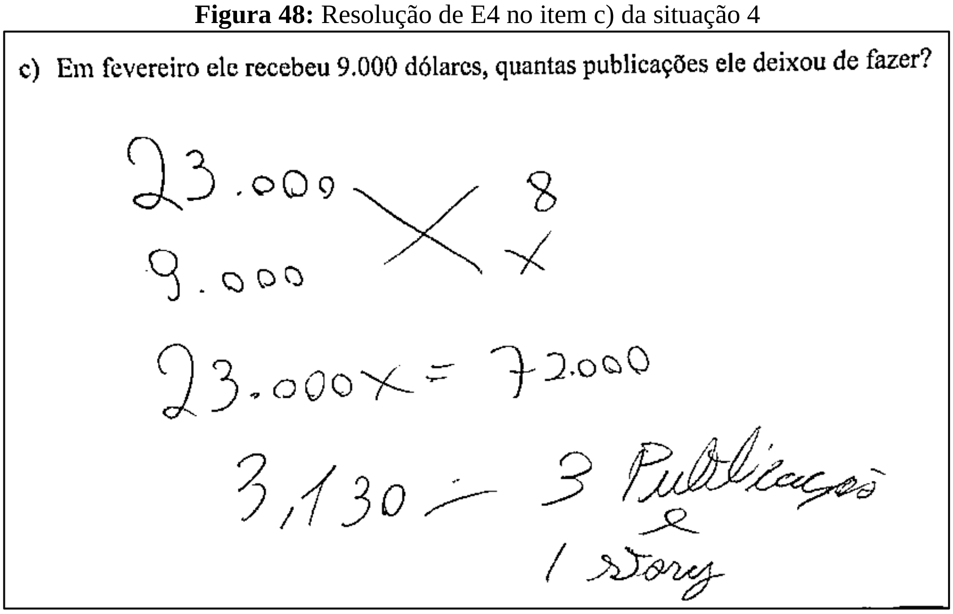
Figura 47: Resolução de E5 no item c) da situação 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

O estudante utilizou a regra de três como estratégia: relacionou o salário de 23 mil com 8 publicações, e considerou que, se Enzo não fizer nenhuma publicação, não terá valores a receber, mas não é informando na situação 4 se o valor que Enzo recebe é resultado apenas das publicações, por isso, o resultado de $x = 3{,}13$, está incorreto. Não consideramos a estratégia do estudante E5 incorreta, pois na situação, não é informado que Enzo, ao deixar de fazer 8 publicações, ainda teria valores a receber; no caso, 7 mil dólares. O estudante E4 também apresentou uma estratégia similar, conforme pode ser observado na resolução dele, na figura 48.

Figura 48: Resolução de E4 no item c) da situação 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na resolução desse estudante, tendo como base o relatado a respeito da estratégia do E5, possui erros de cálculos, e por isso consideramos a estratégia inadequada. O valor obtido não é a quantidade de publicações que Enzo deixou de fazer, e sim a quantidade que ele teoricamente fez, consistindo, então, em um erro de E4. Consideramos a ideia do estudante interessante, a partir da resposta escrita: 3 publicações e um *story;* o estudante responde desta maneira porque o cálculo resultou em um número decimal, 3,13. Então, ele respondeu que a parte inteira corresponde a publicações; e a parte decimal, a *stories.* Na situação 4 não é citado essa palavra, mas é do conhecimento dos estudantes que, além da publicação, existem outras formas de postagens na rede social *Instagram,* e uma delas é justamente o *story.*

Os estudantes E3, E9 e E10 apresentaram apenas a resposta incorreta: 6 publicações, e não apresentaram estratégias. Questionados a respeito, o estudante E3 afirmou: *"ele perdeu muito, mas não tudo. Então, achei que era seis, sete ele teria perdido mais; e oito, teria perdido tudo".* Os estudantes E9 e E10 afirmaram o mesmo.

Quadro 46: Estratégias de resolução desenvolvidas no item c) da situação 4

Estratégias adequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Realizou sucessivas adições do valor que Enzo perde por publicação não feita, 2 mil dólares, até obter 14 mil. Fez a contagem de quantas vezes somou 2 mil e respondeu: 7.	E1	TAV4: $f(t+t+t+\cdots+t) = f(t)+f(t)+f(t)+\cdots+f(t), com\ t \in \mathbb{N}$
Obteve a resposta pensando que que número vezes 2000 vai resultar em 14 mil e obteve 7.	E7	Não identificado
Dividiram o valor que Enzo perde ao todo, 14 mil, pelo valor que ele perde por publicação, 2 mil, obtendo que ele deixou de realizar 7 publicações.	E5, E6 e E8	
Estratégia adequada não esperada	Estudantes	Teoremas em ação
Utilizaram a regra de três como estratégia, relacionando o salário de 23 mil com 8 publicações, e consideraram que, se Enzo não fizer nenhuma publicação, não terá valores a receber.	E4 e E5	Não identificado
Estratégias inadequadas	Estudantes	Teoremas em ação
Apresentaram apenas a resposta incorreta: 6 publicações, e afirmaram que Enzo perdeu muito, mas não tudo, então deve ser 6.	E3, E9, e E10	Não identificado

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A partir das estratégias e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes na resolução da situação 4, constatamos que, em relação ao item a), foram observadas seis (06) estratégias adequadas e três (03) estratégias inadequadas, totalizando nove (09) estratégias. O estudante E2 não respondeu à situação 4, pois faltou no dia da implementação dessa situação. No item a), foi mobilizado um (01) teorema em ação verdadeiro (TAV1). A partir da observação do número de estratégias adequadas no item a) das quatro situações, não identificamos, nas análises da situação, interferência nos números de estratégias adequadas e inadequadas, geradas pela fala de E7, durante a implementação: *“professora, é por regra de três que faz né”?* Conforme sinalizamos o ocorrido no início das análises da referida situação.

No item b), houve uma (01) estratégia adequada, cinco (05) inadequadas e três (03) itens deixados em branco. Foram mobilizados, nesse item, um (01) teorema em ação verdadeiro (TAV1).

No item c), foram observadas sete (07) estratégias adequadas, três (03) respostas inadequadas (sem estratégias escritas), totalizando dez (10) estratégias, porque o estudante E5 apresentou duas formas de resolução que aparecem como adequadas. Foi mobilizado, no item um (01), teorema em ação verdadeiro (TAV4).

Os estudantes, na resolução da situação 4, pertencente à classe proporção simples (quarta proporcional) e transformação de medidas (transformação negativa desconhecida), assim como nas situações anteriores, apresentaram estratégias adequadas nos itens a). Em relação aos itens b) e c), assim como já apareceram indicativos na situação 3, foram observadas muitas estratégias inadequadas e maior número de itens em branco. Tais fatos indicam que as diferentes subclasses de situações se tornam mais ou menos complexas para os estudantes resolverem. Em relação ao item b), os estudantes continuaram apresentando estratégias inadequadas e dificuldades com a ideia de generalização da função afim.

A seguir, apresentamos as considerações finais a respeito dos resultados desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de responder à seguinte questão: *A variação de subclasses de problemas mistos influencia na complexidade das situações para estudantes do Ensino Médio?* Com vistas a respondê-la, foi estabelecido, como objetivo geral, *analisar se a variação das subclasses de problemas mistos associados à função afim – proporção simples e transformação de medidas – intervém na resolução de estudantes da 3ª série do Ensino Médio.*

Para tanto, foi utilizada a Teoria dos Campos Conceituais como referencial teórico. A teoria constituiu base para a elaboração do instrumento de pesquisa e respaldo teórico para as análises. Vergnaud (1996a, 1998, 2009a) afirma que, para a compreensão de um conceito, o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações durante o processo escolar.

Vergnaud (2009a) estabelece os problemas mistos como situações associadas ao Campo Conceitual Aditivo e ao Campo Conceitual Multiplicativo, e que envolvem pelo menos uma adição ou subtração e, ao mesmo tempo, pelo menos uma multiplicação ou divisão. Dessa forma, todas as situações do instrumento de pesquisa dizem respeito ao conceito de função afim, mas cada problema pertence a uma subclasse diferente da classe estabelecida para a pesquisa - *proporção simples e transformação de medidas*.

Para elaboração do instrumento de pesquisa, com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), estabelecemos como classe a *proporção simples e transformação de medidas*. Para elaboração do instrumento, também utilizamos aspectos da teoria das situações didáticas, mais especificamente, a consideração de variáveis didáticas pertinentes. Isso porque, conforme Brousseau (2008), as variáveis relativas a um mesmo saber podem apresentar grandes diferenças de complexidade e, em consequência, levar a diferentes estratégias de resolução.

Os dados foram produzidos de duas formas: a partir da resolução escrita dos estudantes; e da transcrição da conversa final, que ocorreu após a finalização da implementação, entre pesquisadora e estudantes. A pesquisadora resolveu cada uma das situações no quadro com os estudantes, questionando-os, durante as resoluções, sobre a maneira como resolveram cada item. A transcrição da conversa consta no apêndice IV. Participaram desta pesquisa, dez (10) estudantes de uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Paraná.

Ao analisar a resolução dos estudantes, identificou-se que, em relação à situação 1, pertencente à classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa), foram observadas apenas estratégias adequadas na resolução do item a) e do item c). Identificamos que os estudantes estabeleceram a relação de proporcionalidade da situação de forma adequada. Utilizaram dois tipos de estratégias no item a): em uma delas, estabeleceram a relação de proporcionalidade a partir da multiplicação um para muitos; e outra, estabeleceram a relação a partir de sucessivas adições. No item b) da situação 1, foram observadas duas (02) estratégias adequadas e oito (08) inadequadas. O item b), que trata da generalização da função afim, ou seja, a produção de uma expressão algébrica da função envolvida, mostrou-se complexo para os estudantes em todas as situações.

Na situação 2, foi possível observar três (03) estratégias inadequadas. Nesta situação, a classe definida foi a partição, com a transformação positiva desconhecida. Percebeu-se que a busca pela transformação solicitada na situação 2 mostrou-se mais complexa para os estudantes do que a busca pelo estado final, conforme solicitado na situação 1.

Em relação à situação 3, no item a), a maioria das estratégias observadas, sete (07), foram adequadas, mas nos itens b) e c), as estratégias inadequadas aumentaram. A situação é do tipo cota com o estado inicial desconhecido e transformação positiva, o valor unitário é dado, e tem-se que encontrar o número de unidades correspondentes a uma grandeza de outra espécie dada. Identificamos, nessa situação, erros sistêmicos dos estudantes, que ocorrem quando, em uma resolução, não é compreendida a situação apresentada. Os estudantes apenas reproduziram processos que estão acostumados a utilizar pela necessidade de apresentar um resultado. Na situação, é questionado a respeito da corrida, mas os estudantes utilizaram dados do ciclismo. No item b), não foram observadas estratégias adequadas, apenas inadequadas. Para obtenção da generalização, era necessário o estado inicial. Três estudantes (E1, E2 e E10) manifestaram dificuldades na obtenção desse valor, e com isso não foi possível obter uma resolução adequada, pois o estado inicial corresponde ao coeficiente linear da expressão algébrica. Além disso, nas resoluções do item b), as respostas observadas não dizem respeito a uma expressão de função afim. Alguns estudantes, E4, E6 e E8, por exemplo, apenas repetiram a resposta do item a); outros, E1, E3 e E5, afirmaram que a distância se iguala ao tempo, mostrando que não compreendem a representação de uma função afim a partir de uma expressão algébrica.

Na situação 4 do tipo quarta proporcional com a transformação negativa desconhecida, os estudantes apresentaram diversas estratégias inadequadas, principalmente no item b): dentre as nove (09) resoluções analisadas, cinco (05) são inadequadas e três (03) deixadas em branco.

Nesta pesquisa, optamos por variar as subclasses da classe *proporção simples e transformação de medidas*. As análises mostram que, conforme variamos as subclasses, os estudantes apresentam maiores dificuldades em determinada subclasse do que em outras; ou seja, certas subclasses de situações são mais complexas para os estudantes.

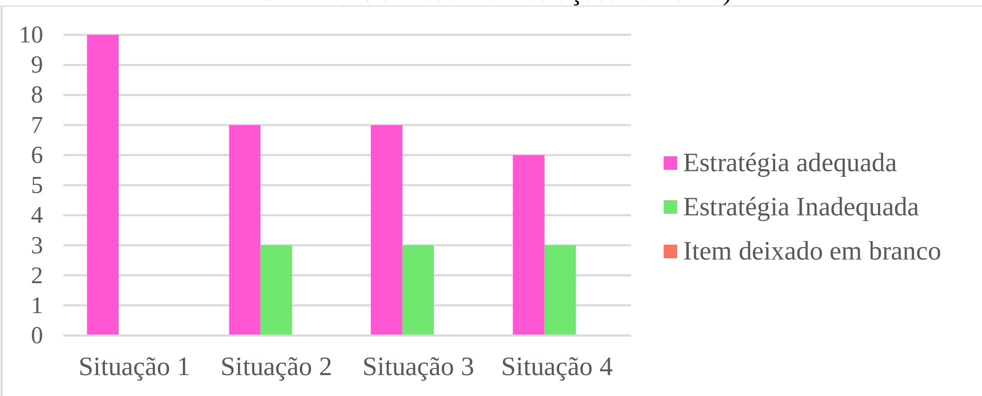
Identificamos que, dentre as quatro (04) variações contempladas, a *proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva)* – situação 3, foi a classe na qual os estudantes manifestaram maior dificuldade. Nessa subclasse, o valor unitário é dado e busca-se pelo número de unidades correspondentes a uma grandeza de outra espécie dada. O estudante precisava identificar o estado inicial no item a), e a maioria dos estudantes (sete) identificou o estado inicial de forma adequada. Porém, os erros aumentam nas resoluções do item b), que trata da generalização da função afim. O item b) foi o mais complexo em todas as situações, porém, foi na situação do tipo cota que observamos o maior número de estratégias inadequadas, para esta situação, somente foram observadas estratégias inadequadas, enquanto nos outros problemas, os estudantes conseguiram apresentar resolução adequada ou parcialmente adequada.

A segunda classe, que se revelou mais complexa, foi a *proporção simples (quarta proporcional) e transformação de medidas (transformação negativa desconhecida)* – situação 4: o valor correspondente à unidade não é dado e nem solicitado. Era preciso, então, identificar a transformação, sabendo que ela seria proporcional ao número de seguidores. Nessa situação, foi identificada apenas uma expressão algébrica adequada.

A terceira classe mais complexa foi a *proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação positiva desconhecida)* – situação 2; e a quarta, constituindo a mais simples para os sujeitos da pesquisa, foi a *proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa)* – situação 1. Nessa subclasse somente foram observadas estratégias inadequadas para o item b), que trata da generalização, e todos os estudantes apresentaram resoluções adequadas para os itens a) e c).

