UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROVA PARANÁ: UMA ANÁLISE DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS E SUA RELAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO

Ana Claudia Olekszyszen

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

União da Vitória,

2022

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

PROVA PARANÁ: UMA ANÁLISE DE SITUAÇÕES-PROBLEMA MULTIPLICATIVAS E SUA RELAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO

Ana Claudia Olekszyszen

Orientadora:
Clélia Maria Ignatius Nogueira

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

União da Vitória
Setembro de 2022

O45p Olekszyszen, Ana Claudia
Prova Paraná: Uma Análise De Situações-Problema Multiplicativas E Sua Relação Com O Livro Didático / Ana Claudia Olekszyszen. União da Vitória – PR, 2022.
173 p..: il.
Referências Bibliográficas: 165-173 p.

Orientador: Nogueira, Clélia Maria Ignatius

Dissertação (mestrado) – UNESPAR / Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, área de concentração: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, ano.

1. Educação matemática. 2. Análise matemática 3 I. Nogueira, Clélia Maria Ignatius, II. Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. III. Título.

CDD
372.7

Vanessa Henriques Veloso Misie – Bibliotecária – CRB9 – 1916/0

Ana Claudia Olekszyszen

PROVA PARANÁ: UMA ANÁLISE DE SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS E SUA RELAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO

Comissão Examinadora:

Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira – Presidente da Comissão Examinadora

UNESPAR

Dra. Veridiana Rezende - Membro da Banca
UNESPAR

Dra. Barbara Bianchini - Membro da Banca
PUC/SP

Resultado: APROVADA

União da Vitória
Setembro de 2022

Dedico o presente trabalho primeiramente a Deus, que com sua infinita bondade me permitiu chegar até aqui.
Aos meus amados pais, Alzira e Miguel (em memória), que sempre souberam que a única forma de crescer como pessoa é através do conhecimento, e sempre me apoiaram a seguir meus sonhos.
Aos meus filhos, Letícia, Lucas e Lara, que jamais deixaram de me incentivar.
A toda a minha família e amigos, que fizeram parte da minha caminhada.

"Se cheguei até aqui, foi porque me apoiei no ombro de gigantes"

(Isaac Newton).

AGRADECIMENTOS

Manifesto toda minha gratidão à minha orientadora, Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira, que foi fundamental para a realização deste trabalho. Ela desempenhou um maravilhoso papel de orientadora, além de aconselhar, incentivar, ensinar, e deixar um exemplo de excelência em tudo que faz, a ser seguido. Mesmo estando a quilômetros de distância, não deixou de me proporcionar contribuições valiosas.

Agradeço também aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unespar – PRPGEM, em especial à professora Veridiana Rezende, membro da banca e todos os colegas e profissionais que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço, imensamente, à professora Barbara Bianchini, membro da banca, por me auxiliar nessa transição tão importante da vida acadêmica.

Obrigada por compartilharem comigo seus conhecimentos tão valiosos.

RESUMO

Esta pesquisa analisa a relação existente entre o desempenho dos estudantes na Prova Paraná e o material didático por eles utilizado. Visando a compreender melhor como se apresentam as situações-problema em contextos de avaliação externa, este trabalho objetivou analisar as relações entre os tipos de situação-problema de estruturas multiplicativas presentes na Prova Paraná com a frequência e a abordagem desses tipos de situação-problema do Livro Didático. Para o estudo, foram analisadas 18 situações relacionadas ao Campo Conceitual Multiplicativo presentes em cinco cadernos de provas relativos ao 5º ano do Ensino Fundamental, considerando três edições, realizadas em 2019, 2020 e 2021. O suporte teórico adotado para identificação, análise e discussão dos resultados foi a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. A cada uma das situações discutidas, utilizou-se como subsídio a classificação das extensões com relação à complexidade dos tipos de problemas, elaborada por Gitirana *et al.*, a fim de identificar a existência (ou não) de progressividade no nível de dificuldade das situações, tendo em vista o caráter diagnóstico do instrumento de pesquisa Prova Paraná. A discussão centrou-se no eixo Proporção Simples, classes um para muitos, partição e quotição; eixo Comparação Multiplicativa, classe referido desconhecido; eixo Proporção Múltipla; e eixo Produto Cartesiano, classe área, tendo em vista serem os únicos tipos identificados na referida avaliação. O eixo Função Bilinear não foi contemplado nas situações presentes nos cadernos de prova analisados. Os resultados mostram que o melhor desempenho dos estudantes observado na Prova Paraná não representa seu desenvolvimento de competências complexas, considerando a ordem decrescente no grau de complexidade dos tipos de situações analisadas. Os resultados apontam que, a partir da análise realizada na coleção de livros adotada por uma escola, a abordagem de situações de estruturas multiplicativas nesse material didático pode interferir no desempenho dos estudantes investigados, bem como não possibilita a expansão do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Estruturas Multiplicativas; Prova Paraná; Livro Didático; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study presents results from research which analyzes the relation between students' performance in *Prova Paraná* and the material used by them. For better understand how problem situations are presented in external assessment context, this work had as aim at analyzing relations between types of problem situation of multiplicative structures in *Prova Paraná* with frequency and approach of these types of problem situation in textbooks in the light of Conceptual Fields Theory. For the study, 18 problem situations were analyzed, related with Multiplicative Conceptual Field present in five exam notebooks related to the Elementary School 5th grade, considering three editions, which occurred in 2019, 2020 and 2021. As theoretical support for identification, analysis and discussion of results, the Conceptual Fields Theory (CFT) by Gérard Vergnaud is the support. For each problem situation discussed, classification of extensions regarding the complexity of types of problems elaborated by Gitirana and colleagues was used to identify the existence (or not) of progressivity in difficulty level of situations, owing the diagnostic character of the research instrument *Prova Paraná*. The discussion was centered in the on the Simple Proportion axis, classes one to many, partition, and quotation; Multiplicative Comparison axis, class unknown referred; Multiple Proportion axis; and Cartesian Product axis, class area, because they are the only types identified in the mentioned assessment. Bilinear Function axis was not contemplated by the situations present in the exam notebooks analyzed. Findings show that the students' best performance observed in *Prova Paraná* does not represent their development of complexes abilities, considering decrescent order in the complexity degree of types of situations analyzed. Results point that from the analysis carried out on the textbook collection adopted by a school, the approach of situations of multiplicative structures in this material might interfere on the performance of students investigated, and it does not enable the expansion of the Conceptual Field of Multiplicative Structure as well.

Keywords: Mathematics Education; Multiplicative Structures; *Prova Paraná*; Textbook. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AAP	Avaliação da Aprendizagem em Processo
ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização
ANEB	Avaliação Nacional da Educação Básica
ANRESC	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
ATPC	Aula de Trabalho Professor Coordenador
AVA	Avaliação do Rendimento Escolar
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAEd/UFJF/MG	Centro de Políticas e Avaliação da Universidade Federal de Juiz de Fora
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense
EF	Ensino Fundamental
GEPeDiMa	Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LD	Livros Didáticos
MEC	Ministério da Educação
NRE	Núcleo Regional de Educação
PROEB	Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PTD	Plano de Trabalho Docente
RS	Rio Grande do Sul
SA	Situações de Aprendizagem
SAEP	Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná
SAERS	Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SEAP/RS	Sistema Estadual de Avaliação Participativa
SEAPE	Sistema Estadual de Avaliação da Aprendizagem Escolar do Acre
SEDUC	Secretaria de Educação do Estado de Goiás
SEDUC/RS	Secretaria de Estado da Educação
SEE/MG	Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais
SEE/SP	Secretaria de Estado de Educação de São Paulo
SEED	Secretaria de Educação e do Esporte

SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro
SEEDUC/RJ	Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro
SIMAVE	Sistema Mineiro de Avaliação e Equidade da Educação Básica
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em novembro de 2012, atuando como docente da rede estadual do Paraná há nove anos, participei[1] da aplicação referente à primeira edição do Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná (SAEP) implantado pela Secretaria de Estado de Educação e do Esporte do Paraná, em parceria com o Centro de Políticas e Avaliação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF/MG). Com o emprego de provas padronizadas, o SAEP tinha como objeto de avaliação a Língua Portuguesa, com foco em leitura; e a Matemática, com foco em resolução de problemas. A prova do SAEP era composta por 26 questões de cada disciplina, aplicadas a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e dos 3º/4º anos do Ensino Médio. O principal objetivo do SAEP consistia em verificar a aprendizagem dos estudantes de acordo com as capacidades de leitura, escrita, interpretação e resolução de problemas matemáticos.

Considerando que estavam previstas outras edições ao longo do ano letivo em questão, procurei compreender e analisar como era constituída a referida avaliação, com o intuito de investigar o que era considerado pelos elaboradores como indicativo da aprendizagem dos estudantes. No ano seguinte, passei a integrar o grupo de profissionais do Núcleo Regional de Educação (NRE) do município de União da Vitória, mais especificamente no setor pedagógico, no qual tive a oportunidade de buscar maiores aprofundamentos sobre o SAEP. Isso permitiu que eu percebesse e analisasse como se apresentavam os resultados dos estudantes das 45 escolas distribuídas em nove municípios jurisdicionados pelo NRE.

Busquei, então, associar o desempenho dos estudantes apresentados, com base nas informações obtidas pelo SAEP, às características e às especificidades das escolas atendidas, e pude perceber que muitas informações extraídas dos documentos gerados a partir de cada edição refletiam, de forma significativa, as condições da maioria das escolas, dos estudantes nelas matriculados, de acordo com cada realidade escolar. Também sondei possíveis aproximações com os resultados e as informações apresentadas pela Prova Brasil[2], levando em consideração apenas as informações mais específicas, de acordo com o nível de desempenho apresentado pelos estudantes.

Nessa perspectiva, minha inquietação estava em compreender de que forma aquilo que era considerado desempenho poderia se traduzir em aprendizagem, a partir da interpretação

---

[1] Esta parte do texto está em primeira pessoa por se tratar de experiência pessoal da autora.

[2] Prova Brasil é uma avaliação para diagnóstico em larga escala desenvolvida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC) (BRASIL, s.d.). Mais informações em: http://portal.mec.gov.br/prova-brasil.

dos Padrões de Desempenho[3], tendo em vista os tipos de questões às quais os estudantes eram submetidos. Assim, a partir dessas inquietações, busquei compreender a forma como essas questões estavam associadas ao trabalho dos professores em sala de aula, principalmente em minha prática pedagógica, consoante com os tipos de atividades propostas, com o Plano de Trabalho Docente[4] (PTD), com os Livros Didáticos mais utilizados e as atividades neles presentes, também com os documentos norteadores do ensino no Estado do Paraná. Enfim, busquei considerar os elementos que fazem parte do cotidiano do professor, especialmente professores de Matemática.

Em vista disso, a ânsia em analisar as questões presentes, tanto nas provas aplicadas quanto nos Livros Didáticos adotados pelas escolas, buscando por aproximações (ou não) entre elas, ocorreu por se tratar de questões elaboradas por profissionais externos ao sistema educacional paranaense. Contudo, essa inquietação aumentou ainda mais, pois não era possível identificar alguma perspectiva teórica para possíveis reflexões e considerações acerca das estruturas e da organização das questões.

Em 2013, logo no início, participei de um encontro de formação oferecido pela Secretaria de Educação e do Esporte (SEED) para todos os técnicos responsáveis pelas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática nos NRE, a fim de orientar todos a respeito do SAEP, tendo em vista suas próximas aplicações. Na ocasião, foram apresentadas informações relevantes acerca dos elementos que fazem parte do SAEP, os tipos de questões, bem como sua elaboração alicerçada na Matriz de Referência, a qual dispõe sobre conteúdos curriculares, competências e habilidades cognitivas; escalas de proficiência; e análise dos descritores e dos distratores[5]. Esse aprofundamento fez com que buscasse ainda mais compreender como as questões eram elaboradas e o que representava cada elemento que as compunha. De acordo com o SAEP, o descritor é o detalhamento de uma habilidade cognitiva (em termos de grau de complexidade), que está sempre associada a um conteúdo que o estudante deve dominar na etapa de ensino em análise. Esses descritores são expressos da forma mais detalhada possível, permitindo sua mensuração por meio de aspectos que podem ser observados. Há descritores que permitem a elaboração de itens por meio de situações-

---

[3] Padrões de Desempenho são cortes importantes das Escalas de Proficiência e representam uma caracterização do desempenho dos estudantes com base no perfil das habilidades que eles demonstram nas avaliações e que poderia se traduzir em aprendizagem.

[4] PTD se refere a um documento elaborado pelo professor com a intenção de organizar o ensino e a aprendizagem em sala de aula. É um planejamento para o período definido pelos estabelecimentos de ensino do Estado do Paraná, que pode ser anual, semestral, bimestral etc.

[5] Distratores são as respostas incorretas, mas plausíveis para as questões.

problema. No entanto, outros descritores focalizam conhecimentos de nível técnico, apenas procedimental, e dão origem a itens com textos curtos, do tipo calcule, efetue, por exemplo.

A elaboração da Matriz de Referência[6] leva em consideração um recorte das matrizes curriculares, feito com base no que pode ser mensurado por meio dos instrumentos utilizados no Sistema de Avaliação da Educação Básica SAEB/Prova Brasil/SAEP. Elas não abarcam todo o currículo escolar e não podem ser confundidas com procedimentos, estratégias de ensino ou orientações metodológicas, pois um recorte é feito com base naquilo que pode ser analisado. A partir de então, os elementos que compõem a Matriz de Referência servem de base para a elaboração de cada questão avaliada, explorando os tópicos[7] e os descritores dispostos para cada ano/série.

Por meio de um estudo mais aprofundado nas questões apresentadas pelo SAEP, com base na sua elaboração e na possibilidade de análise do nível de desempenho a partir da escala de proficiência, busquei compreender as informações extraídas considerando os distratores.

As respostas previstas nos distratores de um item possibilitam obter informações acerca do raciocínio desenvolvido pelo estudante na busca da solução para a tarefa proposta, permitindo identificar erros nos diversos níveis de proficiência, na medida em que se procura focalizar erros mais comuns em cada etapa de escolarização. As informações obtidas através dos distratores tornam-se de extrema relevância, pois a partir delas é possível inferir sobre as dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Após as orientações proporcionadas pela SEED, foram realizados encontros de formação em todos os municípios para orientações sobre o SAEP, bem como seus encaminhamentos, direcionados a todos os professores de Língua Portuguesa e Matemática, e para a equipe gestora de cada estabelecimento de ensino, composta por diretor(a) e pedagogo(a). Nesses encontros foram repassadas e discutidas informações referentes à respectiva avaliação, buscando a compreensão e o entendimento dos envolvidos nesse processo.

O SAEP foi realizado em abril de 2013, voltado apenas a estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio. A intenção era avaliar o início e o final de cada etapa de escolaridade, ou seja, 6º e 9º anos do Ensino Fundamental, bem como 1ª e 3ª/4ª séries do Ensino Médio. No ano seguinte, em 2014, o SAEP não foi aplicado, tampouco em

---

[6] Matriz de Referência é um recorte do currículo escolar de uma dada disciplina e apresenta somente os conhecimentos passíveis de serem medidos em uma avaliação de larga escala.

[7] Tópicos ou temas representam uma subdivisão da Matriz de Referência, de acordo com o conteúdo, competências de área e habilidades.

2015 e 2016, ficando temporariamente suspenso, sem que houvesse maiores informações vindas da SEED. A partir de 2017, as atividades foram retomadas, estendendo sua aplicação ao ano seguinte, 2018, com o mesmo formato utilizado em 2013. Em 2019, depois de uma reestruturação com a intenção de solidificar o SAEP como política educacional, teve início a avaliação externa intitulada *Prova Paraná*. Trata-se de um instrumento de avaliação de caráter diagnóstico individual e contínuo, com objetivos de identificar as dificuldades apresentadas, as habilidades já apropriadas pelos estudantes, além de pautar ações pedagógicas em evidência sobre os processos de aprendizagem a partir do desempenho dos estudantes (PARANÁ, 2019a). Assim, a Prova Paraná passa a ser o principal instrumento de nossa pesquisa.

Ainda em 2019, ao me inscrever na disciplina de Didática da Matemática, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM, oferecido pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, tive meu primeiro contato com a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), idealizada por Gérard Vergnaud, a qual embasou a elaboração de um trabalho de pesquisa direcionado a analisar e discutir as questões da Prova Paraná. A disciplina promoveu importantes estudos e reflexões a respeito da teoria, possibilitando o aprofundamento em relação às suas contribuições para os processos de ensino e de aprendizagem de um Campo Conceitual, auxiliando na construção da pesquisa, que utiliza a TCC como suporte teórico e de análise.

Em 2020, ao ingressar como estudante regular no PRPGEM, passei a fazer parte do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática - GEPeDiMa, do qual minha orientadora é uma das líderes. O objetivo maior do GEPeDiMa é mapear o Campo Conceitual da Função Afim, seguindo os aportes teóricos da TCC estabelecida por Gérard Vergnaud. A participação no grupo promoveu importantes estudos e reflexões acerca da TCC, possibilitando investigação e aprofundamento, dentre outros aspectos, nas ideias-base de função (dependência, regularidade, variável e generalização) e nas situações-problema de estruturas multiplicativas que possibilitam sua mobilização, em estudos direcionados aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Considerando que a TCC busca compreender como o estudante se apropria de conceitos e fornece elementos consistentes para a análise de situações-problema, aliada ao interesse em interpretar os resultados de avaliações em larga escala, mais especificamente da Prova Paraná, considerada como contexto da nossa investigação, entendemos importante identificar e categorizar as situações referentes ao Campo Multiplicativo nesse instrumento.

Da confluência de interesses entre mim e minha orientadora, emergiu esta pesquisa, que tem como foco de estudo analisar as relações entre as situações-problema de estruturas multiplicativas na Prova Paraná e as situações-problema do Livro Didático adotado por uma escola, lócus da pesquisa. Esta dissertação está organizada da seguinte forma: a presente Introdução, que aborda a motivação para o desenvolvimento da pesquisa; o Capítulo I, em que apresentamos todo o processo de elaboração do problema de pesquisa, sua tradução em objetivos geral e específico e o percurso realizado para alcançá-los; no Capítulo II, considerando o interesse em analisar o uso dos resultados das avaliações externas, em um primeiro momento, passamos a analisar como se vislumbram, em teses e dissertações levantadas, as iniciativas estaduais próprias de avaliação externa. Assim, busca-se identificar os motivos que justificaram sua criação e seus delineamentos metodológicos, além de identificar os tipos de uso dos resultados realizados pelas secretarias estaduais a partir das informações obtidas.

O Capítulo III consiste em uma breve discussão sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Esse campo teórico subsidia a identificação e a tipificação das situações presentes na Prova Paraná, de acordo com as estruturas multiplicativas, desde sua primeira edição, realizada em março de 2019, até sua última, em novembro de 2021, consideradas como contexto de investigação desta pesquisa. As análises e discussões das questões da Provava Paraná estão dispostas no Capítulo IV. Por fim, considerando o caráter diagnóstico da Prova Paraná, evidencia-se a importância de investigar a abordagem e a tipologia das situações de estruturas multiplicativas no Livro Didático, apresentadas no Capítulo V, com a intenção de cotejar as informações extraídas dos dados produzidos no capítulo IV, buscando alcançar os objetivos propostos para esta investigação.

Nessa perspectiva, surgiu esta proposta de estudos, que se constitui de uma investigação, a partir do desempenho dos estudantes, sobre as classes de situações-problema presentes na Prova Paraná, bem como sua abordagem nos Livros Didáticos.

1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos a construção do problema de pesquisa, os objetivos, assim como as escolhas metodológicas e os procedimentos adotados. Para o planejamento e o desenvolvimento, foi preciso fazer escolhas coerentes com o estudo que se pretendeu desenvolver, estabelecendo um estreito diálogo entre as situações-problema presentes na Prova Paraná e a abordagem desses tipos de situações na coleção de Livros Didáticos Ápis, a partir das premissas da Teoria dos Campos Conceituais, com foco nas estruturas multiplicativas. Analisar as avaliações externas, mais especificamente a Prova Paraná, particularmente no que seus resultados podem apontar, forneceu subsídios para a ação docente e, ao mesmo tempo, contribuiu com a possibilidade de perceber a importância de considerar as diferentes estruturas das situações multiplicativas.

1.1 Construindo o Problema de Pesquisa

A pesquisa foi realizada em etapas, e buscou analisar a Prova Paraná, particularmente o que seus resultados podem apontar em relação ao desempenho dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. A partir dos dados coletados e da classificação, foi realizada uma análise comparativa com relação à hierarquia de complexidade das situações multiplicativas apresentadas nas três edições da referida avaliação. Descrevemos aqui, também, as etapas realizadas na busca pelo alcance dos objetivos propostos, estabelecendo um estreito diálogo com as premissas da Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente nas categorias que estruturam o Campo Conceitual Multiplicativo.

1.2 Objetivos da Pesquisa

Esta investigação caracteriza-se como de natureza qualitativa interpretativa[8], e busca responder às seguintes problemáticas da pesquisa: A Prova Paraná reflete a aprendizagem de conceitos de estruturas multiplicativas por estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental? As situações-problema presentes na Prova Paraná são compatíveis com o Livro Didático? Para responder a essas indagações, foi traçado o objetivo geral da pesquisa: identificar as classes de situações de estruturas multiplicativas presentes nas edições anuais da Prova Paraná e no Livro Didático.

[8] A pesquisa foi desenvolvida adotando um método de investigação científica que busca analisar aspectos subjetivos de dois documentos: os cadernos de provas da Prova Paraná e o Livro Didático.

Com o intuito de atingir o objetivo geral, foram traçados dois objetivos específicos: (a) Analisar as situações-problema de estruturas multiplicativas presentes na Prova Paraná e no Livro Didático à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud; e (b) Analisar se os percentuais de acerto dos estudantes em situações-problema de estruturas multiplicativas na Prova Paraná representam crescimento na aprendizagem.

Estabelecidos os problemas de pesquisa e os objetivos, o próximo passo foi compreender a Prova Paraná enquanto instrumento de investigação, seus objetivos, suas aproximações com o que é abordado no material didático utilizado, bem como identificar quais são os aspectos pedagógicos inerentes às avaliações externas que podem ser observados.

1.3 Aspectos das Avaliações Externas

Com o objetivo de analisar como se vislumbram, em teses e dissertações, para além das avaliações nacionais, iniciativas estaduais e municipais próprias de avaliação em larga escala, buscamos compreender os motivos que justificam suas criações, principalmente identificar ações realizadas a partir dos resultados por elas produzidos.

Considerando sua relevância, a fim de compor um panorama sobre as pesquisas que versam acerca dos usos dos resultados das avaliações externas, realizamos um mapeamento com intuito de identificar trabalhos com a perspectiva de explorar as possíveis contribuições das avaliações externas sob aspectos pedagógicos. No início do mês de junho de 2021, por meio de uma busca avançada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD, na qual se utilizou como filtro a expressão “avaliação externa”, foram encontrados 482 trabalhos.

Em seguida, em um refinamento baseado na busca avançada, procuramos identificar produções que envolvessem de maneira articulada “avaliação externa” e “diagnóstico”. O filtro “tipos de documentos” não foi utilizado, pois nosso interesse estava voltado para pesquisas em teses e dissertações, e destas encontramos 51 trabalhos, sendo 40 dissertações e 11 teses. Essa investigação também não usufruiu da delimitação *período de tempo*. Assim, foram encontrados trabalhos relacionados desde 1987 a 2019, aos mais diversos assuntos, como rendimento escolar, instrumento regulador, monitoramento, responsabilização de resultados, saúde, meio ambiente, dentre outros.

Estabelecida a expressão inicial de busca e seu refinamento, foram adotados outros critérios de seleção de pesquisa, pois desses trabalhos, 14 não se referiam a questões de

Educação, visto que tratavam de pesquisas relacionadas à Saúde e ao Meio Ambiente, o que não era o âmago de nossa pesquisa. Trata-se de 10 dissertações e 4 teses.

Cabe salientar que alguns resumos não ofereciam elementos suficientes ao nosso estudo. Desse modo, buscamos mais informações na introdução e no delineamento metodológico. Após nova análise, foram desconsiderados mais 9 trabalhos, pois tratavam exclusivamente de pesquisas voltadas a disciplinas específicas, como Língua Portuguesa e Física, não se referindo à avaliação de forma mais ampla ou específica da disciplina de Matemática. Ainda, outros 3 trabalhos voltados a pesquisas no Ensino Superior foram desconsiderados, pois o foco desta pesquisa estava relacionado à Educação Básica, independentemente de suas etapas de ensino. Dessa forma, foram selecionados 25 trabalhos, conforme pesquisas em teses e dissertações, e selecionados de acordo com seus níveis de abrangência, sejam eles nacional, estadual ou municipal. Destes, foram selecionadas 13 pesquisas de âmbito estadual, pois eram foco de nossa investigação, a fim de buscar aproximações com os delineamentos da Prova Paraná.

A pesquisa ocorreu levando em conta a concepção de avaliação externa trazida por Vianna (2003a), no sentido da importância de aprofundamento de estudos ligados à expressão pedagógica, que se traduz a partir das informações por ela geradas. Vianna (2003a, p. 26) enfatiza que as avaliações "[...] devem ser dimensionadas a fim de que os resultados façam sentido e permitam a orientação das atividades docentes", contrapondo ao que afirmam Klein e Fontanive (1995, p. 30), pois não consideram como objetivo das avaliações externas do sistema escolar "fornecer informações sobre alunos ou escolas individuais".

Nessa perspectiva, as informações obtidas por meio das avaliações externas podem ser apropriadas pelos sujeitos envolvidos a fim de proporcionar reflexões que permitam o aprimoramento do trabalho desenvolvido. Conforme enfatizam Freitas *et al.* (2009, p. 47), "[...] quando conduzidas com metodologia adequada podem trazer importantes informações sobre o desempenho dos alunos, dados sobre os professores, condições de trabalho e funcionamento das escolas de uma rede". A análise e o estudo dos resultados obtidos pela escola podem fazer diferença nos processos de ensino e de aprendizagem, para além de uma análise quantitativa, tendo em vista um trabalho contínuo e progressivo.

As avaliações externas apresentam diferentes aspectos relacionados às dimensões que assumem, bem como suas eventuais implicações em ações desenvolvidas, tais como: utilizar os resultados para avaliar e orientar a política educacional; informar a sociedade e as escolas sobre a aprendizagem dos estudantes; usar os resultados para propor políticas de incentivos salariais, bem como a certificação de alunos e de escolas.

No entanto, destacamos diferentes alegações que emergem das pesquisas quanto às percepções dos entes submetidos às avaliações externas, especificamente: a forma impositiva sem consulta aos professores; a elaboração da avaliação por agentes externos; questões relevantes sobre discussão curricular, evidenciando o privilégio da Matriz de Referência da avaliação externa em detrimento da Matriz Curricular; o uso dos resultados das avaliações como estratégias de governo para propor políticas de incentivos salariais, entendidas como processos de responsabilização; além da utilização dos resultados como *ranqueamento* entre professores e escolas.

Contudo, a busca pela melhoria dos resultados e as opções assumidas para alcançá-las devem ter como objetivo avaliar para tomar decisões, além de possibilitar a construção de estratégias políticas e pedagógicas. Dentre as diversas finalidades que as avaliações externas assumem, para Soares (2002, *apud* BROOKE; CUNHA, 2011, p. 20) "[...] considerada a mais difícil, é a função pedagógica, que trata do uso da avaliação como instrumento para a melhoria do ensino".

Nessa perspectiva, Brooke e Cunha (2011) afirmam que a classificação dos usos das avaliações provém da necessidade das políticas de gestão interessadas em informações a respeito da qualidade do ensino de suas redes. Os autores afirmam, ainda, que "[...] o desenho do instrumento é definido pelo tipo de informação que se precisa produzir de forma que, grosso modo, o uso da informação já é dado pela natureza e pelo propósito do instrumento" (BROOKE; CUNHA, 2011, p. 19), podendo ter mais de uma finalidade. Assim, destaca-se a importância, a partir do mapeamento de pesquisas em nível de Pós-Graduação, em uma perspectiva diagnóstica, de reflexões acerca dos resultados das avaliações externas, que podem ser considerados como fonte de investigação. Esses estudos foram aprofundados e estão descritos no Capítulo II.

Com base nos resultados das avaliações externas que se obtém a partir do desempenho de seus estudantes, fizemos um estudo sobre as informações produzidas pela Prova Paraná, em que buscamos analisar o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas envolvidas nas situações apresentadas para os estudantes. De fato, a abordagem dos tipos de situações-problema e suas estruturas permitem analisar tarefas cognitivas e procedimentos necessários que podem levar os estudantes ao sucesso ou insucesso, ao resolver esse tipo de situação, e que justifiquem seus desempenhos.

1.4 Aspectos da Prova Paraná

Com nosso interesse voltado para o Campo Conceitual Multiplicativo, realizamos um levantamento preliminar, considerando o caderno de provas referente à 1ª edição da Prova Paraná, utilizado por 19 estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pertencente à rede municipal de União da Vitória. Para a coleta de dados, foram consideradas fontes de identificação e análise das classes de situações-problema do Campo Conceitual Multiplicativo presentes nos cadernos de provas respectivos ao quinto ano do Ensino Fundamental da já mencionada Prova Paraná.

A prova era constituída de 20 questões objetivas de cada disciplina, sendo Língua Portuguesa e Matemática, dentre as quais foi extraída para análise apenas a questão de número 20, que se refere à situação-problema do campo multiplicativo, a saber: *"Um hotel tem 2 andares de estacionamento. Cada andar tem 6 setores e em cada setor existem 7 vagas. Quantas vagas há, ao todo, no estacionamento desse hotel?"* (PARANÁ, 2019a).

A escolha dessa série ocorreu devido ao baixíssimo desempenho (15,78 %) apresentado pelos estudantes na primeira edição da referida avaliação externa, ao resolverem uma situação-problema direcionada a avaliar conhecimentos e habilidades dos estudantes, de acordo com o descritor D19, o qual se refere a "*resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão".*

Esse fato nos fez buscar não apenas a constatação do baixo desempenho dos estudantes, mas procurar compreender os motivos pelos quais ele ocorre. Passamos, então, a identificar os tipos de questões e o grau de dificuldade que apresentavam, mesmo tendo consciência de que a razão para tais resultados é uma soma de fatores ligados, que vão desde questões sociais, culturais, afetivas e cognitivas (GITIRANA *et al.*, 2014). Destacamos, aqui, que inicialmente foram analisadas todas as questões presentes na referida avaliação, e para tal análise, foram destacadas apenas aquelas que se referiam a situações-problema do campo multiplicativo, sendo desconsideradas as questões que requeriam, para sua resolução, apenas a aplicação de propriedades ou o algoritmo da multiplicação ou da divisão. As informações trazidas no Quadro 1 foram extraídas do *site* da Secretaria de Educação do Paraná, de acordo com pesquisa específica para a referida escola e representam, também, o percentual de acertos de acordo com os mesmos descritores nas segunda e terceira edições, de 2019.

Quadro 1 - Percentual de acertos nos descritores de estudantes de 5º ano – Ensino Fundamental/2019

	1ª edição		**2ª edição**		**3ª edição**	
Descritores	***D19***	***D17***	***D20***	***D18***	***D20***	***D18***
5º A	15,78	73,68	76,6	78,1	83,33	83,33

Fonte: Dados Prova Paraná (2019).

A partir de informações retiradas do documento *Avaliação comentada*[9], os descritores *D19* e *D17* presentes na 1ª edição se referiam, respectivamente, a "*Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória*" e a "*Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais*" (PARANÁ, 2019b), conforme exposto no quadro acima.

As 2ª e 3ª edições passam a considerar, de acordo com as mesmas habilidades, os descritores *D20* e *D18*, respectivamente. Isso ocorreu devido à 1ª edição não contar com uma Matriz de Referência específica para a respectiva avaliação. No entanto, essa informação não consta no *website* da Prova Paraná, tampouco consta Matriz de Referência própria para essa edição. Para as 2ª e 3ª edições realizadas em 2019 constam Matrizes de Referência, conforme se pode verificar no *website*: 2ª edição[10] (PARANÁ [s.d.]a) e 3ª edição[11] (PARANÁ [s.d.]b). Ainda, o documento que orienta a 2ª edição da Prova Paraná traz informações sobre a lista dos descritores que são abordados:

> [...] estão organizadas por ano/série e disciplinas. A relação de descritores foi organizada tendo como base a matriz de referência do SAEB. Entretanto, a prova da 2ª edição será aplicada do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental e todas as séries do Ensino Médio, o que não acontece com o SAEB que é aplicado somente para o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Por este motivo, a 2ª edição da Prova Paraná contém itens que contemplam algumas habilidades que não estão presentes no SAEB e, nestes casos, foi utilizada outra numeração (PARANÁ, 2019a, p. 01).

A partir de análises na referida avaliação, percebemos as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em resolver situações que envolvessem o conhecimento das estruturas multiplicativas. Ainda, um dado relevante para nossos questionamentos encontra-se no aumento significativo de acertos apresentados nas 2ª e 3ª

---

[9] A *Avaliação comentada* é um documento impresso que reproduz a prova aplicada, na qual cada questão é analisada, resolvida e associada a um descritor da Matriz de Referência específica para cada edição.

[10] Mais informações em <https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2019-06/lista_descritores_prova_parana_2_ed.pdf>

[11] Mais informações em <https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2019-08/91_prova_parana_3_edicao.pdf>

edições, com relação à 1ª edição realizada, no que se refere ao descritor *D20*. Esta constatação nos levou a questionamentos: Será que as questões propostas nas duas edições seguintes não ampliavam o grau de dificuldades em relação a esse descritor? Será que a escola se limitou a abordar situações-problema com o mesmo grau de dificuldade, e assim preparava os estudantes para resolver problemas similares, com os mesmos cálculos relacionais, ou seja, qual a maneira como os dados apresentados no enunciado se relaciona?

Considerando que a Prova Paraná, ao se apresentar como uma avaliação individual e contínua, objetivando proporcionar *feedback* para as ações dos professores, e considerando que cada tipo das situações-problema do campo multiplicativo possui um grau de dificuldade intrínseco, e que há uma hierarquia de dificuldade quando se consideram situações de tipos diferentes, é legítimo indagar se os tipos de situações multiplicativas e a hierarquia de complexidade entre elas estão contempladas na Prova Paraná. Em outras palavras, pode-se considerar que o aumento do percentual de acertos em questões referentes ao *D20*, nas 2ª e 3ª edições da Prova Paraná por estudantes do 5º ano indicam, efetivamente, uma aprendizagem consolidada? Os problemas propostos avançam em nível de complexidade ou o nível se mantém? Existe progressividade entre as situações-problema apresentadas ao longo das edições, ao se considerar como instrumento diagnóstico? Há avanço no desempenho dos estudantes, considerando as três edições realizadas? Como a Prova Paraná apresenta as situações que contemplam estruturas multiplicativas? Qual ou quais interesse(s) há nos resultados obtidos? Quais as possíveis influências do Livro Didático em relação à resolução das situações da Prova Paraná?

Existe, hoje, uma crescente necessidade de buscar meios que propiciem impactar a prática pedagógica da maioria dos professores, bem como melhorar o desempenho dos estudantes, que se mostram, a partir de pesquisas em estatísticas educacionais, cada vez mais baixos, e que refletem a qualidade da aprendizagem (KLEIN; RIBEIRO, 1991). No entanto, ao considerar a avaliação expressa exclusivamente por um valor numérico, negligencia-se a concepção de que o quantitativo advém do qualitativo. Sua finalidade vai além de interrogar o que é diretamente observável, percorrer caminhos, compreender processos e, assim, inferir sobre o que não é diretamente observável, ou seja, dar significado pedagógico ao número ou nível evidenciado pelos estudantes (GEWEHR, 2010).

Assim, esta proposta de pesquisa não objetiva analisar apenas o resultado final expresso pelo desempenho dos estudantes. O interesse está centrado nos aspectos das situações-problema do campo multiplicativo presentes na Prova Paraná, segundo a classificação das estruturas multiplicativas estabelecida por Gérard Vergnaud (2009).

Também, foi utilizada a proposta de extensão das situações a partir da pesquisa realizada por Gitirana *et al.* (2014), quanto a sua complexidade de resolução.

A classificação a que se referem Gitirana *et al.* (2014, p. 91) propõe extensões para os tipos de problemas aplicados na pesquisa com estudantes do Ensino Fundamental, considerando desde situações elementares, chamadas de situações prototípicas, até a 4ª extensão, estabelecidas com intuito de "[...] contribuir para que se possam desenvolver expectativas mais reais a respeito da complexidade exigida dos alunos na resolução de problemas, frente ao desenvolvimento da grande maioria deles". Para além dos níveis de complexidade observados a partir dos tipos de situações-problema, as variáveis didáticas nelas envolvidas também foram consideradas na análise.

Assim, os elementos teóricos que subsidiaram a análise desta pesquisa têm como base a Teoria dos Campos Conceituais, particularmente a classificação proposta por Vergnaud (2009), de situações de estruturas multiplicativas, como já esclarecido anteriormente. A pesquisa também se subsidia na proposta de análise dessas situações a partir da classificação em função do grau de dificuldade que apresentam para sua resolução, presentes no livro *Repensando Multiplicação e Divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*, das autoras Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014). Foram apresentadas as análises de desempenho e os esquemas de estudantes de 1ª a 8ª série do Ensino Fundamental, no que tange às Estruturas Multiplicativas.

Salientamos que os dados se referem às situações-problema de Matemática extraídas de cada caderno de provas que compõe a Prova Paraná, aplicadas aos estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental, tendo em vista que, nos respectivos cadernos também havia o mesmo número de questões de Língua Portuguesa. Na parte destinada à avaliação de Matemática, esses instrumentos são constituídos por 106 questões ao todo, distribuídas entre as cinco edições realizadas, sendo vinte e duas questões em cada uma das três primeiras edições realizadas em 2019, vinte questões em 2020, e igualmente vinte em 2021.

A partir dessa primeira análise, tendo como principal objetivo identificar situações-problema pertencentes ao Campo Conceitual Multiplicativo foram selecionadas somente as questões que envolviam estruturas multiplicativas, perfazendo um total de 18 situações. As questões classificadas como problemas mistos (problemas que envolvem ao menos uma adição ou subtração e uma multiplicação) ou questões que exigiam somente o algoritmo da multiplicação ou da divisão (situações que solicitam ao aluno a resolução de operação de multiplicação ou divisão, sem considerar relações entre as grandezas), seis e sete, respectivamente, totalizando treze questões, não foram consideradas, pois não eram objeto da nossa análise.

Além da identificação das situações-problema de estruturas multiplicativas e seus graus de complexidade conforme seus eixos (Proporção Simples, Função Bilinear, Proporcionalidade ou Proporção Múltipla, Comparação Multiplicativa e Produto Cartesiano), suas classes (um para muitos, partição, cota e muitos para muitos para relações quaternárias e referente, referido ou relação desconhecido; configuração retangular e combinatória para relações ternárias), bem como os tipos de grandezas envolvidas (discreta ou contínua), foram considerados, também, os tipos de variáveis didáticas envolvidas em cada relação. Consideramos variável didática, segundo Almouloud (2016), como uma variável cognitiva que interfere na hierarquia das estratégias de resolução, pelo seu custo, sua validade ou sua complexidade.

Para realizar o estudo e para melhor compreensão, os quadros elaborados e que são apresentados no capítulo seguinte contêm as questões que envolvem situações de estruturas multiplicativas respectivas a cada edição realizada, e cada uma das situações apresentadas está representada conforme seu descritor, de acordo com a Matriz de referência da prova, associadas, então, aos conteúdos contidos no Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)[12].

Para cada situação, foram elaborados diagramas baseados nas ideias de Vergnaud (2009), os quais permitem uma análise mais fina das relações e dos problemas. Também trazem uma análise dimensional da situação tratada, tendo por principal objetivo compreender melhor as diferentes estruturas de cada situação, bem como auxiliar no processo de interpretação e na compreensão das relações entre as grandezas envolvidas. Segundo esse mesmo autor, esse processo é denominado cálculo relacional, e diz respeito às operações do pensamento necessárias para que haja a exploração das relações envolvidas nas situações.

Vergnaud (2009) afirma que o trabalho com os diagramas amplia os procedimentos de resolução, podendo utilizar como estratégia tanto o fator escalar, que considera as relações entre grandezas do mesmo tipo; quanto o fator funcional, o qual considera as relações entre grandezas diferentes. Segundo o autor, há distinção entre o cálculo relacional e o cálculo numérico, ao considerar que este último "[...] refere-se às operações comuns de adição,

[12] Documento que fornece subsídios às escolas para revisão de seus currículos; e aos professores, na elaboração de seus planejamentos. Esse documento foi produzido em 2018, por meio do Programa de Implementação da BNCC, o qual define os direitos e os objetivos de aprendizagens para os estudantes da Educação Infantil e do Ensino Fundamental (PANARÁ, 2018, p. 2).

subtração, multiplicação, divisão etc., (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 43), e enfatiza que o estudante, ao realizar esses registros, evolui de registros não estruturados para outro, em que as relações multiplicativas estejam explícitas, fato que auxilia os estudantes a chegarem ao cálculo numérico.

1.5 Aspectos da Teoria dos Campos Conceituais

Constituídos os subsídios que nos permitiram compreender os aspectos pedagógicos da Prova Paraná enquanto avaliação externa, buscamos pelo aporte teórico que sustentou as análises das situações-problema referentes ao Campo Conceitual Multiplicativo nela presentes, com o intuito de identificar se elas contemplam as diferentes tipologias estabelecidas por Vergnaud.

Por se tratar de uma teoria cognitivista construtivista, a TCC, segundo Gitirana *et al.* (2014), proporciona um diagnóstico da aprendizagem, razão da opção escolhida, para subsidiar as análises realizadas com o intuito de identificar se as situações propostas nas três edições anuais da Prova Paraná possibilitam analisar o desempenho dos estudantes em relação às estruturas multiplicativas. A TCC tem como um de seus objetivos estudar condições que favoreçam a compreensão das características essenciais dos conceitos pelos estudantes, contribuindo para fornecer estrutura à aprendizagem.

Com intuito de favorecer o processo de ensino e contribuir com a aprendizagem dos estudantes, a fim de ampliar e aprofundar o conhecimento sobre multiplicação e divisão, consideramos o que afirma Vergnaud (2009, p. 23), que "[...] o conhecimento consiste, em grande parte, em estabelecer relações e organizá-los em sistemas". Gitirana *et al.* (2014), em uma releitura dessa teoria, classificam as situações-problema de estruturas multiplicativas a partir dos diferentes níveis de complexidade, chamados de extensões, sendo as situações mais simples chamadas de situações prototípicas da multiplicação (protótipos), aumentando gradativamente para 1ª, 2ª, 3ª e chegando até a 4ª extensão, a depender do grau de dificuldade que apresentam para sua resolução. De acordo com suas estruturas e do cálculo relacional envolvidos, essas extensões estão dispostas da seguinte forma: "[...] Comparação Multiplicativa; Proporção Simples; Produto Cartesiano; Função Bilinear e Proporcionalidade Múltipla" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 45).

Essa classificação, segundo Gitirana *et al.* (2014), não possui caráter de hierarquização dos problemas a serem explorados, mas enfatizam a necessidade de propor diferentes tipos de situações aos estudantes, de forma gradativa, a contar da estrutura de cada um, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, a variação das situações contribui para aprendizagem, e segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 37), “[...] entender mais a respeito dos diferentes tipos de problema pode auxiliar os professores na elaboração de abordagens de ensino e aprendizagem que possibilitem a eles abranger uma riqueza maior de questões”. Ainda, as propostas de situações desestabilizadoras possibilitam o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Cabe ao professor prover situações de aprendizagem frutíferas, a fim de proporcionar essas etapas e os processos de continuidade e descontinuidade.

Dessa forma, buscamos investigar o Livro Didático utilizado por uma escola para essa etapa de ensino, com o objetivo de identificar quais tipos de situação-problema estariam presentes nesse material didático. No entanto, considerando que existe uma pesquisa que identifica as situações-problema de estruturas multiplicativas, realizada por Rodrigues e Rezende (2021), ela servirá de base para parte da investigação, no que tange à coleção de livros investigada.

1.6 Aspectos da Abordagem de Situações Multiplicativas nos Livros Didáticos

Analisar e discutir os resultados da Prova Paraná, buscando aproximações acerca dos tipos e da abordagem de situações pertencentes ao campo multiplicativo propostas no Livro Didático, possibilitam importantes reflexões. Ainda, podem proporcionar a compreensão da maneira com que esse instrumento pedagógico contribui com o desenvolvimento da habilidade dos alunos em resolver problemas matemáticos de diferentes naturezas, por meio de variadas situações-problema propostas.

Essa ação requer uma mudança de olhar, abandonando a perspectiva que reduz o processo avaliativo apenas aos resultados apresentados. No entanto percebe-se, na Matemática escolar, uma forte influência dos Livros Didáticos utilizados como referência curricular e pedagógica, no sentido de selecionar os conteúdos que deverão ser ensinados, na forma de como deverão ser organizados, e nas estratégias que serão utilizadas pelos docentes (MOREIRA, 2004). Isso acontece, tendo em vista que o Livro Didático é um material a que todos os professores de escolas públicas têm acesso, bem como seus respectivos estudantes, pois é distribuído em todo território nacional.

De acordo com Bittar (2017, p. 366), “[...] se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o Livro Didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas", considerado como principal material de referência para a seleção das atividades dentro e fora da sala de aula, sendo um recurso utilizado em escala nacional.

Uma vez identificadas e analisadas as situações-problema de estruturas multiplicativas presentes na Prova Paraná (1ª, 2ª e 3ª edições realizadas em 2019; uma única em 2020 e uma única em 2021) realizamos a análise das situações constantes no Livro Didático adotado por uma escola, lócus de nossa pesquisa, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, e cotejamos os tipos de situações nele identificadas com as situações-problema presentes na Prova Paraná, buscando compreender o desempenho dos estudantes.

Para essa etapa da pesquisa, não houve a intenção de analisar a obra como um todo. Nesse sentido, nos limites desta etapa, anunciamos aqui somente os tipos de situações que deram origem a esta investigação, buscando estabelecer um paralelo entre a tipologia das situações identificadas no Livro Didático e o desempenho dos estudantes na Prova Paraná ao resolverem esses tipos de situação, considerando sua diversidade de complexidade cognitiva.

Assim, a coleção foi utilizada como fonte de dados respectiva às situações-problema de estruturas multiplicativas relacionadas ao eixo Proporção Simples, classes *um para muitos* e *partição,* bem como ao eixo Proporção Múltipla, respectivas aos percentuais de acertos obtidos nas três edições realizadas em 2019.

Destacamos que foram observados somente os referidos eixos e classes das estruturas multiplicativas, tendo em vista que são as situações-problema que deram origem à análise inicial desta pesquisa, evidenciada no Quadro 1, que apresenta o desempenho dos estudantes ao resolverem esses tipos de situações-problema.

Essa classificação dos tipos de situações-problema oferece uma estrutura teórica que pode auxiliar os professores na percepção dos significados da multiplicação e da divisão. Para tanto, a análise da tipologia das situações ajuda a entender as dificuldades, bem como o caminho para sua superação. Contudo, é necessário que as situações-problema sejam cuidadosamente elaboradas para que possam propiciar maior interesse por parte dos estudantes em resolvê-las, e dessa forma, consigam compreender melhor as relações nelas existentes, em lugar de operar apenas com os dados dos problemas (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017c).

Nesse contexto, observar se os Livros Didáticos têm buscado atender a essa recomendação é o objetivo principal do último capítulo da pesquisa, com intuito de identificar e classificar as situações multiplicativas. Assim, busca-se revelar a presença ou não de progressividade de complexidade do cálculo relacional presente entre elas, levando em conta a existência de uma hierarquia que se reflete em níveis distintos de dificuldades de resolução. Isto porque, de acordo com Vergnaud (1993, p. 25), “[...] não se pode escapar à classificação das relações dos problemas e das operações de pensamento necessárias à sua resolução”.

A referida coleção de Livros foi escolhida para esta pesquisa pelo fato de ser a coleção adotada como material didático de apoio pedagógico para o período de 2019 a 2022. No entanto, esta mesma coleção foi utilizada como instrumento de pesquisa em estudo semelhante promovido por Rodrigues e Rezende (2021), que realizaram a análise e a classificação de cada situação-problema respectivas ao Campo Conceitual Multiplicativo, de acordo com as classes propostas por Vergnaud (2009). Logo, foi um processo de identificação de elementos que compõem as situações-problema de estruturas multiplicativas em uma coleção de Livros Didáticos a partir dos preceitos da Teoria dos Campos Conceituais.

Nessa perspectiva, tendo em vista a influência que o Livro Didático apresenta no contexto escolar e a necessidade de trabalhar com problemas de diferentes tipos e graus de complexidade que proporcionem o raciocínio matemático, conforme proposto pela TCC, enfatizamos a necessidade de discutir a presença de propostas que contenham tarefas e orientações que possibilitem seu desenvolvimento dos estudantes, cujas aprendizagens são evidenciadas em contextos de avaliação externa. Desse modo, destaca-se a importância de investigar os tipos de situações-problema de estruturas multiplicativas no Livro Didático, a partir de sua abordagem, que está apresentada no Capítulo V.

Estabelecido o plano para o desenvolvimento da pesquisa, no próximo capítulo é apresentado o contexto das avaliações externas que consideramos poder subsidiar a compreensão acerca dos aspectos pedagógicos inerentes à Prova Paraná.

2 CONTEXTOS DAS AVALIAÇÕES EXTERNAS

Com os estudos apresentados neste capítulo, buscamos por subsídios que contribuíssem com nossa análise da Prova Paraná, considerando seus aspectos pedagógicos a partir de investigações que tiveram objetivos similares. Assim, passamos a analisar como se vislumbram, em teses e dissertações levantadas, as iniciativas estaduais próprias de avaliação externa, buscando identificar os motivos que justificaram sua criação e seus delineamentos metodológicos, além de identificar os tipos de uso dos resultados realizados pelas secretarias estaduais a partir das informações obtidas.

2.1 Aspectos da Abordagem Pedagógica nas Avaliações Externas

As avaliações externas sempre foram um tema polêmico para os profissionais da educação e têm se tornado um campo forte de pesquisas, tendo em vista seu significado e os consequentes usos de dados e informações por elas geradas. Dentre as muitas dimensões que assumem, refletem argumentos contrários à sua aplicação, ao considerar: a responsabilização de professores e escolas; a interferência na autonomia dos docentes; e o afunilamento curricular. Contudo, seu papel é determinado pelo uso de seus resultados, pela relação entre os objetivos das avaliações e as informações por elas produzidas (VIANNA, 2003a).

Nesse sentido, pesquisas apontam que o desenvolvimento de sistemas de avaliação vem se expandindo no Brasil desde meados da década de 1990. Esses sistemas de avaliação apresentam diferentes finalidades, principalmente a possibilidade de refletir diagnósticos do quadro educacional brasileiro e monitorar a qualidade do ensino ofertada, ocupando papel central nas políticas públicas de educação como subsídios para a implementação ou manutenção desses instrumentos (KLEIN; FONTANIVE, 1995). Em geral, "[...] as informações produzidas visam subsidiar a formulação, reformulação e o monitoramento das políticas na área educacional nas esferas municipal, estadual e federal, contribuindo para a melhoria da qualidade, equidade e eficiência do ensino" (BRASIL, 2008, p. 12).

Segundo Horta Neto (2013), a partir da implementação do Sistema Nacional de Avaliação Básica – SAEB, introduziu-se e consolidou uma cultura de avaliação no país. O SAEB constitui-se em um conjunto de diferentes instrumentos de coleta de dados cognitivos e contextuais que possibilitam aferir e avaliar a qualidade educacional ofertada nas diferentes etapas da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais) e Ensino Médio.

Considera-se que o SAEB desempenha funções, como intervir na gestão das redes de ensino e das escolas, auxiliar os governantes nas decisões e no direcionamento de recursos técnicos e financeiros, fornecendo elementos para a construção de políticas públicas capazes de garantir a eficiência da qualidade de ensino, bem como estabelecer metas e dar suporte para ações pedagógicas e administrativas (HORTA NETO, 2013).

Realizado periodicamente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, desde sua implantação, apresenta os seguintes objetivos no âmbito da Educação Básica:

- ✓ construir uma cultura avaliativa;
- ✓ produzir indicadores educacionais para o Brasil;
- ✓ avaliar a qualidade, a equidade e a eficiência da educação praticada no País em seus diversos níveis governamentais;
- ✓ subsidiar a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas públicas em educação baseadas em evidências;
- ✓ desenvolver competência técnica e científica na área de avaliação educacional, ativando o intercâmbio entre instituições de ensino e pesquisa (BRASIL, 2021).

Logo, o SAEB institui-se como principal sistema brasileiro de avaliação externa em larga escala aplicado ao Ensino Fundamental e Médio. Segundo Fontanive (2013), a ideia principal do SAEB é saber como está o sistema educacional do país, não tendo como objetivo avaliar, classificar, aprovar ou promover indivíduos em particular. No entanto, considera seus efeitos pouco conclusivos e por vezes polêmicos, pois não evidenciam a apropriação pedagógica de seus resultados. Seu caráter amostral parece não abranger, em profundidade, formas eficazes de sua aplicação e de sua utilização, apresentando resultados que chegam apenas ao nível das unidades da federação. Nesse sentido, segundo Dantas (2009, p. 31), "[...] os delineamentos em larga escala sempre apresentarão um recorte da realidade, por mais que tentem abordá-la de maneira compreensiva".

Em 2005, a partir de uma reestruturação, o SAEB passou por significativa alteração, desdobrando-se em Avaliação Nacional da Educação Básica - ANEB[13], conhecida como ANEB/SAEB e Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - ANRESC[14], conhecida como

---

[13] Avaliação de caráter amostral, voltado a estudantes de 5º e do 9º ano do EF e do 3º ano do E M.
[14] Avaliação de caráter censitário avalia todos os estudantes de 5º e 9º anos do EF de todas as escolas públicas.

ANRESC/Prova Brasil. No ano de 2013, a Avaliação Nacional da Alfabetização - ANA[15] foi incorporada ao SAEB (MACHADO, 2020).

As discussões em torno das avaliações externas ultrapassam os limites dos ambientes escolares, das Instâncias Governamentais em suas esferas Federal, Estadual e Municipal, dos Organismos Internacionais, das agências de financiamento, enfim, dos espaços políticos, econômicos, sociais e culturais (MOREIRA, 2016). Mesmo considerando a importância que vêm assumindo as avaliações no delineamento das políticas educacionais, Vianna (2003a) afirma que, em geral, não há reflexão efetiva sobre ações para a melhoria da qualidade da educação, visto que, dentre entre outras razões, são promovidas por diferentes órgãos oficiais, muitas vezes com a colaboração de instituições privadas. Ainda, de acordo com os tipos dos usos das avaliações, os efeitos gerados podem ser diversos, a depender dos contornos e pressupostos adotados para sua implementação, das características e do histórico do sistema de ensino para o qual são realizados, e dos tipos de resultados que se pretende atingir (BROOKE; SOARES, 2008).

Nesse sentido, a ênfase em mudanças fez crescer as avaliações externas para além das estipuladas pelo Ministério da Educação - MEC, enquanto instrumento diagnóstico da educação brasileira, na busca pela promoção da qualidade de ensino. As novas proposições e desenhos das avaliações externas discutem e apontam tendências pertinentes ao conhecimento e à reflexão, considerando desde aspectos estruturantes relativos às políticas e ações educacionais, até aspectos teóricos e procedimentos implementados no contexto educacional, em uma perspectiva pedagógica.

De acordo com Gimenes *et al.* (2013), Estados e Municípios vêm adotando e desenvolvendo propostas próprias de avaliação do ensino básico, em sua maioria utilizando a metodologia utilizada pelo SAEB, seguindo o desenho original para sua formatação. Ainda, é possível observar o aumento e o peso atribuídos aos sistemas de avaliação de desempenho dos estudantes no Brasil com a inclusão de elementos próprios e direcionados aos interesses de cada rede, sob as mais diversas justificativas para sua elaboração:

> 1. O caráter censitário e anual das avaliações externas promovidas pelas redes de ensino estudadas; 2. A possibilidade de detalhar e trabalhar os dados nas escolas com maior rapidez e agilidade; 3. A amplitude dos/as anos/séries avaliadas pelo modelo de avaliação adotado pelas redes de ensino; 4. A possibilidade de identificação nominal dos resultados de cada aluno (GIMENES, *et al*. 2013, p. 16).

---

[15] Avaliação aplicada anualmente a estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental das escolas públicas com ênfase na alfabetização.

No entanto, Vianna (2003a, p. 26) enfatiza a importância de “[...] que cada sistema considere a diversidade do seu espaço social, econômico e cultural, a fim de evitar interpretações comprometidas”, além de possíveis comparações intra e entre os sistemas educacionais. As informações obtidas a partir das avaliações externas podem ser utilizadas sob vários aspectos, tendo em vista que a análise coletiva dos dados é etapa fundamental na proposição e direcionamento de ações na perspectiva de sua utilização no trabalho pedagógico para enfrentar as dificuldades vividas nos processos de ensino e de aprendizagem. Assim, Machado (2020, p. 213), considera que “[...] analisar as tendências e as implicações das avaliações externas estaduais se reveste de maior significado”, uma vez que os resultados dessas avaliações e suas consequências, para além do caráter polêmico de algumas ações, como bonificação de professores a partir do desempenho discente obtido, acabam por interferir e influenciar o ambiente escolar.

Em concordância, Vianna (2003b) afirma que os elementos levantados a partir das avaliações

> [...] devem ser analisados por professores e técnicos especializados nas várias áreas curriculares, a fim de que sejam incorporados ao planejamento escolar e contribuam para o processo educacional. A avaliação não é um valor em si e não deve ficar restrita a um simples rito da burocracia educacional, necessita integrar-se ao processo de transformação do ensino/aprendizagem e contribuir, desse modo, ativamente, para o processo de transformação dos educandos (VIANNA, 2003b, p. 25-26).

Os 25 trabalhos selecionados estão relacionados a seguir, destacando, respectivamente, modalidade, ano de defesa, título e referência, conforme o Quadro 2. Para cada trabalho selecionado, utilizamos um código composto por uma sigla e um número, por exemplo, Tese (T) e Dissertação (D), seguindo a ordem cronológica a partir de suas defesas. Salientamos que os códigos não têm a função de ordenar os trabalhos sob algum critério específico, mas associá-los posteriormente, de acordo com seus delineamentos e características.

Quadro 2 - Dissertações e Teses identificadas na pesquisa

Modalidade /Ano	Trabalhos	Autor	Instituição
D1 – 2010	Provinha Brasil: a utilização e avaliação dos testes de diagnósticos da alfabetização pelos professores	Marinilda Maia	Universidade Federal de Minas Gerais
T1 – 2011	A avaliação diagnóstica da alfabetização norteando os caminhos para o êxito do processo de alfabetizar crianças.	Ana Paula de Medeiros Ribeiro	Universidade Federal do Ceará

D2 – 2011	O sistema de avaliação do rendimento escolar do Estado do Rio Grande do Sul - SAERS: institucionalização	Carmem Maia Koetz	Universidade do Vale do Rio dos Sinos
D3 – 2012	SAERJINHO – desafios e conquistas na busca por uma educação de qualidade para o estado do RJ	Rosane de Barros Alves Gilson	Universidade Federal de Juiz de Fora
D4 – 2012	Estudo comparado da ação gestora na apropriação dos resultados do PROALFA: análise de dois casos de sucesso em Governador Valadares	Patrícia Valesca Gomes Ferreira	Universidade Federal de Juiz de Fora
D5 – 2013	O impacto do Saerjinho nas concepções de avaliação externa e interna em uma escola do noroeste fluminense	Elia Márcia Côrtes	Universidade Federal de Juiz de Fora
D6 – 2014	A avaliação diagnóstica da Secretaria da Educação do Estado de Goiás: das intenções às ações	Daniela Silva Mendes Medeiros	Universidade Federal de Goiás
D8 – 2014	A avaliação diagnóstica como subsídio às práticas docentes no ensino da matemática: uma análise dos resultados das avaliações dos alunos do 2º ano do ensino fundamental do Estado da Bahia	Alanna Oliveira Pereira Carvalho	Universidade Federal do Ceará
T2 – 2014	Avaliação externa como estratégia de gestão dos processos educacionais: uma análise de políticas municipais no Rio Grande do Sul	Sônia Maria Oliveira da Rosa	Universidade do Vale do Rio dos Sinos
T3 – 2014	Do produto ao processo: contribuições da Provinha Brasil na reorganização da prática pedagógica alfabetizadora	Georgyanna Andréa Silva_orais	Universidade Federal do Ceará
T4 – 2014	Provinha Brasil e regulação: implicações para a organização do trabalho pedagógico	Elisângela Teixeira Gomes Dias	Universidade de Brasília
D9 – 2015	Avaliação da Aprendizagem em Processo: limites e possibilidades de uso em uma Escola da Rede Estadual de São Paulo	Maria Eliane Maia Sousa	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D10 – 2015	Sentidos e efeitos da avaliação externa do Programa Alfabetização na Idade Certa (PAIC) na Rede Municipal de Ensino Público de Fortaleza (CE)	Teresa Márcia Almeida da Silveira	Universidade Federal do Ceará
T5 – 2015	Avaliação em larga escala como regulação: o caso do Sistema Estadual de Avaliação da Aprendizagem Escolar - SEAPE/ACRE	Rivanda dos Santos Nogueira	Universidade Federal do Paraná
D11 – 2016	Contratos de gestão e avaliação externa em larga escala no município de Curitiba	Márcia Fernandes Brito	Universidade Tuiuti do Paraná
D12 – 2016	Uma proposta de consolidação da prova padronizada na rede municipal de Teresina	Giovanna Saraiva Bezerra Barbosa	Universidade Federal de Juiz de Fora

D13 – 2016	Ensino e aprendizagem de conteúdos curriculares de matemática no ensino fundamental: análise de repertórios profissionais de ensino no âmbito do Saresp	Juliana Silva de Andrade	Universidade Estadual Paulista
D14 – 2017	Apropriação de resultados da avaliação em larga escala em uma escola mineira de ensino médio: limites e possibilidades de ações gestoras	Maria Vanderli de Souza Marques	Universidade Federal de Juiz de Fora
D15 – 2017	Sondagem de itens de matemática da prova Brasil como instrumento pedagógico na investigação de dificuldades de alunos de 5º ano no município de Boituva/SP	Markus Pablo Nobre dos Santos	Universidade Federal de São Carlos
D16 – 2017	Concepção, apropriação e perspectiva sobre a Prova Brasil em escolas da rede estadual de ensino de Minas Gerais	Maxluler Coelho Batista	Universidade Federal de Minas Gerais
T6 – 2017	Avaliação institucional participativa [re]formulação de uma política pública educacional	Guilene Salermo	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
D17 – 2018	Avaliação diagnóstica e prova semestral: a interlocução entre a SME e a DRE para a proposição de ações formativas	Minéa Paschoaleto Fratelli	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D18 – 2019	Possibilidades de atuação pedagógica a partir de resultados da Avaliação Diagnóstica São Paulo e análise dos planos de aula	Ana Paula Lopes do Prado Pinheiro	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D19 – 2019	Interpretação e apropriação dos resultados do SIMAVE: Um estudo de caso do uso das informações da avaliação externa de matemática como instrumento de gestão curricular	Amanda Sena Valdivia Ferreira	Universidade Federal de Juiz de Fora
D20 – 2019	Baixo desempenho em matemática e práticas de ensino: inquietações necessárias, explanações possíveis	Deodato Gomes Costa	Universidade Federal de Juiz de Fora

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Observando os dados do Quadro 2, conforme as pesquisas realizadas em teses e dissertações, identificamos Estados e Municípios que instituíram práticas avaliativas educacionais próprias, para além do que se propõem as avaliações em âmbito nacional, em um recorte do cenário de pesquisas brasileiras. Essas redes de ensino vêm apresentando mais opções para suas propostas, ora ampliando as disciplinas avaliadas, ora criando provas extras, ou ainda, algumas mais específicas, com intuito de averiguação da alfabetização.

Os trabalhos encontrados foram classificados conforme seus níveis de abrangência: nacional, estadual ou municipal. Assim, estabelecida a classificação, identificamos treze pesquisas de âmbito estadual, quatro de nível municipal, e oito referentes ao nível federal. O Quadro 3 mostra, na página seguinte, por região brasileira, como as pesquisas em avaliações externas, em uma perspectiva diagnóstica, estão se efetivando a partir de instrumentos próprios, de modo a investigar o nível de aprendizagem dos estudantes matriculados em suas redes de ensino, dentre outros objetivos.

Quadro 3 - Pesquisas realizadas em avaliação externa própria ou em âmbito nacional

Região	Nacional	Estadual	Municipal
Norte	Provinha Brasil 2014	SEAPE 2015	
	PAIC 2015		
	Provinha Brasil 2014		
Nordeste	PAIC 2011		Prova Padronizada 2016
Centro-Oeste	Provinha Brasil 2014	Avaliação Diagnóstica 2013	
Sudeste	Provinha Brasil 2010	Avaliação da Aprendizagem em Processo 2015	Avaliação Diagnóstica e a Prova Semestral 2018
	Prova Brasil 2017	Saerjinho 2013	Avaliação Diagnóstica e a Prova Semestral 2019
	Prova Brasil 2017	PROEB 2019	
		PROEB 2017	
		PROEB 2019	
		Saerjinho 2012	
		PROALFA 2012	
		SEAP 2017	
		SARESP 2016	
Sul		SAERS/RS 2011	Busca existência de avaliações 2014
		Gestão e Avaliação 2016	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

A partir da leitura das pesquisas realizadas com o foco nas avaliações estaduais, depreende-se grande similaridade nos delineamentos adotados por essas avaliações, de ferramentas utilizadas e de mecanismos de envolvimento dos atores nesses processos avaliativos, bem como no uso de seus resultados. Vale ressaltar que, em sua maioria, elas convergem, de acordo com seus objetivos, para a busca por informações mais detalhadas de suas redes de ensino, com propósito de traçar estratégias visando a melhorias nos resultados obtidos.

Ainda, identificamos questões de ordem técnica e política com objetivos diversos, como servir de referência para a elaboração de políticas educacionais pelas equipes gestoras das redes de ensino, orientar o trabalho pedagógico das escolas a partir da apropriação de seus resultados, além de descrever uma perspectiva histórica das avaliações externas no âmbito de processos decisórios de secretarias de educação, quais sejam, nacional, estaduais ou municipais. Destaca-se que as redes de ensino investigadas buscam avançar e se diferenciar, de algum modo, do desenho da avaliação externa nacional, bem como promover aproximações dos diferentes atores institucionais, dos tipos de provas aplicadas e dos usos mais efetivos e imediatos de seus resultados, conforme apontam os objetivos de cada uma no quadro abaixo. Ressaltamos que as pesquisas pertencentes aos níveis municipal e federal foram desconsideradas da análise, tendo em vista que o foco desta pesquisa são as avaliações externas promovidas pelos Estados, no qual se situa também a Prova Paraná.

Quadro 4 - Objetivos das pesquisas selecionadas

Modalidade /Ano	**Objetivos**
D2 – 2011	Descrever e analisar o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul – SAERS, em uma perspectiva histórica, no período de 1996 a 2009.
D3 – 2012	Analisar o papel de diretor de escola no processo de operacionalização do SAERJINHO nas escolas da rede estadual de Vassouras/RJ.
D4 – 2012	Delinear uma situação de gestão em que seus gestores sejam facilitadores do processo de apropriação dos resultados do PROALFA, permitindo que o professor alfabetizador faça uso deles em sua prática pedagógica.
D5 – 2013	Analisar essa nova política de avaliação da Secretaria Estadual do Rio de Janeiro, verificando especificamente sua influência no cotidiano de uma escola da região Noroeste do estado e seu impacto nas concepções de avaliação externa e interna dos atores escolares.
D6 – 2014	Apresentar e analisar o programa Avaliação Diagnóstica praticado pela Seduc, desde sua implementação até as ações pedagógica utilizadas pelos professores dessa rede de ensino após os resultados obtidos por seus alunos nas provas da disciplina de Matemática, buscando confrontar as expectativas e objetivos iniciais do programa com os resultados alcançados.
D9 – 2015	Investigar o uso que professores e professor coordenador fazem da avaliação.
T5 – 2015	Analisar como o SEAPE é concebido, identificando seus princípios, concepções, indicadores e motivações que contribuíram para que a avaliação em larga escala fosse colocada na agenda da política local.
D11 – 2016	Analisar a relação existente entre as avaliações em larga escala e os Contratos de Gestão introduzidas na esfera pública municipal de Curitiba durante as gestões de Beto Richa e Luciano Ducci, com vistas a um maior entendimento do movimento das políticas públicas no seio do Estado do Paraná.

D13 – 2016	Investigar os fatores que poderiam influenciar nas correspondências que os professores devem estabelecer, de um lado, com possíveis aprendizagens dos seus alunos em interação com as condições didáticas dispostas pelo próprio professor; e de outro lado, as aprendizagens preconizadas em documentos oficiais do SARESP sob a designação de habilidades ou descritores.
D14 – 2017	Analisar se e como acontecem as práticas de apropriação dos resultados do SIMAVE/PROEB com vistas a conhecer as ações gestoras para alinhamento dos resultados às práticas pedagógicas, considerando as já desenvolvidas e as que podem ser discutidas para maior integração entre os segmentos de ensino.
T6 – 2017	Situar a origem da Avaliação Institucional Participativa no estado do Rio Grande do Sul (RS) sem a pretensão de esgotar o levantamento e ou a discussão sobre sua pertinência, mas de provocar a crítica necessária ao modelo de análise apresentado.
D19 – 2019	Investigar como gestores e professores interpretam e utilizam os dados das avaliações externas, mais especificamente o SIMAVE/PROEB para, então, elaborar estratégias que possibilitem sanar lacunas de aprendizagem apontadas por este instrumento.
D20 – 2019	Identificar de que modo as práticas pedagógicas exercidas pelos docentes de Matemática estão relacionadas aos baixos resultados nas avaliações externas no escopo já mencionado.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Assim, buscamos identificar, a partir dos objetivos apontados em pesquisas acadêmicas, de acordo com uma análise qualitativa interpretativa, particularmente em dissertações e teses, as concepções, percepções e usos que as Secretarias Estaduais de Educação e escolas fazem das informações extraídas das avaliações externas, e de que forma se apropriam de seus resultados.

2.1.1 *Exemplos dos Usos da Avaliação Educacional*

As convergências evidenciadas a partir desse mapeamento são de movimentos que começam a ocorrer no âmbito das Secretarias Estaduais na busca por abordagens e perspectivas avaliativas. Contudo, a análise interpretativa da pesquisa em avaliação externa traz apenas alguns aspectos de cada trabalho, identificado e considerado a partir de possibilidades de aproximações com uma concepção diagnóstica. Em princípio, destacam-se: o gestor escolar, no sentido de subsidiar decisões e ações e induzir a produção dos resultados esperados; e os professores, apontando indícios de trabalhos pedagógicos que tiveram êxito ou não nos processos de ensino e de aprendizagem, sob aspectos de planejamento e de ensino, permitindo uma investigação de suas práticas pedagógicas, dentre outras, que destacamos a seguir.

O estudo coordenado por Medeiros (2013) apresenta, além de questões estruturais, um caráter diagnóstico sobre a avaliação externa denominada *Avaliação Diagnóstica*, realizada pela Secretaria de Educação do Estado de Goiás – SEDUC. No ano de 2011, as aplicações dessas provas, referentes às disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática a estudantes de 5º a 9º ano do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, incluiriam também a disciplina de Ciências da Natureza. Essas avaliações são corrigidas na própria escola pelos professores, de acordo com gabaritos enviados pela SEDUC. Os resultados e demais informações são apresentados pela Secretaria, posteriormente, por unidade escolar, turmas e alunos, individualmente.

A pesquisa aponta que os técnicos da SEDUC, após análise dos resultados, definem linhas de ação e planejam intervenções, a partir da produção de material pedagógico de apoio e presença de monitores nas escolas. São proporcionados encontros de formação com professores de Língua Portuguesa e Matemática, juntamente com coordenadores pedagógicos dos respectivos estabelecimentos de ensino, a fim de promover discussões acerca dos resultados, apresentando sugestões de intervenções a serem desenvolvidas pelos docentes em sala de aula (MEDEIROS, 2013).

Vale ressaltar que, quanto às ações pedagógicas desenvolvidas, a SEDUC passou a solicitar que as escolas apresentassem, por escrito, os planos de ação elaborados a partir dos resultados da Avaliação Diagnóstica, sempre com o auxílio dos tutores da própria Secretaria. Essas orientações ocorrem em reuniões pedagógicas pré-estabelecidas em calendário escolar anual ou em outros momentos, devidamente planejados e agendados.

Ainda, o resultado da pesquisa aponta que parte significativa dos professores compreende os resultados da avaliação como um mecanismo da Secretaria em *regular* o trabalho do professor, e não somente analisar o desempenho dos estudantes. Além disso, enfatiza que a maioria dos professores não considera as informações extraídas da avaliação externa como a etapa inicial do processo ensino-aprendizagem. Ao serem questionados sobre as possíveis intenções da Avaliação Diagnóstica, o autor da pesquisa destaca:

> [...] aproximadamente 24% afirmaram que a intenção era medir o conhecimento dos alunos para tomar decisões administrativas; 20% acreditavam que o objetivo era treinar os alunos para se saírem bem em outros programas, tais como a Prova Brasil, o PISA, o ENEM; 21% que era avaliar o processo de ensino dos professores; 23% que é para fiscalizar o trabalho dos professores; e apenas 12% acreditavam que a intenção era induzir a avaliação formativa dentro das escolas (MEDEIROS, 2013, p. 46).

Considerando que avaliar é um processo que pode ter como um de seus integrantes o levantamento sistemático de informações e de registros sobre a aprendizagem dos estudantes, mas não se esgota nele, Machado (2012, p. 71) enfatiza que “[...] a análise dos dados obtidos, a produção de juízos de valor sobre eles e a utilização dos resultados alcançados na proposição e direcionamento de ações são etapas indissociáveis do ato de avaliar".

Em consonância com a lente apresentada anteriormente, a investigação realizada por Nogueira (2015) analisa a concepção do SEAPE – Sistema Estadual de Avaliação da Aprendizagem Escolar do Acre. A partir de seu planejamento, identifica seus princípios, concepções, ajustes, indicadores de desempenho e motivações que contribuíram para que a avaliação externa própria fosse definida e colocada na agenda da política local.

Para o autor, a investigação apresenta aspectos referentes ao SEAPE com perspectiva de avaliação diagnóstica do sistema público de ensino em âmbito estadual e municipal, composto por dois exames de proficiência: Língua Portuguesa e Matemática. Esses exames são aplicados anualmente de forma censitária, abrangendo quatro séries da Educação Básica: 3º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio.

Entretanto, a pesquisa apresenta, também, possibilidades ao Estado de exercer sua *regulação* no sentido de ser utilizada como "[...] uma estratégia de monitoramento das políticas públicas empreendidas que carrega em si os propósitos e as intencionalidades sustentadas pelo Estado" (NOGUEIRA, 2015, p. 30). Assim, o SEAPE contribui para a gestão focada em resultados, no contexto do sistema público de ensino acreano. Nessa perspectiva, percebe-se que "[...] as avaliações estaduais em curso têm adotado, paulatinamente, uma dinâmica de aprofundamento de mecanismos de regulação dos sistemas educativos e de ampliação da extensão de suas consequências" (MACHADO, 2020, p. 207).

A pesquisa traz, também, apontamentos de empobrecimento do currículo, tendo em vista a prática do ensino condicionado ao *treino para os testes*. Para Klein e Fontanive (1995, p. 5), "[...] não se pode perder de vista que, ainda que a avaliação deva refletir o que é ensinado nas escolas, ele deve também indicar caminhos de renovação da prática escolar, não se restringindo, portanto, ao que se costuma definir como currículo mínimo".

As evidências apontam para uma necessidade de o Estado explorar, de forma mais efetiva, o potencial pedagógico da avaliação externa, a fim de garantir o ensino com foco na aprendizagem, e não somente nos resultados (NOGUEIRA, 2015). Nesse sentido, Vianna (2003b) afirma que os resultados das avaliações não devem ser entendidos como informações que proporcionam momentos de conflito. Devem ser considerados na perspectiva de sua utilização, tendo em vista o trabalho pedagógico, visando à melhoria da qualidade de ensino. Ainda, o autor afirma:

> [...] as questões relacionadas a emprego nem sempre adequado dos instrumentos de medida em avaliação educacional devem ser dimensionadas a fim de que os resultados façam sentido e permitam a orientação das atividades docentes; assim, é importante que se aprofundem estudos ligados à avaliação de processo com o uso de instrumentos referenciados a critério, como peça fundamental das atividades de aprendizagem em sala de aula (VIANNA, 2003b, p. 4).

No entanto, Brooke e Cunha (2011, p. 19) destacam que "[...] o desenho do instrumento é definido pelo tipo de informação que se precisa produzir de forma que, grosso modo, o uso da informação já é dado pela natureza e pelo propósito do instrumento". Os autores evidenciam a validade de seu caráter amostral na busca por informações de características pedagógicas. Contudo, afirmam que a avaliação utilizada como instrumento classificatório precisa ser aplicada a todos os estudantes, a fim de retratar uma medida fidedigna da aprendizagem de cada um. Nesse sentido, reforça-se o interesse na investigação de eventuais efeitos dessas avaliações enquanto subsídios pedagógico e formativo para agentes escolares e gestores educacionais (SILVA; CARVALHO, 2014).

A pesquisa desenvolvida por Sousa (2015) refere-se a aspectos de avaliação diagnóstica a respeito da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP). Reflete sobre a avaliação aplicada duas vezes ao ano a estudantes a partir do 2º ano e das Séries Finais do Ensino Fundamental e todo o Ensino Médio, contemplando as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. O propósito é identificar o nível de aprendizagem dos estudantes matriculados nas escolas estaduais paulistas para auxiliar no desenvolvimento de ações a partir de informações promovidas pela referida avaliação.

Os resultados da AAP são analisados em reuniões de momentos coletivos por meio da Aula de Trabalho Professor Coordenador (ATPC), com o coordenador de cada unidade escolar e com todos os professores da escola, de todas as disciplinas, não somente Língua Portuguesa e Matemática. O processo de correção acontece de forma simultânea, no qual os professores corrigem as provas por meio de gabaritos prontos enviados pela Secretaria.

Segundo as orientações da Secretaria de Estado de Educação de São Paulo – SEE/SP, a AAP possibilita ao professor realizar um diagnóstico de cada turma e de cada aluno, de forma a planejar estratégias, reorganizar seu plano de ação, mobilizar procedimentos, atitudes e conceitos para atividades em sala de aula, com o desenlace de reverter desempenhos insatisfatórios dos alunos, inclusive em processos de recuperação.

Nessa mesma perspectiva de avaliação diagnóstica, o Saerjinho – Avaliação diagnóstica bimestral, apontada na pesquisa de Côrtes (2013), acontece nos três primeiros bimestres do ano letivo e compõe o SAERJ[16] com o intuito de acompanhar a evolução dos processos de ensino e de aprendizagem e fortalecer a prática docente. A Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC) propõe intervenções, tanto de reforço na aprendizagem como de capacitação para os docentes. A partir do diagnóstico, acontecem reuniões para discussão e estudos, marcadas pela troca de conhecimentos e de ideias, bem como para a resolução das questões propostas na avaliação aplicada.