Em relação ao item a), de todos os quatro problemas propostos, identificamos pouca diferença entre as classes, mas afirmamos que a multiplicação um para muitos com estado final desconhecido e transformação negativa (situação 1) foi a mais simples, pois foram observadas apenas estratégias adequadas; a quarta proporcional com transformação negativa desconhecida (situação 4) foi a mais complexa para esse item, sendo observadas três (03) resoluções inadequadas dentre as nove (09) analisadas. Nas situações 2 e 3 também foram observadas três estratégias inadequadas, mas todos os estudantes resolveram esses problemas. Assim, nas subclasses das situações 2 e 3, proporção simples (partição) e transformação de medidas (transformação positiva desconhecida) e proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva), respectivamente, foram observadas estratégias adequadas e inadequadas em igual proporção. Apresentamos, no gráfico 1, uma síntese das resoluções observadas para o item a) de cada situação. O eixo horizontal representa cada situação do instrumento de pesquisa e o eixo vertical, a quantidade de estudantes que mobilizou cada tipo de estratégia.

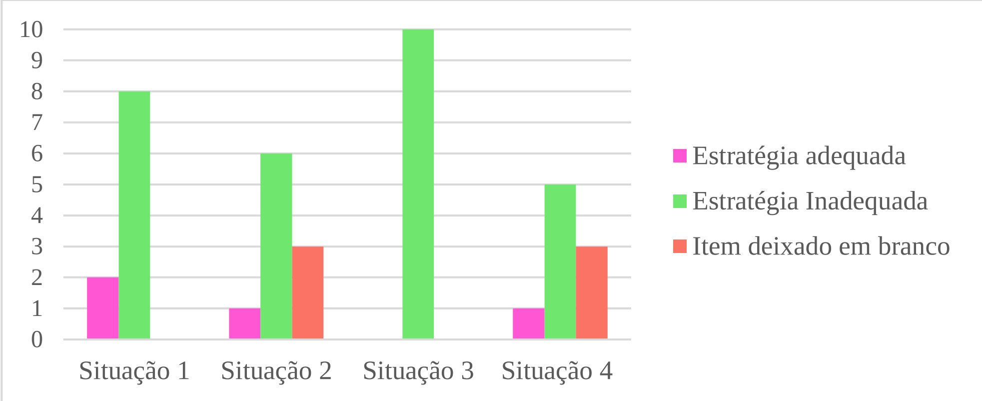
Gráfico 1: Síntese das resoluções do item a)



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Em relação ao item b), foi identificado maior número de estratégias inadequadas em todas a situações. A cota com o estado inicial desconhecido e transformação positiva (situação 3) foi a classe na qual os estudantes apresentaram maior número de estratégias inadequadas. A partir das resoluções do item b), identificamos que os estudantes não compreendem a ideia de *generalização*, e que não conseguiram identificar as variáveis dependente e independente de cada situação, ideias essenciais para a compreensão do conceito de função. Em todas as situações, a expressão algébrica poderia ser obtida a partir da soma do estado inicial (a) com a multiplicação da transformação (b) pela variável independente de cada situação. Na situação 1, por exemplo, são dados o estado inicial e a transformação, mas apenas dois estudantes apresentam uma expressão algébrica adequada. Apresentamos, a seguir, no gráfico 2, as análises referentes ao item b) de cada situação.

Gráfico 2: Síntese das resoluções do item b)



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Assim como Bernardino *et al.* (2019) e Nogueira, Rezende e Calado (2020), que mostram que a generalização gera dificuldades para os estudantes, concluímos que os estudantes participantes desta investigação também apresentam erros e equívocos em relação a essa ideia, que se constitui uma das ideias essenciais para a compreensão do conceito de função. Dentre as trinta e nove (39) resoluções analisadas referentes à generalização, identificamos vinte e nove (29) estratégias inadequadas e seis (06) deixadas em branco. Para sintetizar as resoluções nas quais os estudantes não apresentaram nenhuma estratégia, elaboramos o quadro 47, no qual consta uma síntese das resoluções deixadas em branco por cada participante da pesquisa.

Quadro 47: resoluções deixadas em branco

Estudante	Situação 2	Situação 3	Situação 4
E1			
E2		item c)	
E3			
E4	item b)		
E5			item b)
E6	item b)		
E7			
E8	item b)		
E9			item b)
E10	item c)		item b)

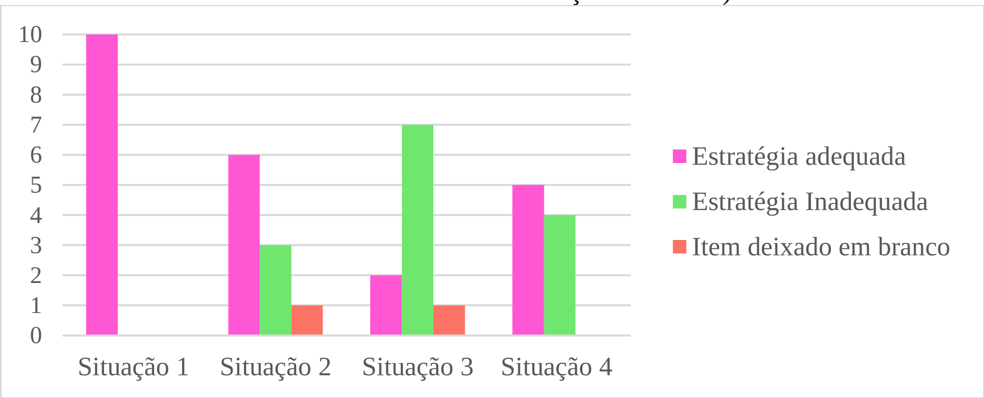
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Resoluções deixadas em branco simbolizam que os estudantes não conseguiram nem ao menos iniciar a resolução, observa-se que a maioria das resoluções deixadas em branco, seis

(06), foram do item b). Ainda em relação à generalização, um fato que se destacou perante as resoluções foi a recorrência dos estudantes em utilizar a letra x para representar uma quantidade qualquer, e muitas vezes sem necessidade e de modo equivocado. Para Calado (2020), isso revela que os sujeitos possivelmente atrelam uma variável somente à letra x. Lucas *et al.* (2014) afirmam que essa recorrência indica pouca variedade de letras para representar variáveis e incógnitas.

Em relação ao item c), foi possível observar que os estudantes apresentaram mais estratégias inadequadas na cota com o estado inicial desconhecido e transformação positiva (situação 3). Na multiplicação um para muitos com estado final desconhecido e transformação negativa (situação 1), todos os estudantes apresentaram estratégias adequadas, confirmando que a subclasse constituiu a mais simples das quatro analisadas, conforme gráfico 3.

Gráfico 3: Síntese das resoluções do item c)



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Um dos objetivos específicos estabelecidos nesta investigação foi identificar teoremas em ação associados ao conceito de função afim manifestados nas estratégias dos estudantes ao resolverem situações de diferentes subclasses do tipo proporção simples e transformação de medidas. A partir das estratégias dos estudantes, identificamos os possíveis invariantes operatórios pertencentes ao campo conceitual da função afim na forma de teoremas em ação: (04) teoremas em ação verdadeiros e dois (02) teoremas em ação falsos foram observados. Estabelecemos a nomenclatura de cada teorema na análise *a priori*. Consta no quadro 48 uma síntese desses teoremas em ação e a quantidade de vezes que cada estudante indicou mobilizá-los.

Quadro 48: Síntese das possibilidades de teoremas em ação identificados

Estudantes	TAV1	TAV2	TAV4	TAV5	TAF1	TAF5
E1	4	1	1		4	
E2	4	2		1	2	
E3	2	1	3		2	1
E4	6	2			2	
E5	4	2		1	1	
E6	4	1			3	1
E7	6	2		1		1
E8	3	1			3	1
E9	5	1			1	
E10	2	1	1		2	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No que se refere aos teoremas em ação, observa-se que a mobilização de cada um é indicada mais de uma vez, mais especificamente por no mínimo três (3) estudantes, como é o caso do TAV5, que foi mobilizado por E2, E5 e E7. Identificamos que o mesmo teorema em ação foi mobilizado em diferentes situações, como é o caso do TAF1, que pode ser observado nas resoluções do estudante E4, que o mobilizou na resolução do item b) da situação 1 e no item c) da situação 3. Foi observada, também, a mobilização do mesmo teorema mais de uma vez na mesma situação, como é o caso do estudante E1, que mobilizou o TAF1 nos itens a), b) e c) da situação 2.

Constatamos a mobilização de dois teoremas em ação falsos:

- TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$;
- TAF5: $a - f(bt) = f(bt) - a\ com\ a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$.

O TAF1 está relacionado à identificação do estado inicial (a). No caso da função afim, o coeficiente linear, os estudantes desconsideraram o estado inicial e apresentaram uma expressão algébrica inadequada. Esse teorema em ação foi identificado vinte (20) vezes nas resoluções dos estudantes, sendo manifestado por nove (09) dos dez (10) sujeitos participantes da pesquisa. O TAF5 refere-se a estratégias nas quais os estudantes fazem uma inversão das informações: a transformação deveria ser retirada do estado inicial, mas é realizado o inverso, os estudantes retiram da transformação o estado inicial. O TAF5 foi mobilizado por quatro estudantes na resolução do item b) da situação 1.

Os dois teoremas em ação falsos identificados dizem respeito à generalização, o que sinaliza para a ausência do pensamento funcional. Para Vergnaud (2009b), um teorema em ação falso é tido pelo estudante como verdadeiro, e existem casos que ele pode ser verdadeiro, mas localmente. Com base em Vergnaud (2009b) e Magina *et al.* (2008), afirmamos que a identificação desses conhecimentos implícitos dos estudantes pode possibilitar, aos professores e pesquisadores, auxiliar os estudantes na desestabilização de um teorema em ação falso e compreensão do próprio erro, pois é por meio da desestabilização desses conhecimentos errôneos que o estudante pode compreender um conceito.

Admitindo que os conhecimentos do aluno de fato se manifestam apenas pelas decisões que ele toma em problemas apropriados, o professor não pode subestimar as situações que levará para sala de aula, bem como deve propiciar variações. Para Vergnaud (1998), a compreensão de um conceito na Matemática é difícil justamente por implicar uma grande variedade de situações, procedimentos e símbolos vivenciados ao longo de todo o período escolar. Brousseau (2008) afirma que aprender não consiste em cumprir ordens, nem em copiar soluções para problemas: é preciso que o aluno produza seus conhecimentos em um processo autônomo. Dessa forma, concordamos com Magina *et al*. (2008), para quem as dificuldades relativas a um conceito são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas por meio de diversas situações.

Consideramos que as situações aqui apresentadas são sugestões para o trabalho pedagógico em sala de aula pelo professor, principalmente no que diz respeito às variações de classes. Destacamos a importância de os professores terem ciência e acesso a essas diferentes situações de função afim, e que cada tipo de situação pode se tornar mais simples ou mais complexa para os estudantes em relação às variações possíveis. Para que diferentes esquemas e, portanto, aprendizagens sejam possibilitadas aos estudantes, sugere-se que variadas situações, como as propostas nesta pesquisa, sejam exploradas em sala de aula. Almejamos, então, que esta pesquisa e os dados obtidos possam servir de base aos professores da Educação Básica, bem como para o mapeamento do campo conceitual da função afim, objetivo principal do GEPeDiMa.

Indicamos que, em pesquisas futuras associadas ao conceito de função afim, sejam elaboradas sequências didáticas e/ou Engenharias Didáticas que possibilitem aos estudantes a desestabilização dos conhecimentos falsos modelizados aqui, nesta investigação, por meio de teoremas em ação. O estudante poderá aprender, a partir dos próprios erros, que do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, é possível proporcionar compreensão do conceito estudado, fazendo com que produza os próprios conhecimentos em um processo autônomo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT,** Florianópolis, v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ANDRADE, L. S.; Kaiber, C. T. Reflexões sobre o ensino de funções sob a perspectiva do enfoque ontosemiótico. **Educação Matemática em Revista - RS**, v.2 n.14, p. 27-36 (2013).

ANTUNES, G. T.; MENEGHETTI, C. M. S. Matemática em pixels: o ensino de funções aplicado a criação de filtros de imagens digitais. **Educação Matemática em Revista-RS.** ANO 22, v.2, n. 22, p. 28. 2021.

BERNARDINO, F. et al; In: CEOLIM, A. J.; REZENDE, V.; HERMANN, W. (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade:** reflexões acerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.51-70.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum: Ensino Fundamental**. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum: Ensino Médio**. 2018.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

BURANELLO, L. V. A. A.; LOPES JUNIOR, J. Avaliação Formativa e as Sequências Didáticas: Uma possibilidade para o ensino e a aprendizagem de Função Afim no 1º ano do Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista**. Brasília, v. 22, n. 56, p. 176-192, 2017.

CALADO, T. V. **INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.** 2020. 193f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

CALADO, T. V.; REZENDE, V. Aspectos Históricos e Epistemológicos do Conceito de Função: um estudo sobre as ideias-base. **Revista Eletrônica de Educação.** (no prelo)

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2.ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

CASTRO, K. O. Ideias básicas de função no 9º ano do ensino fundamental: uma sequência de atividades com o auxílio do software Winplot. **REVEMAT**, v. 6, n. 2, p. 49-66, 2011.

CEOLIM, A. J; REZENDE, V; HERMANN. W. (Org.). **DIÁLOGOS ENTRE A EDUCAÇÃO BÁSICA E A UNIVERSIDADE:** reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática. 1ed. Curitiba: CRV, 2019, v. 1.

CEOLIM, A. J. *et al.* Gráficos de Função Afim construídos por estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. In: Amauri Jersi Ceolim; Veridiana Rezende; Wellington Hermann. (Org.). **DIÁLOGOS ENTRE A EDUCAÇÃO BÁSICA E A UNIVERSIDADE:** reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática. 1ed. Curitiba: CRV, 2019, v. 1, p. 85-105.

CHARNAY, R. Aprendendo com a resolução de problemas. In Celia Parra e Irma Saiz (eds) **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Artes Médicas-Porto Alegre, 1996.

CIANI, A. B.; NOGUEIRA, C. M. I.; BERNS, M. A construção do conceito de função: aspectos teóricos, históricos e didáticos. In: CEOLIM, A. J.; REZENDE, V.; HERMANN, W. (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões à cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.29-50.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1ª edição, 1995.

GARCIA, W. F. D. G; REZENDE, V. Da expressão algébrica ao gráfico: Um estudo com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. In: **II Ágora Matemática**, 2018, Campo Mourão - Paraná.

GITIRANA, V. *et al.* **Repensando multiplicação e adição:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 1ª edição. São Paulo: PROEM, 2014.

GODOY, E. V; CARRETA, C. L. A. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a Educação Matemática crítica: uma análise dos conceitos de função e funções polinomiais do 1º e 2º graus no livro didático mais adotado no PNLD 2015. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática,** v. 15, n. 18, p. 117-135. 2018.

GONÇALVES, B. M. V.; LIMA, F. J. Aprendizagem Docente e Desenvolvimento de Estratégias Metodológicas no Contexto do PIBID: reflexões sobre o GeoGebra como recurso para o ensino de funções. **Revista Bolema,** Rio Claro-SP, v. 34, n. 68, p. 1056-1076, dez. 2020.