Entretanto, essa pesquisa aponta para outros aspectos relevantes. A partir das proposições da política do Saerjinho, estão previstas algumas *consequências*[17] para os agentes escolares, tendo em vista sua adesão e participação. As escolas que atingem suas metas previstas poderão oportunizar, aos seus profissionais, o direito a concorrer a vagas no curso de Mestrado oferecido pela UFJF, e à Remuneração Variável (RV). Esses profissionais a que se refere a resolução própria instituída, devem ser lotados na unidade escolar, em funções diversas: Diretor Geral, Diretor Adjunto, Coordenador Pedagógico, Professor Regente, e demais servidores efetivos do quadro da Secretaria. A escola ainda deverá: "[...] I - cumprir 100% (cem por cento) do currículo mínimo quando de sua regulamentação; II - participar de todas as avaliações internas e externas" (CÔRTES, 2013, p. 44). Em muitos municípios, o resultado dos alunos nas avaliações é utilizado como moeda de troca nas questões salariais, fato que acaba direcionando a ação pedagógica para a realização de treinamentos para as provas, com maior ênfase que o próprio planejamento do trabalho com os conteúdos do currículo.

De acordo com Bonamino e Sousa (2012), as avaliações externas da Educação Básica no país podem ser estruturadas conforme a utilização de seus resultados, como de primeira, segunda ou terceira geração. As duas últimas são associadas à introdução de políticas de responsabilização baseadas em consequências simbólicas e materiais, com o propósito de criar incentivos para que os professores *se empenhem* na aprendizagem dos alunos, e se articulam, respectivamente, às políticas de responsabilização fraca[18] e forte[19]. As autoras afirmam que, "[...] ao tempo em que se sucedem, essas gerações coexistem no âmbito das redes de ensino: daí a necessidade de se tomar tal classificação como um recurso analítico" (BONAMINO; SOUSA, 2012, p. 374).

---

[16] Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro.
[17] Políticas de *consequências*, segundo a concepção de Bonamino e Sousa (2012).
[18] Política de responsabilização fraca, com divulgação pública dos resultados e muitas vezes apresentadas em *rankings* (BONAMINO; SOUSA, 2012).
[19] Políticas de responsabilização forte incluem mecanismos de remuneração de acordo com os resultados apresentados (BONAMINO; SOUSA, 2012).

Um exemplo de política de avaliação de primeira geração é estabelecido pelo SAEB, com a função de propiciar diagnóstico da qualidade da educação oferecida no Brasil a partir de uma amostra representativa de redes de ensino e suas respectivas escolas, o que inviabiliza consequências diretas, como a *responsabilização* de escolas e de seus agentes institucionais (BONAMINO; SOUSA, 2012).

As políticas de segunda e terceira gerações envolvem a publicidade dos resultados dos testes por rede de ensino ou por escolas, e em geral agregam a noção de *responsabilidade* à perspectiva diagnóstica. Destaca-se, ainda, que uma possível ação na perspectiva de terceira geração implica algum tipo de *consequência* material ou prêmios atrelados ao desempenho dos estudantes, contemplando recompensas ou sanções em decorrência dos resultados de alunos e escolas, em geral estabelecidas em normas ou resoluções próprias.

Côrtes (2013) aponta que os professores recebem bolsa-auxílio para participar de cursos de formação e têm a prerrogativa de ser alocados em turmas das séries para a qual realizam o curso, como por exemplo: os professores que realizaram o curso respectivo ao 5º ano do Ensino Fundamental, no momento da distribuição das turmas, que acontece a cada ano, poderão ministrar aulas nessas séries. Essa ação "[...] valoriza o profissional que busca aprimorar seus conhecimentos e se preparar melhor para esses novos tempos da educação" (CÔRTES, 2013, p. 45). Em relação às políticas públicas de incentivos salariais utilizadas por alguns Estados brasileiros, a bonificação por desempenho se estabelece como *consequência*.

Logo, percebe-se a existência de inúmeras críticas a essas políticas estaduais que trazem iniciativas de *responsabilização* para professores e gestores escolares[20], tendo em vista que podem provocar *consequências* significativas (BONAMINO; SOUSA, 2012). Em consonância, Vianna (2003b) enfatiza a necessidade de evitar a implantação de parâmetros valorativos, tendo em vista classificação, bônus, vantagens ou premiações, tanto para professores quanto para alunos. Isso pode incorrer no risco de caracterizar os sistemas de avaliação em duas categorias, com destaque para *melhores ou piores*, de acordo com seus resultados.

Conforme cita Vianna (2003a, p. 32), a *consequência* que a sistemática das avaliações exerce nos sistemas de ensino "[...] está relacionada a novas formas de pensar e agir", no sentido de promover o crescimento da pessoa como ser humano e membro da sua sociedade,

---

[20] De acordo com Libâneo (2008), os gestores escolares assumem as funções de direção e coordenação com intuito de dirigir e coordenar a instituição escolar.

considerando que “[...] a validade consequencial não se refere a distinções, prêmios e/ou bônus, e muito menos a *rankings* e menos ainda a comparações”.

Brooke e Cunha (2011) ponderam uma classificação em relação aos usos dos resultados das avaliações como instrumento da gestão educacional nos Estados e municípios, relacionando-os a essas *consequências*. Os autores apontam que, em geral, esses usos são baseados nos resultados apresentados pela escola, em sua totalidade, propondo metas e regimes que refletem alguns impactos entre os envolvidos, como a *transferência branca*, a competição entre escolas e professores, a assiduidade dos professores, entre outros.

Os estudos de Ferreira (2019), Marques (2017) e Costa (2019) referem-se à mesma avaliação externa, o Sistema Mineiro de Avaliação e Equidade da Educação Básica (SIMAVE) e ao no Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação (PROEB), mas sob diferentes aspectos entre si, de acordo com a intencionalidade de cada pesquisador. De caráter censitário, essa avaliação abrange todas as escolas da rede pública, estaduais e municipais, e sua função é avaliar o desempenho dos estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio, tanto em Língua Portuguesa quanto em Matemática. Essa avaliação enfatiza a elaboração de estratégias para a melhoria da qualidade de ensino a partir da leitura e da interpretação dos resultados realizadas pelos atores do processo educativo.

O estudo de Ferreira (2019) evidencia um caso de gestão que envolve discussões sobre os resultados apresentados por estudantes do 3º ano do Ensino Médio no PROEB e análises em trabalhos de intervenção pelos professores como estratégias educacionais na escola. A pesquisa aponta fragilidades no que concerne ao baixo desempenho dos estudantes, evidenciando a não utilização e a apropriação de seus resultados enquanto instrumento de apoio pedagógico e orientação curricular.

Em consonância a essa lente, a pesquisa de Costa (2019) explora aspectos referentes à análise dos resultados apresentados por estudantes de uma turma de 3º ano do Ensino Médio, na qual buscava investigar de que forma as práticas docentes dos professores de Matemática têm influenciado no baixo desempenho dos estudantes. A pesquisa traz um estudo analítico de comparação e de progressão na aprendizagem a partir do desempenho apresentado pelos estudantes do 9º do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio. Na mesma perspectiva, Marques (2017) propôs uma análise considerando as ações gestoras como possibilidade de benefícios junto aos docentes, destacando que as informações apresentadas a partir dos resultados das avaliações externas alinhadas às práticas pedagógicas tornam-se relevantes para propor mudanças no processo de ensino, a fim de contribuir para a melhoria na aprendizagem dos estudantes.

A expectativa de Costa (2019, p. 50) consiste em que, a partir "[...] da compreensão das práticas docentes em geral e em particular da conduta do professor de Matemática na relação com este fenômeno", seja possível alcançar *feedbacks*, ao considerar a construção e a implementação de um plano de ação referenciado nas indicadas atuações docentes, associado a um subplano, de modo a incentivar a motivação dos estudantes. Esses planos e subplanos devem abordar tanto os conhecimentos matemáticos em si quanto as perspectivas de mercado de trabalho.

Costa (2019) aponta, ainda, que as informações apresentadas nessa pesquisa representam aspectos de um recorte da situação negativa da aprendizagem Matemática aos níveis Estadual e Nacional a partir dos resultados da avaliação externa. Nesse sentido, Vianna (2003a, p. 43), enfatiza que "[...] as avaliações apontam problemas, mas não os solucionam; outros caminhos deverão ser perseguidos". No entanto, considera ser pertinente sua utilização enquanto ferramenta diagnóstica da situação educacional, mesmo tendo em conta que ela não explicita todo o processo de ensino. A esse respeito, Vianna (2003a, p. 30, grifo do autor) destaca:

> [...] O *insucesso em avaliações* pode resultar de numerosos fatores (sociais, econômicos e até mesmo culturais, como no caso bem conhecido recentemente de escolas na Inglaterra, após a chamada era Thatcher) e não, necessariamente, de razões pedagógicas associadas à provável ineficiência do magistério.

Nessa perspectiva, a pesquisa de Costa (2019) não tem a intenção de atribuir, aos atores escolares, os resultados pouco favoráveis apresentados pelos estudantes, mas estabelecer sua responsabilidade perante a sociedade e suscitar reflexões sobre suas práticas. Para isso, enfatiza a necessidade de análise "[...] por parte dos professores e técnicos especializados nas várias áreas curriculares, a fim de que sejam incorporados ao planejamento escolar e contribuam para o processo educacional" (VIANNA, 2003a, p. 26).

Sob o viés da gestão escolar, diante de um panorama de análise de sua relação com a avaliação externa e de seu uso em uma perspectiva crítica, Marques (2017) aborda as possíveis contribuições das ações da equipe gestora da escola para o processo de aprendizagem dos estudantes. Também se propõe a analisar as práticas e as estratégias de apropriação dos resultados do PROEB, consideradas pelo autor como instrumentos para análise do trabalho desenvolvido e possibilidades de redimensionamento de ações, tanto pedagógicas como administrativas.

Nesse ponto de vista, para além da divulgação dos resultados, a partir do momento em que se passa a ter informações sobre a aprendizagem dos estudantes, é relevante voltar-se para a escola, para todos os envolvidos no processo escolar, de modo a definir diretrizes sobre como utilizar esses resultados com a finalidade de produtividade e melhoria do processo de uma educação de qualidade. Assim, Machado (2012) afirma que

> [...] efetivar as funções da gestão escolar, de direção e coordenação, significa evidenciar elementos da realidade escolar e socializá-los com os profissionais da escola para edificar o trabalho coletivo na direção da concretização de uma escola pública democrática que, além de ser para todos, também ensina a todos (MACHADO, 2012, p. 79).

Ferreira (2019, p. 101) enfatiza, em sua pesquisa, a importância "[...] do papel do gestor ao conduzir sua equipe na apropriação dos resultados das avaliações externas como premissa para avançar na qualidade da educação". O autor aponta que, com intuito de incentivar os profissionais da educação às capacitações, a Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais (SEE/MG) disponibiliza cursos de formação continuada nas modalidades presencial e a distância, e estabelece carga horária específica para atividades extraclasses para promover a interdisciplinaridade. A SEE/MG entende como uma das possibilidades para o baixo desempenho dos estudantes "[...] a ausência do trabalho interdisciplinar significativo de forma a chamar todos os profissionais à responsabilização pelos resultados" (FERREIRA, 2019, p. 105). No entanto, para além das situações que influenciam nos resultados das avaliações externas, há que se considerar outros elementos, tendo em vista

> [...] a rotatividade de professores e/ou alunos, mudanças na gestão, ausência de clareza, por parte dos profissionais, do projeto pedagógico e das metas da escola, insistência no desenvolvimento de metodologias repetitivas, conteúdos voltados para o aluno ideal e não real, alterações drásticas na organização do cotidiano escolar (MACHADO, 2012, p. 790).

Ainda, a fim de viabilizar reflexões e mudanças na busca por avanços na qualidade dos serviços educacionais, é necessário considerar, sobretudo, a responsabilidade dos gestores dos sistemas e das redes de ensino, pois "[...] integra suas competências prover as condições de funcionamento das escolas, seja no que diz respeito à infraestrutura, seja no que se refere às condições para o trabalho de docentes e gestores escolares" (SILVA; CARVALHO, 2014, p. 15).

Na mesma tendência de pesquisa, a respeito de gestão escolar, o SIMAVE concebe-se inclinado à avaliação da alfabetização, segundo o estudo realizado por Ferreira (2012). A avaliação aponta benefícios nos processos de ensino e de aprendizagem a partir da apropriação dos resultados das avaliações externas de duas situações exitosas de gestão escolar, que se configuram por bons resultados. Os diretores dos estabelecimentos de ensino participam de formação continuada com objetivo de auxiliá-los na atuação como gerenciadores de estudos junto aos professores, na busca pelo desenvolvimento de práticas mais eficazes de apropriação dos resultados do PROALFA e na proposição de ações de intervenções pedagógicas necessárias. Tendo em vista as ações gestoras no processo de intepretação dos resultados, Kailer (2015) enfatiza que:

> [...] a organização para interpretação dos resultados das avaliações externas e o envolvimento da comunidade escolar neste processo, precisa ser organizado pela equipe gestora. Assim, podem empreender no cotidiano da escola, mudanças significativas quando refletem a sua realidade a partir de tais resultados (KAILER, 2015, p. 5501).

A pesquisa de Ferreira (2012) aponta para a importância de discussões e análises dos resultados das avaliações, tendo em vista uma ação coletiva da escola, ao considerar o aspecto de instrumento diagnóstico de reflexão e planejamento, em relação aos docentes, com o objetivo de melhorar o desempenho dos estudantes, aqui voltado ao processo de alfabetização. Enfatiza, ainda, que

> [...] A análise dos resultados pode levar à construção de alternativas na solução das dificuldades detectadas tanto no trabalho realizado pelo professor, quanto no que diz respeito às capacidades e habilidades desenvolvidas pelos alunos no processo de aprendizagem (FERREIRA, 2012, p. 14).

Já Gilson (2012) traz o reflexo das pesquisas mapeadas de acordo com o objetivo de analisar a função do gestor escolar, mais especificamente avaliar a atuação dos diretores de duas escolas, de acordo com planejamento, organização e monitoramento, voltada à implementação e à condução do Saerjinho, junto aos professores de escolas pesquisadas.

Na perspectiva de gestão escolar, a pesquisa traz algumas dificuldades apresentadas pelos gestores a partir de sua implementação, que vão desde a falta de comunicação sobre os reais objetivos do programa; a falta de reuniões com toda a equipe (professores, pais, alunos e funcionários); a resistência e desconfiança de professores, ao entenderem que o programa possui, também, a função de avaliá-los; bem como a adequação do planejamento ao Currículo Mínimo determinado pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ). Para a maioria dos profissionais das escolas participantes da pesquisa, isso reflete na perda de autonomia pelos docentes.

Além de todas essas dificuldades apontadas, outro problema enfrentado decorre da obrigatoriedade, a partir de critérios previstos em resolução própria para o Programa, de registro do desempenho dos estudantes, como nota ou peso no diário de classe dos professores ou em outros instrumentos indicados pela Secretaria. Essa ação, para a maioria dos professores, não era compreendida como pedagógica, mas impositiva e estritamente burocrática, sem levar em consideração diversos aspectos de cada realidade escolar. A esse respeito, Bonamino e Sousa (2012, p. 384) enfatizam a preocupação de haver interpretação distorcida do significado da avaliação externa, que em geral, "[...] decorre do fato de os currículos escolares possuírem múltiplos objetivos, ao passo que as medidas de resultados utilizadas pelas avaliações em larga escala tipicamente visam a objetivos cognitivos relacionados à leitura e à matemática".

No entanto, mesmo considerando que o Saerjinho é um programa de avaliação com caráter diagnóstico, reflexivo e inclusivo de desempenho escolar que compõe o SAERJ, conforme cita Côrtes (2013), ele conta com a política de bonificação entre professores e estudantes. A ênfase é atribuída ao trabalho coletivo e colaborativo, de conscientização de sua importância, contribuindo para efeitos positivos em todo o seu processo de aplicação.

Mais próximo do foco da nossa pesquisa, Andrade (2016) investigou os fatores que poderiam influenciar nas correspondências que professoras de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental

> [...] submetidos ao SARESP[21] (7º e 9º anos) estabelecem entre, de um lado, possíveis aprendizagens dos seus alunos em interação com as condições didáticas dispostas pelas próprias professoras e, de outro lado, as aprendizagens preconizadas em documentos oficiais referentes ao componente de Matemática, como, por exemplo, as Matrizes de Referência, o Caderno do Professor[22] e o Currículo de São Paulo (ANDRADE, 2016, p. 16).

Segundo Andrade (2016), as expectativas de aprendizagem eram apresentadas pelas professoras atuantes na escola em seus planejamentos de aula, denominados Situações de Aprendizagem (SA), a partir dos relatos das aprendizagens previstas, das práticas e estratégias de ensino, das avaliações adotadas e dos registros de aprendizagem obtidos em aulas já ministradas. Em seguida, eram comparadas ou estimadas correspondências com os documentos norteadores do SARESP.

Tais documentos se referiam ao currículo do Estado de São Paulo, Matrizes de Referência para a Avaliação, Caderno do Professor e expectativas que compõem a Avaliação de Aprendizagem em Processo. Assim, eram realizadas discussões sobre possíveis lacunas

---

[21] Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.
[22] O Caderno do Professor consiste em um material didático disponibilizado para os professores, sendo constituinte do programa *São Paulo Faz Escola*. Esses cadernos organizados por série e por matérias, e indicam com clareza o conteúdo a ser ministrado aos alunos da rede pública estadual.

entre os dados das aprendizagens e as habilidades relacionadas nos documentos oficiais. Em consonância, Brooke e Cunha (2011) afirmam que:

> [...] o movimento em direção ao currículo básico expressa a conclusão de que, na ausência de um consenso compartilhado com os professores a respeito dos conteúdos curriculares e de um alinhamento entre os objetivos do ensino, o currículo da escola e as matrizes do sistema de avaliação, a contribuição deste para a melhoria da qualidade será seriamente prejudicada (BROOKE, CUNHA, 2011, p. 35).

Ao encontro com essa fala, abordamos a tese de Salerno (2017), ao retratar a reformulação de uma política voltada à Educação, em um processo de configuração da agenda e de [re]formulação da Política de Avaliação Institucional Participativa por meio do Sistema Estadual de Avaliação Participativa (SEAP/RS), na Secretaria de Estado da Educação (SEDUC/RS), no período de 2011 a 2014. Concebido para gerar uma política crítica, trouxe uma proposta para que todas as instituições que compunham a rede estadual de ensino, em um processo coletivo, pudessem avaliar seu cotidiano a partir de várias dimensões e indicadores. Portanto, "[...] a proposta da autoavaliação permitiria que a instituição verificasse criticamente suas debilidades, fundamentalmente suas decisões e melhorasse a qualidade do ensino, sem que alguém de fora dissesse o que era preciso melhorar" (SALERNO, 2017, p. 61).

Com ênfase maior na escuta e participação efetiva na comunidade envolvida, o SEAP buscava situar a origem da Avaliação Institucional Participativa no Estado do Rio Grande do Sul (RS), sem a pretensão de esgotar o levantamento e/ou a discussão sobre sua pertinência, mas provocar crítica necessária ao modelo de análise apresentado. O sistema conta com uma política de plano de carreira para professores que participam desse processo, considerando um mecanismo de valorização da prática da avaliação participativa para o desenvolvimento profissional e institucional, de modo que os atores sociais sejam protagonistas do processo de ensino e as novas práticas sejam institucionalizadas e legitimadas.

Nesse sentido, Salerno (2017) afirma que, na implantação de uma política ou reformulações das políticas já existentes, a autoavaliação institucional participativa é uma ação eficaz para propor outras formas de pensar e analisá-las, tendo em vista seu uso pedagógico e político-administrativo. Considera primordiais as reformulações a partir da inclusão de melhorias e da insistência em sua prática de acordo com trabalhos traduzidos em formação do gestor, considerado responsável por colaborar, a partir de análises realizadas, com sugestões de alterações que qualificaram a política, e em geral têm peso significativo na fase de formulação dessas políticas.

Vianna (2003a) enfatiza a importância de as avaliações externas poderem ser traduzidas para além do desempenho escolar. O autor considera que

> [...] a sua utilização implica servir de forma positiva na definição de *novas políticas públicas*, de *projetos de implantação* e *modificação de currículos*, de *programas de formação continuada dos docentes* e, de maneira decisiva, na definição de elementos para a *tomada de decisões* que visem a provocar um *impacto*, ou seja, mudanças no pensar e no agir dos integrantes do sistema (VIANNA, 2003a, p. 26, grifos do autor).

A pesquisa realizada por Koetz (2011) descreve e analisa o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul (SAERS), em uma perspectiva histórica, no período de 1996 a 2009. Aponta que o Estado vem implantando avaliações externas nas escolas de sua rede de ensino, e que após alguns anos de pausas em sua aplicação, a avaliação institucional vem passando por reformulações. Elas são consideradas a partir de mudanças de governo, novas concepções e redirecionamentos, com intuito de reforçar as práticas políticas, atribuindo enfoque às políticas de avaliação externa com diferentes ênfases a cada edição. De acordo com as perspectivas que assumiram ao longo do processo de implantação, apresentam objetivos diversos, desde a análise do desempenho do Sistema Educacional em sua totalidade até o direcionamento para o diagnóstico das habilidades cognitivas na área de Leitura/Escrita e Matemática, entre outros.

A avaliação conta com escolas da rede pública estadual, urbanas e rurais, independentemente do número de alunos, bem como das redes municipais e particulares. Avalia as turmas da 2ª série/3º ano, 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental e as turmas do 1º ano do Ensino Médio. Contudo, apesar de possuir um caráter diagnóstico, em 2005 adotou um perfil de uso dos resultados da avaliação como instrumento para promover a premiação ou gratificação dos docentes, como meio de incentivo, assumindo a política de meritocracia. Para Brooke (2013 *apud* KAILER, 2015, p. 4),

> [...] Há uma variedade de políticas que dependem das informações e resultados a partir das avaliações, que não se restringem apenas aos aspectos de acompanhamento pedagógico, mas políticas que podem direcionar recursos físicos e financeiros para as instituições escolares, bem como incentivos financeiros aos professores por meio da bonificação, por exemplo (BROOKE, 2013 *apud* KAILER, 2015, p. 4).

Observa-se que as pesquisas, em geral, não têm seus objetos de estudo nas avaliações. Logo, o que predomina nos trabalhos e investigações consiste na análise dos efeitos dos usos de seus resultados por escolas, por secretarias de educação, por gestores e professores, e de que forma eles influenciam nos currículos e nas questões pedagógicas relacionadas à prática docente.

De modo particular, a leitura dos trabalhos identificados e a realização da análise dos dados revelaram contribuições e novas demandas investigativas, que podem ser realizadas acerca das avaliações externas, na medida em que evidenciam diferentes aspectos para um mesmo foco de pesquisa, sobretudo no campo da Educação Matemática. Referem-se aos tipos de questões a que são submetidos os estudantes, mais especificamente, considerando o desenvolvimento cognitivo que envolve as estruturas multiplicativas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

2.2 Breve Contextualização do Sistema de Avaliação Básica do Paraná

A expansão das avaliações externas no contexto nacional adentrou o sistema educacional do Paraná. Segundo Machado, Alavarse e Arcas (2015), o Estado apresenta iniciativa de avaliação externa própria desde 1995, mas sua constituição com as características atuais consolidou-se em meados dos anos 2000.

O Programa de Avaliação do Rendimento Escolar (AVA), implementado em 1995, era direcionado a estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio, correspondente às disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. Considerado a primeira experiência de avaliação em larga escala, tinha como objetivo obter informações sobre as habilidades, os conhecimentos e os hábitos dos estudantes. Contava com a participação das escolas estaduais, municipais e particulares das redes de ensino que aderissem ao Programa, de acordo com critérios estabelecidos para cada evento da avaliação. No entanto, teve duração até o ano de 2002, tendo em vista que "[...] sua continuidade já não se fazia necessária, uma vez que os resultados produzidos pelas avaliações eram muito próximos aos do SAEB" (KAILER, 2015, p. 5499).

Contudo, a constituição da avaliação com características atuais ocorreu por volta de 2012. Pesquisas de Moreira (2016) e Kailer (2015) destacam a implementação da avaliação externa em larga escala no Estado do Paraná por meio do Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná (SAEP).

Criado em 2012, o SAEP apresenta, como objetivo principal, disponibilizar informações relevantes quanto ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. De acordo com seu desempenho, o estudante descreve os conhecimentos desenvolvidos em Língua Portuguesa e Matemática. Segundo

Moreira (2016), no ano seguinte à sua implementação, houve a expansão da avaliação para o 6º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

O SAEP não possui caráter classificatório, pois, segundo Kailer (2015, p. 5500), "[...] não apresenta em sua estruturação a possibilidade de *ranqueamento* entre as escolas, uma vez que cada unidade escolar recebe uma senha que permite acesso ao sistema para analisar os resultados por escola e por aluno". Nessa perspectiva, considerando que a avaliação é um processo fundamental para a administração do ensino, apresenta três objetivos básicos:

> [...] a definição de subsídios para a formulação de políticas educacionais; o acompanhamento ao longo do tempo da qualidade da educação; a produção de informações capazes de desenvolver relações significativas entre as unidades escolares e órgãos centrais ou distritais de secretarias, bem como iniciativas dentro das escolas (SAEP, 2012 [s.p.]).

Assim, de acordo com seus delineamentos, essa avaliação não se caracteriza como objeto de classificação. De acordo com a Revista do Sistema de Avaliação (SAEP, 2018, p. 8) "[...] após um pequeno hiato, o SAEP retomou as atividades em 2017, com a proposta de monitorar e produzir diagnósticos precisos da rede estadual, que permitam identificar avanços e dificuldades de aprendizagem em suas escolas", estendendo sua aplicação ao ano seguinte, 2018, com o mesmo desenho de 2013. Vale ressaltar que, até então, somente as escolas da rede estadual de ensino participaram da avaliação.

Em 2019, de acordo com o *website* do Programa, o estado do Paraná, por meio da Secretaria de Educação e do Esporte SEED, com a intenção de solidificação do SAEP como política educacional introduziu avaliações de caráter diagnóstico realizada trimestralmente – Prova Paraná, aplicada a estudantes das zonas urbanas e rurais, matriculados nos 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e na 3ª série do Ensino Médio, envolvendo testes cognitivos de Língua Portuguesa e Matemática (PARANÁ, [s.d.]c).

A Prova Paraná também conta com a Avaliação de Fluência, que tem como objetivo verificar a fluência em leitura dos estudantes em fase de alfabetização e integra a 2ª edição da Prova Paraná, realizada no período de 11 a 14 de junho nas escolas estaduais e municipais que fizeram adesão. De acordo com o *website* da Prova Paraná (PARANÁ, [s.d.]c), os resultados dessa avaliação têm a função de possibilitar a elaboração de estratégias para melhorar os processos de ensino e de aprendizagem, desde as práticas em sala de aula até o planejamento por parte dos gestores das escolas e da Secretaria de Educação.

Assim, de acordo com os contornos das avaliações externas no Paraná, em 2019 inicia-se a Prova Paraná, foco desta pesquisa. Lançada pela gestão da SEED, no referido ano, foram realizadas três edições, uma por trimestre. Ainda, no fim de novembro, foi realizada a Prova Paraná Mais, avaliação externa de aplicação anual que compõe o Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná (SAEP).

A Prova Paraná é uma avaliação diagnóstica com objetivo de identificar as dificuldades apresentadas por cada um dos estudantes, apontando conhecimentos desenvolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem, nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, composta por questões objetivas de cada disciplina. Em 2020 e 2021 houve ampliação, tanto das disciplinas quanto das séries avaliadas no escopo dos testes, atingindo os 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, bem como todo o Ensino Médio da rede de ensino.

Dos 399 municípios que compõem o Estado, 398 aderiram à primeira ação de cooperação pedagógica proposta pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED), constituída por um instrumento de avaliação impresso para 5º e 6º anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Uma característica dessa avaliação é dispor de um aplicativo de celular para correção das provas, reduzindo o trabalho manual, com intuito de gerar relatórios para professores, gestores, escolas e secretarias municipais (PARANÁ, 2019a).

Com a intenção de promover articulação entre o profissional do NRE e a equipe de cada instituição de ensino, considerando que cada escola possui uma realidade própria, instituiu-se a Tutoria Pedagógica, que consiste em encontros periódicos realizados nos próprios estabelecimentos de ensino, entre equipes pedagógica e diretiva das instituições e técnicos dos NRE. O objetivo é contribuir para a gestão escolar e o desenvolvimento de ações pedagógicas por meio da qualificação e orientação dos diretores.

Essa avaliação é considerada uma ferramenta para o professor, equipe gestora da escola, Secretaria de Educação, a fim de que, a partir de evidências, elaborem ações que possam promover a melhoria da aprendizagem. Isso porque, de acordo com os resultados obtidos, Núcleos Regionais de Educação (NRE) e instituições de ensino podem elaborar Planos de Ação voltados à aprendizagem dos estudantes (PARANÁ, 2019a). Ainda, visando ao fortalecimento da prática pedagógica e com base no Referencial Curricular do Paraná e na Matriz de Referência da Prova Brasil, documentos que norteiam as avaliações do Sistema de Avaliação da Aprendizagem do Estado, a SEED apresenta o Guia de Apoio Pedagógico ao

Professor[23], destinado aos professores do 5º ano do Ensino Fundamental como possibilidade de trabalho nas redes municipais de ensino (PARANÁ, [s.d.]d).

As informações destacam-se ainda mais com a possibilidade de analisar cada turma, de acordo com suas especificidades. Atenta-se, aqui, para as informações que podem ser encontradas, a partir da Prova Paraná, como os descritores[24] com maior e menor número de acertos; estudantes que requerem maior atenção, conforme seu desempenho; e resultados individuais da turma e de cada aluno.

Entendendo a Prova Paraná como um instrumento de avaliação com objetivo de diagnosticar e elencar, tanto as dificuldades encontradas quanto as habilidades já apropriadas pelos estudantes, a SEED apresenta aos professores de sua rede de ensino, por meio do Caderno de Apoio Prova Paraná[25], disponibilizado no *website*, possibilidades de trabalho e mediação junto aos estudantes a partir de atividades que contemplem descritores e conteúdos encontrados no dia a dia da escola. Vale ressaltar que o referido caderno traz informações e orientação relevantes a respeito da elaboração e da constituição da Prova Paraná:

> [...] Assim como as avaliações internas, realizadas pelos próprios professores da escola, a avaliação externa em larga escala encontra no currículo o seu ponto de partida. As matrizes de referência, utilizadas nas avaliações externas, descrevem as habilidades básicas, consideradas essenciais para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes ao longo das etapas de escolaridade. Essas habilidades são selecionadas a partir do currículo de cada disciplina e organizadas para dar origem aos itens que compõem os testes. Isso significa que a matriz de referência não deve ser confundida com o currículo, mas ser elaborada tomando-o como referência (PARANÁ, 2020, p. 1).

Nessa perspectiva, segundo Klein e Ribeiro (1991, p. 33), “[...] não se pode perder de vista que, ainda que a avaliação deva refletir o que é ensinado nas escolas, ela deve também indicar caminhos de renovação da prática escolar, não se restringindo, portanto, ao que se costuma definir como ‘currículo mínimo’”.

Assim, considerando que a Prova Paraná possui caráter diagnóstico individual e contínuo, com uma proposta de pautar as ações pedagógicas em evidência sobre os processos de aprendizagem, diferencia-se da maioria das demais avaliações externas, as quais não

---

[23] Mais informações em: <https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2021-06/prova_parana_professor_matematica2_14062021.pdf>

[24] Os descritores são conhecimentos desenvolvidos e aprendidos, que podem ser mensurados através de questões diretas ou situações-problema resolvidas por cada aluno participante (PARANÁ, 2019).

[25] O Caderno de Apoio Prova Paraná contém orientações e pode ser acessado pelo endereço eletrônico: <https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2020-08/caderno_prof_mat_fund_revisado.pdf>

possuem mecanismos de acompanhamento individual dos estudantes. Assim, busca-se compreender como se apresentam as questões que a compõem.

Uma vez compreendida a Prova Paraná no que se refere aos aspectos pedagógicos, ou, de maneira mais direta, às suas intenções, interessa-nos analisar se seus resultados exprimem o nível de aprendizagem alcançado pelos estudantes, no que se refere ao Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, e se os conhecimentos mensurados contemplam todos os tipos de situações-problema referentes a esse campo, ou se abordam apenas os conteúdos de um currículo mínimo. Nesse sentido, aprofundamos os estudos acerca da teoria dos Campos Conceituais – TCC, de Gérard Vergnaud, com ênfase no Campo Conceitual Multiplicativo. A síntese desses estudos é apresentada no próximo capítulo.

3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Considerando que a TCC busca compreender como o aluno se apropria de conceitos e fornece elementos consistentes para a análise de situações-problema, apresentamos, neste capítulo, uma breve discussão sobre os Campos Conceituais Multiplicativos. As reflexões aqui realizadas serviram de base para discussões nos Capítulos IV e V, a respeito das relações, dos eixos e das classes das situações multiplicativas presentes na Prova Paraná e no Livro Didático.

3.1 Contextualização Teórica da Investigação

A TCC foi elaborada no início dos anos 1980 pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud. Ela apresenta um quadro de elementos que fazem parte do desenvolvimento intelectual do indivíduo, as interações das estruturas cognitivas prévias com a estrutura conceitual do conhecimento através de situações-problema, tais como a linguagem, o raciocínio, a percepção e a memória (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2012). Segundo seu idealizador, pode-se afirmar que

> [...] A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem das ciências e da técnica (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Embora não seja uma teoria didática em si, ela fornece uma estrutura para a aprendizagem, ao explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra. Nesse sentido, tem apresentado significativas contribuições para a Educação Matemática contemporânea, pois há muito suas ideias têm ajudado pesquisadores e professores a entender a formação dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, a partir de observações de suas estratégias de ação na resolução de diferentes situações de um mesmo conceito (MAGINA, 2005).

Segundo Vergnaud (2003), os conceitos só adquirem sentido em situações com crescente complexidade. Assim, para a construção de um determinado conceito, é necessário levar em consideração um conjunto de elementos que irão formar um campo conceitual, definido por Vergnaud (1986) como uma terna – (S, I, R), na qual S representa um conjunto de situações que dará sentido ao conceito, de forma progressiva; I representa o conjunto de invariantes, considerados conhecimentos implícitos do sujeito em determinadas situações (objetos, propriedades, relações), associados aos conceitos; e R diz respeito ao conjunto das representações simbólicas que são utilizadas para representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Para Vergnaud (2009), um conceito não se reduz à sua definição, uma vez que não vale para uma única situação, mas para uma heterogeneidade de situações. Assim, um conceito é constituído principalmente nas situações que lhe dão sentido.

Essas situações proporcionam uma *ponte* cognitiva entre saberes do cotidiano (conhecimentos prévios) e saberes científicos, formando uma rede conceitual do conhecimento de cada sujeito, ou seja, os campos conceituais. Eles podem ser definidos como "[...] um conjunto de problemas ou situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais encontram em estreita conexão uns com os outros" (MAGINA; MERLINI; SANTANA, 2013, p. 5981).

De acordo com as autoras, o indivíduo aprende quando consegue relacionar a nova informação aos conceitos que já estão *guardados* em sua estrutura cognitiva. Esse conhecimento anterior resultará em um *ponto de ancoragem*, em que as novas informações irão encontrar um modo de se integrar àquilo que o indivíduo já conhece. Para Vergnaud (1993), nenhuma aprendizagem ocorre com o sujeito isolado de seu contexto social. Portanto, o conceito não fará sentido se for alheio a situações de vivência dos estudantes, pois ele está ancorado pelas diferentes situações que formarão o campo conceitual.

Nesse sentido, o conhecimento constitui-se e se desenvolve no tempo em interação adaptativa do indivíduo com as situações que vivencia. Nessa perspectiva, o processo de aprendizagem não é espontâneo, mas provocado por situações nas quais o aluno se apropria do conhecimento a partir de sua interação. Contudo, "[...] os conceitos têm um domínio de validade restrito, o qual varia de acordo com a experiência e com o desenvolvimento cognitivo do sujeito" (MAGINA; MERLINI; SANTANA, 2013, p. 5981).

Os estudantes, ao se depararem com novas situações, utilizam seu conhecimento prévio para buscar resolvê-las, e quando não há êxito na atividade, tais conhecimentos são deixados de lado, a fim de propiciar a construção de novos conceitos, promovendo a progressividade, e não somente a linearidade da aprendizagem significativa. Para Vergnaud (2013, p. 133), "[...] novos conhecimentos são constituídos, tanto com base no conhecimento prévio e, às vezes, em oposição a eles". Nessa perspectiva, "[...] para o aluno construir um conceito é preciso que ele experimente diversas situações relacionadas ao referido campo conceitual", considerando que o desenvolvimento se manifesta por continuidades e rupturas, evidenciado a adaptação, "[...] sendo necessário um longo período escolar, passando por momentos de equilíbrios e desequilíbrios, até que seus conhecimentos fiquem acomodados e aconteça a aprendizagem" (NOGUEIRA; REZENDE; ZANQUETTA, 2016, p. 8).

Corroborando com as ideias de Vergnaud (2013), Gitirana *et al.* (2014, p. 9) apontam que "[...] o conhecimento conceitual emerge a partir da resolução de situações de caráter teórico ou prático", e que os estudantes, ao se depararem com novas situações, utilizam os conhecimentos já formalizados em situações anteriores. Nesse sentido, é necessário que sejam propostas aos estudantes diferentes situações, pois um conceito não emerge de um único tipo de situação, tampouco uma simples situação envolve um único conceito. Em consonância, Nogueira e Rezende (2014, p. 413) afirmam que "[...] as situações são a porta de entrada para a construção do conceito". Assim, a conceitualização torna-se essencial para o desenvolvimento cognitivo, pois é através dos aspectos conceituais dos esquemas[26] e da análise conceitual das situações que os estudantes desenvolvem outros esquemas.

Vergnaud (2009) destaca dois campos conceituais especialmente importantes, por alicerçarem os demais conceitos matemáticos: o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, sendo este último nosso objeto de estudo, uma vez que nossas análises se encontram nas operações pertencentes a esse campo.

3.2 O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O Campo Conceitual Multiplicativo ou estruturas multiplicativas compreende "[...] o conjunto das situações que exige uma multiplicação, uma divisão, ou uma combinação destas duas operações" (VERGNAUD, 1996, p. 167). Para os pesquisadores, o conceito de situação não tem aqui o sentido de situação didática, mas o de tarefa, e complementa que "[...] a ideia é que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades próprias é importante conhecer" (VERGNAUD, 1996, p. 167).

Ao analisar as situações de estruturas multiplicativas, Vergnaud (2009) as classifica de acordo com suas características e complexidade, agrupando-as em isomorfismo de medidas e produto de medidas, podendo ser constituídas de relações quaternárias e relações ternárias, respectivamente.

Denominada por Vergnaud (2009) de *isomorfismo de medidas,* a relação quaternária apresenta uma dupla relação entre duas ou mais grandezas de naturezas distintas, tomadas

[26] Segundo Vergnaud (1996, p. 180), "[...] um esquema é uma totalidade organizada, que permite gerar uma classe de condutas diferentes, em função das características particulares de cada uma das situações da classe à qual se dirige".

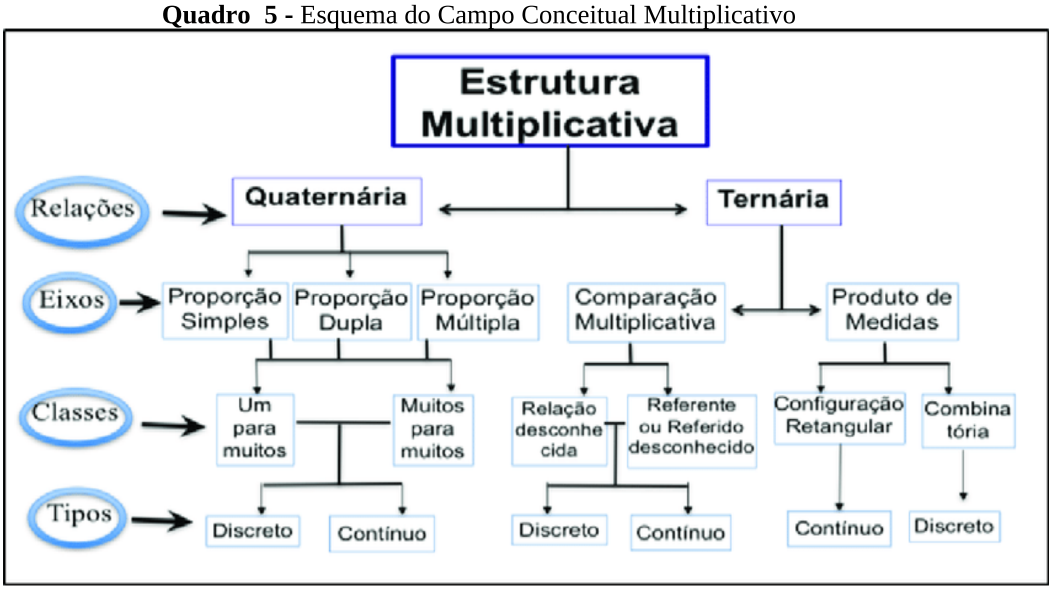
duas a duas, considerada pelo autor como a mais importante categoria de relações multiplicativas. Ela é "[...] utilizada para introduzir a multiplicação no ensino básico e que forma o tecido da grande maioria dos problemas multiplicativos" (VERGNAUD, 2009, p. 239). De acordo com esse mesmo autor, "[...] as relações de base mais simples não são ternárias, mas quaternárias, porque os problemas mais simples de multiplicação e de divisão implicam proporções simples de duas variáveis, uma relativamente à outra" (VERGNAUD, 1996, p. 174). A relação quaternária é composta por três eixos: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. Cada um desses eixos divide-se em duas classes de situações: a primeira de uma correspondência *um para muitos;* e a segunda, *muitos para muitos*, e cada classe pode ser trabalhada com dois tipos de quantidades, contínua e discreta (MAGINA *et al*. 2010).

A segunda grande forma de relação multiplicativa, a relação ternária, apresenta uma "[...] diferença de status entre os elementos ligados e a relação elemento, entre os estados e a transformação" (VERNAUD, 2009, p. 72) e pode ser definida como Produto de Medidas. Ela envolve três quantidades, "[...] das quais, uma é o produto das outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional" (VERNAUD, 2009, p. 253), organizada em dois eixos: *comparação multiplicativa* e *produto de medidas*. O eixo Comparação Multiplicativa constitui-se de classes, definidas como *referido* ou *referente desconhecido,* ou ainda, *relação desconhecida*. As classes que compõem o eixo Produto de Medidas compreendem a *configuração retangular* e a *combinatória*.

Nessa perspectiva, para melhor compreensão do Campo Conceitual Multiplicativo, Magina, Santos e Merlini (2012) agruparam os elementos das categorias anteriormente citadas a partir de uma releitura que sintetiza as ideias desse campo conceitual propostas por Vergnaud (2009). De acordo com Vergnaud (1996, p. 171), "[...] os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais eles se confrontam", considerando duas ideias principais: a ideia de variedade e a de história. Para a primeira ideia, o autor afirma que, em um campo conceitual, existe uma variedade de situações, e "[...] as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis". A ideia de história "[...] orienta para a procura de situações funcionais" (VERGNAUD, 1996, p. 171), considerando que os conhecimentos dos alunos são formados na medida em que eles se deparam com tais situações e as dominam progressivamente.

Para o autor, as situações podem ser remetidas para uma combinação de relações, e considerando essa afirmação, "[...] é necessário abordar problemas mais complexos, nos quais várias relações e várias questões estão em jogo" (VERGNAUD, 2009, p. 269). No entanto, considerando que o número de possibilidades aumenta exponencialmente em relação ao número de relações elementares envolvidas, o autor afirma não ser possível elaborar uma classificação completa de problemas complexos. Ainda, as situações podem ser subdivididas em subclasses, “[...] em função dos valores numéricos utilizados e do domínio de experiência ao qual se faz referência” (VERGNAUD, 1996, p. 173), pois a compreensão dos estudantes também é influenciada pela sua idade/faixa etária. Contudo, a fim de evidenciar os diferentes conjuntos de situações desse campo, bem como contribuir com o trabalho dos professores da Educação Básica, a partir dessas categorias, as situações de Estrutura Multiplicativa são classificadas de acordo com suas relações, eixos, classes e tipos, conforme a Figura 1.

Quadro 5 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Santos (2015, p. 105).

Embora o esquema apresentado na Figura 2 seja uma sistematização das situações de estruturas multiplicativas propostas por Vergnaud, para nossa investigação, de acordo com os problemas do Campo Multiplicativo, adotou-se a classificação de Gitirana *et al.* (2014), em função do detalhamento e da organização das situações-problema e do grau de complexidade cognitiva exigido para cada resolução, classificados a seguir em cinco eixos.

- ✓ Comparação Multiplicativa: referente desconhecido; referido desconhecido; relação desconhecida;
- ✓ Proporção simples: Multiplicação – um para muitos; Partição ou Distribuição; Cota; Quarta proporcional;
- ✓ Produto Cartesiano: Combinação; Área;
- ✓ Função Bilinear; e
- ✓ Proporcionalidade múltipla.

Vale ressaltar que, conforme a Figura 2, a nomenclatura referente aos eixos Proporção Dupla, Proporção Múltipla e Produto de Medidas, para Gitirana e colaboradoras (2014), é considerada respectivamente como Função Bilinear, Proporcionalidade Múltipla e Produto Cartesiano. Ainda, a classe *configuração retangular* é identificada como *contínua x contínua – área*; e por fim, a classe *combinatória* é identificada como *combinação*.

Essas autoras apresentam uma classificação a partir de um teste de sondagem realizado com 504 estudantes da rede pública de São Paulo, que cursavam do 2º ao 9º ano do Ensino Fundamental, para os problemas que dão significado às operações de multiplicação e de divisão. Foram considerados o nível de dificuldade e as diferentes formas de raciocínio exigidas para sua resolução, de acordo com suas estruturas, podendo ser protótipos ou de extensão. Segundo as mesmas autoras, os problemas elementares, considerados protótipos ou prototípicos, exigem raciocínios mais simples e em geral não apresentam grande complexidade cognitiva ao serem resolvidos pelos estudantes. Já os problemas considerados *de extensão* exigem formas de raciocínio mais elaboradas e aumentam gradativamente sua dificuldade, podendo ser compreendidos entre 1ª e 4ª extensão, a depender do esforço cognitivo que requerem (GITIRANA, *et al.,* 2014).

3.2.1 *Relações Quaternárias*

A relação Quaternária pode ser apresentada em três eixos: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. Esses eixos subdividem-se em classes, as quais podem conter quantidade de dois tipos: contínuo ou discreto. Segundo Vergnaud (2009), no caso dos conjuntos discretos e dos conjuntos contínuos, em uma relação de equivalência, na comparação entre dois elementos, Pedro e João, ao se questionar se "Pedro é maior de tamanho" ou se "Pedro está na mesma equipe que João", o autor considera que o problema de decisão é muito diferente em ambos os casos.

> [...] As alturas formam um conjunto contínuo, no qual, para dois tamanhos *a* e b, sendo um próximo do outro, sempre se pode encontrar um intermediário e que estará separado de *a* por um intervalo ainda menor. Já as duas equipes possíveis formam um conjunto discreto, no qual elas podem ser vizinhas e distintas, a primeira equipe e a segunda equipe, por exemplo, sem que qualquer outra equipe intermediária possa ser colocada entre elas (VERGNAUD, 2009, p. 129).

Eixo - Proporção simples: trata-se de uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo quatro medidas, ou seja, uma simples proporção direta entre duas quantidades. Os problemas que envolvem proporção simples, de acordo com Gitirana *et al.*

2014, p. 55), “[...] trazem situações em que se tem uma relação de proporcionalidade entre quatro grandezas duas a duas de mesma espécie – e que estão relacionadas por uma taxa entre as grandezas de espécies diferentes”. As situações pertencentes a esse eixo podem ser classificadas segundo seu grau de dificuldade de resolução, podendo variar, também, de acordo com a escolaridade do estudante, associada à sua idade e sua experiência em resolver tais tipos de problemas. Segundo Vergnaud (2019, p. 13),

> [...] as primeiras situações compreendidas pelos alunos são situações de proporção simples, nas quais é preciso efetuar uma multiplicação, com números inteiros, pequenos: Por exemplo, a distribuição de balas para 4 alunos, dando 6 para cada um; ao todo, quantas balas serão necessárias? Ou ainda, o custo de 4 kg de peras, custando 6 euros o kg, qual o custo total?

Esse eixo se divide em duas classes de situação, a depender do tipo de correspondência existente em cada uma: a) correspondência um para muitos; e b) correspondência muitos para muitos. Segundo Santos (2012, p. 102), há aspectos que devem ser evidenciados para considerar o contexto de cada uma delas, pois “[...] eles se encontram intimamente ligados e dizem respeito a diferentes esquemas de ação (invariantes operatórios), à resolução das situações (operador escalar e funcional) e às operações de multiplicação e divisão (partitiva e quotitiva)”.

Na correspondência um para muitos, o que está em jogo são quatro quantidades, sendo uma delas o valor unitário, e pode ser identificada pela movimentação da incógnita na relação. Em outras palavras, depende da posição da variável na situação, e requer níveis distintos de complexidade cognitiva para sua resolução (SANTOS, 2012). Nesse sentido, a correspondência *um para muitos* contém subclasses, as quais podem ser representadas conforme o Quadro 6 a seguir. Nele são representados diagramas para situações que envolvem multiplicação, divisão por partes e divisão por quota.

Quadro 6 - Correspondência um para muitos

Multiplicação	**Divisão:** busca do valor unitário (partitiva)	**Divisão:** busca da quantidade de unidades (quotitiva)
$1 \longrightarrow a$	$1 \longrightarrow x$	$1 \longrightarrow a$
$b \longrightarrow x$	$b \longrightarrow c$	$x \longrightarrow c$

Fonte: Santos (2012, p. 104).

Pode-se perceber que, em cada um dos diagramas, a posição da quantidade desconhecida varia, e variar o termo desconhecido possibilita estimular o raciocínio dos estudantes, bem como favorece a constituição de novas competências e habilidades

(SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017c), pois variando o valor desconhecido, variam-se também os níveis de complexidade cognitiva para sua resolução.

A primeira situação do quadro acima exemplifica a classe *um para muitos*, em que a quantidade relacionada à unidade é fornecida (o valor da unidade); e a quantidade desconhecida corresponde à segunda grandeza de mesma espécie, ou seja, associa-se uma unidade de uma grandeza com várias unidades de outra grandeza. Para Gitirana, *et al.* (2014), essa categoria de problema caracteriza-se como prototípica, pois a partir do 3º ano do Ensino Fundamental (EF), cerca de 30% dos estudantes apresentam um significativo desempenho ao resolver esse tipo de situação.

Segundo Vergnaud (2019, p. 13), "[...] enquanto há apenas uma única estrutura de dados para a multiplicação, existem duas para a divisão", as quais representam uma partição ou uma quotição, conforme explicitado no quadro anterior.

Uma variação desse tipo problema ocorre em problemas caracterizados como cota, nos quais se têm o valor correspondente à unidade, uma quantidade, e se deseja saber quanto corresponde à dada quantidade, ou ainda quantas cotas, ou grupos podem ser obtidos com a quantidade dada, utilizando a divisão como cota. Essa classe de problemas se caracteriza como de *primeira extensão,* pois induz o aluno a uma análise dimensional como esquema de ação, ao associar esse problema com a operação de divisão.

No entanto, mesmo considerando certo grau de dificuldade, esse tipo de situação permite que alguns alunos consigam resolvê-la com outro possível esquema de ação, apoiado no campo aditivo; ou seja, por meio de agrupamentos com a subtração sucessiva, antes mesmo de compreender os conceitos de multiplicação e de divisão. Segundo Vergnaud (2009), admitir outros esquemas de ação para resolver situações-problema supõe admitir certa ruptura do Campo Conceitual Aditivo com o Campo Conceitual Multiplicativo. Ainda, Vergnaud (2019) afirma que a conceituação[27] desse tipo de situação é mais delicada do que a de partição, tendo em vista sua estrutura. Exemplificando:

> [...] Roberto quer comprar peras a 6 euros o kg. Ele dispõe de 24 euros. Quantos kg ele pode comprar? A divisão de 24 por 6 corresponde à sua aplicação a uma quantia de dinheiro: da inversa do coeficiente de proporcionalidade. Obtemos kg porque dividimos 24 euros por um quociente de dimensões: 6 euros por kg (VERGNAUD, 2019, p. 14).

[27] Ou a identificação de objetos de diferentes níveis, diretamente acessíveis à percepção ou não, bem como suas propriedades e relacionamentos (VERGNAUD, 2013).

Em outra variação do eixo Proporção Simples, classe *partição*, também denominada distribuição, o valor que corresponde à unidade é desconhecido, sendo fornecido o valor correspondente a certa quantidade. Esses problemas também são caracterizados como *prototípicos*, nos quais a divisão está articulada ao significado de distribuir ou partilhar. Um exemplo de partição, de acordo com Vergnaud (2019), na busca de um valor unitário, é o seguinte:

> [...] Jane compra 4 kg de peras por 24 euros. Qual é o preço de um kg? A divisão por 4 corresponde à inferência: o preço de um kg é 4 vezes menos que o preço de 4 kg. Aplicamos a uma quantia de dinheiro um operador escalar, sem dimensão, "4 vezes menos". Obtemos uma quantidade de dinheiro (VERGNAUD, 2019, p. 13, grifo do autor).

A relação de correspondência *um para muitos* apresenta, como síntese, duas estratégias de resolução, sendo operador escalar e operador funcional. No Campo Conceitual Multiplicativo, tanto no operador escalar quanto no operador funcional, há duas operações possíveis: a multiplicação e a divisão. No entanto, para o operador escalar, a operação de divisão subdivide-se em partitiva e quotitiva. Para o operador funcional, há somente a divisão partitiva (SANTOS, 2015). Segundo Vergnaud (2009), a ideia de correspondência em termos escalares não apresenta grandes dificuldades para sua resolução, tendo em vista requerer apenas a relação numérica entre as quantidades. No entanto, a correspondência de acordo com a análise em termos funcionais requer uma interpretação do quociente entre as quantidades envolvidas.

Eixo Proporção Simples, classe – **quarta proporcional:** essa classe de situações requisita tanto a multiplicação quanto a divisão para ser resolvida, e pode apresentar maior ou menor nível de dificuldade quanto às grandezas de mesma natureza serem múltiplas ou não, conforme aponta Gitirana *et al.* (2014). Nesse tipo de situação, a relação de proporcionalidade é mantida, mas a unidade não é a mesma de um dos elementos envolvidos na situação, e é comumente chamada de relação muitos para muitos, pois não apresenta a relação unitária entre as quantidades envolvidas.

As situações-problema do tipo quarta proporcional consistem em comparar duas razões equivalentes. São situações-problema de relação quaternária que não apresentam valor igual um. Essa situação é mais complexa, quando comparada à situação um para muitos, pois na maioria das vezes, o estudante poderá descobrir o valor correspondente à unidade utilizando uma etapa intermediária para sua resolução. Com relação aos tipos de quantidades envolvidas, vale ressaltar que nem sempre é possível explicitar a correspondência um para muitos, o que dificulta a análise por parte dos estudantes, como ocorre nas situações do tipo discreto. As situações com quantidades do tipo contínuo permitem sempre explicitar melhor a correspondência muitos para muitos. Assim, considerando seus aspectos, as situações do tipo quarta proporcional são classificadas por Gitirana *et al.* (2014) como problemas de segunda extensão, pois seu domínio é observado por um pequeno percentual de estudantes até o 6º ano do EF.

Em síntese, para o eixo Proporção simples, há quatro variações possíveis de situações: *um para muitos, partição, cota e quarta proporcional.* No entanto, para as três primeiras situações, com a mesma estrutura de *um para muitos,* é possível variar o valor desconhecido de três formas, podendo ser multiplicação, divisão por parte e divisão por cota, implicando em variação no nível de complexidade para sua resolução. Segundo Vergnaud (2019, p. 14), "[...] a extensão dos racionais aos números decimais menores que 1" pode apontar outras dificuldades dos estudantes, ao resolverem situações-problema de estruturas multiplicativas.

Eixo – função bilinear: também chamado de proporção dupla**,** trata-se de uma relação quaternária envolvendo mais de duas quantidades relacionadas duas a duas, compreendendo relações de correspondência *um para muitos* e *muitos para muitos*. De acordo com Gitirana *et al.* (2014), esse tipo de problemas envolve ao menos seis grandezas, sendo três pares de mesma natureza, em que uma é diretamente proporcional a cada uma das outras. No entanto, as grandezas não são todas proporcionais entre si, assumem duplas de proporcionalidade. Nesse tipo de situação, "[...] a multiplicação também assume o significado de produtos cartesianos, em que há uma proporção simples para cada uma das grandezas envolvidas em relação a uma outra, com 'taxa diferente de um'", sendo classificadas como problemas de 1ª extensão e dominados, segundo pesquisa das autoras, por cerca de 70% dos estudantes do 6º ano do EF investigados (GITIRANA *et al.,* 2014, p. 81).

Eixo – Proporcionalidade múltipla: diferente da proporção dupla, a principal característica das situações do tipo proporção múltipla é de "as quantidades possuírem uma relação de dependência" (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017, p. 31). Envolve mais de duas grandezas relacionadas duas a duas (Proporção Simples), diferentemente das grandezas de proporção dupla, pois ao alterarmos o valor de qualquer uma das grandezas envolvidas, todas serão alteradas (GITIRANA, *et al*., 2014). De acordo com a pesquisa de Gitirana *et al*. (2014), esse tipo de situação é pouco compreendido entre os estudantes, chegando a cerca de 30% de acertos entre alunos do 6º ano do EF. Como nos eixos anteriores, esse eixo pode ser subdivido em correspondência *um para muitos* e correspondência *muitos para muitos*. Vergnaud (1996, p. 176) afirma que tanto a proporção dupla quanto a proporção múltipla são conceitualmente mais difíceis, e colocam simultaneamente em jogo numerosos elementos,

“[...] uma vez que estas grandezas e estas relações podem ser números inteiros simples, quaisquer inteiros, frações, decimais maiores ou menores do que um”. O autor afirma, ainda, que essa diversidade de elementos pode proporcionar a hierarquia das situações, a depender dos “[...] três grandes fatores da complexidade cognitiva: a estrutura dos problemas, os valores numéricos e os domínios da experiência” (VERGNAUD, 1996, p. 176).

Vale salientar que, em todos os eixos das relações quaternárias, é possível propor situações-problema envolvendo classes *um para muitos* e *muitos para muitos*.

3.2.2 *Relações Ternárias*

Considerada a segunda grande forma de relação multiplicativa, denominada por Vergnaud (2009) como Produto de Medidas, envolve relações ternárias entre medidas e é composta por duas classes de problemas: (a) multiplicação - encontrar a medida-produto conhecendo as medidas elementares; e (b) divisão - encontrar as medidas elementares conhecendo a outra medida-produto. O autor afirma, ainda, a existência de numerosas subclasses de situações, “[...] conforme as propriedades dos números empregados (inteiros, decimais, números grandes, números inferiores a 1) e conforme os conceitos aos quais eles remetem” (VERGNAUD, 2009, p. 264). Para Gitirana *et al.* (2014), a relação ternária divide-se em dois eixos, a comparação multiplicativa e o produto cartesiano.

No eixo produto cartesiano, para Gitirana, *et al*. (2014, p. 73), a multiplicação assume também o significado de “produtos cartesianos”, nos quais, a partir do produto de duas (ou mais) grandezas, obtêm-se uma nova grandeza, “[...] como é o caso da área, do volume, das combinações, sem que uma das grandezas dependa da outra”. Em outras palavras, é uma relação entre três quantidades e se divide em configuração retangular e combinação, sendo a primeira do tipo contínuo e a segunda do tipo discreto (SANTOS, 2012).

Eixo Produto cartesiano – classe contínua x contínua – área ou configuração retangular: para Gitirana *et al*. (2014), são situações em que, a partir do produto de duas grandezas (de mesma natureza), obtém-se outra grandeza (ou uma grandeza-produto). Esse tipo de situação envolve a ideia da formação retangular *linha x linha*, com valores naturais, podendo ser expandida para racionais e irracionais. Problemas desse eixo configuram-se em problemas de 2ª extensão.

Eixo Produto cartesiano - Classe combinação ou combinatória: também conhecidos como problemas *de contagem* ou combinação entre grandezas discretas, os problemas classificados nesse eixo apresentam um produto cartesiano entre grandezas discretas, formando possíveis combinações que podem ser contadas. Os problemas de combinação podem ter uma grande quantidade de variações: *com todo desconhecido*; *com parte desconhecida*, considerados como de 3ª extensão; ou ainda, *com total desconhecido e número de escolhas implícito*, sendo classificado com de 4ª extensão, pois os acertos dos estudantes não ultrapassam os 18%, conforme aponta a pesquisa de Gitirana *et al*. (2014). Ressaltamos que a situação com o todo desconhecido, segundo pesquisa das autoras, não teve sua extensão indicada, tendo em vista informação implícita na situação analisada poder ter dificultado sua resolução (GITIRANA *et al.*, 2014).

Eixo – Comparação multiplicativa: as situações que fazem parte desse eixo envolvem a comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma natureza e exigem sua análise em termos de uma relação ternária por um escalar (uma razão ou uma relação), sendo uma o referente (R) e outra o referido (r).

Já no início da escolarização, situações envolvendo a relação de *dobro* e de *metade* são exploradas, e configuram-se como protótipo dessa classe de situação. Segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 45), "[...] são situações bem próximas às aditivas", configurando-se nos tipos de problemas que os estudantes apresentam maior domínio, por se tratar de duas grandezas de mesma espécie, comparadas por meio de uma razão entre elas. Nesse eixo, Comparação Multiplicativa, consideram-se os diversos tipos de dificuldades apresentadas pelos estudantes, quando se alteram a relação e o valor desconhecido, sendo classificados como:

- ✓ Classe 1: com referido desconhecido – vezes maior: essa classe de situações é denominada como prototípica, a partir da situação investigada *"Uma loja do Shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto custa a mesma sandália na loja do Shopping?"* (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 46). Segundo as autoras, esse tipo de situação, já no início do ensino formal da multiplicação (no 3º ano do EF), é dominado por cerca de 22% dos estudantes, chegando aos 90% no 6º ano (GITIRANA *et al.*, 2014).
- ✓ Classe 2: com referente desconhecido – vezes maior: nesse caso, a relação em foco é uma, e a que terá que ser utilizada é a relação inversa, para descobrir o referente, o que lhe confere uma classificação de 2ª extensão, a partir da situação: *"A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?"* (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 48).
- ✓ Classe 3: com relação desconhecida – vezes mais: nesse tipo de situação, o referente e o referido são comparados por uma relação. A partir da situação

“Comprei uma boneca por R$ 21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?”. Gitirana *et al*. (2014, p. 51) classificam-na como de 3ª extensão.

- ✓ Classe 4: relação desconhecida – vezes menor: a situação exemplificada apresenta os valores do referente e do referido: *“Mário ganhou 18 bolas e Rosa ganhou 6 bolas. A quantidade de bolas que Rosa ganhou é quantas vezes menor que a de Mário?”* (GITIRANA *et al.,* 2014, p. 53). Por ser o referido menor que o referente, o estudante está diante de uma relação que implica em uma divisão, e por apresentar a inversão de operação de divisão, em que a inversa é a própria divisão, essa situação foi classificada como de 4ª extensão.

Apresentamos as classes de situações-problema que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo, considerando apenas o conjunto dos números naturais. Ainda, segundo Magina, Santos e Merlini (2012, p. 5), “todas as classes podem usar quantidades do tipo discreta ou contínua, exceto a classe configuração retangular (apenas quantidade contínua) e combinatória (apenas quantidade discreta)”.

No capítulo seguinte, apresentamos os resultados de uma investigação que realizamos no âmbito dessas estruturas multiplicativas, ao analisar as questões que compõe a Prova Paraná. A partir dessa ilustração, o objetivo é permitir que o leitor tenha uma ideia dos tipos de situações identificadas na referida avaliação, e que possam associá-los ao desempenho dos estudantes nesse nível de ensino, no que se refere às dificuldades ao lidar com situações desse campo conceitual.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS COLETADOS A PARTIR DA PROVA PARANÁ

Buscamos, neste capítulo, identificar e classificar as situações-problema de estruturas multiplicativas na Prova Paraná a partir dos estudos de Vergnaud (2009), levando em consideração seu caráter diagnóstico. O instrumento desse escopo da pesquisa é composto por cinco cadernos de provas utilizados pelos estudantes, distribuídas em três edições realizadas em 2019, uma em 2020 e uma em 2021, e suas situações-problema serão analisadas em conformidade com a ideia de organização, detalhamento e classificação de situações do campo multiplicativo, segundo Gitirana *et al*. (2014).

4.1 Situações-problema de Estruturas Multiplicativas Presentes na Prova Paraná

Para efeito deste trabalho de pesquisa, inicialmente consideramos a situação: *"Um hotel tem 2 andares de estacionamento. Cada andar tem 6 setores e em cada setor existem 7 vagas. quantas vagas há, ao todo, no estacionamento desse hotel?",* para a qual os estudantes apresentaram desempenho muito aquém do esperado. No entanto, nas edições seguintes, foi possível constatar um avanço significativo no desempenho dos mesmos estudantes, ao resolverem situações que requeriam as mesmas habilidades relacionadas à multiplicação, tendo em vista que utilizavam o mesmo descritor, evoluindo para um percentual de 76,6% na segunda edição; e chegando a 83,33% na terceira edição, todas em 2019.

Com base nesses dados, a fim de investigar o progressivo domínio das estruturas multiplicativas por parte dos estudantes, conforme exposto no Quadro 1, buscamos identificar e classificar as situações que fazem parte desse Campo Conceitual, ao considerar que nele existe uma variedade de situações e que elas têm a função de moldar suas aprendizagens. Sobretudo, consideramos essa análise fundamental para identificar e compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes na primeira edição realizada, considerando que, de acordo com os conceitos que se quer ensinar, "[...] não se pode escapar à classificação das relações, dos problemas e das operações de pensamento necessárias à sua resolução" (VERGNAUD, 1993, p. 25).

Os três primeiros quadros, 7, 8 e 9 trazem, respectivamente, todas as situações-problema de estruturas multiplicativas contidas nos cadernos de provas respectivos à primeira, segunda e terceira edições de 2019, e após a identificação das classes de problemas, em cada edição há uma descrição de possibilidades de resolução para cada uma das situações. Como buscávamos não somente identificar os tipos de situações presentes em cada edição da Prova Paraná, mas também analisar a hierarquia entre a diversidade de situações apresentadas, após essa análise inicial, fizemos, então, uma comparação entre as situações, evidenciando a presença ou não de progressividade em cada situação, bem como comparação entre as três edições, tendo em vista o caráter diagnóstico a que se propõe a Prova Paraná.

Seguindo para análise das situações, os Quadros 10 e 11 compreendem todas as situações-problema identificados nas edições de 2020 e 2021, respectivamente, com suas devidas classificações e discussões a respeito de suas estruturas.

A identificação dos tipos de situações é um instrumento importante no estudo das dificuldades dos estudantes ao resolverem situações de estruturas multiplicativas, pois pode permitir identificar possíveis lacunas no desenvolvimento desse campo conceitual. Além disso, a escolha das situações que são propostas aos estudantes é considerada, por Vergnaud (2011), como o fator mais importante que o professor, enquanto mediador da aprendizagem, pode proporcionar. Essas situações têm a função de desestabilizar cognitivamente os estudantes, mas com o auxílio do professor, elas possibilitam um avanço significativo no desenvolvimento de esquemas. Contudo, é importante ter clareza dos objetivos de ensino, pois esses objetivos têm a função norteadora no momento da construção, análise e experimentação de situações-problema (ALMOULOUD, 2016).

Ao resolver novas situações, os estudantes utilizam o conhecimento já formalizado em outras situações, de forma a adaptá-los a novas. No entanto, a aprendizagem de um novo conceito é um processo longo, que pode levar muito tempo, e não de forma imediata: muitas vezes se ensina um conceito para logo utilizá-lo para aprofundar outros conceitos. Nesse sentido, é função do professor "[...] organizar um conjunto de situações e realizar experimentações com elas", tanto dentro de objetivos de curto prazo quanto na perspectiva de longo prazo, permitindo que os estudantes desenvolvam competências e concepções para uso imediato, oferecendo-lhes uma base para os conceitos que serão essenciais anos mais tarde (SANTOS, 2012, p. 95)

Assim, a análise das situações permitiu levantar algumas hipóteses a respeito de como os estudantes estão sendo apresentados às situações de estruturas multiplicativas, ao considerar o que afirma Vergnaud (1993, p. 12): "[...] os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos são função das situações com que ele se confronta", considerando sua variedade e sua história. O mesmo autor afirma, ainda, que essas situações devem ser cuidadosamente abordadas em sala de aula, considerando sua variedade e suas especificidades, a depender de suas estruturas.

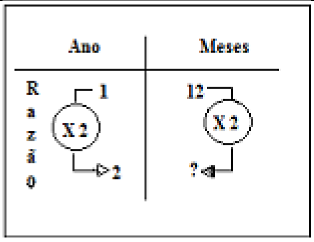
Por esse motivo, além de identificar as situações presentes na Prova Paraná, procuramos, nesta pesquisa, estabelecer elos com o Livro Didático, a fim de cotejar as informações obtidas a partir do desempenho dos estudantes e a abordagem das situações nesse material de apoio pedagógico. Assim, foi considerada a existência de uma gama significativa de situações que devem ser dominadas pelos professores e trabalhadas com os estudantes. Segundo Vergnaud (2009), é o interagir com essa diversidade de situações que requer diferentes raciocínios com variados graus de complexidade que promove a expansão do Campo Conceitual Multiplicativo.

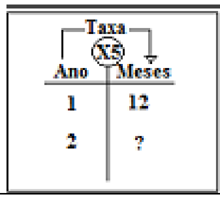
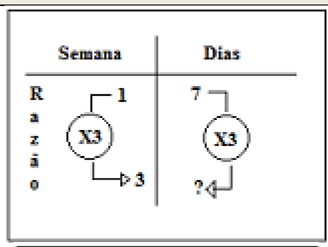
Nos quadros seguintes, reúnem-se as situações-problema presentes em cada edição realizada em 2019. O Quadro 7 refere-se à 1ª edição; o Quadro 8, à 2ª edição; e o Quadro 9, à 3ª. Cada quadro contém as situações-problema identificadas a partir da classificação de Vergnaud (2009), e com base nessa tipologia, as situações foram classificadas como situações protótipos, ou de 1ª a 4ª extensão, conforme sugere Gitirana *et al.* (2014). Em seguida, foi realizada a análise e a comparação das situações presentes nas três edições, considerando que cada tipo das situações-problema do campo multiplicativo possui um grau de dificuldade intrínseco, e que há uma hierarquia de dificuldade, quando se considera situações de tipos diferentes, a fim de verificar o caráter diagnóstico da Prova Paraná.

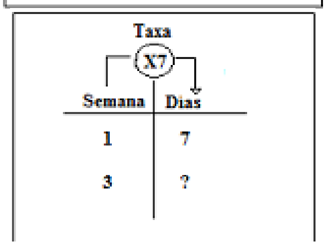
4.1.1 *Estruturas Multiplicativas – 1ª edição da Prova Paraná*

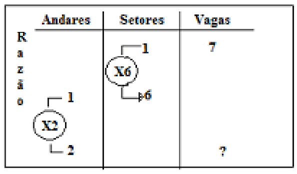
O Quadro 7, na página seguinte, refere-se a quatro situações-problema retiradas do caderno de provas do 5º ano do EF da 1ª edição da Prova Paraná, realizada em 2019. Considerado como um dos instrumentos de investigação desta pesquisa, apresenta duas situações-problema relacionadas ao eixo Proporção Simples – classe *um para muitos;* uma situação relacionada ao eixo Comparação Multiplicativa – classe *referido desconhecido* e uma situação relacionada ao eixo Proporção Múltipla.

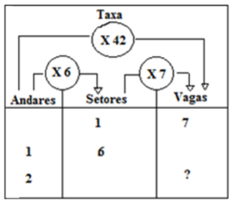
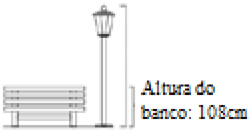
Quadro 7 – Situações-problema: estruturas multiplicativas 1ª edição (2019)

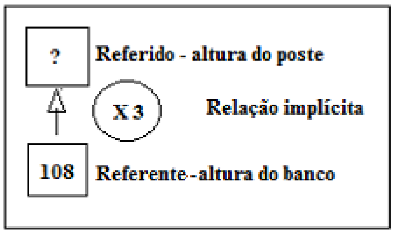
<table>
<tr><th colspan="3">1ª edição Prova Paraná – 2019</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 8 (Q8) – Fernanda fez um curso de espanhol com duração de 2 anos. Quantos meses durou esse curso de Fernanda?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – um para muitos</th></tr>
<tr><td>D09 – Resolver problema envolvendo medidas de tempo.</td><td>UT Grandezas e medidas
OC Medidas de tempo
OA Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 18 (Q18) – Ana fez uma cirurgia e precisou ficar três semanas de repouso. Quantos dias Ana ficou de repouso após essa cirurgia?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – um para muitos</th></tr>
<tr><td>D09 – Resolver problema envolvendo medidas de tempo.</td><td>UT Grandezas e medidas
OC Medidas de tempo
OA Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 20 (Q20) – Um hotel tem 2 andares de estacionamento. Cada andar tem 6 setores e em cada setor existem 7 vagas. Quantas vagas há, ao todo, no estacionamento desse hotel?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção múltipla</th></tr>
<tr><td>D19 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão.</td><td>UT: Números e Álgebra
OC: Números Naturais (multiplicação e divisão)
AO: Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 14 (Q14) – Para estimar a altura do poste de luz do quintal de sua casa, Marcelo utilizou a medida da altura do banco ao lado desse poste. A altura desse banco é 108 centímetros.


Qual é a altura aproximada, em centímetros, desse poste de luz?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Comparação Multiplicativa –
Referido desconhecido</th></tr>
<tr><td>D07 – Comparar medidas de grandezas utilizando unidades de medida convencionais ou não.</td><td>UT: Grandezas e medidas
OC: Medidas de comprimento
AO: Estimar, medir e comparar comprimentos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (metro, centímetro e milímetro) e diversos instrumentos de medida.</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Paraná (2019a).

As duas situações-problema do eixo Proporção Simples - classe *um para muitos* estão representadas por Q08 e Q18. Conforme exposto por Vergnaud (2009), as situações classificadas nessa classe associam uma unidade de uma grandeza com várias unidades da outra grandeza. Assim, Q8 e Q18 são situações que envolvem uma relação entre duas quantidades, anos e meses, dias e semanas, respectivamente, e possuem a mesma estrutura e o mesmo nível de complexidade, pois requerem uma multiplicação para sua resolução. Esse tipo de relação permite aos estudantes compreenderem a multiplicação de uma quantidade pela outra, e o resultado é expresso em uma das quantidades.

A partir dos diagramas apresentados, a análise de cada situação possibilita perceber a existência de dois operadores: operador escalar (razão) e operador funcional (taxa). Desse modo, tanto a situação Q8 quanto a situação Q18 podem ser resolvidas utilizando esses procedimentos como estratégia de resolução.

Ao analisar a situação Q8 é possível perceber que o operador escalar compreende a relação entre as medidas da grandeza quantidade de anos, apresentando uma ampliação de duas vezes em relação ao estado inicial (de um para dois, multiplicou por dois). Esse operador escalar (x2) é o elemento que faz a correspondência de um ano para dois.

Assim, pela proporcionalidade entre as grandezas, o operador escalar (x2) deve transformar a medida da grandeza quantidade de meses. Multiplicando o operador escalar (x2) pelo número de meses (12), obtém-se a quantidade de anos (24). De acordo com outra estratégia, o operador funcional compreende a relação doze meses em um ano, ou seja, 12 (meses/ano), e nas mesmas condições, é possível encontrar quantos meses existem em dois anos. Ao multiplicar um ano pelo operador funcional 12 (meses/ano), temos a quantidade de 12 meses. A relação entre as grandezas é proporcional e ampliada em doze vezes. Assim, a quantidade de meses é encontrada multiplicando 2 anos por 12 (meses/ano).

Essa mesma análise pode ser considerada para a situação Q18, pois são situações análogas, e para a qual o operador funcional compreende a relação sete dias por semana, e o operador escalar pode ser encontrado pela relação entre as quantidades de semanas (uma e três). Ambas as situações são consideradas como prototípicas da multiplicação.

Contudo, ambas as situações não fazem referência à unidade (relação unitária) em seus enunciados. Nesse sentido, deve-se considerar a existência de conceitos e conhecimentos implícitos que precisam ser considerados, tendo em vista que orientam o desenvolvimento da ação de resolução, pois os estudantes devem compreender as relações existentes entre anos e meses para a situação Q8, e entre dias e semanas para a situação Q18. Logo, a compreensão de que um ano é equivalente a doze meses e que uma semana equivale a sete dias.

Nas situações que envolvem Proporção Múltipla há mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, sendo todas as medidas proporcionais e dependentes duas a duas. Assim, elas formam uma composição de funções lineares, como evidenciado na situação Q20, na qual a quantidade de setores está relacionada proporcionalmente à quantidade de andares, e estes, por sua vez, estão proporcionalmente relacionados à quantidade de vagas.

De acordo com o diagrama proposto por Vergnaud, apresentado no Quadro 7, é possível observar, por meio do operador funcional, ou seja, pela existência de uma relação entre a grandeza quantidade de andares e a grandeza quantidade de setores estabelecida (6 setores/andar), que a quantidade de setores se relaciona com a quantidade de vagas por outro operador funcional (7 vagas/setor). A composição dessas duas proporções, por sua vez, origina outra relação de proporcionalidade entre a quantidade de andares e a quantidade de vagas, também considerada como uma Proporção Simples.

De outra maneira, a partir da utilização do operador escalar como estratégia de resolução da solução, para encontrar a quantidade de vagas contidas em cada andar, é necessário descobrir quantas vagas há em cada setor. Assim, de acordo com o diagrama, é possível perceber que o operador escalar compreende a relação entre a grandeza quantidade de setores, de um para seis, representando uma ampliação de seis vezes em relação ao estado inicial.

Da mesma forma, o operador escalar (x6) irá transformar a grandeza quantidade de vagas, obtendo a grandeza quantidade de vagas (42). Descobrimos, portanto, que em um (1) andar há 42 vagas de estacionamento. De forma análoga, para encontrar a quantidade de vagas contidas em dois (2) andares, deve-se considerar o operador escalar (x2) da relação entre a grandeza quantidade de andares, apresentando uma ampliação de duas vezes, ou seja, de um andar para dois andares. Nesse sentido, pode-se observar que, ao aumentar a quantidade de setores, o mesmo acontece com a quantidade de vagas, e ao aumentar a quantidade de andares, aumenta também a quantidade de vagas. Logo, são utilizadas duas Proporções Simples encadeadas, o que caracteriza uma Proporção Múltipla, considerada de 3ª extensão. Destaca-se que as três situações acima descritas envolvem relações quaternárias.

A situação Q14 pertence ao eixo Comparação Multiplicativa, envolve uma relação ternária, e conforme já explicitado no capítulo precedente, subdivide-se em classes, nas quais referente, referido ou a relação são desconhecidos.

Em situações em que o referente ou o referido é desconhecido, em geral se utiliza, para sua resolução, a operação de divisão ou de multiplicação, tendo em vista que as relações estabelecidas no eixo fazem referência a uma relação que aumenta ou diminui as quantidades envolvidas. Em situações em que a relação é desconhecida, a operação requerida é necessariamente a divisão. Essa relação, por sua vez, é representada por um operador escalar que indica a quantia de vezes uma quantidade é maior ou menor que a outra.