KIKUCHI, L. M. **A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos invariantes operatórios no conteúdo de álgebra**. Tese (Doutorado em ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no Ensino Fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista-RS.** número 10 - v.1 - pp. 27 a 35, 2009.

LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM: Rio de Janeiro, 2006.

LOURENÇO, E. H.; OLIVEIRA, P. C. O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo-SP, v.16, n.2, p.369-383, 2014.

LUCAS, C. et al. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. **Revista Bolema,** Rio Claro-SP, v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara *et al*. **Educação Matemática:** uma introdução. 1 ed. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-208.

MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. Levy. A história do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Revista Bolema**, Rio Claro-SP, v.28, n.50, p. 1348-1367, 2014.

MAGGIO, D. P.; SOARES, M. A. S.; NEHING, C. M. Registros de representação semiótica da função afim: análise de livros didáticos de matemática no ensino médio. **REVEMAT**, v. 05, n. 1, p.38-47, 2010.

MAGINA, S. et al. **Repensando Adição e Subtração:** Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**.** 3ª edição. São Paulo: Editora PROEM, 2008.

MENEGHETTI, R.; REDLING, J. P. Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Revista Bolema**. Rio Claro-SP, v.26, n.42ª, p. 193-229, 2012.

MIRANDA, C. de A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2019.

MIRANDA, C. de A. REZENDE, V. N, C. M. I. Uma Análise de Problemas de Função Afim Fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.** v.14, n.4, p. 485-495, 2021.

MUNIZ, C. A. **O ser Matemático nos anos Iniciais e as Produções subjetivas nas aprendizagens Matemáticas: Aprendizagem e Diversidade.** EPREM Encontro Paranaense de Educação Matemática, Cascavel, 2017. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/333/149. Acesso em: 03 out 2020.

NASCIMENTO, R. A.; QUARTIERI, M, T. Investigação Matemática: possibilidade para o ensino de função do 1º grau. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.** v.13, n.2, p. 133-144, 2020.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo-SP, V.18, n.2, p. 599-625, 2016.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Mapeando o Campo Conceitual da função afim: primeiros passos. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo-SP, v.21, n.5, p.193-204, 2019.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V.; CALADO, T. V. Função afim na Educação básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. In: **Alexandria:** Revista de Educação em Ciências e Tecnologia. Florianópolis, v.13, n.2, p. 25-50, 2020.

OZORES, A. L. F. **Entendendo alguns erros do Ensino Fundamental II que os alunos mantem no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado para o Mestrado profissional em Educação Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. São Paulo-SP, 2016.

PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo-SP, v.19, n.1, 465-496, 2017.

PIAGET, J**. O possível e o necessário: evolução dos possíveis na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.

PIRES, R. F.; MERLINE, V.; MAGINA, S. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. **Educação Matemática em Revista**, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

POLICASTRO, M. S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão. **Revista Zetetiké**, Campinas, SP, v.29, p. 1-23, 2021.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de matemática.** Educação e Matemática, p. 3-9, 1990.

RODRIGUES, P. F. C. et al. Aprendizagem significativa na educação de jovens e adultos: uma proposta para o ensino de função afim utilizando resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, p. 41-48, 2019.

RODRIGUES, C. L. B. H. **INVARIANTES OPERATÓRIOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE FUNÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2021. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel - PR.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSSINI, R. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.9, n.2, p.205-247, 2007.

ROSSO, A. J; BERTI, N. M. O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. **Revista Bolema**, Rio Claro-SP, v. 23, nº 37, p. 1005 a 1035, 2010.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de Função? **Educação Matemática em Revista.** Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, 2017.

SILVA, S. D.; NOGUEIRA, C. M. I. Dissertações brasileiras relacionadas ao ensino de função afim sob a perspectiva das teorias da Didática da Matemática. **Educação Matemática em Pesquisa,** São Paulo-SP. v. 23, n. 1, p. 448-472, 2021.

SOUZA, V. M.; MARIANI, V. C. Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função. In: V EDUCERE, 2005, Curitiba. **Anais.** Curitiba. 2005. p. 1-12. Disponível em: https://docplayer.com.br/12770073-Um-breve-relato-do-desenvolvimento-do-conceito-de-funcao.html. Acesso em: 12 nov. 2021.

SOUZA, J. S. S.; PIRES, R. F.; SOUZA, L. de O. O conceito de função na formação de professores de matemática: a importância do enriquecimento da imagem conceitual e o seu favorecimento por meio da modelação. **Educação Matemática em Revista-RS**. ANO 20, v.2, n. 20, p.111. 2019.

TENÓRIO, A; OLIVEIRA, M. E. F. de. TENÓRIO, T. A influência do Geogebra na Resolução de Exercícios e Problemas de Função Polinomial do 1° grau. **Jornal Internacinal de Estudos em Educação Matemática (JIEEM).** Rio de Janeiro, v.7, n.2, p. 98- 126, 2015.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de função.** Rio de Janeiro: Projeto Função, 2002.

VERGNAUD, G. (1983) Multiplicative structures.IEm R. Lesh 8 M. Landau (Eds.) Acquisitions of mathematics concepts and procédures New York: Academic Press, 1983, pp.127-174.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

VERGNAUD, G. **Teoria dos Campos Conceituais**. In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática da UFRJ. 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Maria José Figueiredo (Tradução), Lisboa: Instituto Piaget, 1996a, p.155 - 191.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, nº 4, 1996b, p. 9 - 19.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, 17(2). 1998. p.167-181.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, O Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área**. Org. MOREIRA, M. A. V7(1), p. 7-29, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html. Acesso em: 21. jan. 2022.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In. **Por que ainda há quem não aprende?** Org. GROSSI, Esther Pillar. 2ª edição. Editora Vozes, Petrópolis, 2003.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicaiva del conocimiento. In: Anais do I **Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática.** Tandil: Argentina, Unicen, 2007.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. O que é aprender. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-35.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. In: **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1. 2011. p. 15-27.

ZUIN, E. de S. L. Prova real e prova dos nove nos exames de admissão de Carlos Góes. In: **XVIII encontro baiano de educação matemática.** Brasil. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE I - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

Credenciada pelo Decreto Estadual n.º 9.538, de 05/12/2013
Recredenciamento pelo Decreto nº 2.374, de 14/08/2019
CNPJ: 05012896/0001-42

Prezado(a) Colaborador(a), ____

____

Você está sendo convidado (a) a participar da pesquisa intitulada "**PROBLEMAS MISTOS E SUAS IMPLICAÇÕES NA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM**", que faz parte do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNESPAR, sob a responsabilidade da professora Dra. Veridiana Rezende da instituição Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR e da pesquisadora Fabricia Bernardino, que terá como objetivo analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, intervém na resolução de estudantes do Ensino Médio.

O presente projeto de pesquisa foi aprovado pelo CEP UNESPAR.

DADOS DO PARECER DE APROVAÇÃO
Emitido pelo Comitê de Ética em Pesquisa, CEP UNESPAR.
Número do parecer: 5.568.513
Data da relatoria: 08/08/2022

1.PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA: A sua participação é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: responder os problemas envolvendo problemas mistos sobre função afim.

2. RISCOS E DESCONFORTOS: Informamos que esta pesquisa traz riscos mínimos, podendo causar desconfortos ou timidez e sentimento de insegurança se o sujeito da pesquisa não conseguir se adaptar com as atividades proposta. Salientamos que em qualquer momento o aluno(a) poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa, se sentir desconfortável.

Lembramos que a sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa.

3.BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados são:

- Acreditamos que esta pesquisa poderá fazer com que nós professores repensamos na forma como apresentamos os problemas aos alunos, e que existem diferentes problemas, de classes diferentes, que fazem com que o aluno possa mobilizar diferentes estratégias de soluções.

- Esta pesquisa também contribuirá na identificação de alguns teoremas em ação mobilizados pelos estudantes, sendo estes muito importantes para o conhecimento e aprendizagem em matemática. Os erros, assim como os acertos dos alunos tem que ser muito bem analisados e levar em consideração, pois muitas vezes o conhecimento do aluno sobre algum conteúdo é manifestado implicitamente em suas respostas, sendo este estudo sendo relevante para mostrar alguns desses conhecimentos implícitos.

4.CONFIDENCIALIDADE: Informamos ainda que suas as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade.

As suas respostas e dados pessoais ficarão em segredo e o seu nome não aparecerá em lugar nenhum das nossas análises das escritas, nem quando os resultados forem apresentados.

Além disso, os dados a serem coletados só serão utilizados para fins de publicações científicas, num período de até cinco anos, a partir do ano de 2022. Após este período os dados serão descartados.

5.ESCLARECIMENTOS: Caso você tenha mais dúvidas ou necessite esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que queira saber antes, durante e depois da sua participação, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UNESPAR, cujo endereço consta deste documento.

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o **pesquisador responsável**, conforme e-mail abaixo:

Nome do pesquisador responsável: Veridiana Rezende
E-mail: rezendeveridiana@gmail.com

Pesquisadora assistente: Fabricia Bernardino
E-mail: fabriciabernardi123@hotmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (CEP) envolvendo Seres Humanos da UNESPAR, no endereço abaixo:

CEP UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná.
Avenida Gabriel Esperedião, S/N – Sala 20, Jardim Morumbi, Paranavaí-PR
CEP: 87.703-000
Telefone: (44) 3482-3212
E-mail: cep@unespar.edu.br

6.RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso o(a) Sr.(a) aceite participar da pesquisa, não receberá nenhuma compensação financeira.

7.1 CUSTOS: Foi esclarecido de que não há nenhum valor econômico a receber ou a pagar por sua participação na pesquisa, tendo em vista que sua participação é voluntária.

PREENCHIMENTO DO TERMO: Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e por você, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você), como garantia do acesso ao documento completo.

Fabricia Bernardino
Pesquisadora Assistente

APÊNDICE II - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(Adolescentes de até 18 anos)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

Credenciada pelo Decreto Estadual n.º 9.538, de 05/12/2013
Recredenciamento pelo Decreto nº 2.374, de 14/08/2019
CNPJ: 05012896/0001-42

Nós, Veridiana Rezende (pesquisadora principal) e Fabricia Bernardino (pesquisadora assistente) convidamos você ____ a participar do estudo "PROBLEMAS MISTOS E SUAS IMPLICAÇÕES NA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM".

Por que estamos propondo este estudo? Pretendemos analisar invariantes operatórios mobilizados por alunos dos Anos Finais do Ensino Médio, a partir de problemas mistos sobre função afim.

Este termo denominado assentimento é um termo que nós, pesquisadores, utilizamos quando convidamos uma pessoa para participar de um estudo. Depois de compreender do que se trata o estudo e se concordar em participar dele você pode assinar este documento.

Nós te asseguramos que você terá todos os seus direitos respeitados e receberá todas as informações sobre o estudo, por mais simples que possam parecer.

Se este documento denominado Termo de Assentimento Livre e Esclarecido contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável (pela pesquisa ou à equipe do estudo) para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

A pesquisa será feita no Colégio Estadual Cívico Militar Marechal Rondon, em Campo Mourão – Paraná no segundo semestre de 2022, no horário de aula, no qual os alunos resolverão problemas mistos sobre função. Para isso, serão usadas atividades impressas e gravações de áudio, o uso das atividades impressas e a gravação de áudio é considerado seguro, mas é possível ocorrer desconfortos ou timidez e sentimento de insegurança se o sujeito da pesquisa não conseguir se adaptar com as atividades propostas. Salientamos que em qualquer momento o aluno(a) poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa.

Mas há coisas boas que podem acontecer, pois acreditamos que esta pesquisa poderá auxiliar os professores a repensarem na forma como são ensinados e apresentados os problemas para os alunos. Além de contribuir para os conhecimentos de diferentes problemas e ajudar a conhecer alguns dos conhecimentos implícitos apresentados pelos alunos, esperamos que esta pesquisa proporcione aprendizagens para vocês a respeito de problemas mistos. Almejamos também que os resultados da pesquisa sirvam de respaldo para pesquisas futuras no campo da Educação Matemática.

Se você ou seus responsáveis tiverem dúvidas com relação ao estudo ou aos riscos relacionados a ele, você deve contatar o pesquisador responsável ou membro de sua equipe sendo a Dra. Veridiana Rezende (pesquisadora responsável) E-mail: rezendeveridiana@gmail.com, e Fabricia Bernardino (pesquisadora assistente), E-mail: fabriciabernardi123@hotmail.com.

Participante da Pesquisa (assinatura):

____

Pesquisadora assistente ou quem aplicou o TALE (assinatura):

____

Pesquisadora Responsável (assinatura):

____

Obs.: Todas as páginas do termo precisam ser rubricadas pela pesquisadora que aplicou o termo e pelo participante e/ou seu responsável.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você apresentar. Os resultados da pesquisa serão publicados, mas sem identificar o nome dos participantes.

Você entendeu? Quer perguntar mais alguma coisa?

Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como participante de pesquisa, você pode contatar também o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UNESPAR, no endereço abaixo:

CEP UNESPAR

Universidade Estadual do Paraná.

Avenida Gabriel Esperedião, S/N – Sala 20, Jardim Morumbi, Paranavaí-PR

CEP: 87.703-000

Telefone: (44) 3482-3212

E-mail: cep@unespar.edu.br

APÊNDICE III – INSTRUMENTO DE PESQUISA

1- Para esvaziar uma piscina de 30.000L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000L de água por hora.

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?
b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.
c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

2- Uma turma de 3° ano deseja fazer uma viagem em dezembro de 2022. Eles já possuem, em uma conta, R$500,00. No mês de janeiro de 2022, começaram a guardar dinheiro:

a) Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?
b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t) em meses.
c) Sabendo que a viagem custará R$4.100,00, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

3- Celina participou de um evento esportivo que consistia, em uma parte inicial, de corrida, seguida por uma parte de ciclismo. Ela corre 1km a cada 3 minutos, e pedala a uma velocidade de 45 km/h.

a) Celina correu por 60 minutos. Quantos quilômetros teve a corrida do evento?
b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.
c) Quanto tempo Celina precisou pedalar, sabendo que o percurso total foi de 200km?

4- Enzo possui 100.000 seguidores engajados no Instagram. Para receber um salário de 23.000 dólares no mês, ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações. Se deixar de fazer alguma, é descontado, por publicação não feita, um valor proporcional à quantidade de seguidores.

a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?
b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.
c) Em fevereiro, ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer?

APÊNDICE IV – TRANSCRIÇÃO DO DIÁLOGO FINAL

SITUAÇÃO 1

Pesquisadora: Pessoal, quais foram as impressões de vocês sobre os problemas?
E1: Achei fácil, professora. Acho que errei umas coisas de bobeira, mas se tivesse estudado antes acho que resolveria bem de boa.
E5: Achei fácil também, só são muito grandes.
Pesquisadora: O que você achou E10?
E10: Difícil professora, não lembrei desse conteúdo.
Pesquisadora: Mas conseguiu resolver alguns itens?
E10: Acho que sim.
Pesquisadora: Eu vou resolver as situações no quadro agora. Vou olhar as resoluções de vocês, mas neste momento, não irei corrigi-las. Conforme eu for resolvendo, vamos conversando sobre cada item, se eu não conseguir entender algo eu pergunto. Fiquem tranquilos, vou perguntar apenas se não estiver explícita a forma como resolveram, não significando se está certo, ou errado. Como eu disse no início, o interesse é justamente analisar a forma de resolução.
E4, percebo que você deixou apenas as respostas, como pensou para resolver o item a) da situação 1?
E4: Eu fiz de cabeça, professora. A cada uma hora tira 2 mil; então, em 5 horas, é só multiplicar por 5 os 2 mil, que dá 10 mil.
Pesquisadora: Legal, e no item b) que pergunta sobre uma expressão algébrica?
E4: Eu coloquei a ideia, que tira 2 mil litros por hora, como é dois ficou fácil. Para esvaziar mesmo, é só pensar dois vezes quanto dá trinta.
E9: Eu também fiz assim a letra c), estava fácil mesmo.
Pesquisadora: E10, você também não colocou a resolução, só a resposta, como você pensou?
E10: igual o E9, professora, pensei que número vezes 2 dá 30, e é 15.
E3: Mas não dava 10? Pois sobrou 20 mil litros, será necessário 10 horas.
Pesquisadora: Mas as outras 5 horas também foram necessárias para esvaziar, você não concorda?
E3: Concordo, na hora não pensei nas 5 horas.
Pesquisadora: Ok, e em relação a expressão algébrica pessoal, em todos os itens b), era requisitada uma expressão algébrica, estou vendo que vocês resolveram de formas diferentes, alguém quer falar algo?
E6: Eu fiquei meio perdida, resolve um para a gente ver professora.
Pesquisadora: Já vamos resolver. E5 você deixou duas repostas na letra b), por quê?
E5: Eu coloquei as duas porque pensei, ou é 30 mil, ou é uma quantidade que a gente não sabe. Já que quando não sabemos um valor, a gente coloca a letra, coloquei a letra q de quantidade.
Pesquisadora: Ok, seguimos em frente na resolução então.
A professora pesquisadora finalizou a resolução dos itens b) e c).
E6: Nossa professora, era só isso a expressão? Acho que eu errei.
Pesquisadora: Ok, sem problemas. Seguimos então, vou resolver o problema da turma que deseja fazer uma viajem.

SITUAÇÃO 2

E7: Bem facinho esse.
Pesquisadora: E1 percebo que você deixou duas formas de resolução para o item a), você lembra? Tem 383,33 e 300 como resposta.

E1: Eu não sabia se precisava tirar os quinhentos reais professora, igual você fez ali no quadro, por isso deixei as duas, mas como deu quebrado o primeiro valor, achei mesmo que estaria certo os 300.
Pesquisadora: Você consegue perceber agora o motivo de retirar os quinhentos reais?
E1: Sim, porque não faz parte do que guardam mês a mês.
E3: Eles possuem, após 6 meses, R$2.300,00. Daí eu tinha que descobrir que número vezes 6 dá R$2.300,00, aí fui fazendo a tabuada e cheguei que 6 vezes 380 dá 2300.
E10: Eu fui tentando somar até dar os R$2.300,00. Não cheguei em um valor exato, mas o que mais chegou perto foi o R$400,00.
E4: Eu diminuí o que eles tinham no começo, e depois dividi pelos seis meses.
Pesquisadora: E6, percebo que você também colocou duas respostas, igual o E1, qual foi sua ideia?
E6: Eu tinha esquecido na hora, dos quinhentos reais, mas daí lembrei.
Pesquisadora: Ok. Vamos para o item b). E5, nesse item você também deixou duas resoluções, o que você pensou?
E5: Fiquei meio na dúvida professora, a quantia que a turma possui pode ser obtida a partir da subtração do que eles precisam pelo que eles já têm, dividido pelo tempo que pouparam. Posso ver professora?
Pesquisadora: Pode, só não pode alterar.
E5: Daí, coloquei em letras para a expressão. Péra, tem duas coisas iguais, né? A quantia que possui e já tem é a mesma coisa. Vish! não sei, professora
Pesquisadora: Vou resolver no quadro.
E3: Não é tão difícil, mas acho que errei todas essas letras b).
Pesquisadora: E em relação ao item c)?
E7: Bem de boa.

SITUAÇÃO 3

E8: Achei esse difícil, professora.
Pesquisadora: Achou esse mais difícil que os outros?
E8: Não sei, fiquei meio confuso, esse e o do instagram achei mais difícil sim, acho que o do instagram achei mais.
Pesquisadora: Ok, vou resolver esse, se quiserem dizer algo, fiquem à vontade.
E1: Acho que eu confundi professora, a minha corrida não deu vinte, eu multipliquei por três, daí errei.
Pesquisadora: Por que você multiplicou por três?
E1: Na hora pensei que ela faz 1 km a cada 3 minutos, então tinha que multiplicar por 3, mas agora dá para ver, eu tinha que dividir.
E7: Também achei esse difícil, meio confuso. Mas consegui fazer, essa letra b) que me deixou confuso, daí errei.
Pesquisadora: E a letra c) pessoal, o que me dizem? Se o percurso total foi de 200km, quanto tempo Celina pedalou?
E3: Eu pensei assim: se ela corre 1km a cada 3 minutos, para eu saber quanto tempo levou os 200km, basta dividir 200 por 3, o que deu 64 minutos. Ela correu por uma hora e quatro minutos.
Pesquisadora: Mas está questionando sobre a corrida?
Os estudantes ficaram um tempo em silêncio.
Pesquisadora: Vamos resolver o item c).
E7: Foi bem nesse que eu me ferrei, eu entendi errado, achei que estava perguntando quanto ela pedalou, e não quanto tempo ela pedalou.

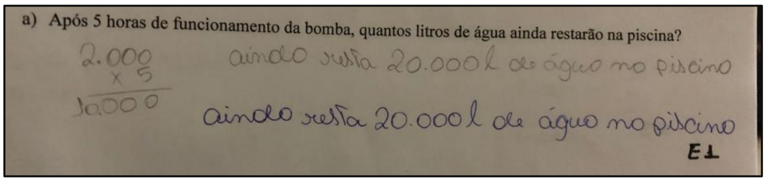
E3: Pior fui eu então, nossa nem vi, fiz tudo com a corrida. Não é difícil não, eu que não li direito.
Pesquisadora: Acontece pessoal, precisa ter bastante atenção.

SITUAÇÃO 4

Pesquisadora: Último problema pessoal, vamos lá, o que acharam desse?
E9: Achei top esse, professora, o negócio é ser influencer.
Pesquisadora: Verdade né? Bem vantajoso esse ramo, se conseguir se destacar pode ter bastante lucro.
E9: Sim. Eu gostei do problema, mas fiquei bem confuso, quanto que ele perdia?
E7: Eu cheguei em 2 mil dólares.
E1: Eu também.
E3: No meu não deu isso aí não, deu bem mais, não lembro agora.
Pesquisadora: O seu deu 3260 E3, você lembra o que pensou?
E3: Nem sei professora, fui tentando, mas não deu.
E5: Resolve professora esse.
Pesquisadora: Ok, vamos lá.
E9: Eu comecei certo, mas não consegui fazer essas contas.
E4: Acho que fiz desse jeito seu, professora, também deu 2 mil.
Pesquisadora: Ok. E quanto o item b) pessoal?
E8: Eu não consegui fazer isso aí não professora, negócio difícil.
Pesquisadora: Vamos resolver. Não consegui entender sua resposta E4, o que você pensou?
E4: Nem lembro professora, deixa eu ver... Eu pensei na forma que foi resolvida a questão, regra de três, por isso escrevi multiplicação cruzada, mas tem nada haver.
Pesquisadora: Por fim o item c), pessoal. Percebi na sua resolução mais de uma resposta E7, qual foi sua ideia?
E7: Eu fui tentando por regra de três, não sei por que deu errado, mas no final eu pensei que número vezes 2000 vai resultar nos 14000, e dá 7.
E3: Eu vi que ele perdeu muito, mas não tudo. Então, achei que era seis, sete ele teria perdido mais; e oito, teria perdido tudo.
Pesquisadora: Ok. Vamos resolver... E finalizamos pessoal. Alguém quer dizer alguma coisa?
E1: Achei legal professora, mas se tivesse estudado a gente ia melhor.
E6: Verdade.
Pesquisadora: Mas fiquem tranquilos, a ideia era não estudar mesmo, o estudo iria interferir nos dados da pesquisa. Mas agradeço a vocês. Muito obrigada pela participação.

APÊNDICE V – RESOLUÇÕES DOS ESTUDANTES

SITUAÇÃO 1 - ITEM A

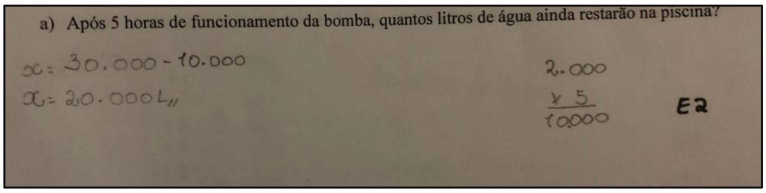

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

2.000 × 5 = 10.000

ainda resta 20.000 l de água na piscina

ainda resta 20.000 l de água na piscina

E1

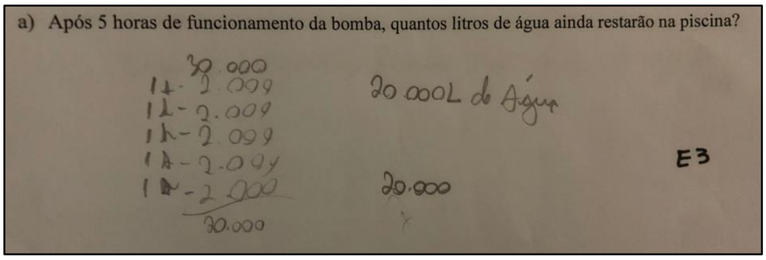

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

$x = 30.000 - 10.000$

$x = 20.000L$

2.000 × 5 = 10.000

E2


a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

30.000

1h - 2.000

1h - 2.000

1h - 2.000

1h - 2.000

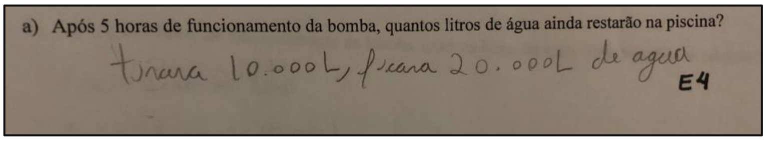
1h - 2.000

30.000

20.000L de Água

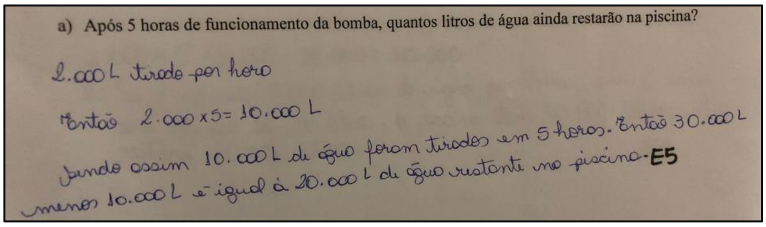
20.000

E3


a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

tiraria 10.000L, ficaria 20.000L de agua

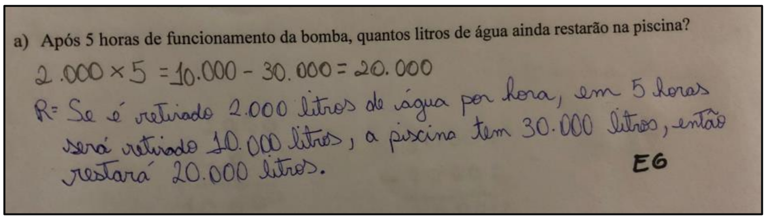
E4


a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

2.000L tirado por hora

Então 2.000 x 5 = 10.000 L

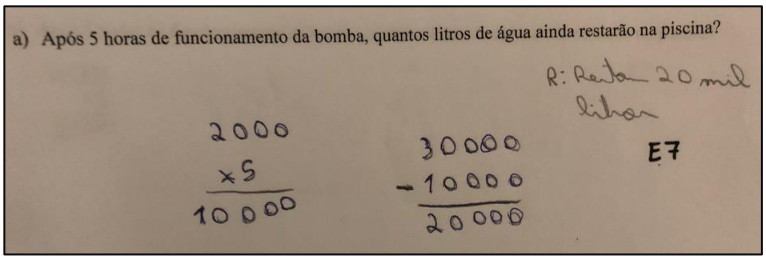
Sendo assim 10.000L de água foram tirados em 5 horas. Então 30.000L menos 10.000L é igual à 20.000 L de água restante na piscina. E5


a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

2.000 × 5 = 10.000 - 30.000 = 20.000

R: Se é retirado 2.000 litros de água por hora, em 5 horas será retirado 10.000 litros, a piscina tem 30.000 litros, então restará 20.000 litros.