Na situação Q14, o valor do referente e a relação são apresentados, e busca-se encontrar o valor do referido. O *referente* (altura do banco) é a quantidade que serve como referência para a comparação instituída, sendo o *referido* (altura do poste) a quantidade que resulta da comparação, e a *relação* (3x maior) é a quantidade que estabelece a ligação entre referente e referido.

O diagrama indicado para essa situação, no Quadro 7, ilustra matematicamente que, se o poste tem aproximadamente três vezes a altura do banco, para determinar a altura do poste, é necessário multiplicar a altura do banco pela relação entre essas duas alturas. Nesse sentido, para resolver a situação, a operação mais adequada é a multiplicação, isto é: referente x relação = referido (108 x 3 = 324), sendo a altura do banco (108) a relação estabelecida entre o banco e o poste (3 vezes maior), e a altura do poste (324, aproximadamente).

A estrutura desse tipo de situação recebe a indicação de situação protótipo, de acordo com a pesquisa realizada por Gitirana *et al.* (2014), pois esse tipo de situação é explorado desde o início de escolarização, envolvendo as relações de dobro, de metade, entre outros.

No entanto, mais uma vez, uma das informações se apresenta de forma implícita, ao se considerar que o estudante deve estimar a altura do poste como três vezes maior que a altura do banco, contando que essa informação não se apresenta de forma explícita no enunciado, tampouco na figura que auxilia a interpretação da situação. Nesse contexto, é preciso ponderar que o fato de a medida (o número) de uma das grandezas não estar explícita pode ser um dos fatores de dificuldade na resolução da situação, conforme apontam Gitirana *et al.* (2014).

Contudo, de acordo com as classes de problemas e seus níveis de complexidade, comparando o referido e o referente desconhecido, a pesquisa realizada pelas mesmas autoras constatou que o percentual de acertos é maior quando o elemento solicitado na situação é o referido. Existem situações desse eixo que exigem maior investimento cognitivo do estudante para compreendê-las, ao buscar o valor da relação da situação, que requer uma operação de divisão para sua resolução.

Corroborando, Santos (2012) afirma ser imprescindível que as situações-problema apresentem precisão nos fatos numéricos a serem operados para que não haja equívoco na interpretação do enunciado, tendo em vista a necessidade de interpretar e compreender as expressões linguísticas, além de operar adequadamente as informações apresentadas.

Para este mesmo autor, a falta de congruência entre as palavras utilizadas nos enunciados e a operação requerida para sua resolução elevam o grau de dificuldade do problema, quando as expressões *vezes mais* ou *vezes menos* podem ganhar significados distintos, não associados respectivamente às ideias de multiplicar e dividir (SANTOS, 2012). Situações do Campo Multiplicativo que envolvem a ideia de comparação multiplicativa "[...] podem gerar dificuldade de compreensão até para estudantes mais experientes" considerando a complexidade em compreender o enunciado da situação e traduzi-lo na operação matemática adequada (SANTOS, 2012, p. 117).

As duas situações-problema do eixo Proporção Simples - classe *um para muitos*, estão representadas por Q08 e Q18. Conforme exposto por Vergnaud (2009), as situações classificadas nessa classe associam uma unidade de uma grandeza com várias unidades da outra grandeza. Assim, Q8 e Q18 são situações que envolvem uma relação entre duas quantidades, anos e meses, dias e semanas, respectivamente, e possuem a mesma estrutura e o mesmo nível de complexidade, pois requerem uma multiplicação para sua resolução. Esse tipo de relação permite aos estudantes compreenderem a multiplicação de uma quantidade pela outra, e o resultado é expresso em uma das quantidades.

A partir dos diagramas apresentados, a análise de cada situação possibilita perceber a existência de dois operadores: operador escalar (razão) e operador funcional (taxa). Desse modo, tanto a situação Q8 quanto a situação Q18 podem ser resolvidas utilizando esses procedimentos como estratégia de resolução.

Ao analisar a situação Q8, é possível perceber que o operador escalar compreende a relação entre as medidas da grandeza quantidade de anos, apresentando uma ampliação de duas vezes em relação ao estado inicial (de um para dois, multiplicou por dois). Esse operador escalar (x2) é o elemento que faz a correspondência de um ano para dois.

Assim, pela proporcionalidade entre as grandezas, o operador escalar (x2) deve transformar a medida da grandeza quantidade de meses. Multiplicando o operador escalar (x2) pelo número de meses (12), obtém-se a quantidade de anos (24). De acordo com outra estratégia, o operador funcional compreende a relação doze meses em um ano, ou seja, 12 (meses/ano), e nas mesmas condições, é possível encontrar quantos meses existem em dois anos. Ao multiplicar um ano pelo operador funcional 12 (meses/ano), temos a quantidade de 12 meses. A relação entre as grandezas é proporcional e ampliada em doze vezes. Assim, a quantidade de meses é encontrada multiplicando 2 anos por 12 (meses/ano).

Essa mesma análise pode ser considerada para a situação Q18, pois são situações análogas, e para a qual o operador funcional compreende a relação sete dias por semana, e o operador escalar pode ser encontrado pela relação entre as quantidades de semanas (uma e três). Ambas as situações são consideradas como prototípicas da multiplicação.

Contudo, ambas as situações não fazem referência à unidade (relação unitária) em seus enunciados. Nesse sentido, deve-se considerar a existência de conceitos e conhecimentos implícitos que precisam ser considerados, tendo em vista que orientam o desenvolvimento da ação de resolução, pois os estudantes devem compreender as relações existentes entre anos e meses para a situação Q8, e entre dias e semanas para a situação Q18. Logo, a compreensão de que um ano é equivalente a doze meses e que uma semana equivale a sete dias.

Nas situações que envolvem Proporção Múltipla, há mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, sendo todas as medidas proporcionais e dependentes duas a duas. Assim, elas formam uma composição de funções lineares, como evidenciado na situação Q20, na qual a quantidade de setores está relacionada proporcionalmente à quantidade de andares, e estes, por sua vez, estão proporcionalmente relacionados à quantidade de vagas.

De acordo com o diagrama proposto por Vergnaud, apresentado no Quadro 7, é possível observar, por meio do operador funcional, ou seja, pela existência de uma relação entre a grandeza quantidade de andares e a grandeza quantidade de setores estabelecida (6 setores/andar), que a quantidade de setores se relaciona com a quantidade de vagas por outro operador funcional (7 vagas/setor). A composição dessas duas proporções, por sua vez, origina outra relação de proporcionalidade entre a quantidade de andares e a quantidade de vagas, também considerada como uma Proporção Simples.

De outra maneira, a partir da utilização do operador escalar como estratégia de resolução da solução, para encontrar a quantidade de vagas contidas em cada andar, é necessário descobrir quantas vagas há em cada setor. Assim, de acordo com o diagrama, é possível perceber que o operador escalar compreende a relação entre a grandeza quantidade de setores, de um para seis, representando uma ampliação de seis vezes em relação ao estado inicial.

Da mesma forma, o operador escalar (x6) irá transformar a grandeza quantidade de vagas, obtendo a grandeza quantidade de vagas (42). Descobrimos, portanto, que em um (1) andar há 42 vagas de estacionamento. De forma análoga, para encontrar a quantidade de vagas contidas em dois (2) andares, deve-se considerar o operador escalar (x2) da relação entre a grandeza quantidade de andares, apresentando uma ampliação de duas vezes, ou seja, de um andar para dois andares. Nesse sentido, pode-se observar que, ao aumentar a quantidade de setores, o mesmo acontece com a quantidade de vagas, e ao aumentar a quantidade de andares, aumenta também a quantidade de vagas. Logo, são utilizadas duas Proporções Simples encadeadas, o que caracteriza uma Proporção Múltipla, considerada de 3ª extensão. Destaca-se que as três situações acima descritas envolvem relações quaternárias.

A situação Q14 pertence ao eixo Comparação Multiplicativa, envolve uma relação ternária, e conforme já explicitado no capítulo precedente, subdivide-se em classes, nas quais referente, referido ou a relação são desconhecidos.

Em situações em que o referente ou o referido é desconhecido, em geral se utiliza, para sua resolução, a operação de divisão ou de multiplicação, tendo em vista que as relações estabelecidas no eixo fazem referência a uma relação que aumenta ou diminui as quantidades envolvidas. Em situações em que a relação é desconhecida, a operação requerida é necessariamente a divisão. Essa relação, por sua vez, é representada por um operador escalar que indica a quantia de vezes uma quantidade é maior ou menor que a outra.

Na situação Q14, o valor do referente e a relação são apresentados, e busca-se encontrar o valor do referido. O *referente* (altura do banco) é a quantidade que serve como referência para a comparação instituída, sendo o *referido* (altura do poste) a quantidade que resulta da comparação, e a *relação* (3x maior) é a quantidade que estabelece a ligação entre referente e referido.

O diagrama indicado para essa situação, no Quadro 7, ilustra matematicamente que, se o poste tem aproximadamente três vezes a altura do banco, para determinar a altura do poste, é necessário multiplicar a altura do banco pela relação entre essas duas alturas. Nesse sentido, para resolver a situação, a operação mais adequada é a multiplicação, isto é: referente x relação = referido $108 \cdot 3 = 124$, sendo a altura do banco (108) a relação estabelecida entre o banco e o poste (3 vezes maior), e a altura do poste (324, aproximadamente).

A estrutura desse tipo de situação recebe a indicação de situação protótipo, de acordo com a pesquisa realizada por Gitirana *et al.* (2014), pois esse tipo de situação é explorado desde o início de escolarização, envolvendo as relações de dobro, de metade, entre outros.

No entanto, mais uma vez, uma das informações se apresenta de forma implícita, ao se considerar que o estudante deve estimar a altura do poste como três vezes maior que a altura do banco, contando que essa informação não se apresenta de forma explícita no enunciado, tampouco na figura que auxilia a interpretação da situação. Nesse contexto, é preciso ponderar que o fato de a medida (o número) de uma das grandezas não estar explícita pode ser um dos fatores de dificuldade na resolução da situação, conforme apontam Gitirana *et al.* (2014).

Contudo, de acordo com as classes de problemas e seus níveis de complexidade, comparando o referido e o referente desconhecido, a pesquisa realizada pelas mesmas autoras constatou que o percentual de acertos é maior quando o elemento solicitado na situação é o referido. Existem situações desse eixo que exigem maior investimento cognitivo do estudante para compreendê-las, ao buscar o valor da relação da situação, que requer uma operação de divisão para sua resolução.

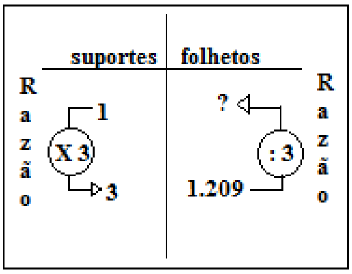
Corroborando, Santos (2012) afirma ser imprescindível que as situações-problema apresentem precisão nos fatos numéricos a serem operados para que não haja equívoco na interpretação do enunciado, tendo em vista a necessidade de interpretar e compreender as expressões linguísticas, além de operar adequadamente as informações apresentadas.

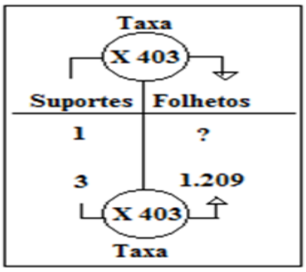
Para este mesmo autor, a falta de congruência entre as palavras utilizadas nos enunciados e a operação requerida para sua resolução elevam o grau de dificuldade do problema, quando as expressões *vezes mais* ou *vezes menos* podem ganhar significados distintos, não associados respectivamente às ideias de multiplicar e dividir (SANTOS, 2012). Situações do Campo Multiplicativo que envolvem a ideia de comparação multiplicativa "[...] podem gerar dificuldade de compreensão até para estudantes mais experientes" considerando a complexidade em compreender o enunciado da situação e traduzi-lo na operação matemática adequada (SANTOS, 2012, p. 117).

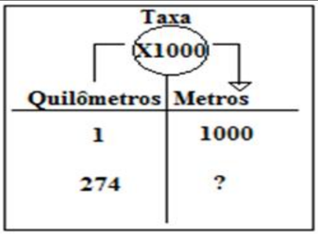
4.1.2 *Estruturas Multiplicativas – 2ª edição da Prova Paraná*

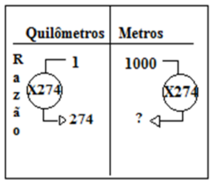
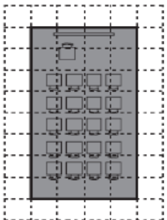
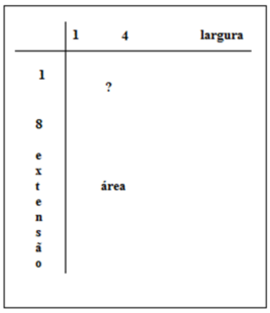
Seguindo para análise do Quadro 8, na página seguinte, ele apresenta três situações-problema de estruturas multiplicativas, identificadas na 2ª edição realizada em 2019, a partir do caderno de provas relativo ao 5º ano do Ensino Fundamental. As situações encontradas referem-se a duas pertencentes ao eixo Proporção Simples, sendo uma caracterizada como classe *partição;* e outra, classe *um para muitos* e uma situação pertencente ao eixo Produto Cartesiano – classe *área*.

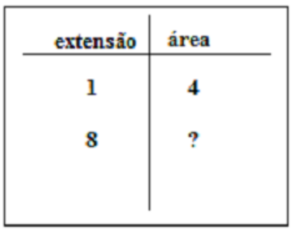
Quadro 8 - Situações-problema: estruturas multiplicativas 2ª edição 2019

<table>
<tr><th colspan="3">2ª edição Prova Paraná – 2019</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 4 (Q4) – Fábio é dono de um mercado. Ele mandou fazer 1 209 folhetos com as promoções e os dividiu igualmente em 3 suportes na entrada do mercado. Quantos folhetos ficaram em cada suporte desse mercado?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – Partição</th></tr>
<tr><td>D19 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa).</td><td>UT: Números e Álgebra
OC: Números Naturais (multiplicação e divisão)
AO: Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 16 (Q16) – Amanda viajou de férias e percorreu uma distância de 274 km para chegar à cidade onde seus pais moram. Quantos metros Amanda percorreu para chegar à cidade de seus pais nessa viagem?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – um para muitos</th></tr>
<tr><td>D7 – Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/ cm/mm, kg/g/mg, L/mL.</td><td>UT: Grandezas e Medidas
OC: Medidas de comprimento
AO: Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 7 (Q7) – Na malha quadriculada abaixo, está representada a sala de aula onde Sara estuda. O lado de cada quadradinho dessa malha equivale a 1 m.

Qual é a área, em m², dessa sala de aula?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Produto Cartesiano – Área</th></tr>
<tr><td>D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.</td><td>UT: Grandezas e medidas
OC: Medidas de área
AO: Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área. Habilidade específica: Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de área utilizando diferentes estratégias e recursos manipuláveis, malha quadriculada e recursos digitais.</td><td>


</td></tr>
</table>

Fonte: Paraná (2019b).

Um aspecto relevante na situação Q4, de acordo com o respectivo caderno de provas (PARANÁ, 2019b, p. 4), havia indicação de avaliação do descritor *D19* - Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa). Contudo, para sua resolução, havia a seguinte sugestão:

> Para solucionar este item, o estudante poderá fazer a divisão dos 1 209 folhetos pelos 3 suportes onde eles ficaram na entrada do mercado: 1 209 ÷ 3 = 403. Deste modo, em cada suporte ficaram 403 folhetos. O estudante poderá solucionar este item também por tentativa e erro, adicionando três quantidades, uma quantidade em cada um dos três suportes, até somar 1209 folhetos; por exemplo: 34 + 34 + 34 = 102; 43 + 43 + 43 = 129; 304 + 304 + 304 = 912; 403 + 403 + 403 = 1209. Portanto, a alternativa correta é a D (PARANÁ, 2019b, p. 4).

No entanto, analisando o tipo de questão, deve-se considerar: *D20 - Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.* Esse tipo de situação-problema traz, em seu enunciado, uma quantidade inicial e o número de partes em que a quantidade inicial deve ser repartida, empreendendo a busca pelo valor de cada uma das partes. Em outras palavras, essa situação requer também uma distribuição equitativa de 1.209 folhetos em 3 suportes.

Para sua resolução, é possível buscar o operador escalar, dividindo a grandeza quantidade total de suportes por um, resultando em três. O operador escalar três deve ser utilizado para determinar a quantidade de folhetos por suporte, ou seja, divide-se a quantidade total de folhetos (1209) pelo escalar (3).

Para a mesma situação há, também, a possibilidade de utilizar o operador funcional como outra estratégia de resolução, definida como divisão por partição, isto é, divisão entre as medidas distintas, dividindo 1209, que se refere à quantidade total de folhetos; por 3, que expressa a quantidade de suportes. Embora essa situação tenha indicação de situação protótipo, pode-se considerar que ela requer um esquema mais elaborado de pensamento, pelo fato de estar atrelada ao conceito de divisão (VERGNAUD, 2009).

Para o autor, esse fato acontece pela dificuldade em fazer a inversão mental da multiplicação para a divisão. As situações-problema, que evocam a operação da divisão para sua resolução, são agrupadas em duas categorias: divisão partitiva e a divisão quotitiva. Esta última tem como objetivo encontrar a quantidade total, tendo sido fornecido o valor unitário. Na divisão partitiva, como é o caso da situação Q4, almeja-se encontrar o valor unitário.

Nesse sentido, deve-se considerar que o grau de dificuldade de uma situação será determinado pela sua estrutura, e não somente pela aplicação de uma ou outra operação, ou algoritmo da Matemática. No entanto, as características das propriedades dos números, informações implícitas ou não nas situações também devem ser consideradas, pois elas interferem no desempenho dos estudantes. Nas situações do Campo Conceitual Multiplicativo, apesar da possibilidade de utilização da mesma operação para sua resolução, de acordo com seus diferentes tipos, as classes de situações apresentam graus de dificuldades distintos.

Ainda se pode inferir que, nesse tipo de situação, com respaldo em princípios em Vergnaud (2009), para que ocorra o salto qualitativo na utilização do procedimento multiplicativo, são importantes a compreensão e a habilidade em valores numéricos gradativamente maiores. A razão para isso é que, quanto menor o valor numérico, maiores são as chances de o aluno resolver as situações-problema de multiplicação por meio do procedimento aditivo.

A situação Q16 representa uma Proporção Simples, classe *uma para muitos*, e conforme já explicitado nas situações Q08 e Q18 do Quadro 7, possuem a mesma estrutura e envolvem o mesmo tipo de raciocínio para sua resolução, variando apenas os valores numéricos e as grandezas envolvidos. Conforme já mencionado, essas situações são classificadas, por Gitirana *et al.* (2014), como prototípicas da multiplicação. Novamente, a análise dessa situação possibilita perceber a existência de duas relações, a relação escalar (operador escalar x 274) e a relação funcional (operador funcional x 1000), conforme exposto em seus respectivos diagramas.

No entanto, conforme já evidenciado, apesar de representar uma situação elementar, Vergnaud (2009) afirma que uma situação-problema pode variar em complexidade, dependendo de diversos fatores, como tipos de grandezas envolvidas, contínuas ou discretas, medidas explícitas ou não, e o significado assumido pela operação, que requer diferentes raciocínios para sua resolução, além de trabalhar com quantidades representadas por números na ordem das centenas de milhar, outro fator que aumenta o grau de dificuldade para a resolução.

Essas características são recorrentes nas situações até então apresentadas, permitindo inferir que o nível de complexidade da situação Q16 aumenta, ao considerar uma das informações implícitas. Para resolvê-la, o estudante deve compreender o conceito de equivalência entre quilômetros e metros, podendo se constituir em um fator de complexidade para seu entendimento. Por isso, não deve apenas considerar o aspecto numérico da questão, mas levar em conta que, para multiplicar medidas, é necessário que elas estejam na mesma unidade.

Seguindo para análise da situação representada em Q7, pode-se perceber que ela envolve uma relação ternária, eixo Configuração Retangular, classe *área,* e trata das medidas referentes a formas retangulares. Em outras palavras, envolve a ideia de organização retangular, e pode ser tratada pelo modelo matemático $a \cdot b = c$.

A operação que resolve essa situação é a multiplicação entre as dimensões comprimento (8m) x largura (4m) da sala indicada na figura. Segundo Santana, Lautert e Filho (2017c), as situações de configuração retangular envolvem um produto cartesiano obtido a partir de duas medidas lineares, ao se trabalhar com área. No entanto, apesar de a área depender linearmente da largura da sala, assim como depender linearmente do comprimento, não há uma relação de dependência entre a largura da sala e seu comprimento. Nesse sentido, em situações em que uma dessas grandezas (comprimento ou largura) é fixa, a função deixa de ser bilinear. Assim, no caso de considerar a largura fixa, $f(x) = 4x$, ela poderá ser considerada uma constante, sendo vista como o operador funcional da situação. Para Vergnaud (2009, p. 159), “[...] a dimensão área é a dimensão produto da dimensão largura e da dimensão comprimento”. Portanto, áreas são medidas compostas, assim como os volumes também o são. Essa situação pode variar, ainda, quando se conhece a medida da superfície da área e uma das medidas lineares, e se procura a outra medida linear.

Outro elemento que pode ser considerado nessa análise, segundo Santos (2005), é a variável didática, identificada na situação Q7 como a existência de figura de apoio ao enunciado. Ela permite caracterizar as situações-problemas de acordo com aspectos particulares e que podem influenciar significativamente em seu nível de complexidade. O contexto geométrico utilizado na situação já é familiar aos estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental desde o início de escolarização. Essa caraterística interfere na construção das estratégias de resolução, pois segundo Almouloud (2016, p. 136), a utilização de figuras mais usuais “[...] deve facilitar a aplicação do conhecimento do assunto”.

As variáveis didáticas são identificadas em situações-problema de acordo com: a presença ou ausência de figura no enunciado; o tipo da figura como prototípica ou não (figura geométrica usual simples); o suporte no qual a figura é desenhada, podendo ser malha quadriculada (que favorece sua resolução), papel liso ou pontilhado; as medidas das dimensões representadas por números inteiros; a utilização de números convencionais, bem como as características das unidades de medidas estarem na mesma unidade, sem a necessidade de conversão (SANTOS, 2005).

Nesse sentido, considerando o tipo da situação Q7, a autora afirma que “[...] o mesmo não ocorre se o retângulo for desenhado em papel branco, as medidas de comprimentos de seus lados são irracionais e não há homogeneidade quanto às unidades de comprimento”, pois esses elementos aumentam o nível de complexidade da situação (SANTOS, 2005, p. 42).

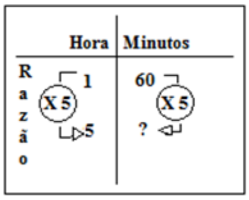
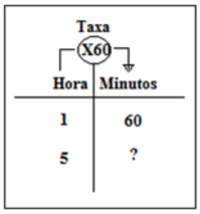
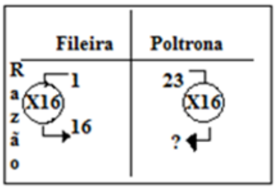
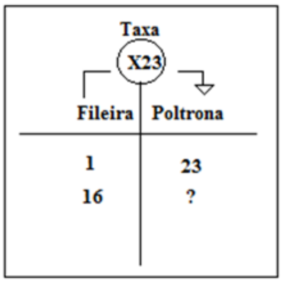
Entretanto, mesmo sendo classificada por Gitirana *et al*. (2014) como uma situação de 2ª extensão, porque requer raciocínios mais elaborados para sua resolução, o estudante pode utilizar um único procedimento ou uma combinação deles.

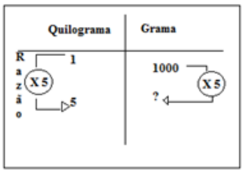
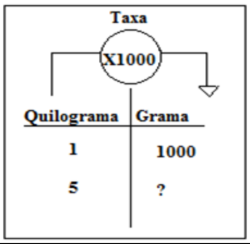
De acordo com a situação Q7, a partir da utilização da malha quadriculada, o estudante pode utilizar a estratégia de contar o número de quadradinhos necessários para cobrir a área, o que favorece a mobilização de procedimentos numéricos. Explicando de outra maneira, é possível decompor o retângulo em pequenos quadrados, em que são consideradas linhas e colunas com um metro de medida de lado. Isso permite compreender a área como um produto da medida do lado maior pela medida do lado menor, tanto no plano das dimensões como no plano numérico. Contudo, essa estratégia pode não contribuir para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, pois o estudante utiliza apenas a contagem para sua resolução, ou seja, apoia-se no campo aditivo (VERGNAUD, 2009). Segundo Merlini (2012, p. 151), tal estratégia sugere limitações, “[...] quando as quantidades envolvidas forem de magnitude maior, o que evidentemente inviabilizaria o emprego da contagem como esquema de ação”.

4.1.3 *Estruturas Multiplicativas – 3ª edição da Prova Paraná*

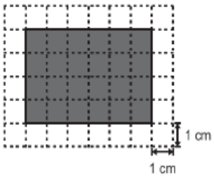
O Quadro 9 corresponde às situações respectivas à 3ª edição realizada em 2019, composto por quatro questões, sendo três pertencentes ao eixo Proporção Simples – *um para muitos;* e uma situação referente ao eixo Produto Cartesiano – classe *área*.

Quadro 9 - Situações-problema: estruturas multiplicativas 3ª edição 2019

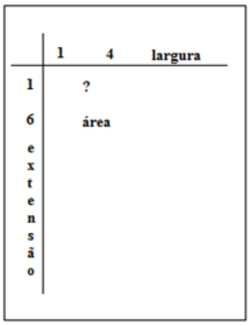
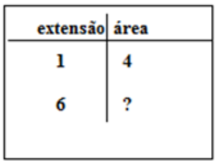
3ª edição Prova Paraná – 2019		
Questão nº 9 (Q9) **–** Toda quarta-feira Tomás permanece na escola por 5 horas. Durante quantos minutos Tomás permanece na escola nas quartas-feiras?		
Descritor da Prova PR	**CREP**	**Esquema Relacional Proporção simples – um para muitos**
D08 – Estabelecer relações entre unidades de medida de tempo.	UT Grandezas e medidas OC Medidas de tempo OA Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais	 
Questão nº 13 (Q13) – Em uma sala de cinema, as poltronas são distribuídas em fileiras. Cada uma das 16 fileiras possui 23 poltronas. Quantas poltronas no total há nessa sala de cinema?		
Descritor da Prova PR	**CREP**	**Esquema Relacional Proporção simples – um para muitos**
D20 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.	UT: Números e Álgebra OC: Números Naturais (multiplicação e divisão) AO: Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos**.**	 
Questão nº 17 (Q17) **–** Observe o desenho do produto que João comprou no supermercado.  Quantos gramas de arroz João comprou nesse supermercado?		

Descritor da Prova PR	**CREP**	**Esquema Relacional Proporção simples – um para muitos**
D07 – Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, L/mL.	UT: Grandezas e medidas OC: Medidas de massa AO: Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.	

Questão nº 3 (Q3a) **–** Uma gráfica utilizou papéis personalizados para produzir convites para um cliente. O formato e as dimensões de cada convite estão representados em cinza na malha quadriculada abaixo.



Quantos centímetros quadrados de papel, no mínimo, essa gráfica utilizou para fazer cada um desses convites?

Descritor da Prova PR	**CREP**	**Esquema Relacional Produto Cartesiano – área**
D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.	UT: Grandezas e medidas OC: Medida de área OA: Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área. Habilidade específica: Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de área utilizando diferentes estratégias e recursos manipuláveis, malha quadriculada e recursos digitais	

Fonte: Paraná (2019c).

Na situação Q9, Proporção Simples, classe *um para muitos*, a partir do diagrama é possível perceber que a relação entre as grandezas horas e minutos pode ser definida pelo operador funcional, ou seja, se a quantidade de horas aumenta, e o mesmo acontece proporcionalmente com a quantidade de minutos, já que é definida pela relação dada a partir do quociente entre minutos/hora, que indica o operador funcional 60 minutos por hora.

Outra estratégia de resolução pode ser compreendida em buscar a relação dentro da mesma grandeza, calculando $\frac{5horas}{1hora} = 5$, considerado o operador escalar, também definido como operador adimensional (VERGNAUD, 2009).

Conforme identificação das situações Q13 e Q17, por serem situações análogas à situação Q9, podem ser resolvidas usando o operador funcional ou o operador escalar. No entanto, novamente, para as situações que pertencem à classe *um para muitos*, conforme evidenciado nas situações Q9 e Q17, o valor correspondente à unidade de uma grandeza não é apresentado, devendo ser inferido pelos estudantes. Na situação Q9, o estudante deve relacionar uma hora a sessenta minutos; e para a situação Q17, deve compreender que um quilograma é equivalente a mil gramas. Essas duas situações requerem, novamente, conhecimentos implícitos para sua resolução. Para Gitirana *et al.* (2014, p. 121), muitas vezes, "[...] ao resolver um problema, o estudante faz uso de um conhecimento matemático (conceito em ação ou teorema em ação), que está implícito em suas ações".

Em geral, nas situações pertencentes ao eixo Proporção Simples de correspondência um para muitos, que compreende as classes *um para muitos, partição e cota*, as relações entre as grandezas são explícitas, em termos da unidade de uma das grandezas, tendo como ponto de referência a unidade que representa o cardinal um (1), considerado o elemento neutro da multiplicação. No entanto, conforme destacado nas situações, ao não ser apresentado o valor unitário correspondente a uma unidade, esse fato aumenta o grau de dificuldade para a resolução desse tipo de situação, pois envolve conhecimentos implícitos dos estudantes.

É importante considerar, ainda, que o valor numérico (274000) presente na situação-problema Q17 pode representar um caráter desafiador da situação, pois a utilização de valores numéricos de tamanhos variados pode promover associações entre conteúdos e conceitos, bem como promover rupturas e causar o desequilíbrio entre as situações-problema, por exigir dos estudantes o domínio desses conhecimentos.

Ao analisar a situação Q3a, contida no Quadro 9, pode-se perceber que ela é análoga à situação Q7, pertencente ao Quadro 8. Ambas buscam *encontrar a medida-produto*, considerando que as medidas elementares são apresentadas. A situação Q3a dispõe de duas quantidades (comprimento e largura – dimensões simples), e busca uma terceira medida de outra quantidade (área – dimensão produto). Nesse caso, o produto entre as medidas lineares $6cm \cdot 4cm$ resulta na medida da área da superfície (24 cm^2).

De acordo com Gitirana *et al*. (2014, p. 75), essa situação caracteriza-se como de 2ª extensão, pois cerca de "[...] menos de 30% dos estudantes de 6º ano obtêm êxito" ao resolvê-la.

Como se pode perceber, em cada categoria de situações-problema, há diversos fatores que podem influenciar na sua resolução, podendo deixá-la mais simples ou mais complexa, mas sobretudo interferem diretamente em seu resultado, e consequentemente no desempenho dos estudantes.

4.1.4 *Análise da progressividade das situações (2019)*

Assim, finalizada a identificação das classes e a análise de todas as situações-problema relativas às três edições realizadas em 2019, passamos para a interpretação e comparação dos tipos de situações, conforme apresentado nos Quadros 7, 8 e 9, respectivamente, identificadas como Q20, Q4 e Q13, buscando relacionar seu grau de complexidade com o desempenho apresentado pelos estudantes.

Considerando o caráter diagnóstico e a frequência trimestral da Prova Paraná, a partir da identificação das situações-problema ao longo do ano de 2019, pode-se constatar que os resultados apresentados inicialmente pelos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, com relação ao percentual de acertos, que influenciou esta proposta de pesquisa, justificam-se ao analisar os tipos de situações a partir de suas estruturas e do cálculo relacional exigido, principalmente de acordo com o investimento cognitivo exigido para cada resolução. Vale ressaltar que as três situações escolhidas inicialmente tinham a função, de acordo com seus descritores, de avaliar o nível de desempenho a partir das habilidades dos estudantes em "[...] resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória" (PARANÁ, 2019a, p. 21).

Nessa perspectiva, a primeira situação identificada no caderno de provas referente ao 5º ano do EF, a situação Q20, exemplificada por: *"[...] Um hotel tem 2 andares de estacionamento. Cada andar tem 6 setores e em cada setor existem 7 vagas. Quantas vagas há, ao todo, no estacionamento desse hotel?"* (PARANÁ, 2019a, p. 21), apresentou um percentual de acertos de pouco mais de 15%, e segundo a classificação de Vergnaud, refere-se à uma relação quaternária – eixo Proporção Múltipla. Conforme já explicitado anteriormente, esse tipo de situação é classificado como de 3ª extensão, o que lhe confere um grau de dificuldade significativo para sua resolução, ao considerar estudantes do Ensino Fundamental.

A característica elementar desse tipo de situação refere-se às quantidades possuírem uma relação de dependência. Na situação Q20, é possível perceber que as grandezas envolvidas são proporcionais. Isso nos permite encontrar 42 vagas em 12 setores, realizando uma proporção simples entre as grandezas vagas e setores. A partir dessa quantidade, podemos determinar o total de vagas de estacionamento em dois andares. Pode-se observar, então, que ao aumentar a quantidade de setores, o mesmo acontece com a quantidade de vagas; e ao aumentar o número de andares, aumenta também a quantidade de vagas. Percebe-se, assim, a utilização de duas Proporções Simples encadeadas, caracterizando uma Proporção Múltipla.

Quando comparado aos resultados da pesquisa de Gitirana *et al.* (2014), esse resultado se assemelha ainda mais, tendo em vista o percentual de acertos de 20% de alunos de 5º ano do EF. Para as autoras, esse tipo de situação é ainda bem pouco compreendido pelos alunos até o 9º ano do EF. Esse tipo de situação-problema, em geral, exige dos estudantes formas mais elaboradas de pensamento.

Ao analisar o significativo aumento no percentual de acertos com relação a segunda e terceira edições, passando de cerca de 15,78% (1ª edição) para 76,6% na situação Q4, e de 83,33% na situação Q13, pode-se perceber que ambas envolvem, também, relações quaternárias. Contudo, referem-se a situações-problema elementares, classificadas como situações prototípicas da multiplicação.

Comumente, esses tipos de situação são utilizados para abordar o conceito multiplicativo em sala de aula, os quais exigem raciocínios mais simples, e para as quais os estudantes apresentam, em sua maioria, menor dificuldade para resolver (GITIRANA *et al.*, 2014). Destaca-se que nas situações pertencentes ao eixo Proporção Simples, de correspondência um para muitos, podem ser identificados três conjuntos de situações, caracterizados pelo elemento desconhecido na relação proporcional: a multiplicação, a divisão por partes e a divisão por quotas. Essas situações apresentam dificuldades diversas, ao se considerar, principalmente, que "[...] ao alterar o termo desconhecido nas situações, é possível observar que o nível de complexidade da situação varia, pelas relações a serem compreendidas em cada situação e pela operação a ser utilizada" (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017b, p. 27).

A situação Q4, identificada na segunda edição, pertence ao eixo Proporção Simples *partição*, foi exemplificada por: "[...] *Fábio é o dono de um mercado. Ele mandou fazer 1209 folhetos com as promoções e os dividiu igualmente em 3 suportes na entrada do mercado. Quantos folhetos ficaram em cada suporte desse mercado?*" (PARANÁ, 2019b, p. 4). Ela requer, para sua resolução, uma divisão com grandezas do tipo discreta. Para sua resolução, o raciocínio utilizado está associado à operação de divisão de quantidades de naturezas distintas, associado à ideia de repartir, distribuir ou partilhar. Nesse tipo de situação, segundo Vergnaud (2009, p. 241), "[...] é preciso encontrar o valor unitário, conhecendo-se o elo de correspondência entre as duas grandezas de natureza diferente". A situação requer uma distribuição equitativa de 1209 folhetos em 3 suportes, e conforme já explicitado anteriormente, pode ser resolvida encontrando o operador escalar ou o operador funcional. Para determinar o operador escalar, divide-se a quantidade total de folhetos por um. O operador escalar 3, então, deve ser usado para determinar a quantidade de folhetos por suporte. Explicando de outra maneira, divide-se a quantidade total de folhetos (1209) pelo escalar (3). Outra maneira de resolver essa situação sem utilizar o operador escalar é utilizando o operador funcional. Essa estratégia é compreendida como divisão por partição ou divisão entre grandezas distintas. Divide-se 1209, quantidade total de folhetos; por 3, que representa a quantidade total de suportes.

Segundo Santana, Lautert e Filho (2017a, p. 59), a utilização do diagrama evidencia a relação quaternária presente na situação, e propicia que os estudantes percebam a relação de proporcionalidade fixa entre as grandezas, avançando nesse tipo de situação e preparando-se para a compreensão de funções, conteúdo matemático não abordado de forma explícita nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Enquanto a situação Q4 parte de uma quantidade maior em busca da quantidade menor, a situação Q13 faz o inverso: busca uma quantidade maior a partir da quantidade menor. Isso porque a situação identificada na 3ª edição, Q13, também pertence ao eixo Proporção Simples, mas de classe *um para muitos,* cuja operação requerida para resolução é uma multiplicação de grandezas do tipo discreta. Ela foi exemplificada como: "[...] *Em uma sala de cinema, as poltronas são distribuídas em fileiras. Cada uma das 16 fileiras possui 23 poltronas. Quantas poltronas no total há nessa sala de cinema?*" (PARANÁ, 2019c, p. 11). No entanto, um número significativo de estudantes consegue resolver esse tipo de situação por meio do raciocínio aditivo, utilizando a estratégia da soma de parcelas iguais.

Embora sejam as duas situações Q4 e Q13, caracterizadas como situações prototípicas da multiplicação, ao alterar o termo desconhecido, é possível observar que o nível de complexidade varia de acordo com as relações a serem compreendidas em cada situação e pela operação a ser utilizada. Corroborando, Magina, Santos e Merlini (2014, p. 521) afirmam que "[...] o que está implícito nessa situação é uma relação quaternária entre duas quantidades de naturezas distintas". No entanto, "[...] sua resolução, comumente, se apoia em uma relação ternária: $a \cdot b = c$, ou seja $16 \cdot 23 = 368$. Dessa forma justifica-se a necessidade, "[...] do ponto de vista didático, de se fazer clara distinção entre as duas relações: a quaternária e a ternária" (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 522).

Vale destacar que, "diferentemente das relações quaternárias, as relações ternárias são tratadas como uma relação entre dois elementos, de mesma natureza ou grandeza, que se compõe para formar um terceiro elemento" (SANTOS, 2012, p. 101). Assim, as relações ternárias podem ser evidenciadas, por exemplo, multiplicando as grandezas centímetros por centímetros, tendo como resultado uma terceira grandeza, centímetros quadrados; ou também, as grandezas número de meninos por número de meninas dançarinos, produzindo outra grandeza, pares de dançarinos. Assim, considerando esses argumentos, do ponto de vista didático, é necessário fazer uma clara distinção entre as duas classes de situação: a quaternária e a ternária (SANTOS, 2012).

De forma geral, nesse tipo de situação, por se tratar da classe um para muitos, os estudantes não se atentam para a relação de proporcionalidade entre a quantidade de cadeiras e a quantidade de filas (PEROVANO, 2019), por exemplo. Ao considerar que as situações com a ideia de correspondência um para muitos permitem um tratamento didático típico das relações ternárias, como $a \cdot b = c; \frac{c}{a} = b; ou \frac{c}{a} = b$ (sendo *a*, *b*, e *c* números naturais), e dessa forma dispensam a relação quaternária para sua resolução, Merlini (2012, p. 135) afirma que esses tipos de "[...] tratamentos favorecem a algoritmização precoce das operações de multiplicação e de divisão, apoiados na memorização da tabuada, estratégia de ensino mais comumente explorada em sala de aula".