E6


a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

R: Resta 20 mil litros

2000 × 5 = 10000

30000 - 10000 = 20000

E7

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

2000
x5
10000

Restaram 20 000 l

E8

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

E9

2 x 5 = 10.000 L

R: 10.000 L em 5 horas

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

E10

5 X 2000 = 10.000

30.000 - 10.000 = 20.000

SITUAÇÃO 1 - ITEM B

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

T x 9   q = t x 2.000   q = t x 2.000

E1

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

(q)
x = 30.000 - 2.000 . t
x = 30 000 · 2.000 · 5
x = 30 000 - 10.000
x = 20.000 L

t = 5 horas,
q = 30.000 L

E2

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

q = 30.000 t = 2.000 por hora
t = 5 horas (Q - T = Q)

E3

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

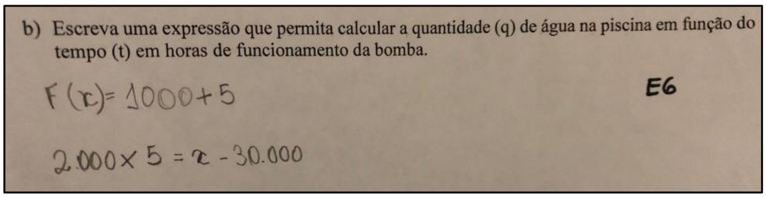
é uma Bomba que 2.000 L por hora

E4

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

E5

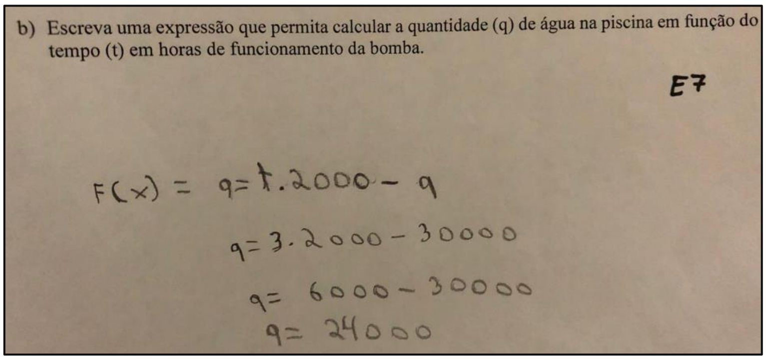
q - 2.000 x t ou 30.000 - 2.000 x t


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

E6

F(x)= 1000+5

2.000×5 = x - 30.000


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

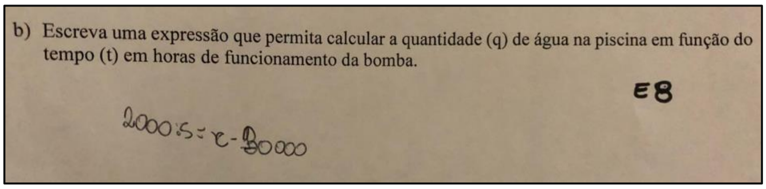
E7

F(x) = q= t.2000 - q

q= 3.2000 - 30000

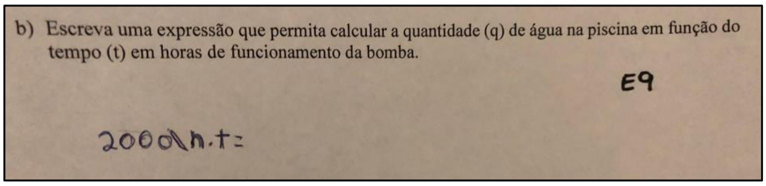
q= 6000 - 30000

q= 24000


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

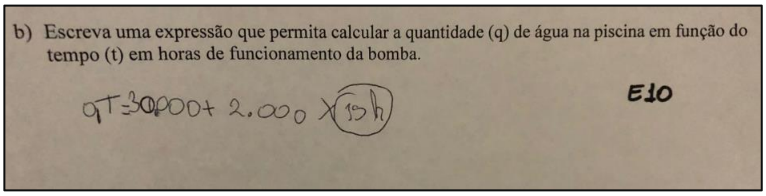
E8

2000:5= x-30000


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

E9

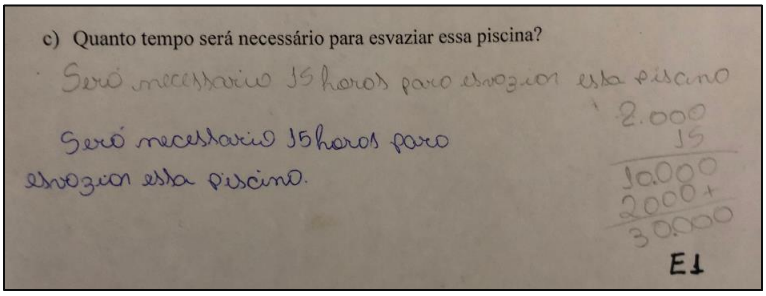
2000 h.t=


b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

E10

qT=30000+ 2.000 x 15h

SITUAÇÃO 1 - ITEM C

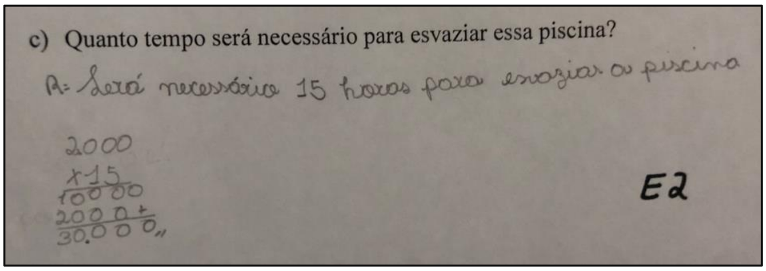

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

Será necessario 15 horas para esvaziar esta piscina

Será necessario 15 horas para esvaziar esta piscina.

2.000
15
10000
2000+
30000

E1


c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

R: Será necessário 15 horas para esvaziar a piscina

2000
×15
10000
2000+
30.000

E2

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

1 hora = 20.000L Será necessario = 10 horas.

E3

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

15 horas para esvaziar E4

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

De acordo com a A, em 5 horas é esvaziado 10.000 L. Então, se 5 horas equivale à 10.000 L, e 10.000 x 3 = 30.000; e 5 x 3 = 15, a piscina leva 15 horas para ser esvaziada.

E5

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

2.000 x 15 = 30.000

R= 15 horas para esvaziar uma piscina de 30.000 L. Já que em 5 horas esvaziará 10.000

E6

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

R: 15 horas

E7

5 = 10000

15 = 30000

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 10 & \\ -10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Será necessario 15 horas

E8

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

15 horas para esvaziar a piscina

E9

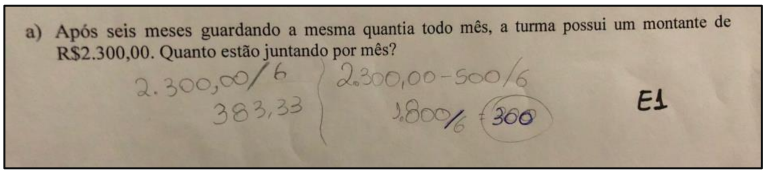
c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

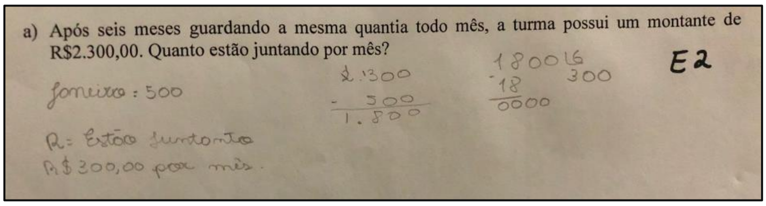
30.000

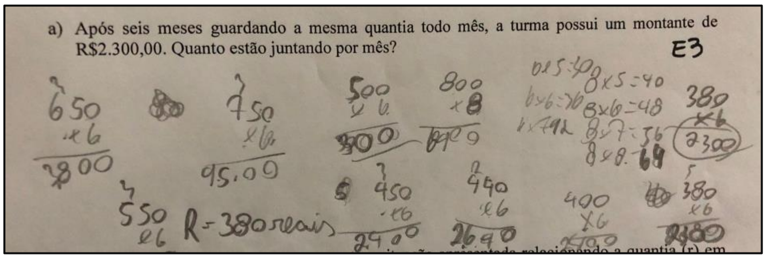
60 x 30.000 = 15h

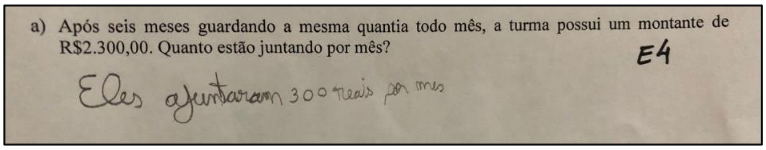
E10

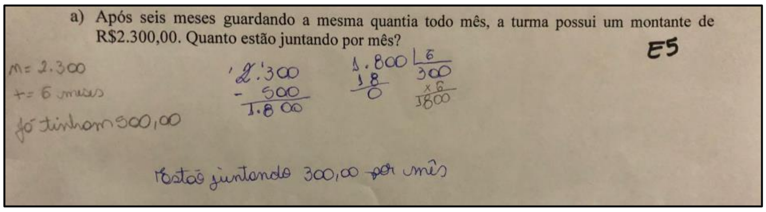
SITUAÇÃO 2 - ITEM A

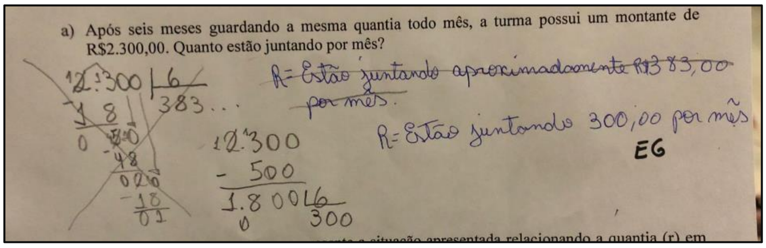


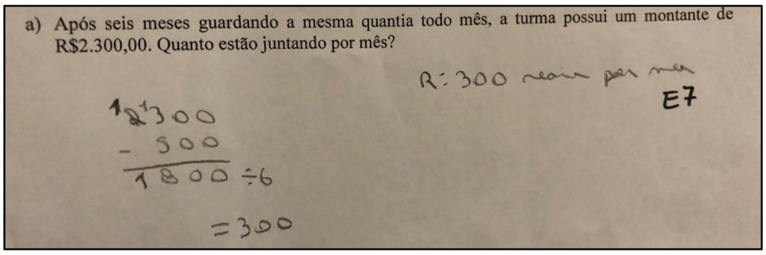


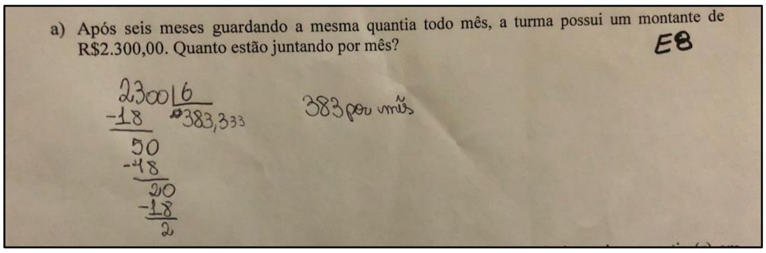










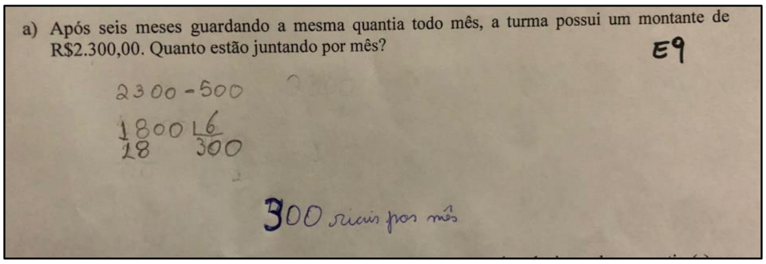


a) Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?

E8

2300 | 6
-18 383,333
50
-48
20
-18
2

383 por mês



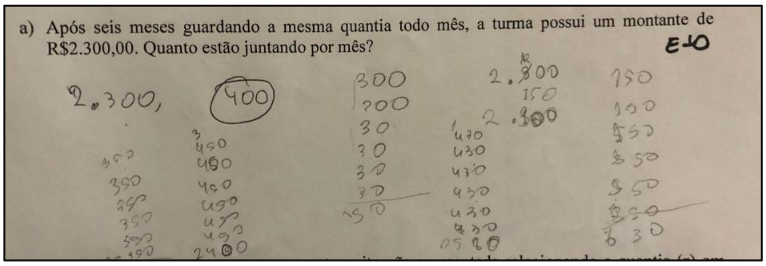
a) Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?

E9

2300 - 500

1800 | 6
18 300

300 reais por mês

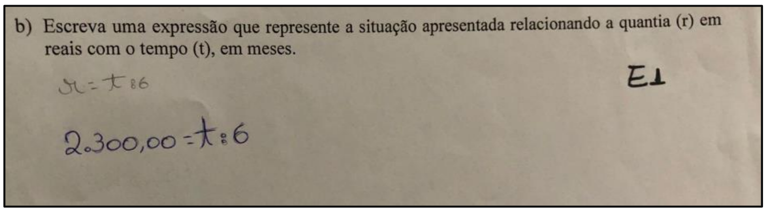


a) Após seis meses guardando a mesma quantia todo mês, a turma possui um montante de R$2.300,00. Quanto estão juntando por mês?

E10

2.300, 400

SITUAÇÃO 2 - ITEM B

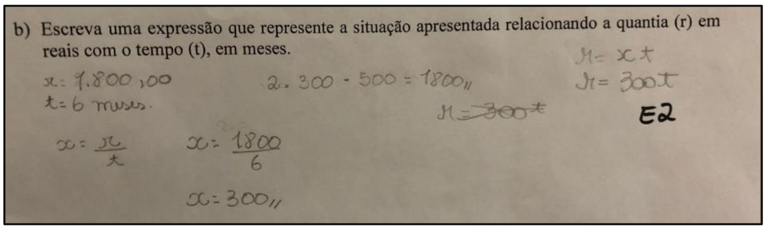


b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

E1

r = t : 6

2.300,00 = t : 6



b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

x: 1.800,00
t = 6 meses.

2.300 - 500 = 1800

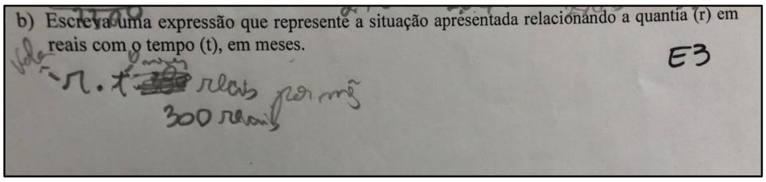
r = x t
r = 300 t

E2

x = r / t

x = 1800 / 6

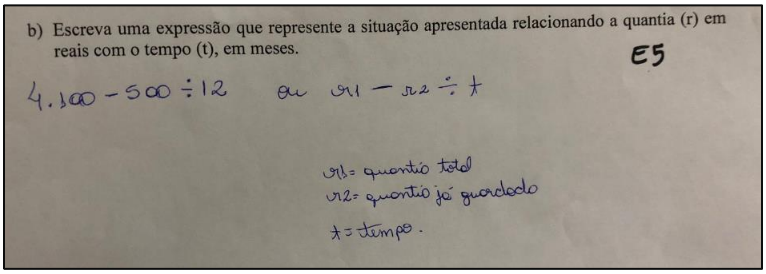
x = 300



b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

E3

r . t reais por mês
300 reais

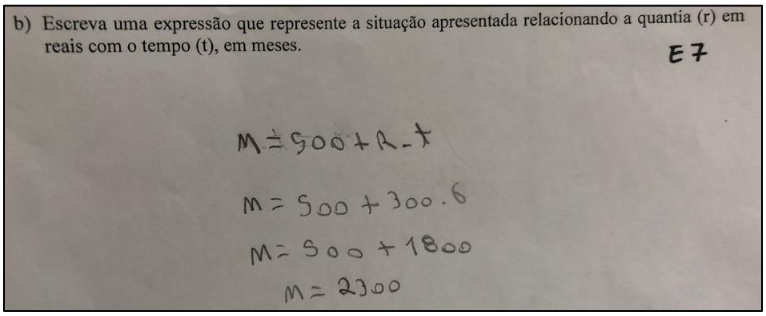


b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

E5

4.100 - 500 ÷ 12 ou r1 - r2 ÷ t

r1 = quantia total
r2 = quantia já guardada
t = tempo.



b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

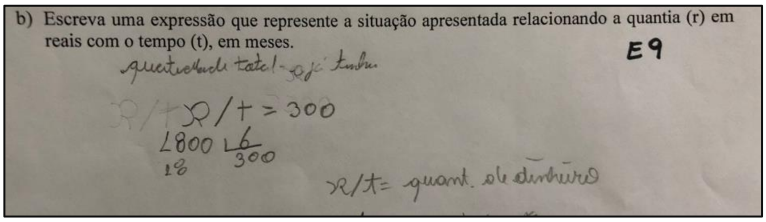
E7

M = 500 + R . t

M = 500 + 300 . 6

M = 500 + 1800

M = 2300



b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

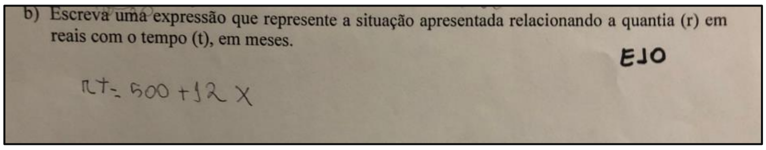
E9

quantidade total - o que já tinha

R/t = 300

1800 | 6
18 300

R/t = quant. de dinheiro

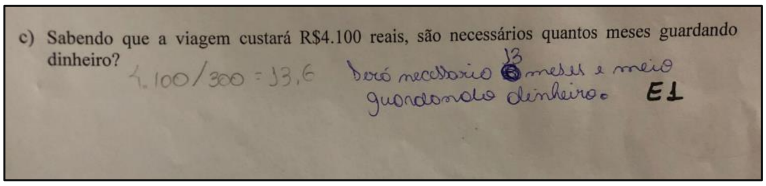


b) Escreva uma expressão que represente a situação apresentada relacionando a quantia (r) em reais com o tempo (t), em meses.

E10

Rt = 500 + 12 X

SITUAÇÃO 2 - ITEM C

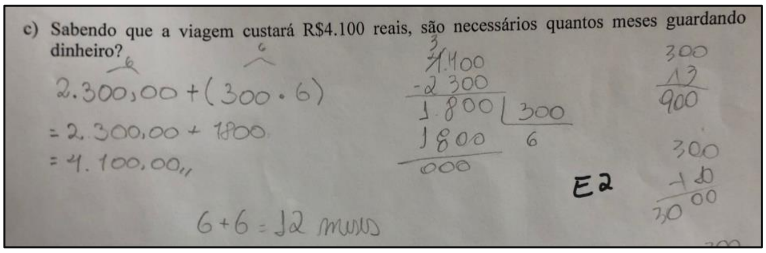


c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

4.100/300 = 13,6

Será necessário 13 meses e meio guardando dinheiro.

E1



c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

2.300,00 + (300 . 6)

= 2.300,00 + 1800

= 4.100,00

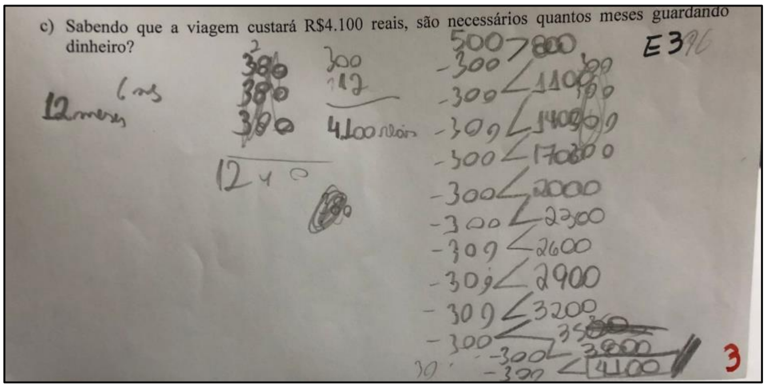
4100
- 2300
1800 | 300
1800 6
000

300 × 3 = 900

300 × 10 = 3000

E2

6 + 6 = 12 meses



c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

E3

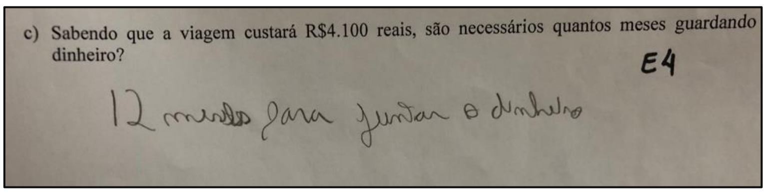
12 meses

300 × 12 = 4100 reais

12

500 → 800
-300 → 1100
-300 → 1400
-300 → 1700
-300 → 2000
-300 → 2300
-300 → 2600
-300 → 2900
-300 → 3200
-300 → 3500
-300 → 3800
-300 → 4100

3



c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

E4

12 meses para juntar o dinheiro

c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

Se em 6 meses juntaram 2.300, sendo que já tinha 500,00 em janeiro, então juntaram 1.800 em 6 meses. Vai ser necessário juntar mais 6 meses, juntando 300,00 todo mês.

E5

2.300
+ 1.800
4.100

c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

4.100 − 2.300 = 1.800

1.800 | 383

383 × 12 = 4596

383 × 11 = 4.203

383 × 10

4.100 − 1.800 = 2.300

2.300 + 1.800 = 4.100

E6

300 × 12 = 3600

1800 + 1800 = 2600

1.800 × 12 = 20600

6

c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

R: 12 meses

3600 falta

300 × 12 = 3600

3600 + 500 (Janeiro) = 4100

3600 | 300

E7

c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

4100 | 383
10

383 × 10 = 3830

2300 × 2 = 4600

2300 − 383

383 × 12 = 4796

4796 − 383 = 4413

4413 − 383 = 4170

4413 − 383 = 4030

10 meses

E8

8

c) Sabendo que a viagem custará R$4.100 reais, são necessários quantos meses guardando dinheiro?

E9

4100 − 500 = 3600

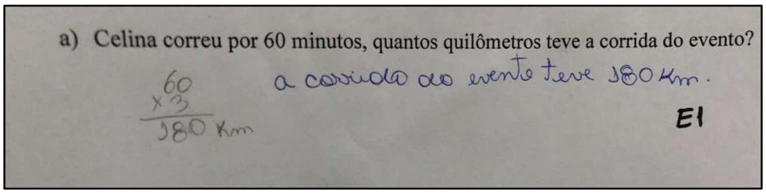
12 meses

300 × 12 = 3600

3600 + 500 = 4100

3600 | 300
12

SITUAÇÃO 3 - ITEM A

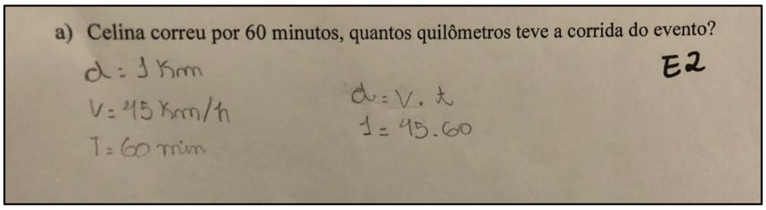


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

60
x3
180 Km

a corrida do evento teve 180 Km.

E1

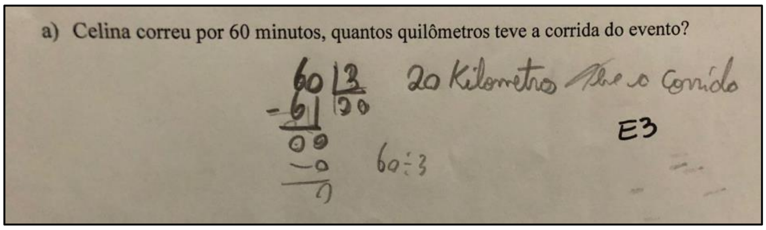


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

d: 1 Km
V= 45 Km/h
T= 60 min

d= V. t
1 = 45.60

E2



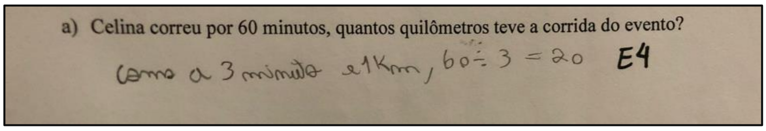
a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

60 |3
-6 | 20
00
-0
0

20 Kilometros ~~[illegible]~~ a Corrida

60÷3

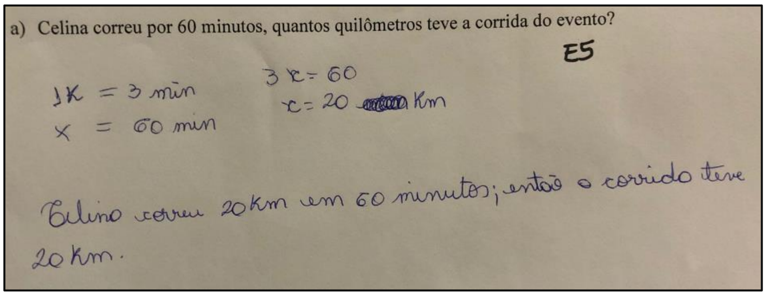
E3



a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

Como a 3 minutos e 1Km, 60÷3 = 20

E4



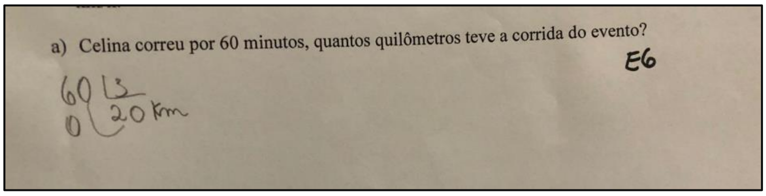
a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

E5

1K = 3 min
x = 60 min

3x = 60
x = 20 Km

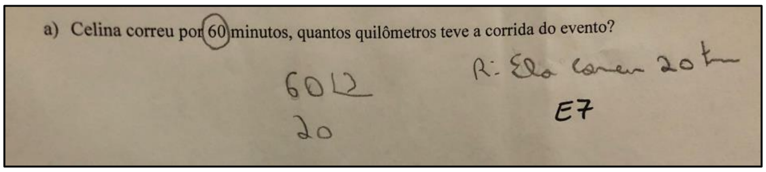
Celina correu 20Km em 60 minutos; então a corrida teve 20Km.



a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

E6

60 |3
0 20 Km

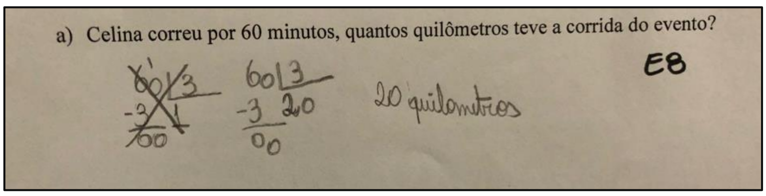


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

60|3
20

R: Ela Correu 20 Km

E7



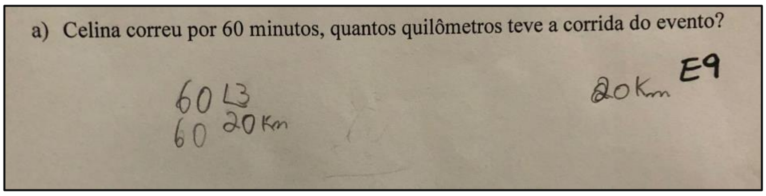
a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

~~60|3 -3 1 00~~

60|3
-3 20
00

20 quilometros

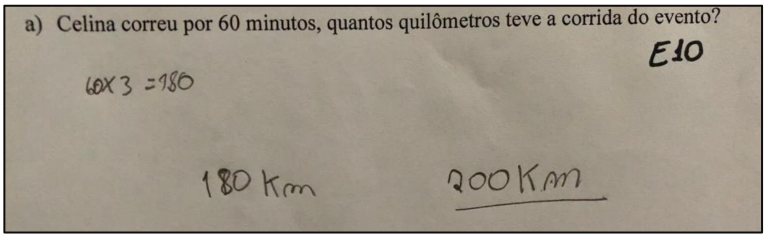
E8


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

E9

60 |3
60 20 Km

20Km


a) Celina correu por 60 minutos, quantos quilômetros teve a corrida do evento?

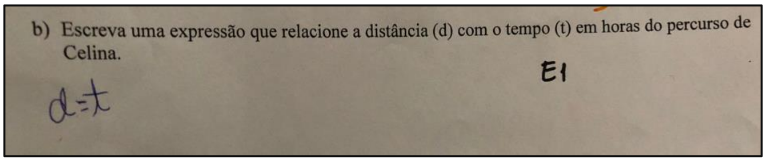
E10

60x3 = 180

180 Km

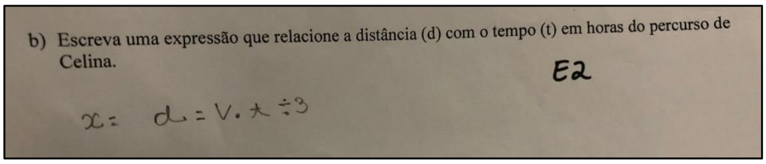
200 Km

SITUAÇÃO 3 - ITEM B


b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

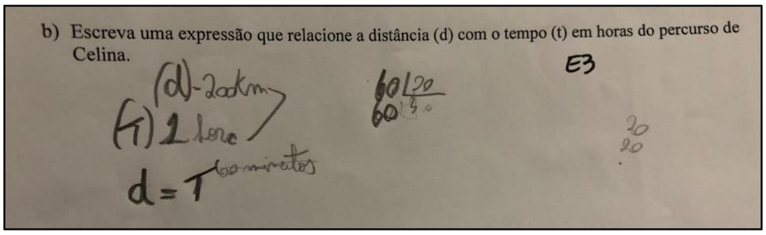
E1

d=t


b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E2

x= d = V. t ÷3

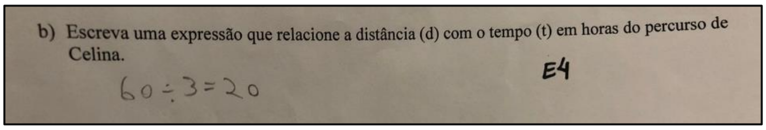

b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E3

(d)-20km
(t) 1 hora
d = T 60 minutos

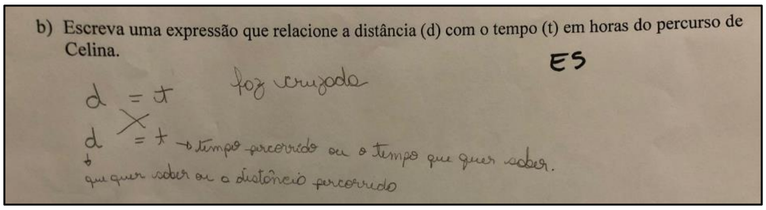
60 |20
60 3

20
20


b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E4

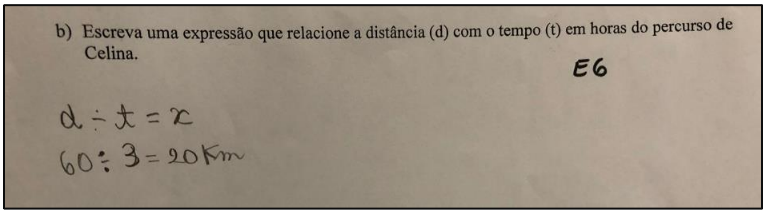
60÷3=20


b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E5

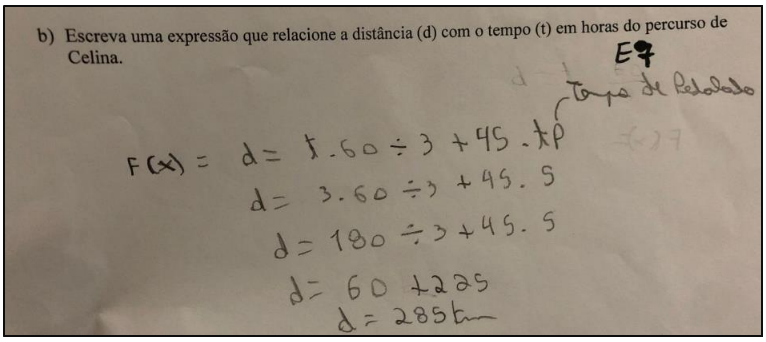
d = t   faz cruzado

d = t → o tempo percorrido ou o tempo que quer saber.
t
que quer saber ou a distância percorrido