Comparando esses resultados, as informações obtidas na parte inicial desta pesquisa, relacionadas à identificação dos tipos de situações-problema do Campo Multiplicativo presentes nas três primeiras edições realizadas em 2019, e à caracterização quanto ao seu grau de dificuldade, são fundamentais para compreensão e reflexões sobre o desempenho dos estudantes. A partir dessas análises, foi possível inferir que a primeira situação-problema, Q20, presente na primeira edição de 2019, apresenta maior nível de dificuldade para os estudantes, considerando sua complexidade, quando comparada às demais situações, Q4 e Q13, contidas nas 2ª e 3ª edições, evidenciam não somente a inexistência de progressividade das situações entre as três edições, mas, o que é preocupante, que o melhor desempenho dos estudantes se refere a uma situação-problema prototípica da multiplicação, na última edição da Prova Paraná.

Outro aspecto percebido nas três primeiras edições da Prova Paraná é que todas as situações pertencentes ao eixo Proporção Simples, classe *um para muitos*, com exceção da situação Q13 (Quadro 9), não apresentam o valor unitário da grandeza, devendo ser inferidos pelos estudantes, a saber: situação Q8 e Q18, respectivas ao Quadro 7 (1ª edição); situação Q16, Quadro 8 (2ª edição); e situações Q9 e Q17, contidas no Quadro 9 (3ª edição). Chama a atenção, também, que todas essas situações se referem, de acordo com o CREP, à Unidade Temática – Grandezas e Medidas, diferindo apenas nos descritores avaliados, de acordo com seus Objetos de Conhecimento. Já a situação Q13, de acordo com o CREP, pertence à Unidade Temática Números e Álgebra. O Quadro 10 exemplifica as situações que não apresentam o valor unitário em situações respectivas à *classe um para muitos*.

Quadro 10 **-** Situações-problema sem o valor unitário das grandezas

Descritor	Unidade Temática/Objeto de Conhecimento	Questão
D9 Resolver problema envolvendo medidas de tempo	Grandezas e Medidas Medidas de Tempo	Q8 – Fernanda fez um curso de espanhol com duração de 2 anos. Quantos meses durou esse curso de Fernanda?
		Q18 – Ana fez uma cirurgia e precisou ficar três semanas de repouso. Quantos dias Ana ficou de repouso após a cirurgia?
D7 Resolver problemas significativos utilizando unidades de medidas padronizadas como km/m/cm, kg/g/mg, L/mL	Grandezas e Medidas Medidas de Comprimento e Medidas de capacidade	Q16 – Amanda viajou de férias e percorreu uma distância de 274 km para chegar à cidade onde seus pais moram. Quantos metros Amanda percorreu para chegar à cidade de seus pais nessa viagem?
		Q17 – Observe o desenho do produto que João comprou no supermercado.  Quantos gramas de arroz João comprou nesse supermercado?
D8 Estabelecer relações entre unidade de medida de tempo	Grandezas e Medidas Medidas de tempo	Q9 – Toda quarta-feira, Tomas permanece na escola por 5 horas. Durante quantos minutos, Tomas permanece na escola nas quartas-feiras?

Fonte: A autora.

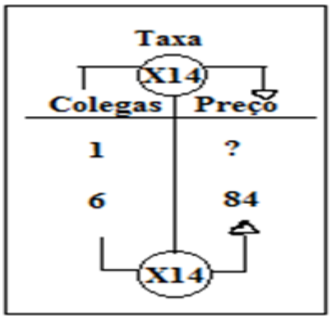
Destaca-se que, para a resolução das situações-problema apresentadas no Quadro 10, os estudantes devem compreender as relações existentes entre unidades de tempo, unidades de comprimento e unidades de capacidade presentes no conteúdo *Unidades de Medida do Sistema Métrico Decimal* com suas unidades padrão, bem como as diferentes grandezas e as transformações das unidades em múltiplos e submúltiplos. Embora sejam todas situações protótipos, esse fato implica no sucesso ou não da resolução destas situações, dependendo da competência de cada estudante, pois segundo Gitirana *et al.* (2013, p. 62), muitas vezes, "[...] um conhecimento prévio impede que o aluno compreenda um outro conhecimento".

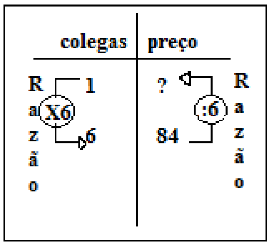
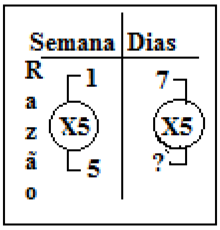
4.1.5 *Estruturas Multiplicativas – 1ª edição da Prova Paraná (2020)*

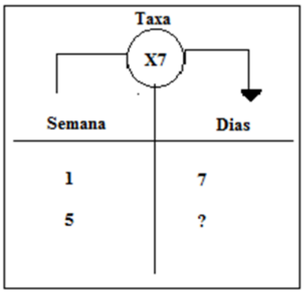
A seguir, são apresentadas as situações presentes na Prova Paraná, 1ª edição, realizada em 2020. Contudo, considerando que no referido ano foi realizada apenas uma edição, a análise e possíveis reflexões acerca do grau de complexidade e da progressividade relacionados às estruturas das situações ao longo de suas aplicações ficam comprometidas. Isso ocorre, também, na edição de 2021, considerando apenas a prova realizada em outubro do referido ano. Esse fato deriva da situação de pandemia COVID – 19, que vem se estendendo desde o início do ano de 2020, impedindo a aplicação trimestral prevista para a Prova Paraná nos anos de 2020 e 2021. Nesse sentido, enfatizamos que o caráter diagnóstico da avaliação, um de seus propósitos mais evidentes, foi afetado pela descontinuidade, pois inviabiliza mapear trimestralmente os pontos fortes, bem como os pontos de maior dificuldade de cada estudante. Por esse motivo, não foi possível realizar comparações e análises mais aprofundadas a respeito da progressividade das situações-problema presentes nas edições anuais previstas, evidenciando o aumento ou não no grau de dificuldade para sua resolução, que ajudassem na identificação da existência de problemas mais complexos, considerando sua tipologia e a hierarquia de tais situações.

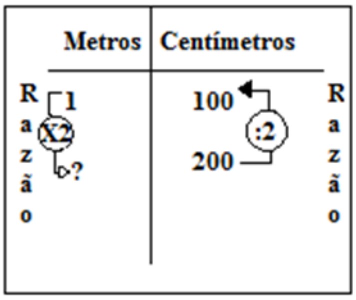
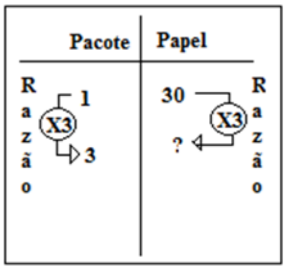
O Quadro 11 apresenta quatro situações-problema de estruturas multiplicativas presentes na edição 2020. Nessa edição, todas as situações identificadas pertencem ao eixo Proporção Simples, sendo uma relativa à classe *partição*; duas relativas à classe *um para muitos;* e uma relativa à classe *quotição*.

Quadro 11 - Situações-problema: estruturas multiplicativas 1ª edição (2020)

<table>
<tr><th colspan="3">1ª edição Prova Paraná – 2020</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 2 (Q2) – Carla fez aniversário e 6 de seus colegas se juntaram para comprar um presente para ela. Esse presente custou 84 reais, sendo que esse valor foi dividido, igualmente, entre esses colegas. Qual foi o valor, em reais, que cada um desses colegas pagou pelo presente de Carla?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – partição</th></tr>
<tr><td>D20 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.</td><td>UT: Números e Álgebra
OC: Números Naturais (multiplicação e divisão)
OA: Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 10 (Q10) – Joice nasceu há, exatamente, 5 semanas. Há quantos dias Joice nasceu?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – um para muitos</th></tr>
<tr><td>D08 – Estabelecer relações entre unidades de medida de tempo.</td><td>UT Grandezas e medidas
OC Medidas de tempo
OA Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais. Estabelecer relações entre medidas, números racionais (expressos na forma decimal e fracionária) e porcentagem</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 18 (Q18) – Mariana comprou uma fita de 200 centímetros para fazer um bordado. Qual é a medida, em metros, dessa fita que Mariana comprou?</td></tr>
</table>

Descritor da Prova PR	CREP	Esquema Relacional Proporção simples – cota
D7 – Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/ cm/mm, kg/g/mg, L/mL	UT Grandezas e medidas OC Medidas de comprimento OA (EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais. Estabelecer relações entre medidas, números racionais (expressos na forma decimal e fracionária) e porcentagem	
Questão nº 22 (Q22) – Heitor comprou 3 pacotes iguais de papel fotográfico. Cada um desses pacotes tinha 30 folhas de papel fotográfico. Ao todo, quantas folhas de papel fotográfico Heitor comprou?		
Descritor da Prova PR	**CREP**	**Esquema Relacional Proporção simples – um para muitos**
D20 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.	UT: Números e Álgebra OC: Números Naturais (multiplicação e divisão) OA: Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	

Fonte: Paraná (2020).

É possível perceber, a partir das informações apresentadas no Quadro 11, que todas as situações-problema são de natureza Proporção Simples de correspondência um para muitos, considerando apenas a variação de sua complexidade a partir da variação de suas subclasses, identificadas como *um para muitos, partição e quota.* Conforme já explicitado, as situações pertencentes a esse eixo envolvem a multiplicação ou a divisão por partes ou divisão por quotas.

As situações do eixo Proporção Simples de multiplicação *um para muitos*, expostas em Q10 e Q22, são problemas prototípicos e em sua maioria não causam grandes dificuldades aos alunos dos anos iniciais, pois muitos utilizam a soma de parcelas iguais como estratégia de resolução para esse tipo de situação. Em geral, nessas situações, o valor unitário está presente, as quantidades são enunciadas na ordem direta em que podem ser operadas, e as situações podem ser resolvidas por meio da multiplicação, conforme pode ser observado nos diagramas elaborados para cada uma delas. Contudo, coincidentemente com situações da classe *um para muitos* já vistas nas edições anteriores, novamente o valor unitário não é explicitado no enunciado da situação Q10.

As situações Q2 e Q18, embora ambas requeiram a mesma operação para sua resolução, no caso a divisão, elas trazem ideias diferentes e apresentam dificuldades distintas. Para a resolução desses tipos de situações-problema, *partição* e *cota*, segundo Vergnaud (2009, p. 242), “embora a operação que permite resolver esses problemas seja, em ambos os casos, uma divisão, esse fato não coloca em jogo as mesmas noções”.

Observando o diagrama proposto para a situação partitiva, na situação Q2 procura-se o valor correspondente à unidade, sendo informado o valor que corresponde a certa quantidade; ou seja, é preciso procurar a extensão da parte (valor unitário da mesma medida) a partir do escalar. O conceito-chave presente nessa situação é a divisão (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017b). Partindo da grandeza quantidade de colegas e dividindo a quantidade total de colegas (6) pelo escalar (6), obtém-se um (1). Assim, é necessário identificar qual número divide 6 e resulta em 1. Para manter a proporcionalidade, utilizando o mesmo raciocínio, esse mesmo operador escalar deve ser utilizado na grandeza preço, de acordo com a mesma operação indicada na grandeza quantidade de colegas. Em termos aritméticos: $\frac{84}{6} = 14$, o que representa o valor a ser pago por colega (14). Segundo Castro (2016), Vergnaud (1983) afirma que o esquema relacional relativo à situação Q2 apresenta uma inversão mental a respeito do operador escalar (6). Nesse contexto, o autor explica que não é tarefa fácil para os estudantes compreenderem a inversão da relação *‘x 6’,* que representa o produto do operador escalar, para *‘÷ 6’*, quociente. Segundo Gitirana *et al.* (2014), esse tipo de situação configura-se como um problema protótipo.

Outra variação de situações pertencentes ao eixo Proporção Simples, denominada cota ou quotição, está representada pela situação Q18. Analisando o diagrama, é possível observar, iniciando na grandeza quantidade de centímetros, que o estudante deve ter consolidado o conceito de medida de comprimento, bem como compreender a relação existente entre metros e centímetros, e assim inferir que um metro corresponde a cem centímetros. Portanto, o estudante deve compreender a ideia de conversão de unidades, o que pode lhe trazer outra dificuldade, relacionada ao Sistema Métrico Decimal (TELES, 2007).

O estudante deve observar que, ao dividir a quantidade total de centímetros (200) pela quantidade de centímetros para um metro (100), obtém-se o operador escalar 2. Esse tipo de situação está associado ao ato de dividir o total de fita (200 cm) pela cota (100 cm), o que resulta em 2 metros. Nesse caso, para manter a proporcionalidade, aplica-se o mesmo escalar (2) na grandeza quantidade de metros, mas de maneira inversa. Assim, ao multiplicar esse operador escalar pela quantidade unitária (1 metro), é possível determinar a quantidade total de metros necessários para fazer o bordado (2), uma vez que $1 \cdot 2 = 2$.

Pode-se observar que, na situação Q18, busca-se o tamanho das partes (quota), diferentemente da situação Q2, em se busca o número de partes (partição).

Já a situação Q18 envolve uma divisão por quota, e situações desse tipo costumam ser consideradas mais complexas do que a divisão por partes. A inversão acontece no operador funcional *'x 100'* (produto), aplicando o operador *'÷100'* (quociente), e considerando o esforço cognitivo envolvido em sua resolução, de acordo com Gitirana *et al.* (2014), esse tipo de situação configura-se como de primeira extensão.

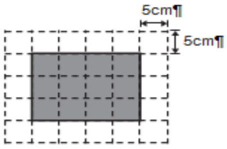
Embora se trate de divisão equitativa em ambos os casos, tanto a situação Q2 quanto a situação Q18 são representadas por esquemas análogos, mas que exigem procedimentos de resolução diferentes.

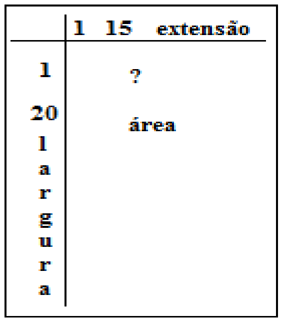
O entendimento desses tipos de situação amplia os procedimentos de resolução, pois o estudante tanto pode utilizar o fator escalar como o fator funcional como estratégia de resolução, sendo este último um conhecimento de base para funções. No entanto, ao analisar as dificuldades cognitivas presentes, os problemas de cota são mais complexos, quando comparados aos de partição. Neste último, ao dividir duas grandezas de mesma natureza, obtêm-se o operador escalar, ou seja, um número adimensional, que apenas reproduz, na coluna da direita, o que se passa na coluna da esquerda. Ainda, para Castro (2016), existem outras situações de divisão ainda mais complexas, ao considerar o operador funcional e escalar como frações, pois requisitam dos estudantes um novo sentido de número.

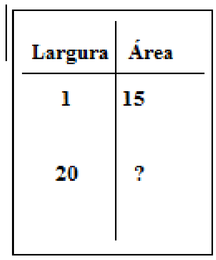
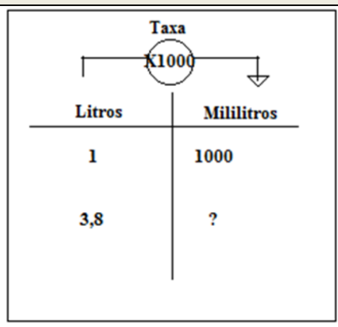
4.1.6 *Estruturas Multiplicativas – 1ª edição da Prova Paraná (2021)*

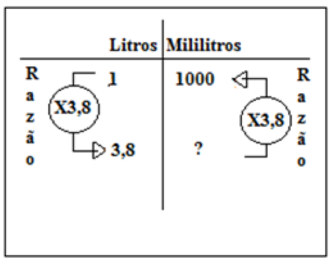
Partindo para análise da última edição da Prova Paraná realizada até a presente data, o Quadro 12 apresenta as situações-problema presentes na 1ª edição realizada em 2021.

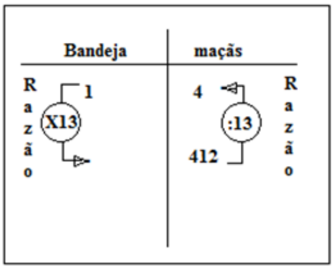
Quadro 12 - Situações-problema: estruturas multiplicativas 1ª edição (2021)

<table>
<tr><th colspan="3">1ª edição Prova Paraná – 2021</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 3 (Q3b) – Marcelo fez uma placa de madeira para colocar na porta do seu quarto. Essa placa está destacada de cinza na malha quadriculada abaixo.


Qual é a medida da área dessa placa de madeira, em centímetros quadrados?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Produto cartesiano</th></tr>
<tr><td>D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadassem malhas quadriculadas.</td><td>UT: Grandezas e medidas
OC: Medidas de área
AO: Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área. Habilidade específica: Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de área utilizando diferentes estratégias e recursos manipuláveis, malha quadriculada e recursos digitais.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="3">Questão nº 14 (Q14) – Gláucia comprou uma garrafa térmica com 3,8 litros de capacidade. Ela encheu completamente essa garrafa com chá para levar a um piquenique. A quantidade de chá, em mililitros, que Gláucia levou para o piquenique nessa garrafa térmica foi de:</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – um para muitos</th></tr>
<tr><td>D07 – Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, L/mL.</td><td>UT Grandezas e medidas
OC Medidas de capacidade
OA Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais. Estabelecer relações entre medidas, números racionais (expressos na forma decimal e fracionária) e porcentagem.</td><td>


</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Questão nº 21 (Q21) – Vicente utilizou algumas bandejas para embalar 412 maçãs. Em cada bandeja, ele colocou 4 dessas maçãs. Quantas bandejas, ao todo, Vicente utilizou para embalar essas maçãs?</td></tr>
<tr><th>Descritor da Prova PR</th><th>CREP</th><th>Esquema Relacional
Proporção simples – cota</th></tr>
<tr><td>D20 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.</td><td>UT: Números e Álgebra
OC: Números Naturais (multiplicação e divisão)
OA: Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Paraná (2021).

A edição 2021 é composta por duas situações-problema pertencentes ao eixo Proporção Simples, Q14 – *um para muitos;* e Q21 – *quotição*; e uma situação pertencente ao eixo Produto Cartesiano – classe *área*, Q3b.

Esta última, Q3b, é uma situação análoga à situação Q7, apresentada no Quadro 8, respectiva à 2ª edição ocorrida em 2019; e à situação Q3a presente no Quadro 9, referente à 3ª edição, também em 2019. Considerando que as três situações buscam a área da figura definida em malha quadriculada, a diferença se apresenta apenas no valor da medida dos lados, representados por um centímetro em Q7, um metro em Q3a, e cinco centímetros em Q3b. Outro aspecto importante na análise dessas situações a ser considerado é o fato de as medidas dos lados dos quadriláteros serem números inteiros, que variam de 1 a 5 unidades de medida de comprimento (u. m. c). Esses elementos são importantes na resolução das situações, pois facilitam o raciocínio dos estudantes. Segundo Almouloud (2016), são apontados como uma variável didática, pelo fato de:

> [...] minimizar o custo em termos de cálculos, pois o objetivo não é testar a capacidade do aluno em manipular números grandes, nem lidar com números fracionários e/ou decimais, mas, sim, de ele conseguir articular os dados do problema com os conhecimentos de seu repertório para montar estratégias que permitam solucionar os diferentes da situação-problema proposta (ALMOULOUD, 2016, p. 137).

Com relação ao eixo Produto Cartesiano, a classe área apresenta situações envolvendo a ideia de configuração retangular, conforme Q3b, e “pode ser tratada pelo modelo matemático *“* $a \cdot b = c$ ou $\frac{c}{a} = b$ *”,* conforme expõe Santos (2012, p. 119). A relação ternária que se constitui em Q3b apresenta uma relação entre dois elementos de mesma natureza ou mesma grandeza, que se compõem para formar um terceiro elemento. Assim, considerando resolução dessa situação, é possível recorrer à operação $4 \cdot 3$, tendo em vista a largura e a extensão da figura. No entanto, o estudante também deve considerar que cada unidade de área tem valor cinco, e não um, conforme apresentado nas situações análogas anteriormente vistas, Q7 e Q3a.

É possível perceber que todas as situações referentes à classe *área* apresentadas na Prova Paraná dispõem duas quantidades (comprimento e largura), e se procura uma terceira medida de certa quantidade (área). Nesse tipo de situação, o produto entre as medidas lineares resulta na medida da área da superfície. Desse modo, para resolver as situações Q3a, Q7 e Q3b, é necessário recorrer à operação de multiplicação entre as medidas das grandezas – comprimento e largura, para encontrar o resultado. Nesse caso, é possível constatar que todas as situações requerem o mesmo raciocínio e utilizam malha quadriculada como apoio visual.

Considerando a progressividade das situações presentes nessa última edição, a presença desse tipo de situação na avaliação diagnóstica aumenta o nível de dificuldade para sua resolução, pois se configura como uma situação-problema de 2ª extensão, quando comparada com as duas primeiras Q14 e Q21, consideradas problemas protótipos. De acordo com a pesquisa de Gitirana *et al.* (2014), esse tipo de situação-problema, Q3b, apresenta um percentual de acertos de 36% em estudantes do 5º ano do EF, pois se aproxima do desenvolvimento dos problemas de proporção simples do tipo *quarta proporcional*, permitindo concluir que não é um problema prototípico.

Ainda, de acordo com Almouloud (2016), a complexidade da figura considerada como variável didática pode influenciar nos procedimentos de resolução dos estudantes. Também, a malha quadriculada utilizada nas três situações como aporte visual e a figura familiar aos estudantes possibilitam interferir na construção das estratégias de resolução da situação-problema, bem como em seu sucesso. Sob esse viés, destacamos outro aspecto importante, que as medidas dos lados do quadrilátero são números inteiros, e pode-se minimizar os custos em termos de cálculo quando a intenção é analisar se o estudante compreende o conceito de área do retângulo. Esse fato é percebido em todas as situações identificadas nesse eixo, Produto de Medidas.

Seguindo para análise da situação Q14, também pertencente ao eixo Proporção Simples, *classe um para muitos*, apesar de ser classificada como situação prototípica, o fator unitário novamente não é explicitado no enunciado, precisando ser inferido pelos estudantes. Nesse sentido, a ausência de informações no enunciado interfere nos procedimentos de resolução, pois o estudante deve compreender a relação entre as grandezas litros e mililitros, ou seja, conteúdos que devem estar consolidados em estudantes nessa etapa de escolaridade.

O fato de as medidas não estarem expressas na mesma unidade torna a situação ainda mais complexa, pois ao observar o enunciado, além dos conceitos variados, esse tipo de situação-problema exige a percepção da relação proporcional entre as unidades de medidas, o que requer a interação de esquemas e conceitos matemáticos mais complexos para sua resolução. Nesse sentido, as situações-problema que envolvem a conversão entre unidades de medida apresentam um grau de complexidade maior, pois demandam maior esforço cognitivo em relação às demais situações (PORTO, 2015).

Uma das formas mais comuns de solucionar esse tipo de situação tem início no procedimento de transformação de litros em mililitros, e requer do estudante a percepção entre as diferentes representações de medidas. Entretanto, outra variável importante que merece ser pontuada refere-se à natureza das quantidades, isto é, às características numéricas da situação, que representam fator importante no desempenho dos estudantes. O fato de a grandeza *capacidade da garrafa térmica* estar expressa por uma medida decimal (3,8) implica na complexidade da situação, ao se considerar a manipulação de operações nesse campo numérico – números decimais. De acordo com Santos (2005), as características numéricas das situações influenciam no desempenho e nas estratégias utilizadas pelos estudantes para sua resolução.

A situação Q21 é análoga à situação Q18 do Quadro 7, em que se tem o valor correspondente à unidade, certa quantidade é fornecida, e deseja-se saber quantas unidades, ou seja, procura-se obter o número de parte (quota), tendo a ideia de medir. De acordo com a situação Q21, em cada bandeja deve ser colocado o total de 4 maçãs, e deseja-se saber quantas bandejas são necessárias para colocar 412 maçãs. Portanto, o elemento desconhecido refere-se a quantas cotas de 4 maçãs obtém-se com 412 maçãs. Para esse tipo de situação, é necessária a divisão de duas quantidades de mesma espécie, classificada a partir de sua estrutura como uma situação de 1ª extensão, ao se considerar o nível de complexidade para sua resolução. De acordo com a pesquisa de Gitirana *et al.* (2014), essa classe de problema é resolvida por boa parte dos estudantes por subtração repetida, antes mesmo de estudar multiplicação e divisão, e atinge um percentual de acertos de 57% em estudantes do 5º ano do EF.

4.1.7 *A variedade de Situações de Estruturas Multiplicativas na Prova Paraná*

Analisando as situações-problema presentes em todas as edições investigadas da Prova Paraná, enfatizamos a presença preponderante de situações pertencentes ao eixo Proporção Simples. Entre as 106 questões analisadas, foram identificadas apenas 18 que se referiam a situações-problema do campo multiplicativo. Destas, 13 eram de natureza Proporção Simples. Das outras cinco situações identificadas, uma se referia ao eixo Comparação Multiplicativa; três ao eixo Produto Cartesiano; e uma ao eixo Proporcionalidade Múltipla. Situações pertencentes ao eixo Função Bilinear não foram contempladas nas edições analisadas.

A partir desta análise é possível perceber o predomínio de situações envolvendo relações quaternárias, em detrimento das situações que envolvem relações ternárias ao longo das cinco edições realizadas.

No entanto, ao analisar os tipos de questões presentes nessa avaliação externa, por se tratar de uma avaliação diagnóstica, permitiu inferir que as situações não apresentam progressividade com relação às etapas realizadas. Vale ressaltar que esse achado se torna ainda mais evidente quando comparadas as situações-problema presentes nas três edições de 2019 (ano em que houve aplicação de todas as edições previstas), considerando as suas características e as operações de pensamento exigidas para sua resolução, tendo em vista suas estruturas.

Para compreender melhor a diferença de complexidade entre as situações presentes nas cinco edições da Prova Paraná identificadas nesta pesquisa, pode-se analisar os dados do Quadro 13. Nele encontram-se os tipos de situações-problema edição a edição. Sendo assim, sintetiza a classificação das situações-problema identificadas.

Quadro 13 - Tipos de questões de estruturas multiplicativas identificadas nas 5 edições da Prova Paraná

Eixos	**Classes e subclasses**	**1ª/2019**	**2ª/2019**	**3ª/2019**	**1ª/2020**	**2ª/2021**
Proporção simples	Um para muitos	2	1	3	2	1
	Partição		1		1	
	Cota (Quotição)				1	1
	Quarta proporcional					

Comparação Multiplicativa	Referido desconhecido (subclasse - vezes maior)	1				
	Referente desconhecido (subclasse - vezes maior)					
	Relação desconhecida (subclasse - vezes mais)					
	Relação desconhecida (subclasse - vezes menor)					
Proporção Múltipla		1				
Função bilinear						
Produto cartesiano	Área (formação retangular)		1	1		1
	Combinação (subclasse - com todo desconhecido)					
	Combinação (subclasse - com parte desconhecida)					
	Combinação (subclasse - total desconhecido e nº de escolhas implícito)					

Fonte: A autora.

Embora o eixo Proporção Simples de *correspondência um para muitos* esteja presente em todas as edições, seja com a classe *um para muitos*, *partição* ou *quota*, situações de *correspondência muitos para muitos* ou classe *quarta proporcional* não foram contempladas.

Com relação ao eixo Comparação Multiplicativa, as classes e suas respectivas subclasses *Referente desconhecido* (subclasse - *vezes maior*), *Relação desconhecida* (subclasse - *vezes mais*) e *Relação desconhecida* (subclasse - *vezes menor*) também não estão representadas por meio das situações-problema. O mesmo ocorre com o eixo Produto Cartesiano, classe *Combinação*, pois nenhuma de suas subclasses está presente na Prova Paraná.

Percebemos que a Teoria dos Campos Conceituais é fundamental para a compreensão da tipologia das situações-problema presentes na Prova Paraná, considerando todos os aspectos evidenciados em cada situação, os quais se encontram intimamente ligados e correspondem a diferentes esquemas de ação, à resolução das situações e às operações de multiplicação e divisão. Em outras palavras, são elementos que podem refletir no desempenho dos estudantes em contextos de avaliação, considerando os cinco cadernos destinados a avaliar estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental na Prova Paraná.

Assim, mesmo com as contribuições proporcionadas nesse quadro teórico, a compreensão dessas classes de situações-problema pelos professores, bem como a escolha dos materiais utilizados e sua metodologia devem dar suporte à aprendizagem.

Segundo Vergnaud (1986, p. 76), “[...] é um objetivo prioritário, na investigação didática, investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações-problema que conferem significação e função a um conceito”. Assim, vislumbradas as potencialidades da TCC, especialmente na análise das situações-problema do Campo Conceitual Multiplicativo.

À luz dessas reflexões, buscamos estabelecer aproximações a partir da frequência desses tipos de situações nos Livros Didáticos que possa ser refletida em ambientes de avaliação. A análise dos Livros Didáticos (LD) da coleção Ápis, subsidiada pela Teoria dos Campos Conceituais (TCC), com destaque para as situações referentes ao campo multiplicativo, classes *um para muitos* e *partição* estão listadas logo a seguir.

Nesse sentido, no próximo capítulo, com o intuito de identificar e analisar as situações-problema de estruturas multiplicativas, o Livro Didático de matemática adotado como um dos instrumentos pedagógicos por uma escola – a coleção Ápis - Matemática (DANTE, 2019a; 2019b; 2019c; 2019d; 2019e) serviu como fonte de dados e informações. Tendo discutido em linhas gerais as classes de situações do Campo Conceitual Multiplicativo em situações da Prova Paraná, deter-nos-emos na discussão de situações pertencentes ao eixo Proporção Simples, classes *um para muitos* e *partição*, bem como Situações pertencentes ao eixo Proporção Múltipla, considerando os dados iniciais apresentados no Quadro 1, o qual apresenta o desempenho de estudantes, a partir da Prova Paraná.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Para atender a um dos objetivos específicos desta pesquisa, buscamos observar, neste capítulo, por meio de análises nos Livros Didáticos, o que o ensino usual prioriza com relação às estruturas dos problemas que se referem ao Campo Conceitual Multiplicativo proposto na coleção Ápis – Matemática, destinado ao Ensino Fundamental do 1º ao 5º ano.

No entanto, como já havia pesquisa específica para a referida coleção, de acordo com Rodrigues e Rezende (2021), os problemas que envolvem estruturas multiplicativas foram identificados a partir da classificação de Vergnaud, e suas informações foram comparadas às informações extraídas da Prova Paraná, a fim de discutir a complexidade das situações e a frequência com que aparecem nesse instrumento de pesquisa.

5.1 Situações-problema de Estruturas Multiplicativas Presentes na Coleção Ápis

Na coleção Ápis, o manual do professor respectivo a cada volume está organizado em Parte Geral e Parte Específica, também acompanha material digital[28]. Ele é considerado por seu autor como um guia pedagógico para o professor. A coleção atende as competências e habilidades apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aprovada em 2017, e traz as especificidades exigidas, tanto no que se refere às abordagens metodológicas quanto ao que se relaciona à organização dos conteúdos matemáticos, bem como à retomada de conteúdos prévios. Para toda a coleção, há indicação de recursos didáticos auxiliares[29], bem como referências para o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos dos professores, além de indicações de leitura complementar e de material multimídia para os estudantes.

A Parte Geral é comum a todos os volumes e não apresenta, de forma clara e objetiva, os princípios e os fundamentos teóricos que norteiam o trabalho da coleção no ensino da Matemática, apenas destaca para as Unidades Temáticas – Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, e suas possíveis articulações. A coleção procura promover a integração entre as cinco Unidades Temáticas, pois considera que os conhecimentos dos estudantes não estão classificados em campos (numéricos, geométricos etc.), mas interligados, enfatizando a importância do letramento matemático.

---

[28] O material digital complementa o trabalho desenvolvido no material impresso, com o objetivo de organizar e enriquecer o trabalho docente, contribuindo para sua contínua atualização e oferecendo subsídios para o planejamento e o desenvolvimento de suas aulas (DANTE, 2019).
[29] A indicação de recursos didáticos auxiliares compreende Glossário, Livros paradidáticos, Jornais e Revistas, Vídeos, Jogos, dentre outros (DANTE, 2019).

Outro pressuposto da Coleção destacado pelo autor é a construção do conhecimento pelo *fazer* e *pensar*, e para tal, enfatiza a importância da formulação e da resolução de problemas, fundamental para auxiliar os estudantes na compreensão dos significados dos conceitos matemáticos. Segundo o autor, a opção metodológica baseada na resolução de problemas tem a função de aproximar os estudantes dos conteúdos abordados e possibilitar sua discussão, hipóteses, análise e sistematização, constituindo-se em sua aprendizagem. Dessa forma, a resolução de problemas ganha destaque ao longo de toda a coleção, na ênfase em levar os estudantes a *aprender fazendo*, considerando as etapas de resolução de problemas (compreensão do problema, elaboração de um plano de solução, execução do plano, verificação ou retrospectiva e emissão da resposta).

A Parte Específica da Coleção apresenta a estrutura de cada volume, as orientações e as habilidades abordadas no Manual do Professor, página a página, bem como a reprodução do livro do estudante. Cada volume está dividido em Unidades, as quais apresentam seções, boxes e material complementar, em que as habilidades e as competências são apresentadas de forma clara e progressiva.

Em outros aspectos, constatou-se que em todos os volumes analisados há incentivo ao desenvolvimento de atividades com o uso de calculadora e com materiais manipulativos, bem como a utilização de jogos em todos os capítulos que compõem cada volume, evidenciando a importância do lúdico nessa etapa de escolarização. Também, em toda a coleção são apresentadas atividades que incentivam o cálculo mental, estimativas e arredondamentos, bem como a utilização de gráficos e tabelas. Outro aspecto observado é que todos os volumes da coleção possuem um forte apelo visual, por meio de ilustrações do cotidiano e de registros pictóricos como suporte, buscando apresentar a Matemática de forma contextualizada e significativa.

Cada volume é dividido em Unidades, e cada início de Unidade traz cenas do cotidiano, que proporcionam problemáticas que irão abordar os conteúdos propostos. O autor destaca a necessidade da retomada dos conhecimentos prévios, que devem ser levados em consideração com o objetivo de iniciar novos conteúdos. Assim, as atividades e as situações-problema buscam, de acordo com sugestões de revisões contínuas, retomar os assuntos estudados em Unidades anteriores. Segundo Vergnaud (1986, p. 81), é fundamental "[...] voltar às mesmas coisas ano após ano indo um pouco mais profundamente, introduzindo situações cada vez mais complexas contendo novos aspectos, mais poderosos, de um mesmo conjunto de conceitos, eventualmente um conceito novo". Esse processo leva os estudantes a um desenvolvimento conceitual mais significativo.

Desse modo, cada volume traz orientações específicas para o ano escolar a que se destina, conforme apresentamos em seguida. Reafirmamos que, para a análise a seguir, foram considerados como objeto de investigação apenas as situações-problema pertencentes ao eixo Proporção simples de ambas as classes: *um para muitos* e *partição*. O eixo Proporção Múltipla, conforme já explicitado por Rodrigues e Rezende (2021), não foi contemplado na respectiva coleção.

No quadro a seguir, estão destacadas as classes e subclasses de problemas do Campo Conceitual Multiplicativo propostas por Vergnaud (2009) identificadas na coleção investigada pelas autoras, conforme o ano escolar do Ensino Fundamental. Em complemento a esse quadro, a cada uma das situações-problema, buscamos associar a classificação relativa à complexidade, caracterizadas como situações prototípicas ou de extensão (1ª à 4ª), a fim de proporcionar reflexões sobre os aspectos conceituais e cognitivos implícitos nas situações, bem como seus aspectos didáticos, com base nos estudos realizados por Gitirana *et al*. (2014).

Quadro 14 - Quantidades de problemas identificados na coleção analisada

Classificação	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	Total
Comparação multiplicativa com referido desconhecido – vezes maior (protótipo)	0	0	0	0	0	0
Comparação Multiplicativa com referente desconhecido – vezes maior (2ª extensão)	0	0	0	0	0	0
Comparação Multiplicativa com relação desconhecida – vezes maior (3ª extensão)	0	0	0	0	0	0
Comparação Multiplicativa com relação desconhecida – vezes menor (4ª extensão)	0	0	0	0	0	0
Proporção Simples de um para muitos (protótipo)	1	9	14	23	6	53
Proporção Simples Partição (protótipo)	1	0	3	18	10	32
Proporção Simples – Cota (1ª extensão)	0	1	2	8	6	17
Proporção Simples Quarta proporcional (2ª extensão)	0	0	1	8	12	21
Proporção Simples Quarta proporcional com medidas que são múltiplas (2ª extensão)	0	0	0	0	0	
Produto cartesiano – Área (2ª extensão)	0	0	2	2	3	7
Produto cartesiano combinação – com todo desconhecido (sem indicação)	1	1	2	5	4	13
Produto cartesiano combinação – com parte desconhecida (3ª extensão)	0	0	0	0	0	0
Produto cartesiano combinação – com o total desconhecido e número de escolhasimplícito (4ª extensão)	0	0	0	0	0	0
Função bilinear (1ª extensão)	0	0	0	1	1	2
Proporção múltipla (3ª extensão)	0	0	0	0	0	0
Total	3	11	24	65	42	145

Fonte: Adaptado de Rodrigues e Rezende (2021, p. 12).

De acordo com os dados do Quadro 14, as obras analisadas apresentam 184 problemas de multiplicação, dos quais 39 são problemas mistos. No entanto, estes últimos foram desconsiderados nesta análise, tendo em vista que não são foco de nossa investigação. A razão é que esse tipo de problema coloca em jogo, além das relações do tipo multiplicativo, as relações do tipo aditivo (VERGNAUD, 2009). As demais situações de estruturas multiplicativas identificadas encontram-se distribuídas ao longo dos cinco volumes investigados da seguinte forma: três no primeiro ano, 11 no segundo ano, 24 no terceiro ano, 65 no quarto e 42 no quinto ano, totalizando 145 situações-problema de estruturas multiplicativas.

Como o objetivo desta fase da pesquisa foi estabelecer possíveis relações entre o desempenho dos estudantes e as classes de situações de estruturas multiplicativas, centrando atenção no estudo das situações respectivas ao eixo Proporção Simples (*classe um para muitos* e *classe partição*) e ao eixo Proporção Múltipla, a análise relativa ao baixo desempenho dos estudantes na Prova Paraná para este último eixo fica evidente, tendo em vista que em todos os livros da coleção investigada por Rodrigues e Rezende (2021) não foram encontradas situações referentes a esse tipo, o que pode justificar o resultado apresentado pelos estudantes.

De acordo com Vergnaud (2009), da forma como se apresenta Q20, esse tipo de situação é ainda mais delicado, quando comparado com as situações Q13 e Q4, pois conforme visto anteriormente, as situações que envolvem Proporção Múltipla são compostas por mais de duas grandezas relacionadas duas a duas, as quais mantém uma relação de proporcionalidade e dependência duas a duas. Em outras palavras, considerando as grandezas envolvidas, ao alterar o valor de qualquer uma delas, todas as demais grandezas envolvidas também serão alteradas.

Nesse sentido, além de se configurar como uma situação-problema com grau de complexidade significativo para sua resolução, levando em consideração sua estrutura, o fato de não serem identificadas situações relativas ao eixo Proporção Múltipla nos livros didáticos nos leva a concluir que esse tipo de situação não é trabalhado nessa etapa de escolarização. Isso porque, segundo Bittar (2017), o Livro Didático configura-se como um dos principais recursos de apoio pedagógico utilizados pelos professores.

Situações que envolvem o raciocínio proporcional são exploradas desde o início da escolarização. No entanto, em alinhamento com os documentos orientadores da Educação Básica no Paraná, segundo o CREP (2018, p. 82), "[...] resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros", configura-se como objetivo de aprendizagem explorado a partir do 5º ano do Ensino Fundamental. Portanto, o desenvolvimento do raciocínio proporcional inicia-se nessa etapa de escolaridade, mas é explorado com maior frequência nos anos finais do Ensino Fundamental, ampliando a ideia de proporcionalidade.

A partir dessas informações, foi possível inferir que, a partir do desempenho dos estudantes, que estes não foram expostos a esse tipo de situação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o que pode justificar o baixo desempenho apresentado por eles ao resolverem a situação Q20.

As informações fornecidas no Quadro 12 permitem inferir que há predominância de situações-problema prototípicas da multiplicação pertencentes ao eixo Proporção Simples, representadas por 53 delas referentes à classe *um para muitos,* e 32 à classe *partição.* Com relação à classe *um para muitos,* as situações estão distribuídas em toda a coleção, sendo uma no volume respectivo ao primeiro ano, nove para o segundo, 14 para o terceiro, 23 para o quarto, e seis para o volume respectivo ao quinto ano. Com relação à classe *partição*, as situações estão distribuídas apenas em quatro volumes da coleção, dos cinco utilizados, sendo uma situação-problema no volume respectivo ao primeiro ano, três no volume relativo ao terceiro ano, 18 referentes ao quarto ano e 10 situações referentes ao quinto ano. Conforme se pode observar, o livro respectivo ao segundo ano não contempla situações dessa classe.

Chama a atenção o aumento significativo no número de situações do Campo Multiplicativo no volume referente ao quarto ano, saltando de 14 para 23 situações pertencentes à classe *um para muitos,* e de três para 18 situações pertencentes à classe *partição*. Isso se deve ao fato de que os três primeiros anos fazem parte do ciclo de alfabetização matemática (ZANELLA; KRACHINSCKI; ZANELLA, 2019).

De acordo com pesquisa realizada por Gitirana *et al.,* (2014), as situações de Proporção Simples, classe *um para muitos,* são as mais propostas aos estudantes em toda a etapa inicial de escolarização. Essa afirmação corrobora com a pesquisa de Rodrigues e Rezende (2021), que aponta um número expressivo de situações dessa classe, totalizando 53 problemas identificados em toda a coleção analisada. Ainda, são consideradas por Gitirana *et al.*, (2014) como um dos tipos de situações multiplicativas de mais fácil resolução, as situações prototípicas.

Segundo Merlini (2012), a presença desse tipo de situações em livros didáticos é notável, pois de acordo com suas características, possibilitam estabelecer uma relação de continuidade entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, por meio da adição de parcelas repetidas, ou mesmo por meio de subtrações sucessivas de determinada quantidade.

Embora possa ser considerado como fator facilitador, do ponto de vista didático, esse tipo de abordagem metodológica possui limitações que implicam no processo de ensino dos conceitos de multiplicação e de divisão, principalmente quando as grandezas envolvidas são de maior magnitude (MERLINI, 2012).

Cotejando essas informações com a questão de pesquisa inicial, em que o percentual de acertos dos estudantes evolui de 76,8% na situação *partição* (Q4) para 83,3% na situação *um para muitos* (Q13), ainda que se perceba um elevado aumento no percentual de acertos, quando comparadas com a primeira edição da Prova Paraná realizadas em 2019, é possível constatar que o melhor desempenho foi obtido nesta última, situação de Proporção Simples, classe *um para muitos*. Apesar de essas situações serem classificadas como situações prototípicas, a diferença no desempenho aponta para peculiaridades das situações multiplicativas que precisam ser trabalhadas com os estudantes.

Nesse sentido, como o objetivo deste capítulo é identificar as situações-problema de estruturas multiplicativas no Livro Didático e assim compreender o desempenho dos estudantes apresentado nas três edições da Prova Paraná em 2019, a partir do estabelecimento de um paralelo entre a tipologia das situações-problema nela propostas e como elas são apresentadas nesse instrumento didático utilizado pelos estudantes, passamos a analisar cada um dos volumes que contemplam a coleção Ápis.

5.1.1 *3Aspectos das Estruturas Multiplicativas no Livro Didático – 1º ano EF*

A organização geral do volume relativo ao primeiro ano está dividida em Unidades, conforme já explicitado, as quais apresentam uma iniciação às Unidades temáticas da Matemática: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, e Probabilidade e Estatística. Segundo apontado pelo próprio autor, os conteúdos relativos à Geometria e à Grandezas e medidas estão distribuídos ao longo de todo o volume, a fim de favorecer a integração das Unidades temáticas, por meio de abordagem de aspectos interdisciplinares (DANTE, 2019a).

Em um panorama geral respectivo ao primeiro volume, pudemos perceber um resgate de *algumas noções* trabalhadas na Educação Infantil, como ideias de localização (na frente, atrás, entre, em cima, embaixo, ao lado, perto, longe etc.), termos associados a medidas, noções de lateralidade, símbolos, também sequências e padrões ou regularidades (respectivos à Unidade temática Álgebra).

A ideia de quantidade é trabalhada informalmente na Unidade temática Números, tendo como invariante a correspondência 1 a 1, além de valorizar o uso de estimativa. Há um enfoque para a grafia e para o aspecto cardinal do número. A partir da resolução de situações-problema do cotidiano, é explorada a sequência dos Números Naturais, como também seu aspecto ordinal.

Há evidente preocupação do autor em que os estudantes façam distinção entre o conhecimento social do número e a apropriação do significado do conceito de número, e para atingir esse objetivo, as atividades são propostas limitando os números, primeiramente até 10, e depois até 100. Segundo o autor, o domínio das sequências numéricas, da contagem e da grafia dos algarismos é fundamental para que os estudantes compreendam o conceito de número, e possam avançar no domínio do sistema de numeração decimal até a ordem da centena. As ideias associadas às operações de adição e de subtração são propostas em atividades sem que haja a formalização por meio de seus algoritmos.

A utilização de material palpável, bem como sua manipulação, é enfatizada em atividades que exploram a Unidade temática Geometria. São trabalhados conceitos como deslocamento e localização, bem como atividades para explorar, informalmente e sem apresentação de nomenclatura, os sólidos geométricos, como cubo, bloco retangular e esfera. Também são propostas atividades que exploram regiões planas e suas decomposições e composições, além de suas propriedades, independentemente da disposição em que se encontram, enfatizando o trabalho de planificação de embalagens.

As atividades relativas à Unidade temática Grandezas e medidas exploram informalmente diferentes instrumentos de medida, como palmo, passo, copo, jarra etc., por meio da resolução de situações-problema do cotidiano. Por fim, também exploradas informalmente ao longo de todo o volume, a Unidade temática Probabilidade e Estatística traz atividades de propostas de construção e interpretação de tabelas e gráficos, integrada às demais Unidades temáticas.

O volume relativo ao primeiro ano está organizado em oito Unidades, assim como os demais volumes da coleção analisada. Contudo, cada volume traz, em cada Unidade, uma organização de acordo com as propostas de conteúdos que são trabalhados, distribuídos em seções com diferentes enfoques nas atividades, dispostos em: *Para iniciar; Explorar e descobrir; Tecendo saberes; Desafio; Brincando também aprendo; Vamos ver de novo?* e *O que estudamos.* Essas seções se repetem em cada um dos volumes que compõem a coleção analisada. As Unidades que compõem o primeiro volume apresentam os conteúdos matemáticos distribuídos conforme segue:

1 – Vocabulário fundamental;

2 – Números até 10;

3 – A ordem dos números;

4 – Figuras geométricas;

5 – Nosso dinheiro;

6 – Adição e subtração;

7 – Grandezas e medidas; e

8 – Números até 100.

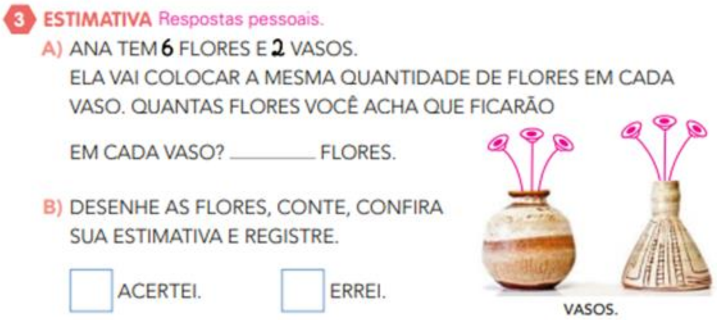
A seguir, trazemos exemplos de situações-problema que envolvem a ideia de Proporção Simples, classe *um para muitos* e classe *partição*. De acordo com a fundamentação teórica adotada para esta pesquisa, as situações pertencentes ao eixo Proporção Simples referem-se a uma relação quaternária de proporcionalidade, que possuem mesma estrutura, e segundo essa estrutura, podem variar o número desconhecido e assim requerer, para sua resolução, uma multiplicação ou uma divisão.

No entanto, outros aspectos estão em jogo nesses tipos de situação. Além de considerar o significado assumido pela operação que requer diferentes raciocínios, foram considerados os tipos de grandezas e as propriedades dos números envolvidos nas relações, bem como informações explícitas ou não em seus enunciados, dentre outros. Segundo Vergnaud (2009), a forma como se apresentam esses elementos nas situações podem aumentar ou não a complexidade de sua resolução.

O exemplo que segue foi retirado da Unidade 2 – Números até 10. Os objetivos definidos para esta Unidade são: "- Conhecer o significado, a escrita e a leitura dos números de 0 a 10; - Resolver situações envolvendo esses números" (DANTE, 2019a, p. 30). Nessa Unidade, é possível perceber que o autor busca trabalhar a construção da ideia de número, e enfatiza que sua construção e sua compreensão pressupõem uma série de atividades que exploram as operações lógicas, essenciais à aprendizagem, no que se refere à classificação (separar de acordo com certas características) e à formação de sequências e correspondência 1 a 1, bem como possibilitam as primeiras abordagens de medidas e de estatística.

A situação-problema contempla ideias de estruturas multiplicativas, elaborada com a noção de divisão partitiva; ou seja, o ato de dividir quantidades de naturezas distintas, como exemplo, flores por vasos, conforme explicitado na Figura 1, com a utilização de figura de apoio ao enunciado como suporte de representação.

Figura 1 - Proporção Simples - classe *partição*

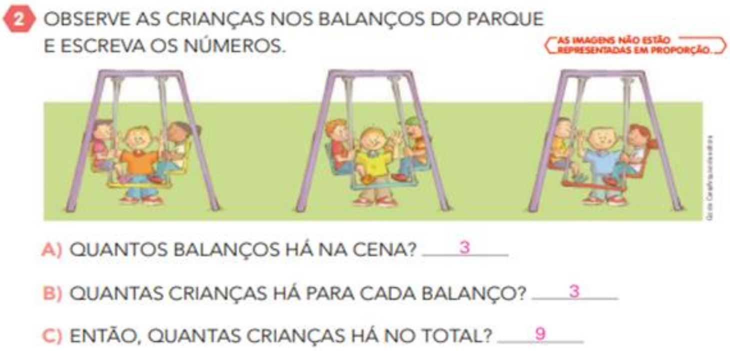


Fonte: Dante (2019a, p. 46).

Nesta atividade, observa-se que o autor propõe uma situação do cotidiano que envolve estimativa, e ao indicar que as flores sejam *colocadas* igualmente em cada vaso, requer dos estudantes a ideia de distribuição, de correspondência termo a termo, fundamental para a compreensão da operação de divisão, mas sem exigir a familiarização com o algoritmo da divisão.

Outra situação, também retirada da Unidade 2, envolve a ideia de Proporção Simples respectiva à classe *um para muitos,* apresentada de modo pictórico, conforme exposto na Figura 2.

Figura 2 - Proporção Simples - classe *um para muitos*



Fonte: Dante (2019a, p. 52).

Ao solicitar que o estudante descreva quantas crianças há no total, levando em consideração os três balanços, enfatiza como estratégia de resolução o trabalho de contagem, mas informalmente envolve a adição de parcelas repetidas. Em outras palavras, por meio de um problema pictórico, incentiva que os estudantes explorem a relação *um para muitos*. O autor evidencia que contar quantidades de objetos até 100 a partir de situações contextuais auxilia na compreensão da função social de número.

Com base no exposto, o volume respectivo ao primeiro ano apresenta situações-problema cuja estrutura permeia o eixo Proporção Simples. Ambas são situações prototípicas da multiplicação, para as quais as operações mais indicadas são a multiplicação e a divisão. Contudo, nessa etapa de escolarização, é comum as crianças trabalharem as ideias multiplicativas a partir da adição de parcelas repetidas, ou da contagem de agrupamentos, além da distribuição termo a termo, sem estabelecer estrutura formal a essa organização.

Considerando as duas classes de situação investigadas, é possível afirmar que ambas podem ser pensadas por meio da estratégia escalar como procedimento de resolução, a qual estabelece a relação entre as quantidades de mesma natureza; ou pela estratégia funcional, que estabelece a relação entre as grandezas distintas presentes na situação (VERGNAUD, 2009).

Corroborando, Santana, Lautert e Filho (2017a, p. 83) afirma que, "[...] mesmo não sendo comum a abordagem dos diagramas de Vergnaud no ensino de situações de multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano, é pertinente o professor esclarecer as relações existentes e o processo resolutivo a partir de tais diagramas, como forma de explicitar o raciocínio envolvido".

Para ambas as situações analisadas, é possível perceber o que afirma Vergnaud (2011, p. 13), quando refere que, "[...] sem surpresa, as primeiras situações compreendidas pelos alunos são situações de proporção simples, nas quais é preciso efetuar uma multiplicação, com números inteiros pequenos". O exemplo citado por Vergnaud (2011, p. 13) é: "[...] a distribuição de balas para 4 alunos, dando 6 para cada um; ao todo, quantas balas serão necessárias? Ou ainda, Jane compra 4 kg de peras por 24 euros. Qual é o preço de um kg?" Esse mesmo autor destaca a necessidade de que os estudantes sejam levados raciocinar em termos de quantidades e grandezas, não somente reduzir as análises das situações apenas a operações numéricas (VERGNAUD, 2011).

5.1.2 *Aspectos das Estruturas Multiplicativas no Livro Didático – 2º ano EF*

O volume respectivo ao segundo ano apresenta a retomada e o aprofundamento das ideias básicas de todas as Unidades temáticas da Matemática trabalhadas no volume anterior, considerado pelo autor como ensino espiral, adotado para toda a coleção. Esse ensino espiral é entendido como retomar o conteúdo trabalhado em momentos anteriores, ampliá-lo e aprofundá-lo cada vez mais.

Pode-se relacionar o ensino em espiral proposto pelo autor com a organização dos conteúdos apresentados no CREP, para o qual o conhecimento prévio revela os objetivos de aprendizagem que expressam conhecimentos matemáticos necessários para dar continuidade à aprendizagem dos conteúdos relativos ao objetivo focal, caracterizado pela sua essencialidade, considerado como conceito fundamental.

A articulação entre as Unidades temáticas também está presente nesse volume. Esse fato pode ser observado ao identificar a Unidade temática Números, tendo em vista que ela se apresenta de forma interdisciplinar em contextos e situações, as quais exploram contagens, sequências, regularidades, relações aditivas, medidas, tabelas e gráficos.

É possível perceber a ênfase dada pelo autor na utilização social do número por meio de atividades expostas sob diversas formas: escrita em língua natural, ilustrações, tabelas e gráficos. A utilização limitada dos números de 10 até 99 tem como objetivo principal levar os estudantes à construção e à apropriação da ideia e do conceito de número, considerando que essas atividades têm a função de promover o desenvolvimento dos processos mentais básicos por meio de situações que envolvam correspondência, seriação, classificação, etc. Nesse sentido, a natureza das situações pode evidenciar a distinção entre o conhecimento social do número (como indicadores de quantidade, de ordem, de medida, de códigos de identificação) e a apropriação de seu conceito. A partir dessa etapa, são apresentadas as propostas de atividades que envolvem o estudo dos números maiores do que 100.

Dessa maneira, são propostas atividades que incentivam a utilização de estimativas e de medições, bem como a construção e a interpretação de tabelas e gráficos logo no início de cada Unidade.

Assim como no primeiro volume da coleção, o segundo volume contém situações do cotidiano dos estudantes, que recorrem a temas da realidade social e dão ênfase à construção e à compreensão das primeiras ideias e conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas. O objetivo é incentivar a discussão, a análise, e elaboração, bem como a formulação de hipóteses e argumentações pelos estudantes.

As Unidades que compõem o segundo volume são apresentadas como:

1 – Números até 100;

2 – Sólidos geométricos;

3 – Regiões planas e seus contornos;

4 – Adição;

5 – Subtração;

6 – Multiplicação;

7 – Grandezas e suas medidas; e

8 – Números a partir de 100.

Nesse volume, a multiplicação ganha destaque na Unidade 6. Contudo, as atividades que exploram situações que envolvem as estruturas multiplicativas respectivas às classes analisadas são apresentadas em três Unidades desse volume, a Unidade 6, a Unidade 7 e a Unidade 8.

A Unidade 6 tem como objetivos: "[...] - Relacionar a multiplicação a adições de quantidades iguais; - Construir as tabuadas do 2, do 3, do 4 e do 5; - Explorar as ideias de dobro e de triplo; - Resolver problemas usando a multiplicação, a adição e a subtração" (DANTE, 2019b, p. 132). Os objetivos da Unidade 7 referem-se a:

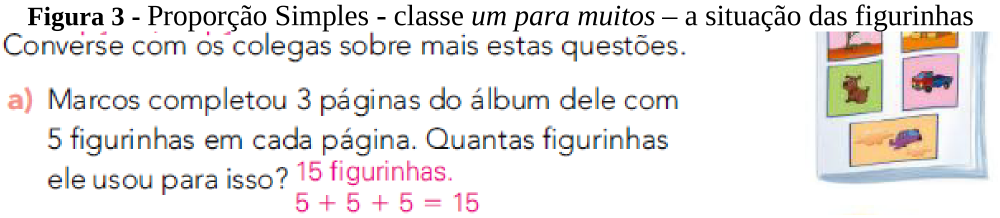
> [...] Explorar as grandezas tempo, comprimento, capacidade e massa e algumas de suas unidades de medidas. Seguindo para os objetivos da Unidade 8, estes são definidos como: - Compreender números maiores do que 99, até 100; - Saber ler e escrever esses números; - Usar esses números em situações contextualizadas (DANTE, 2019b, p. 196).

Nesse volume, assim como no anterior, as situações-problema que envolvem a classe *um para muitos* passam pela estratégia de adição sucessiva de parcelas iguais. Esse procedimento reflete a continuidade entre a adição e a multiplicação. No entanto, os casos em que há aumento da quantidade de parcelas de forma considerável tornam esse procedimento exaustivo e inviável, e exigem dos estudantes outros tipos de raciocínio, considerando multiplicar um dado valor pelo número de parcelas da adição. Logo, a continuidade entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo deve ser considerada limitada e local, pois do ponto de vista da expansão deste último, "[...] outros tipos de situação podem requerer outros esquemas de ação, o que sugere, de certa maneira, uma ruptura entre esses campos" (MERLINI, 2012, p. 153).

Nessa perspectiva de continuidade entre os campos conceituais, inicia-se a exploração da memorização da tabuada. O autor da coleção refere-se ao trabalho com os conceitos dobro e triplo, a fim de introduzir as tabuadas de 2, de 3, chegando à tabuada de 5. Também enfatiza que, a partir do momento em que compreendem seu princípio, os estudantes podem e devem memorizar seu resultado; ou seja, propõe explorar as ideias de dobro e de triplo de forma automatizada.

Reafirmamos que, conforme aponta a pesquisa de Rodrigues e Rezende (2021), no Livro Didático respectivo ao segundo ano, não foram identificadas situações pertencentes à classe *partição*. Já as situações-problema respectivas à classe *um para muitos* são apresentadas, inicialmente, como adição de parcelas repetidas, conforme explicitado na Figura 3, que busca incentivar os estudantes a realizarem as atividades com discussões entre si, a fim de explorar e valorizar seus conhecimentos prévios. Essa situação foi retirada da Unidade 6 (Multiplicação).

Figura 3 - Proporção Simples - classe *um para muitos* – a situação das figurinhas



Fonte: Dante (2019b, p. 134).

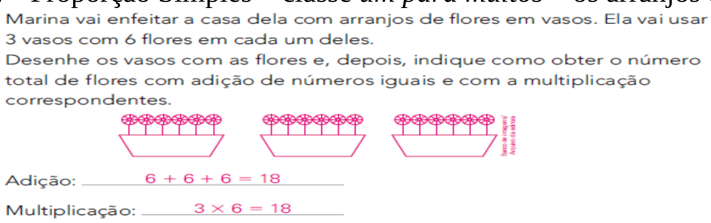
No entanto, o que está em jogo é a relação fixa entre uma unidade da grandeza página com várias unidades da outra grandeza, figurinhas, e requer uma multiplicação para sua resolução; isto é, essa situação refere-se a uma proporcionalidade entre as duas grandezas envolvidas.

Sob esse aspecto, Vergnaud (2009) afirma ser fundamental a distinção entre o cálculo relacional e o cálculo numérico das situações, sendo necessário evidenciar as relações nelas presentes. As operações comuns de adição, subtração, multiplicação e divisão estão relacionadas ao cálculo numérico, “[...] enquanto o cálculo relacional diz respeito às operações do pensamento necessárias para que haja a exploração das relações envolvidas nas situações focalizadas” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 43). Segundo Vergnaud (2011, p. 23), ao ser introduzida a multiplicação, “[...] os alunos são levados a operações de pensamento que não se deixam reduzir a operações numéricas, mas implicam também raciocínios sobre quantidades e grandezas, um tipo precedente de análise dimensional”.

Esse tipo de situação pode, além da sugestão dada pelo autor, apoiada no Campo Conceitual Aditivo, ampliar os procedimentos de resolução, permitindo pensar no operador escalar (sem dimensão) e no operador funcional.

A próxima Figura (4) refere-se a uma situação-problema na qual é sugerido que sejam representadas, de forma pictórica, a quantidade de vasos e a quantidade de flores, e em seguida sejam representadas a adição e a multiplicação respectivas a sua resolução. Mais uma vez, esse tipo de situação corrobora a afirmação feita por Gitirana *et al.* (2014), ao destacarem que o ensino da multiplicação, em sua maioria, está associado à ideia de adição de parcelas repetidas, assim como a divisão é associada a subtrações sucessivas.

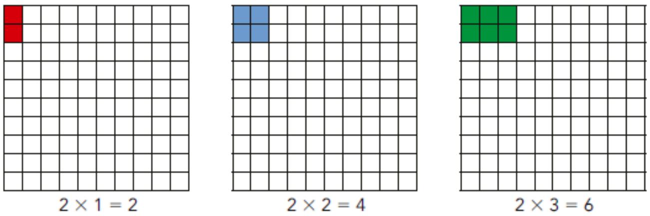
Figura 4 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – os arranjos de flores



Fonte: Dante (2019b, p. 138).

No que se refere às ideias de multiplicação, nessa Unidade iniciam-se atividades que exploram a tabuada do 2. O autor enfatiza a importância de que os estudantes "[...] compreendam bem as tabuadas; pouco a pouco" (DANTE, 2019b, p. 139), dando ênfase ao seu uso e a sua memorização. Ainda, a fim de facilitá-la, destaca a utilização de diferentes recursos, como desenhos, jogos de dominó, bingos e gincanas de tabuada, bem como a ideia da tabuada trabalhada a partir da malha quadriculada, exemplificada na Figura 5.

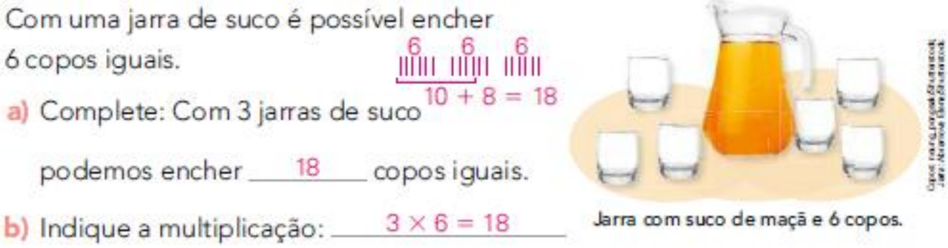
Figura 5 – Ideia de multiplicação por meio da tabuada com auxílio da malha quadriculada



Fonte: Dante (2019b, p. 140).

Na busca em dar continuidade à compreensão e à utilização da tabuada, o autor inicia a exploração da tabuada de 3 a partir de uma tabela de dupla entrada, que permite levar em conta a intersecção da linha com a coluna de forma mais clara, e em seguida apresenta a situação-problema, conforme exemplificada na Figura 6.

Figura 6 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – a situação da jarra

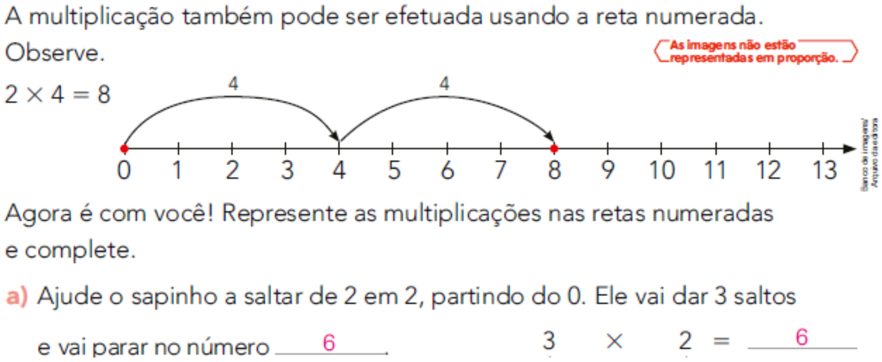


Fonte: Dante (2019b, p. 144).

Esse tipo de situação apresenta a mesma estrutura das situações já apresentadas até aqui (pois tratam da mesma tipologia), que requer o mesmo tipo de raciocínio para sua resolução, dependendo de sua estrutura, além de contar com a relação unitária explícita em seu enunciado, fato que favorece sua resolução. É possível perceber que o autor sugestiona a resolução da situação por meio de agrupamento com registros gráficos (tracinhos) e pela representação da tabuada, ao indicar $3 \cdot 6 = 18$.

A próxima atividade explora a ideia da multiplicação com o auxílio da reta numerada, conforme segue na Figura 7.

Figura 7 – Ideia de multiplicação por meio da reta numerada

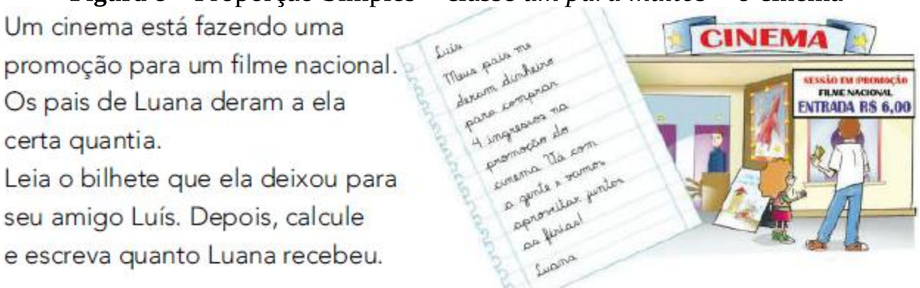


Fonte: Dante (2019b, p. 144).

A atividade acima, de acordo com o autor, está relacionada a efetuar a multiplicação por meio de “atividades concretas de andar de 2 em 2 ou de 3 em 3 em uma trilha” (DANTE, 2019b, p. 144). Em outras palavras, a multiplicação é explorada pela contagem por salto. O autor chama a atenção para que o professor observe, junto aos estudantes, que “[...] o resultado de $5 \cdot 3$, que virá na tabuada do 5, é o mesmo de $3 \cdot 5$, da tabuada do 3 já vista” (DANTE, 2019b, p. 144). Também é possível observar propostas do autor para que o professor trabalhe com atividades que envolvam dobraduras, jogos, material concreto (Dourado) etc., além de propor desafios e instigar a criação de situações-problema relacionados às tabuadas de 3, de 4 e de 5.

Conforme segue, a próxima Figura (8), na página seguinte, não apresenta sugestão para sua resolução, e explora a ideia de situação pertencente à *classe um para muitos*, em que o valor unitário é fornecido, não em seu enunciado, mas na figura de apoio disponibilizada. Nessa situação, temos o caso de a quantidade *uma entrada* (ou um ingresso) estar relacionada com o valor unitário de seis reais; assim como a quantidade *quatro entradas* (ou quatro ingressos) estar relacionada a certa quantidade em reais, a qual se deseja descobrir, mantendo a razão.

Figura 8 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – o cinema



Fonte: Dante (2019b, p. 158).

É possível perceber que, em todas as situações respectivas à classe *um para muitos* analisadas até aqui, a correspondência *um para muitos* está expressa de maneira evidente nos enunciados, que fazem referência ao valor unitário correspondente a uma dada quantidade. Ainda, por se tratar de mesma estrutura, as situações não apresentam níveis distintos de complexidade, principalmente quando levados em consideração outros aspectos; ou seja, ao se considerar as variáveis didáticas envolvidas em cada uma delas. De modo semelhante aos exemplos contidos nas situações analisadas, as informações pertinentes são apresentadas de forma explícita nas relações de cada situação.

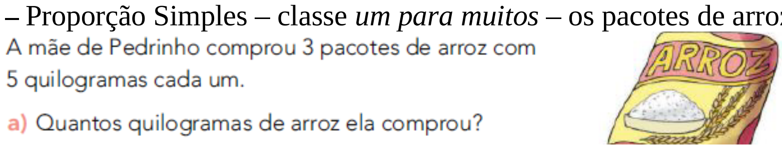
Em pesquisa realizada por Spinillo, Lautert e Santos (2021, p. 125), o nível de explicitação das relações *um para muitos* é considerado fator determinante para o sucesso dos estudantes na resolução desse tipo de situações-problema, pois essa relação "[...] é um modo de raciocinar que facilita a compreensão de situações que envolvem conceitos próprios das estruturas multiplicativas", evidenciando como estratégias proveitosas aquelas "[...] que envolvem a instrução direta sobre a razão unitária".

É possível constatar que, ao longo da Unidade 6, reservada à multiplicação, o autor evidencia a relação de continuidade entre a adição e a multiplicação por meio da soma de quantidades iguais, além de associar às tabuadas de 2 e de 3 as ideias de dobro e de triplo, bem como de metade e de terça parte. Propõe a construção das tabuadas de 2 até 5 com intuito de facilitar sua memorização, como também sugere atividades que possam proporcionar a compreensão dos estudantes ao resolverem situações-problema envolvendo multiplicação, adição e subtração, destacando o cálculo por estimativa.

O autor instiga, ao longo de todo o volume analisado, trabalhos e discussões realizados em duplas ou em grupos; ou seja, de forma coletiva; para que os estudantes possam ampliar as possibilidades de resolução de situações, tornando-os mais eficientes. Nesse contexto, o autor destaca a ideia de *duplas produtivas*, para as quais propõe que o estudante que domina determinado conceito possa ajudar aquele que ainda apresenta dificuldade nesse mesmo conceito.

Partindo para a Unidade 7 – Grandezas e suas medidas, a ideia de situações que explorem a classe *um para muitos* é apresentada na Figura 9, a qual relaciona a Unidade temática Grandezas e medidas com a Unidade temática Números, sugerindo sua resolução por meio da adição reiterada ou da multiplicação.

Figura 9 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – os pacotes de arroz

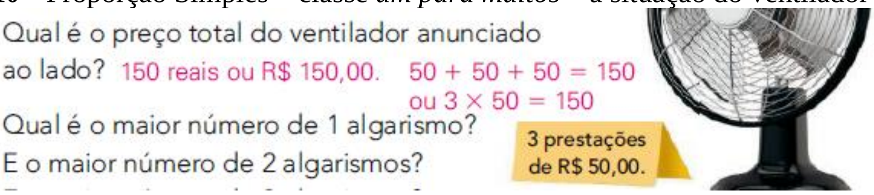


Fonte: Dante (2019b, p. 190).

Mais uma vez, o fator unitário é explicitado no enunciado. Contudo, considerando os tipos de grandezas, não há necessidade de conversão entre as unidades de medidas envolvidas na situação-problema. Ao se considerar esses aspectos, podemos inferir que não é exigido maior esforço cognitivo para sua resolução, tendo em vista as características das grandezas nela presentes, o que pode ter reflexos sobre as maneiras como a situação pode ser resolvida, pois quanto menor o valor numérico, maiores são as chances de o estudante ter sucesso em sua resolução (VERGNAUD, 2009).

Por último, na Unidade 8, denominada *Números a partir de 100*, são trabalhados, inicialmente, números de três algarismos, chegando até o número 199. O sistema de numeração decimal é abordado informalmente, de forma a explorar as *centenas exatas ou centenas inteiras*, com ênfase na utilização do material dourado. Sua exploração acontece por meio de situações do cotidiano que utilizam o Sistema Monetário para trabalhar as ideias de unidade, dezena e centena, além de explorar a composição, a decomposição, a leitura e a ordem desses números. Logo no início dessa Unidade, é apresentada a situação-problema exemplificada na Figura 10, a qual tem enfoque em uma situação do cotidiano, como o preço de um produto.

Figura 10 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – a situação do ventilador



Fonte: Dante (2019b, p. 198).

Conforme pode ser visto na situação acima, bem como nas demais situações analisadas, depreende-se que o volume respectivo ao segundo ano do EF pode limitar o trabalho matemático a ser desenvolvido em sala de aula, no que se refere a situações-problema pertencentes ao eixo Proporção Simples, classe *um para muitos* em aspectos de diversificação e particularidades de cada uma. Conforme já discutido anteriormente, por se tratar de situações prototípicas da multiplicação, não apresentam grau de dificuldade para sua resolução, pois segundo Gititana *et al.* (2014), exigem raciocínios mais simples, e em sua maioria, os estudantes não apresentam dificuldades em resolvê-las. Essa afirmação das pesquisadoras decorre do fato de que, de acordo com Vergnaud (2009), colocam em jogo o mesmo cálculo relacional, fato que possibilita o estabelecimento da tipologia das situações.

Ainda, considerando as variáveis didáticas envolvidas nas situações-problema analisadas, constatamos que não há evidências de hierarquia de estratégias requeridas para resolução, considerando a inexistência de complexidade do ponto de vista cognitivo, tampouco as situações exigem dos estudantes formas mais elaboradas de raciocínio.

5.1.3 *Aspectos das Estruturas Multiplicativas no Livro Didático – 3º ano EF*

De acordo com as orientações contidas no volume respectivo ao terceiro ano, assim como nos anteriores, os conteúdos das Unidades Temáticas foram integrados ao longo de todo o volume, dando enfoque ao ensino em espiral, conforme explicitado anteriormente. O intuito do autor é possibilitar a garantia da aprendizagem dos conceitos essenciais dos diversos assuntos por meio de situações-problema, além de incentivar os estudantes à formulação de problemas por meio da apresentação de situações abertas, a fim de instigar sua criatividade, além de apresentar propostas de estimativas a serem trabalhadas. O autor enfatiza que os algoritmos respectivos às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são propostos de forma gradual, e de maneira a levar os estudantes à compreensão das referidas operações (DANTE, 2019c).

As Unidades que compõem o volume três estão representadas a seguir:

1 – Números até 1000;
2 – Geometria;
3 – Adição e subtração;
4 – Grandezas e medidas: tempo e dinheiro;
5 – Multiplicação;
6 – Divisão;
7 – Grandezas e medidas: comprimento, massa e capacidade; e
8 – Números maiores do que 1000.

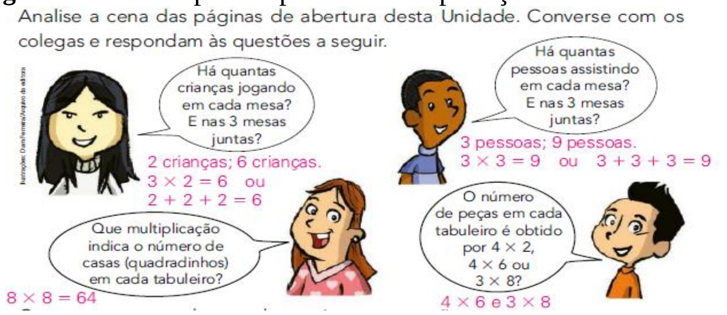
Nesse volume, a multiplicação ganha novamente destaque por meio de uma Unidade específica, a Unidade 5, que traz, de forma recorrente, o enfoque na utilização e na memorização da tabuada, iniciando com a revisão das tabuadas de 2 até 5, trabalhadas no volume anterior, e seguindo na exploração das tabuadas de 6 até 9. O autor destaca que, na próxima etapa de escolarização dos estudantes, ou seja, no quarto ano do EF, serão revistas todas as tabuadas, pois considera essencial sua compreensão e sua memorização, para sua constante utilização nos algoritmos da multiplicação e da divisão, que serão explorados a partir do quarto ano do Ensino Fundamental.

Para além da memorização da tabuada, o autor evidencia a importância de que os estudantes percebam as regularidades existentes nelas, como os números pares, na tabuada de

2, e a sequência existente na tabuada de 5, a fim de facilitar a leitura dos minutos no relógio de ponteiros, bem como a sequência existente na tabuada do 6, importante nas situações que se referem a quantidades que envolvem dúzia e meia dúzia.

Os objetivos relativos à Unidade 5 estão descritos da seguinte forma: "[...] – Reconhecer as ideias associadas à multiplicação; - Trabalhar as tabuadas do 2 ao 10; - Reconhecer as noções de dobro e triplo; - Apresentar estratégias para efetuar a multiplicação; - Resolver problemas envolvendo a multiplicação" (DANTE, 2019c, p. 118). Nessa Unidade, o autor destaca atividades que exploram multiplicações com 0, com 1 e com 10, valorizando atividades em duplas ou grupos, bem como o cálculo mental, conforme retrata a Figura 11.

Figura 11 – Ideias para explorar a multiplicação de forma coletiva



Fonte: Dante (2019c, p. 118).

Nessa Unidade, as ideias da multiplicação são exploradas a partir de atividades que envolvem, em sua maioria, a adição de quantidades iguais. Assim, as sugestões de estratégias para resolvê-las no volume 2 se repetem no volume 3, e podem ser vistas a partir da utilização de formas de representações gráficas, do uso de papel quadriculado e da reta numerada.

Destacamos que a análise que segue foi agrupada pelas classes identificadas; ou seja, inicialmente são expostas situações respectivas à classe *um para muitos;* e em seguida, situações respectivas à classe *partição*. A seguir são apresentadas algumas situações-problema que exploram a ideia de Proporção Simples, classe *um para muitos*, conforme exemplificadas a partir da Figura 12.

Figura 12 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – as cartelas de adesivos

As amigas Lurdes e Mara compraram adesivos para enfeitar os cadernos delas. Lurdes comprou 2 cartelas com 9 adesivos em cada uma delas e Mara comprou 3 cartelas com 7 adesivos em cada uma delas. Quem comprou mais adesivos?

Fonte: Dante (2019c, p. 126).

A sugestão para a situação acima solicita apenas que os estudantes registrem seus raciocínios por meio de desenhos ou *registrando a multiplicação* esperada (o que nos remete à utilização do algoritmo da multiplicação), ou ainda, que os estudantes descrevam as etapas por eles elaboradas sob a forma de um texto descritivo. Apesar de realizar uma comparação entre as personagens da situação, é possível identificar que, para cada uma, Lurdes e Mara, há uma relação que corresponde a *um para muitos* entre as grandezas envolvidas, apresentadas novamente de forma explícita, evidenciando o fator unitário de cada relação.

A utilização de quantidades discretas e números pequenos[30] envolvidos nas relações elementares tornam a situação mais bem compreendida pelos estudantes (VERGNAUD, 2009).

Dando continuidade às atividades que exploram a tabuada, a situação-problema da Figura 13 ilustra a classe *um para muitos* com o fator unitário explicitado, e para sua resolução, é sugerido aos estudantes que utilizem a tabuada de 6, em comparação à tabuada de 3, relacionando os conceitos de dobro e de metade.

Com relação à utilização das tabuadas, Vergnaud (2009, p. 191) considera que os próprios estudantes as componham "[...] e delas façam uso quando lhes for necessário", pois "[...] o conhecimento decorado da tabuada de base dez torna-se rapidamente indispensável", levando em consideração o sistema decimal. Entretanto, "[...] este conhecimento deve ser adquirido por meio de exercícios de cálculo rápido", e não "[...] por uma aprendizagem e uma recitação decorada" (VERGNAUD, 2009, p. 191).