b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E6

d ÷ t = x
60 ÷ 3 = 20Km



b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E7

Tempo de Pedalado

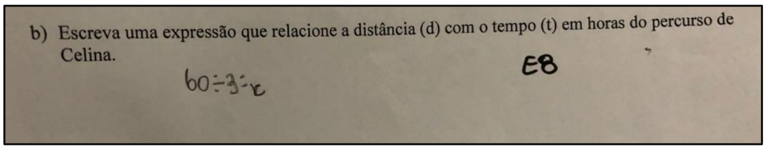
F(x) = d = t . 60 ÷ 3 + 45 . tp

d = 3 . 60 ÷ 3 + 45 . 5

d = 180 ÷ 3 + 45 . 5

d = 60 + 225

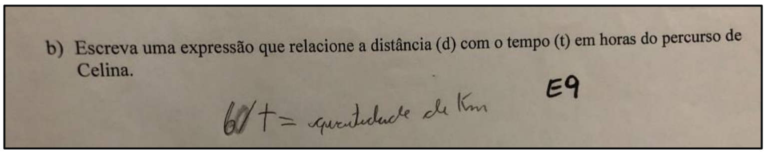
d = 285 km



b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E8

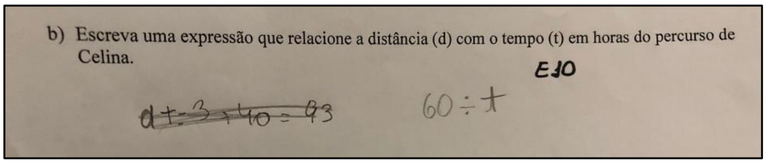
60 ÷ 3 ÷ t



b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E9

60/t = quantidade de Km



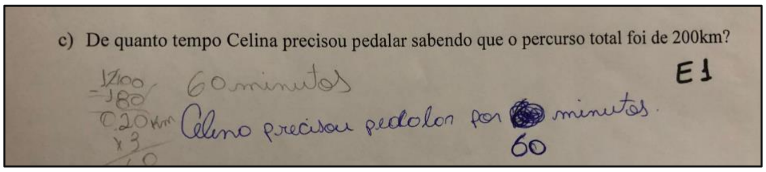
b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.

E10

~~d t: 3 + 40 = 43~~

60 ÷ t

SITUAÇÃO 3 - ITEM C

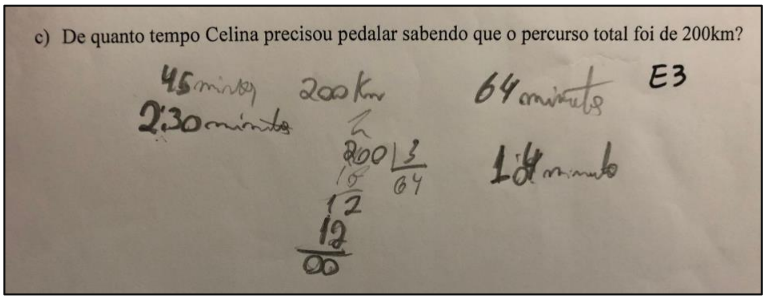


c) De quanto tempo Celina precisou pedalar sabendo que o percurso total foi de 200km?

E1

60 minutos

Celina precisou pedalar por 60 minutos.



c) De quanto tempo Celina precisou pedalar sabendo que o percurso total foi de 200km?

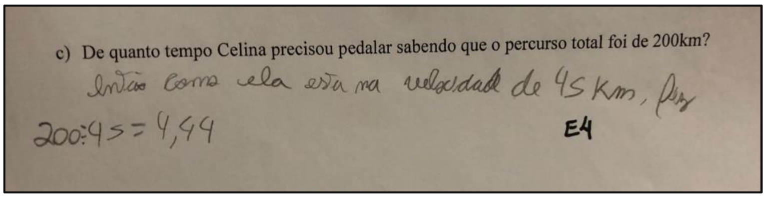
E3

45 minutos 200 km 64 minutos

2:30 minutos 1:4 minuto

200 | 3

64

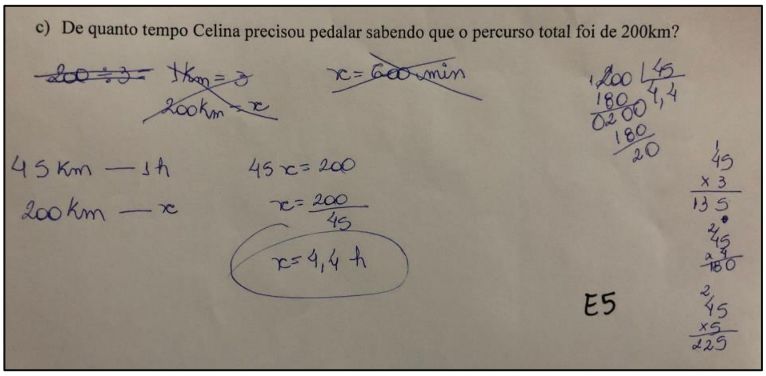


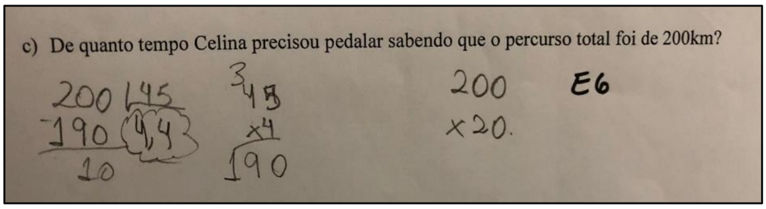
c) De quanto tempo Celina precisou pedalar sabendo que o percurso total foi de 200km?

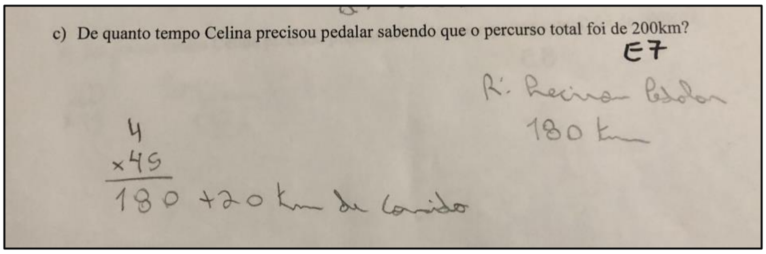
Então como ela esta na velocidade de 45 Km, Pois

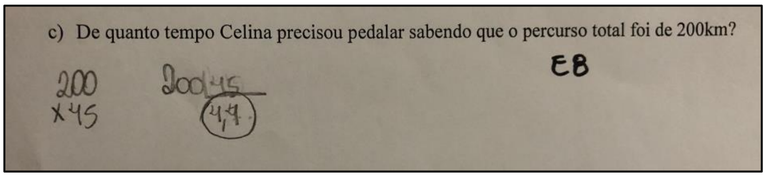
200 ÷ 45 = 4,44

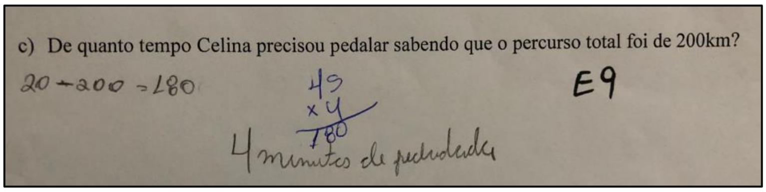
E4

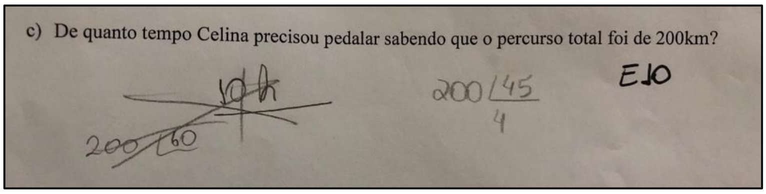




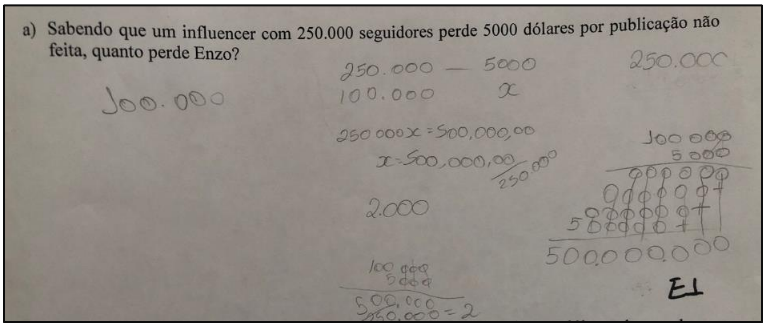


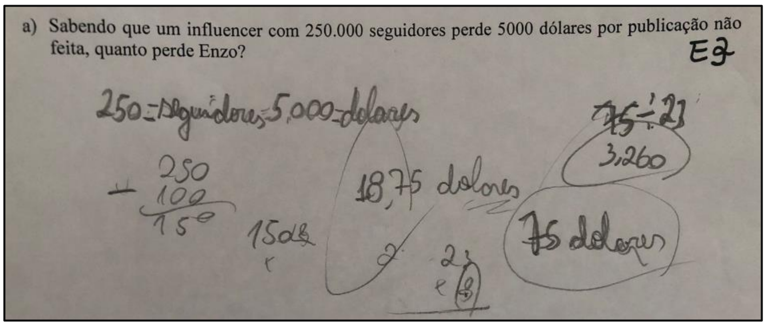






SITUAÇÃO 4 - ITEM A




a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

E3

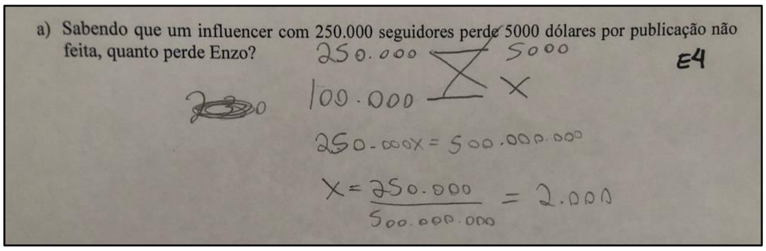
250 = seguidores 5,000 = dolares

250 − 100 = 150

18,75 dolares

3,260

75 dolares


a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

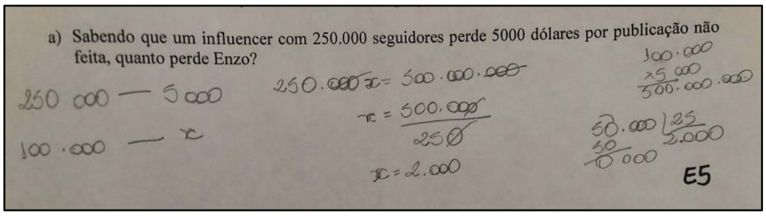
E4

250.000 — 5000

100.000 — x

250.000x = 500.000.000

x = 250.000 / 500.000.000 = 2.000


a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

250 000 — 5 000

100.000 — x

250.000x = 500.000.000

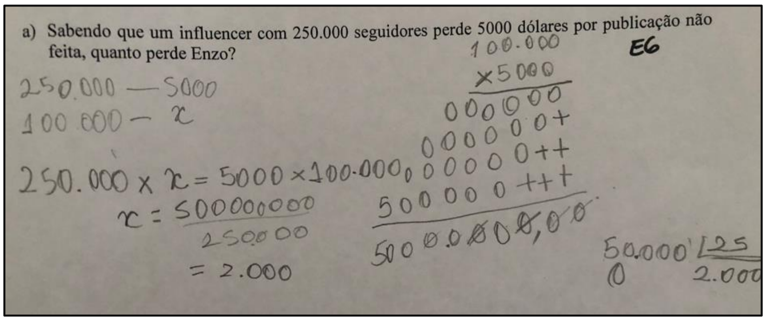
x = 500.000 / 250

x = 2.000

100.000 × 5 000 = 500.000.000

50.000 ÷ 25 = 2.000

E5


a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

E6

250.000 — 5000

100 000 — x

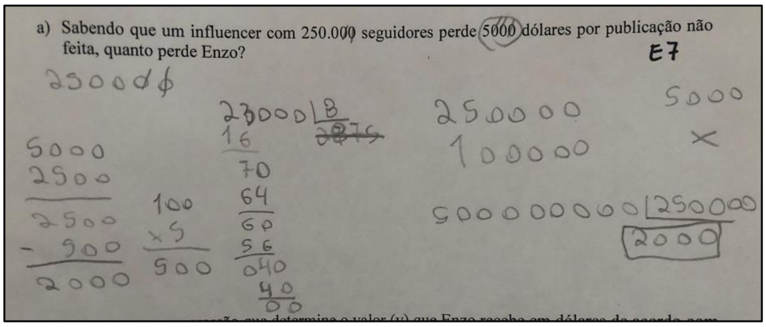
250.000 × x = 5000 × 100.000

x = 500000000 / 250000

= 2.000

100.000 × 5000 = 500000000,00

50000 ÷ 25 = 2.000


a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

E7

2500 d$

5000 − 2500 = 2500

2500 − 500 = 2000

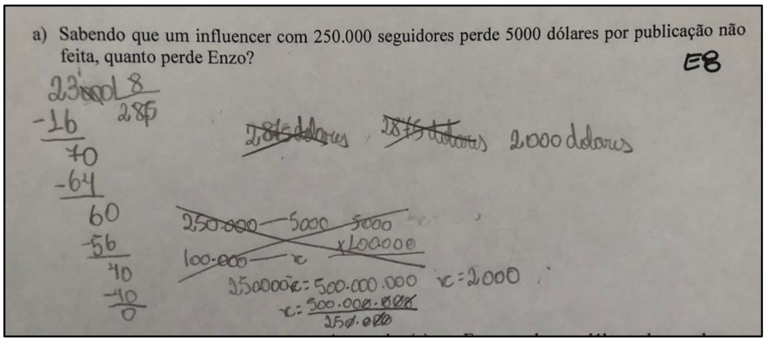
100 × 5 = 500

23000 ÷ 8

250000 — 5000

100000 — x

500000000 ÷ 250000 = $\boxed{2000}$


a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

E8

23000 ÷ 8 = 2875

~~2875 dolares~~ ~~1875 dolares~~ 2000 dolares

250.000 — 5000

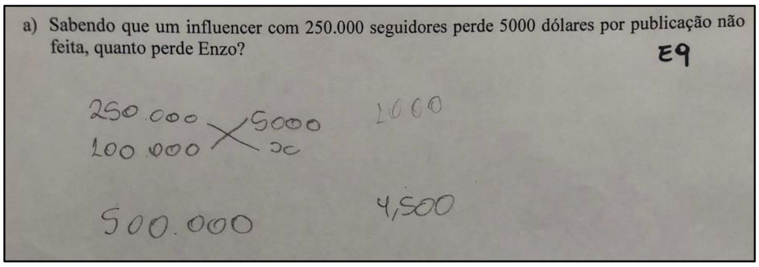
100.000 — x

5000 × 100000

250000x = 500.000.000

x = 500.000.000 / 250.000

x = 2000



a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

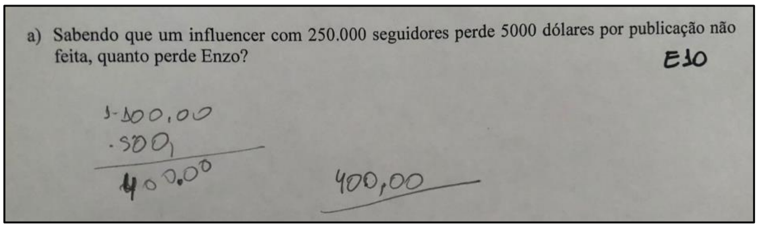
E9

250 000 — 5000
100 000 — x

1000

500.000

4,500



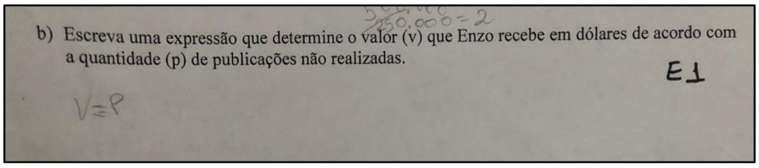
a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

E10

1-100,00
-500,
400,00

400,00

SITUAÇÃO 4 - ITEM B

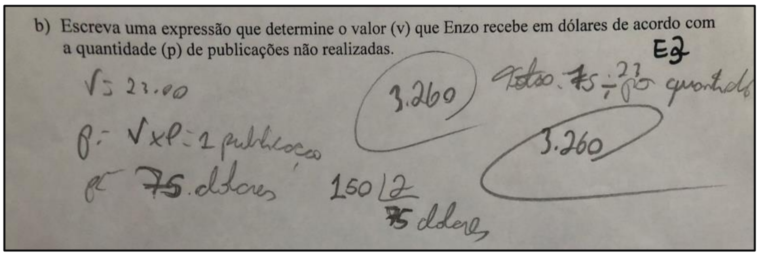


b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

E1

500.000
250.000 = 2

V=P



b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

E2

V= 23.00

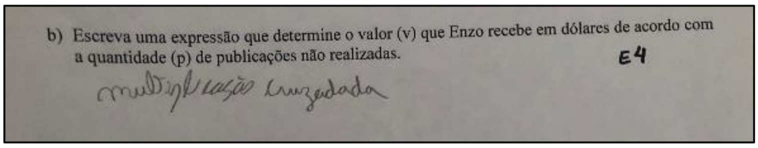
P= V x P = 1 publicaço

P= ~~75~~ dólares

3.260

150 | 2
~~75~~ dólares

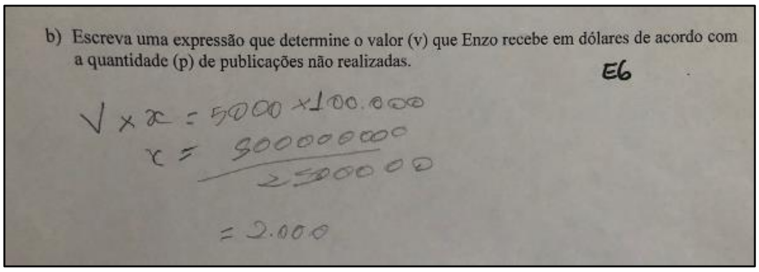
3.260



b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

E4

multiplicação cruzada



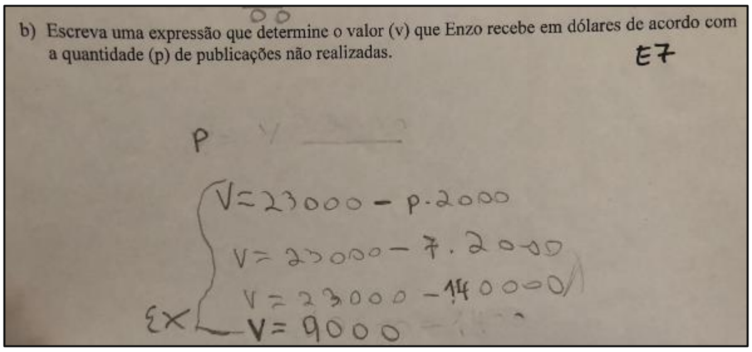
b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

E6

V x x = 5000 x 100.000

x = 500000000 / 250000

= 2.000



b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

E7

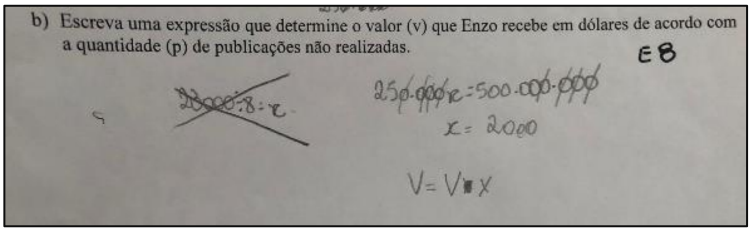
P

V = 23000 − p·2000

V = 23000 − 7.2000

V = 23000 − 14000

Ex V = 9000



b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

E8

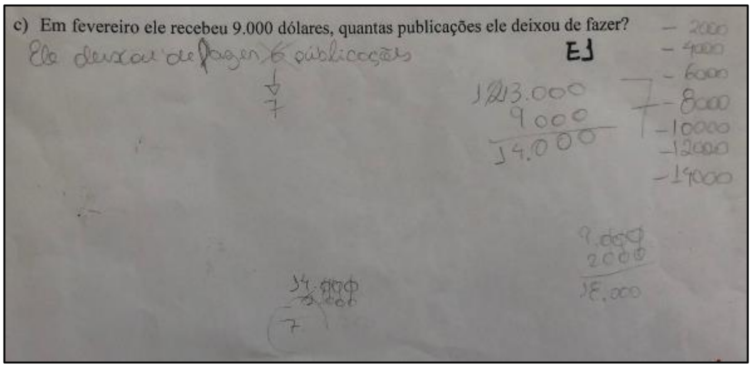
~~23000:8=x~~

250.000x = 500.000.000

x = 2000

V = V·x

SITUAÇÃO 4 - ITEM C



c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?

E1

Ele deixou de fazer 6 publicações

7

23.000

9000

14000

− 2000

− 4000

− 6000

− 8000

− 10000

− 12000

− 14000

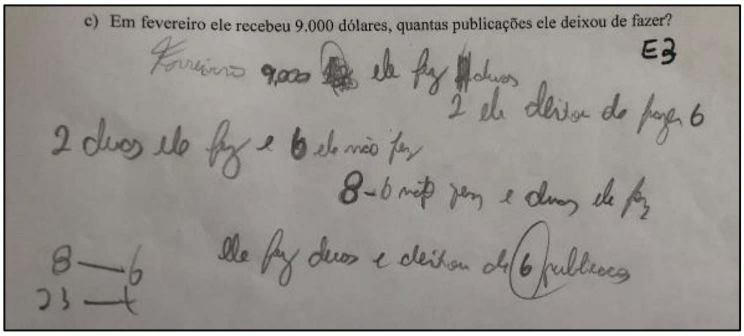
9.000

2000

18.000

14.000

7



c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?

E3

Fevereiro 9.000 ele fez 2 duas

2 ele deixou de fazer 6

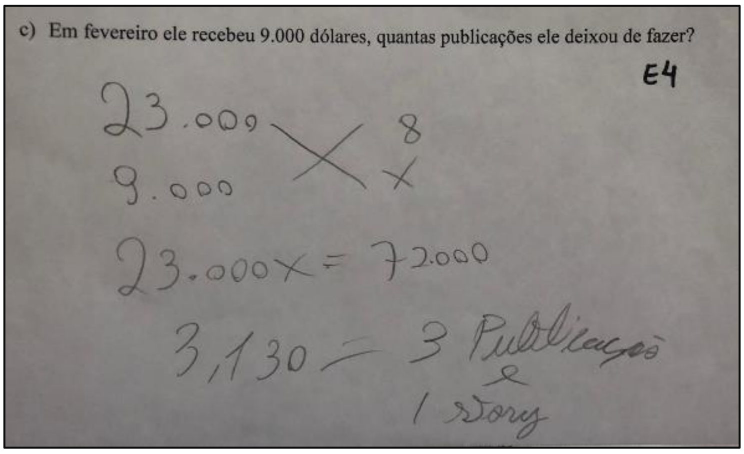
2 duas ele fez e 6 ele não fez

8 − 6 não fez e duas ele fez

Ele fez duas e deixou de 6 publicações

8 — 6

23 — x



c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?

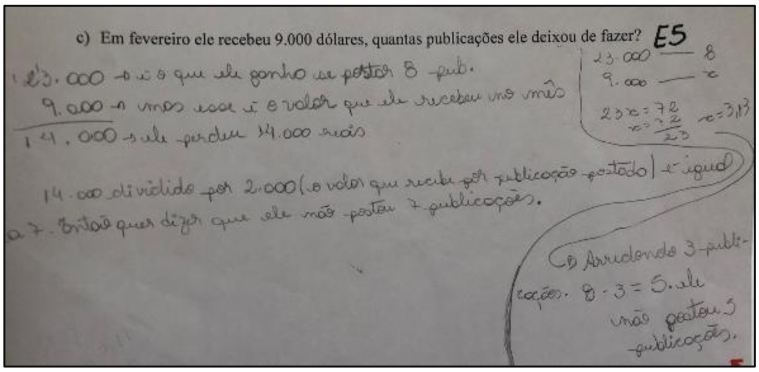
E4

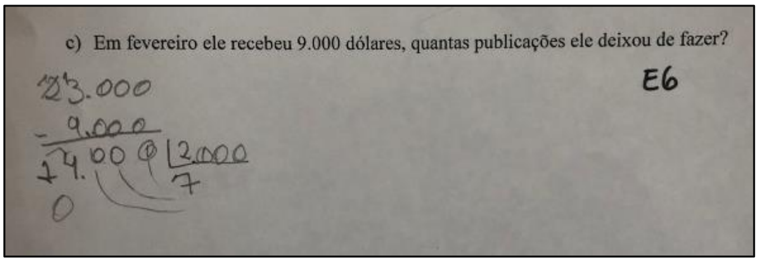
23.000 — 8

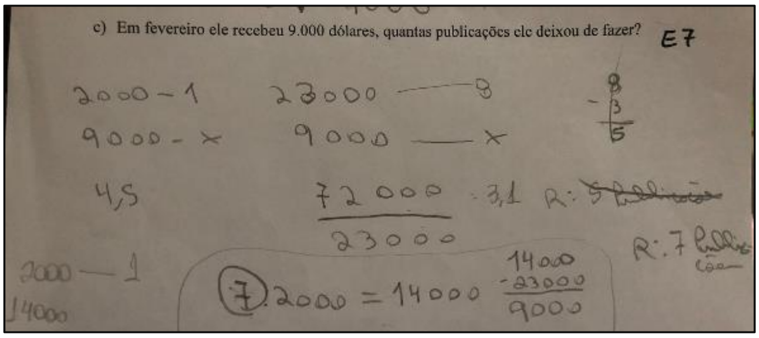
9.000 — x

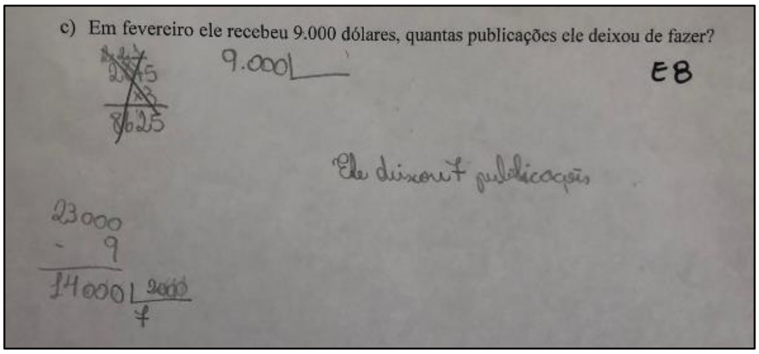
23.000x = 72.000

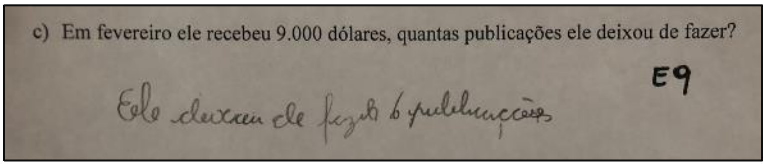
3,130 = 3 Publicações e 1 story

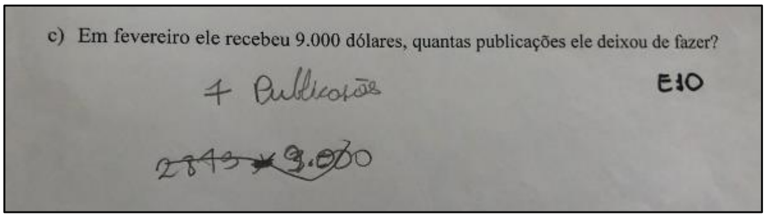

c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?
E5
23.000 → é o que ele ganha se postar 8 pub.
9.000 → mas esse é o valor que ele recebeu no mês
14.000 → ele perdeu 14.000 reais
14.000 dividido por 2.000 (o valor que recebe por publicação postada) é igual a 7. Então quer dizer que ele não postou 7 publicações.
23.000 — 8
9.000 — x
23x = 72
x = 3,13
Arredondo 3 publicações. 8 - 3 = 5. ele não postou 5 publicações.


c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?
E6
23.000
- 9.000
14.000 | 2.000
0 7


c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?
E7
2000 — 1
9000 — x
4,5
23000 — 8
9000 — x
72000 / 23000 = 3,1
8 - 3 = 5
R: 7 publicações
7.2000 = 14000
14000
- 23000
9000


c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?
E8
9.000
Ele deixou 7 publicações
23000
- 9
14000 | 2000
7


c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?
E9
Ele deixou de fazer 6 publicações


c) Em fevereiro ele recebeu 9.000 dólares, quantas publicações ele deixou de fazer?
E10
4 Publicações
9.000