Figura 13 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – o álbum de fotos

No álbum de Carla cabem 9 fotos em cada página. Ela acabou de completar 6 páginas. Quantas fotos ela já colocou? 54 fotos. $6 \times 9 = 54$

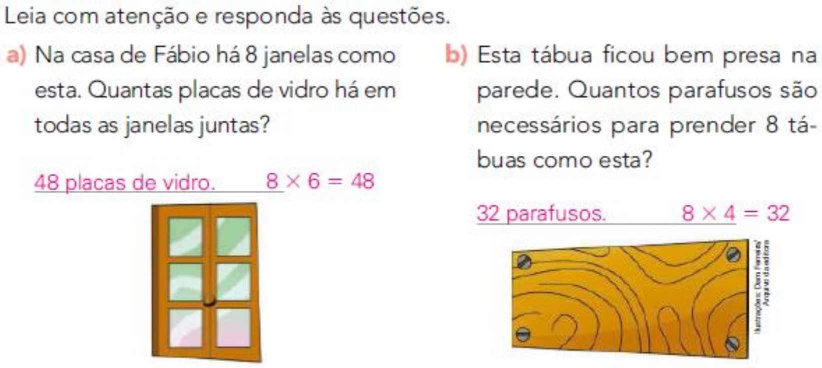
Fonte: Dante (2019c, p. 130).

É possível observar que as situações pertencentes à classe *um para muitos* são propostas, predominantemente nesta Unidade, de forma a explorar as tabuadas. No entanto, Vergnaud (2009, p. 191) afirma não ser "[...] necessário subordinar a aprendizagem dos algoritmos operatórios ao conhecimento da tabuada". Contudo, considera o inverso verdadeiro, em que "[...] os resultados decorados parecem tanto mais indispensáveis na medida em que os algoritmos são mais bem assimilados" (VERGNAUD, 2009, p. 191).

Nos exemplos apresentados na Figura 14, observamos a indicação do autor, de que as situações "[...] podem ser representadas por multiplicações", iniciando com "as contagens necessárias" para sua resolução (DANTE, 2019c, p. 134).

[30] Alguns autores empregam o termo "números pequenos" em virtude da magnitude dos números.

Figura 14 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – a situação das janelas e dos parafusos

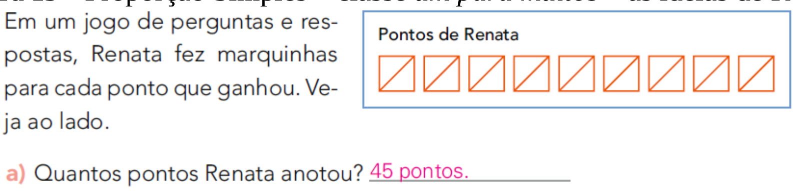


Fonte: Dante (2019c, p. 134).

Em ambas as situações acima descritas, quatro quantidades são colocadas em jogo, mas uma delas é igual a um. Entretanto, essas informações não se apresentam de forma explícita em seus enunciados, mas se encontram devidamente apresentadas em cada figura de apoio utilizada, para as quais se associa uma unidade de uma grandeza com várias unidades da outra grandeza: seis placas de vidro para cada janela na primeira situação, e quatro parafusos para cada tábua na segunda situação.

A Figura 15 não traz indicação específica para sua resolução. Apenas expõe uma situação que explora a ideia de correspondência *um para muitos*, em que as quantidades envolvidas são apresentadas por meio da figura de apoio com representação gráfica. Nela, o estudante pode utilizar, como estratégia de resolução, a contagem de cada *tracinho*, devidamente indicada pelo autor como referência à pontuação realizada por Renata, sem a necessidade de utilizar qualquer forma de multiplicação como estratégia de resolução.

Figura 15 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – as ideias de Renata

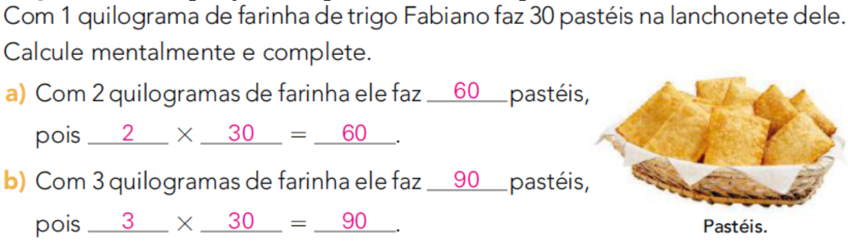


Fonte: Dante (2019c, p. 135).

O autor destaca a intenção de integrar as Unidades temáticas Números e Grandezas e medidas, ao utilizar "[...] a unidade de medida de massa quilograma" (DANTE, 2019b, p. 139). Nesse sentido é possível perceber, de forma recorrente, que o autor busca incentivar o uso da resolução de problemas, e sugere que sejam discutidas as diferentes estratégias de forma coletiva entre os estudantes. Corroborando com essa ideia, Vergnaud (2009, p. 270) afirma que os problemas mais complexos "[...] podem ser objeto de um trabalho coletivo, mas, de forma alguma, um trabalho individual". Além disso, o autor observa que "[...] para um trabalho individual é necessário propor problemas mais simples” (VERGNAUD, 2009, p. 270). A resolução de problemas, segundo Dante (2019c), tem a função de promover a compreensão da multiplicação entre os estudantes, e ampliar a construção de seus conceitos.

O incentivo ao cálculo mental é evidenciado para resolução da situação-problema apresentada na Figura 16, que se refere, segundo o autor, a “[...] trabalhar informalmente com a ideia de proporcionalidade” (DANTE, 2019c, p. 139), e para a qual a correspondência *um para muitos* é expressa de maneira evidente, com destaque para o valor unitário.

Figura 16 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – a lanchonete


Com 1 quilograma de farinha de trigo Fabiano faz 30 pastéis na lanchonete dele.
Calcule mentalmente e complete.

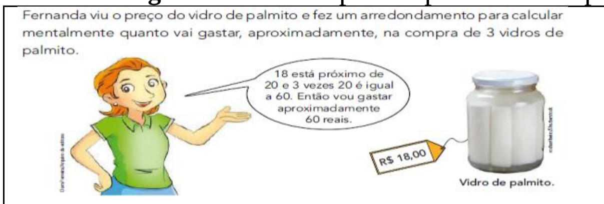
a) Com 2 quilogramas de farinha ele faz 60 pastéis, pois 2 × 30 = 60.

b) Com 3 quilogramas de farinha ele faz 90 pastéis, pois 3 × 30 = 90.

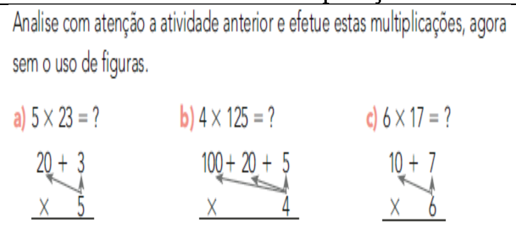
Fonte: Dante (2019c, p. 139).

As atividades contidas no volume 3, além de incentivarem o cálculo mental e o uso de calculadora, trazem situações que exploram a ideia de arredondamento, de resultado aproximado, bem como apresentam informalmente o algoritmo da multiplicação pelo método da decomposição aditiva de um dos fatores em centenas e dezenas inteiras e em unidades; ou seja, a decomposição do multiplicando (nesse caso).

Figura 17 – Ideias para explorar a multiplicação por arredondamento e decomposição


Fernanda viu o preço do vidro de palmito e fez um arredondamento para calcular mentalmente quanto vai gastar, aproximadamente, na compra de 3 vidros de palmito.

Fonte: Dante (2019c, p. 140).


Analise com atenção a atividade anterior e efetue estas multiplicações, agora sem o uso de figuras.

a) 5 × 23 = ?   b) 4 × 125 = ?   c) 6 × 17 = ?

Fonte: Dante (2019c, p. 141).

Destacamos que a decomposição aditiva representada na Figura 17 é precedida por situação semelhante, mas com o auxílio da malha quadriculada.

Para além da unidade destinada à multiplicação, definida como Unidade 5, a Unidade 7, que se refere a Grandezas e medidas: comprimento, massa e capacidade, também apresenta situações-problema respectivas à classe *um para muitos*. Nela, mais uma vez o autor enfatiza a necessidade de relacionar a aprendizagem com situações do cotidiano, conforme exposto na Figura 18.

Figura 18 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – as situações de Pedro e Francisco

A medida da distância da casa de Pedro e a escola onde ele estuda é 8 quarteirões de 100 m cada um. a) Complete: Essa medida corresponde a 800 m. Fonte: Dante (2019c, p. 179).	O consumo de leite na casa de Francisco é de 2 L por dia. Calcule o consumo em cada item e registre. a) Em 1 semana. 14 litros ou 14 L. $7 \times 2 = 2 \times 7 = 14$ Fonte: Dante (2019c, p. 186).

Em ambas as situações, a correspondência *um para muitos* está expressa de maneira evidente nos enunciados, nos quais o fator unitário é explicitado e serve de base para a resolução das situações. Outro aspecto que merece destaque é o fato de não haver necessidade de conversão entre as unidades das grandezas envolvidas, no caso da primeira situação, pois as medidas são fornecidas e solicitadas na mesma unidade. Com relação à segunda situação, os estudantes devem compreender as relações existentes entre dias e semanas para, então, chegar ao sucesso da resolução.

Nesse sentido, apesar de não apresentarem dificuldades aos estudantes pelo fato de envolver números pequenos, "[...] é sobretudo interessante, quando as crianças tenham atingido uma boa compreensão das relações elementares, apresentar-lhes problemas mais complexos sem questão intermediária" (VERGNAUD, 2009, p. 273).

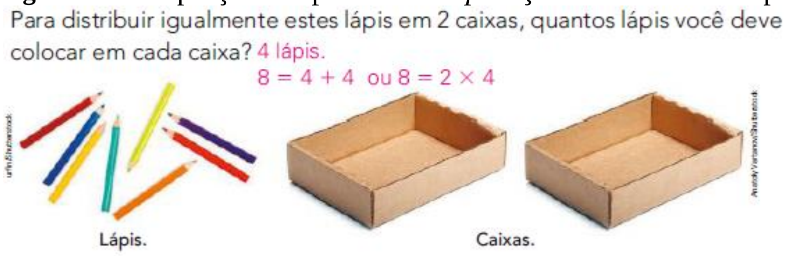
É possível inferir, com relação às situações pertencentes ao eixo Proporção simples, classe *um para muitos*, apresentadas até aqui, que todas favorecem a estratégia de resolução pelo esquema de ação da adição de parcelas repetidas, devido à pequena magnitude das quantidades envolvidas. Nesse sentido, esses aspectos observados podem ser considerados como facilitadores do raciocínio dos estudantes, considerando suas características numéricas (quantificação de grandezas discretas, números inteiros pequenos etc.), bem como a natureza do suporte de representação disponibilizado, além do uso de material concreto manipulativo, recursos digitais e recursos gráficos, entre outros.

Segundo a análise, situações-problema concernentes à classe *partição* podem ser observadas na Unidade 6, que explora a operação divisão, e traz como seus objetivos: "[...] – Compreender as ideias de divisão; - Explorar as ideias de metade e de terça parte; - Reconhecer que a multiplicação e a divisão são operações inversas; - Resolver problemas envolvendo a divisão" (DANTE, 2019b, p. 146). O autor refere-se à divisão a partir da ideia de repartir igualmente e da ideia de medida, sendo essa última traduzida pela pergunta: "[...] Quantos cabem?" (DANTE, 2019b, p. 146).

Para Vergnaud (2009), a divisão pode ser compreendida como a busca do valor unitário (divisão por partes), ou ainda se referir à busca da quantidade de unidades (divisão por quotas). Segundo Gitirana *et al.* (2014), as situações-problema pertencentes à classe *partição* têm indicação de situações protótipos, assim como as situações pertencentes à classe *um para muitos*. Contudo, de acordo com Vergnaud (2009, p. 188), a primeira requer um esquema mais elaborado de raciocínio, pelo fato da necessidade em se fazer a inversão mental da multiplicação para a divisão, amplificada "[...] por causa da complexidade da regra operatória da divisão"; ou seja, pela forma como se apresentam as regras do algoritmo para efetuá-las.

As situações-problema respectivas à classe *partição* extraídas dessa Unidade estão apresentadas nos próximos exemplos. Segundo o autor, já na cena de abertura há situações que devem ser discutidas conjuntamente, a fim de instigar as competências leitoras e orais por meio de perguntas que abordam intuitivamente as ideias da divisão. Percebe-se o incentivo ao uso e ao registro de diferentes estratégias para resolver as situações apresentadas, dando ênfase ao procedimento de distribuição 1 a 1, comum a essa etapa de escolaridade. Outras situações têm o mesmo enfoque e exploram a ideia de metade, como no exemplo da Figura 19.

Figura 19 – Proporção Simples – classe *partição* – as caixas de lápis

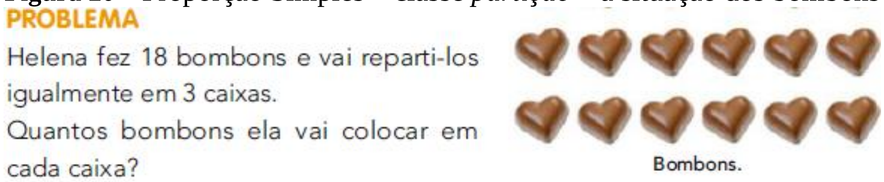


Fonte: Dante (2019c, p. 148).

Embora o simbolismo da matemática usual da operação de divisão não tenha sido representado, pode-se compreender a relação entre as grandezas lápis e caixas existente na situação. Esse tipo de situação apresenta, em seu enunciado, a quantidade inicial (informação dada somente por meio do desenho dos lápis) e o número de partes em que a quantidade inicial deve ser repartida (2 caixas), devendo o estudante buscar o valor de cada uma das partes; ou seja, o valor unitário em uma distribuição equitativa.

A Figura 20 também é representativa de uma situação que envolve a ideia de *partição*, para a qual há incentivo à resolução de problemas, estratégia expressamente defendida pelo autor, conforme segue.

Figura 20 – Proporção Simples – classe *partição* – a situação dos bombons



Fonte: Dante (2019c, p. 149).

Essa situação requer uma distribuição equitativa de 18 bombons em 3 caixas, e pode facilmente ser resolvida pelos estudantes ao considerar a magnitude dos números envolvidos na relação. No entanto, assim como em todas as situações já analisadas, segundo Vergnaud (2009), tanto pode ser utilizado o operador escalar (3x) quanto o operador funcional; ou seja, dividindo a quantidade total de bombons (18) pelo total de caixas (3), obtendo 6 bombons por caixa.

Mais uma vez o autor sugere que os estudantes explorem as etapas da resolução de problemas: compreender, planejar, executar, verificar e responder. Ainda há ênfase na etapa de verificação da resposta, para que os estudantes percebam a importância de conferir os cálculos e a coerência entre a resposta alcançada e sua respectiva pergunta. A próxima situação, exemplificada na Figura 21, traz a ideia de repartir igualmente, mas explorando a ideia de divisão não exata.

Figura 21 – Proporção Simples – classe *partição* – a situação das flores

Fonte: Dante (2019c, p. 150).

A fim de ampliar a reflexão a respeito das situações de repartição em partes iguais; ou seja, o ato de dividir quantidades de naturezas diferentes; e do uso da palavra *igualmente,* os estudantes são desafiados a elaborar estratégias em situações nas quais a quantidade de objetos não permita a distribuição de elementos em partes iguais, considerando que alguns fiquem de fora. Logo, os estudantes são solicitados a dividir o todo em partes iguais e atingir a divisão por meio de aproximações sucessivas, mas sem levar em consideração o restante de uma das grandezas; isto é, sem a utilização do resto da divisão.

Nesse contexto, Nunes e Bryant (1997, p. 201) afirmam que "[...] as crianças poderiam ser capazes de dividir e contar conjuntos acuradamente, mas não necessariamente captar as relações parte-todo implicadas nos problemas de divisão".

O terceiro volume traz outra ideia de divisão, a divisão por quota ou quotição, que significa o ato de dividir quantidades de mesma natureza, associada à pergunta *Quantos cabem?*, conforme a situação-problema representada na Figura 22. Ela se refere a "[...] quantos times serão formados" (DANTE, 2019c, p. 151), e para a qual também é incentivada a resolução de problemas por meio de suas etapas.

Figura 22 – Proporção Simples – classe *cota* – o torneio de basquete

Fonte: Dante (2019c, p. 151).

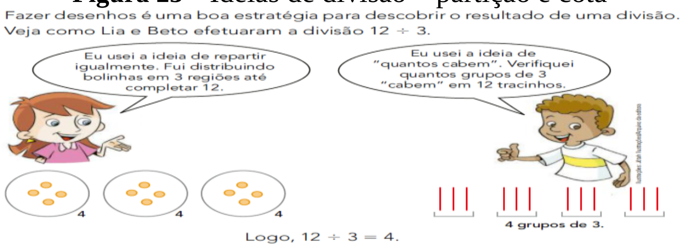
Embora a situação acima descrita não seja objeto dessa fase da nossa pesquisa, considerando sua parte mais específica, a qual diz respeito a situações-problema de Proporção simples, classes *um para muitos* e *partição*, trouxemos esse exemplo a fim de esclarecer como a divisão é tratada nesse volume da coleção. Embora a operação que permite resolver esses problemas seja, em ambos os casos, divisão por partes ou divisão por quotas, esse fato não coloca em jogo as mesmas noções. Nesse sentido, "[...] a conceituação da quotição é sensivelmente mais delicada do que a de partição" (VERGNAUD, 2019, p. 14). A estratégia associada a ideia de *quantos cabem*, da operação de divisão, segundo o autor, é mais difícil de ser compreendida pelos estudantes, quando comparada à ideia de repartir igualmente. Esse fato é defendido por Vergnaud (2009, p. 242), porque "[...] embora a operação que permite resolver esses problemas seja, em ambos os casos, uma divisão, esse fato não coloca em jogo as mesmas noções", pois não coloca em jogo os mesmos cálculos relacionais. Diferentemente da operação do tipo partição, a quotição permite passar de um espaço de medida ou grandeza para outra por meio do operador funcional; ou seja, por meio da ação de fragmentar uma quantidade com o mesmo valor indicado inicialmente.

Para Vergnaud (2009, p. 190), "[...] a divisão é uma operação complexa" por várias razões: seja por ordem conceitual ou outras ligadas à complexidade das regras operatórias implicadas pela divisão.

O livro traz estratégias para que os estudantes possam organizar suas ações e raciocinar sobre como efetuar a divisão para resolver situações-problema a partir de representações gráficas, tanto para a ideia de repartir igualmente quanto para a ideia de medida, além da utilização da reta numerada para divisão com números pequenos.

A seguir, na Figura 23, são apresentados exemplos que ilustram como os estudantes podem lidar com as relações existentes, tanto na divisão por partes quanto na divisão por quota.

Figura 23 – Ideias de divisão – partição e cota

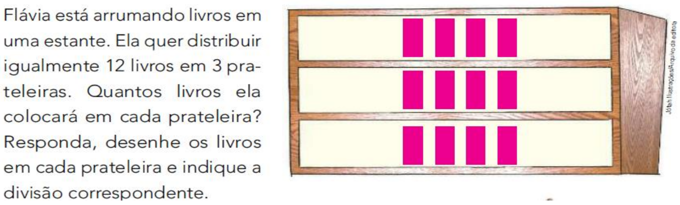


Fonte: Dante (2019c, p. 153).

No exemplo acima, tanto a menina quanto o menino optaram por adotar a representação pictórica para expressar seus raciocínios, utilizando bolinhas e tracinhos para associar os elementos da divisão. O menino representa claramente, ao utilizar tracinhos, o agrupamento de três em três por meio de barras que definem os quatro agrupamentos esperados. A menina, por sua vez, representa cada grupo associando as três regiões por meio de círculos, nos quais expressa a distribuição realizada até chegar ao número doze. Nesse sentido, podemos inferir que o autor busca promover a compreensão e a construção de conceitos pertencentes ao campo multiplicativo por meio de representações simbólicas eficientes.

Mais uma situação-problema com a ideia de *partição* pode ser vista na Figura 24, para a qual o autor enfatiza a utilização da resolução de problemas. Para essa situação-problema, o cálculo relacional pertinente está associado a uma divisão de quantidades de naturezas distintas.

Figura 24 – Proporção Simples – classe *partição* – a estante de livros



Fonte: Dante (2019c, p. 160).

A situação requer a busca da quantidade menor das grandezas envolvidas. As relações entre as grandezas dessa situação podem ser analisadas, assim como as demais vistas até então, por meio de duas formas de relação utilizáveis no raciocínio: as relações escalares (entre grandezas de mesma natureza) ou relações do tipo função entre variáveis, ou relações funcionais (quando a operação escolhida intervém entre grandezas de natureza diferente) (VERGNAUD, 2011). Vergnaud (2011, p. 23) afirma que "[...] as duas formas de raciocínio se parecem; entretanto, elas são conceitualmente muito diferentes", pois uma representa um quociente de dimensões (fator funcional), enquanto a outra é uma relação escalar sem dimensão (fator escalar).

Para finalizar a Unidade 6, o autor traz, na seção *Vamos ver de novo?,* uma atividade que sugere aos estudantes rever os conceitos e os procedimentos matemáticos já trabalhados no ano em estudo e nos anos anteriores, a fim de auxiliar no "[...] desenvolvimento em espiral dos conteúdos" (DANTE, 2019b, p. 164). A Figura 25 apresenta informações que compõem a situação: "[...] Bianca fez o levantamento dos preços de alguns produtos em uma loja. Analise e complete as tabelas com os preços que faltam" (DANTE, 2019b, p. 164).

Figura 25 – Ideias de estruturas *um para muitos, partição e muitos para*

Livros

Quantidade	Preço
1	R$ 7,00
2	2 × 7 = 14 R$ 14,00

Bonecas

Quantidade	Preço
1	80 ÷ 4 = 20 R$ 20,00
4	R$ 80,00

Ursos de pelúcia

Quantidade	Preço
2	R$ 18,00 18 ÷ 2 = 9
3	3 × 9 = 27 R$ 27,00

Tabelas elaboradas para fins didáticos.

Fonte: Dante (2019c, p. 164).

Para essa atividade, que envolve situações distintas, o autor destaca a necessidade de que os estudantes descrevam as informações fornecidas, e questiona se cada tabela fornece o preço de cada produto.

As relações elementares definidas nas estruturas multiplicativas presentes em cada situação apontam que o autor busca destacar a relação existente entre quatro quantidades, bem como a quantidade buscada em cada uma delas. Segundo Vergnaud (2009, p. 240), "[...] o esquema utilizado em todos esses exemplos não é nada a mais que um quadro de correspondência entre duas espécies de quantidades". No entanto, o exemplo 1 pode ser resolvido por uma multiplicação entre grandezas elementares. No exemplo, 2 a diferença é de outra natureza, em que "[...] é preciso encontrar o valor unitário, conhecendo-se o elo de correspondência entre duas grandezas de natureza diferente" (VERGNAUD, 2009, p. 241). O exemplo 3 constitui ilustração mais complexa da relação quaternária: "[...] reencontra-se o mesmo esquema fundamental de correspondência observado" (VERGNAUD, 2009, p. 246). Contudo, "[...] o fato novo está em que nenhuma das quatro quantidades é a unidade e que a regra de três a que se chega, nesse caso, é uma regra de três não deturpada (denominador diferente de 1)" (VERGNAUD, 2009, p. 246).

Nessa atividade, identificam-se situações de estrutura matemática respectivas às classes *um para muitos*, *partição* e *muitos para muitos*. Nesse sentido, podemos inferir que o autor busca instigar, nos estudantes, o estabelecimento do cálculo relacional pertinente à cada situação, mas sem explicitar as relações envolvidas. Nas situações retratadas na Figura 25, o autor enfatiza as estratégias utilizadas para sua resolução, como operações inversas.

A realização da análise dos três primeiros volumes da coleção permite constatar que o material didático conta com o auxílio de suportes de representação nos enunciados das atividades e sugere, de forma majoritária, a resolução de problemas como estratégia didática. Também incentiva a utilização de material manipulável a fim de favorecer o desempenho dos estudantes. É possível observar que, nos três primeiros livros da coleção Ápis de Matemática, as situações que contemplam as ideias de estruturas multiplicativas são apresentadas de forma intuitiva, por meio de situações que envolvem estimativas, sem a utilização dos algoritmos, tanto da multiplicação quanto da divisão, tampouco trazem a ideia da formalização dessas operações, pois fazem parte do ciclo de alfabetização matemática. Assim, em aspectos mais refinados, constatamos que os volumes analisados buscam trabalhar as ideias matemáticas antes da apresentação da simbologia das operações matemáticas.

Os conteúdos são apresentados sob uma sequência lógica, de forma que a multiplicação e a divisão sejam desenvolvidas após serem trabalhados os conceitos de adição e de subtração, enfatizando a noção da multiplicação pela adição de parcelas repetidas, dando sequência à memorização da tabuada como ferramenta/estratégia indispensável à compreensão da multiplicação.

Nesse sentido, as observações realizadas a partir das situações-problema identificadas, a nosso ver, delimitam a experiência dos estudantes, pois o que se observa é a continuidade do uso de estratégias do campo aditivo em detrimento do campo multiplicativo, e o tratamento a multiplicação apenas como a soma de parcelas repetidas não é suficiente para aquisição do conhecimento multiplicativo (GITIRANA *et al.*, 2014). Também é possível perceber que a relação unitária (ou fator unitário) é apresentada de forma explícita em todas as situações respectivas à classe *um para muitos*, seja por meio de suportes de representação, seja por meio da língua natural dos enunciados. Segundo Spinillo, Lautert e Santos (2021, p. 118), "[...] o nível de explicitação da relação um para muitos seria fator importante na resolução de problemas multiplicativos e que, quanto mais explícitas forem essas relações, melhor seria o desempenho das crianças”.

Em pesquisa realizada por esses autores a respeito de problemas semelhantes aos encontrados usualmente em livros didáticos, eles identificaram que “[...] os problemas variam conforme o grau de explicitação das relações um para muitos” (SPINILLO; LAUTERT; SANTOS, 2021, p. 118), nos quais essa relação pode ser: 1- explicitamente mencionada na primeira frase do enunciado; 2 – explicitada na segunda frase do enunciado; ou ainda, 3 – a relação um para muitos não é explicitada, precisando ser encontrada pelos estudantes. Nesse sentido, o estudo aponta que a instrução direta da razão unitária tem impacto direto sobre o desempenho dos estudantes, ao resolverem situações-problema de natureza multiplicativa.

Levando em consideração as variáveis didáticas envolvidas nas situações analisadas, no que tange as características numéricas utilizadas, bem como os suportes de representação disponibilizados, é possível inferir que, da forma como são apresentados, constituem papel facilitador nas propostas de resolução das situações, por não causarem dificuldades para os estudantes, mas consequentemente, não possibilitam que os estudantes avancem nos procedimentos de resolução.

5.1.4 *Aspectos das Estruturas Multiplicativas no Livro Didático – 4º ano EF*

Na perspectiva de compreender de que forma se apresentam as situações-problema que pertencem ao eixo Proporção Simples, classes *um para muitos* e *partição* no quarto volume da coleção Ápis, iniciamos com a apresentação das Unidades que o compõem. Buscamos, ainda, detalhar a organização, a divisão e a classificação dessas situações em função do grau de complexidade cognitiva exigido para sua resolução, conforme realizado com os volumes anteriores. O volume quatro é composto por oito Unidades, definidas como:

1 – Sistemas de numeração;

2 – Geometria;

3 – Massa, capacidade, tempo e temperatura;

4 – Adição e subtração com números naturais;

5 – Multiplicação com números naturais;

6 – Divisão com números naturais;

7 – Comprimento e área; e

8 – Frações e decimais.

As situações-problema que envolvem estruturas multiplicativas das referidas classes são encontradas na Unidade 5 e na Unidade 6. Na unidade 5, o autor destaca a retomada das ideias ou significados associados à multiplicação, bem como a apresentação formal da ideia de proporcionalidade. Com a utilização de cálculos mentais e com resultados aproximados por meio de arredondamentos, a multiplicação por 10, 100 e 1000 é introduzida, enfatizando a regularidade, como apresenta a Figura 26.

Figura 26 – Ideias de regularidade da multiplicação

a) Observe as multiplicações e os resultados e complete com o que falta.

$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$
$2 \times 10 = 10 + 10 = 20$	$3 \times 10 = 10 + 10 + 10 =$ 30
$2 \times 100 = 100 + 100 = 200$	$3 \times 100 = 100 + 100 + 100 =$ 300
$2 \times 1000 = 1000 + 1000 = 2000$	$3 \times 1000 = 1000 + 1000 + 1000 =$ 3000

Fonte: Dante (2019d, p. 127).

O autor destaca, também, a utilização da decomposição de um dos fatores como estratégia de resolução, conforme pode ser visto a partir da Figura 27. Inicialmente, são propostos os algoritmos da multiplicação, em que um dos fatores apresenta apenas um algarismo; e em seguida, com fatores que apresentam mais de um algarismo.

Figura 27 – Ideias de decomposição da multiplicação

Veja como podemos decompor o número 1 305.

$$1\,305 = 1 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1$$

ou

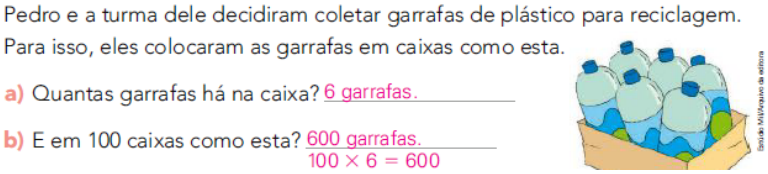
$$1\,305 = 1000 + 300 + 0 + 5$$

Fonte: Dante (2019d, p. 128).

A esse respeito, Vergnaud (2009, p. 183) afirma que, "[...] embora se possa colocar de pronto números de muitos algarismos no multiplicando, não se pode usar no multiplicador senão operadores simples de um algarismo". Esse fato está ligado à ideia de que, ao partir de um material concreto para ensinar a multiplicação, o estudante é induzido a considerar a multiplicação como adição reiterada de uma mesma quantidade. No entanto, o multiplicando passa a ser uma medida; e o multiplicador, um simples operador sem dimensão.

A multiplicação é apresentada, também, como ideia de configuração retangular, conforme apresentado na Figura 28. Nela, a sugestão é para que os estudantes utilizem a simples contagem das garrafas contidas na caixa, "[...] o que descaracteriza situações concernentes ao Campo Multiplicativo" (MERLINI, 2012, p. 133), ou ampliem os procedimentos de resolução, podendo pensar na ideia de disposição retangular, pela simples multiplicação de 2 por 3, ou de 3 por 2, chegando ao mesmo resultado, 6, sem levar os estudantes a compreenderem as relações estabelecidas na situação.

Figura 28 – Ideias de multiplicação – configuração retangular


Pedro e a turma dele decidiram coletar garrafas de plástico para reciclagem. Para isso, eles colocaram as garrafas em caixas como esta.

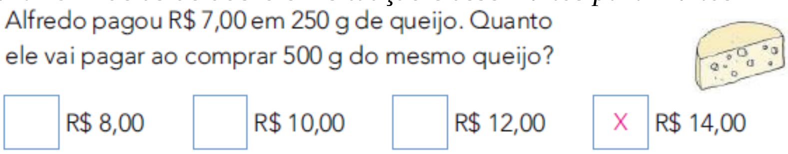
a) Quantas garrafas há na caixa? 6 garrafas.

b) E em 100 caixas como esta? 600 garrafas.
$100 \times 6 = 600$

Fonte: Dante (2019d, p. 128).

As noções de dobro e triplo são retomadas, conforme exemplificado na Figura abaixo (29), para, então, serem apresentadas as ideias de quádruplo e quíntuplo. As situações-problema relativas à classe *muitos para muitos* não fazem parte desta etapa da pesquisa, mas foram trazidas como forma de explicitar outros aspectos de abordagens da multiplicação dados pelo autor.

Figura 29 – Ideias de dobro em situação classe *muitos para muitos*


Alfredo pagou R$ 7,00 em 250 g de queijo. Quanto ele vai pagar ao comprar 500 g do mesmo queijo?

☐ R$ 8,00 ☐ R$ 10,00 ☐ R$ 12,00 ☒ R$ 14,00

Fonte: Dante (2019d, p. 94).

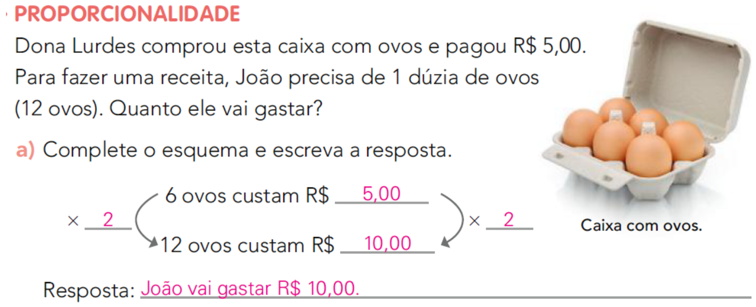
Nessa situação, a razão entre as quantidades de queijo é um número inteiro, e nesse sentido, segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 66), os estudantes “[...] podem utilizar mais facilmente um teorema em ação que corresponde à propriedade linear da proporcionalidade, aplicando a razão entre as medidas da mesma grandeza”

A situação propõe cálculos de preços envolvendo medidas de massa. É explorada intuitivamente a ideia de proporcionalidade em uma situação de dobro: ao comprar o dobro, paga-se o dobro.

Com base nessa situação, é possível perceber o uso social das Grandezas e medidas logo no início dessa Unidade em situações diversas, identificando as medidas presentes no cotidiano dos estudantes para relacioná-las com suas diversas unidades, como as relações correspondentes entre: 1m = 1000 mm; 1 kg = 1000 g; 1 km = 1000 m, etc. Assim, enfatiza-se a necessidade do uso do material dourado para explorar atividades como medir e registrar medidas. Esse fato está relacionado com a afirmação de Santana, Lautert e Filho (2017ª, p. 17): “[...] para que haja o entendimento das relações envolvidas nas situações multiplicativas, é importante a compreensão da grandeza e das suas medidas”.

A Figura 30 apresenta estratégia para resolução de uma situação de proporcionalidade respectiva à classe *muitos para muitos.*

Figura 30 – Ideias de proporcionalidade em situação classe *muitos para muitos*


PROPORCIONALIDADE

Dona Lurdes comprou esta caixa com ovos e pagou R$ 5,00. Para fazer uma receita, João precisa de 1 dúzia de ovos (12 ovos). Quanto ele vai gastar?

a) Complete o esquema e escreva a resposta.

× 2 — 6 ovos custam R$ 5,00 — × 2

12 ovos custam R$ 10,00

Caixa com ovos.

Resposta: João vai gastar R$ 10,00.

Fonte: Dante (2019d, p. 125).

Embora esse tipo de situação, assim como a situação exemplificada na Figura 29 (classe *muitos para muitos*), não faça parte desta fase da pesquisa, apresentamos a forma de indicação dada pelo autor para resolvê-la, com o uso de esquema relacional, que envolve a grandeza ovos e a grandeza reais. A análise vertical representada na situação possibilita perceber a existência da relação do escalar multiplicativo (x2), definida por Vergnaud (2009) como a transformação entre as medidas de uma mesma grandeza. O enunciado suficientemente claro permite a identificação dos tipos e das quantidades de elementos nele presentes.

As atividades que seguem se referem a situações-problema do tipo Proporção Simples, classe *um para muitos*, encontradas na Unidade 5 e na Unidade 6.

Os objetivos da Unidade 5 se referem, especificamente a:

> [...] – Explorar as ideias associadas à multiplicação; - Apresentar o algoritmo da multiplicação na qual um dos fatores tem um algarismo e o outro tem um ou mais algarismos; - Apresentar o algoritmo da multiplicação em que ambos os fatores têm mais de um algarismo; - Desenvolver estratégias de cálculo para efetuar multiplicação; - Resolver atividades e problemas que usam a multiplicação (DANTE, 2019d, p. 120).

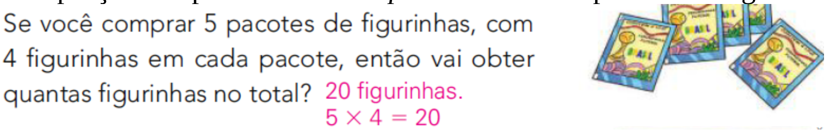
Quanto aos objetivos da Unidade 6, estes estão definidos como:

> [...] – Reconhecer as ideias da divisão; - Diferenciar divisão exata e divisão não exata; - Relacionar a divisão exata com a multiplicação; - Apresentar diferentes estratégias para efetuar uma multiplicação; - Apresentar o algoritmo usual da divisão; - Reconhecer as noções de metade, terça parte, quarta e quinta parte; - Resolver problemas envolvendo as quatro operações (DANTE, 2019d, p. 146).

Nesse sentido, a partir da próxima Figura (31) podem ser vistas algumas situações relativas à referida classe, e após, estão exemplificadas algumas situações respectivas à classe *partição*.

A Figura 31 retrata uma situação que envolve duas grandezas distintas, são elas: quantidade de figurinhas e a quantidade de pacotes. Nessa situação, o valor unitário é apresentado no enunciado de forma explícita.

Figura 31 – Proporção Simples – classe *um para muitos* – os pacotes de figurinhas



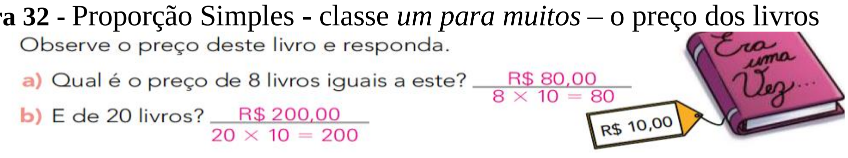
Fonte: Dante (2019d, p. 122).

Conforme acontece nos volumes anteriores, para a resolução, os estudantes são instigados a realizar a soma de parcelas repetidas, possibilitando perceber, do ponto de vista didático, a continuidade entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, bem como por meio de multiplicações, dando ideia do uso dos algoritmos da operação de multiplicação.

No entanto, conforme citado anteriormente, para a resolução, também é possível pensar, como estratégias, na utilização da relação escalar, ou ainda, na relação funcional. Pensar nessa última leva em consideração o nível escolar a que se destina, podendo representar um nível de raciocínio mais elaborado por parte dos estudantes (VERGNAUD, 2009).

As situações-problema referentes à classe *um para muitos* trazem o fator unitário de forma explícita, seja no enunciado da situação, seja no suporte de representação, conforme exposto na Figura 32, a qual aborda a relação entre o número de livros e o valor de cada um (preço por livro).

Figura 32 - Proporção Simples - classe *um para muitos* – o preço dos livros



Fonte: Dante (2019d, p. 127).

Analisando especificamente a grandeza quantidade de livros, é possível perceber que ela aumentou de um para oito; ou seja, multiplicamos a unidade pelo operador escalar (8), e assim, para manter a proporcionalidade, o mesmo operador escalar é aplicado na grandeza valor em reais, obtendo o valor total de reais necessários para comprar oito livros.

Nesse sentido, considerando os valores numéricos envolvidos na situação, novamente a ideia de soma reiterada de parcelas pode ser utilizada como estratégia de resolução. A ideia de adição reiterada de parcelas é associada à memorização da tabuada e utilizada como ferramenta indispensável para o domínio da operação de multiplicação.

No entanto, considerando a grandeza 20 livros, exposta na letra *b* da situação, é possível inferir que essa estratégia se torna inviável, considerando o número de vezes em que a grandeza deverá ser repetida, pois ao utilizar o processo de adição repedida $(20+20+20...)$ n vezes torna o processo exaustivo. A partir dessa situação, busca-se introduzir a multiplicação por meio de seu algoritmo.

Do ponto de vista cognitivo, tanto a situação *a* quanto a situação *b*, exemplificadas na Figura 32, “[...] têm graus diferentes de complexidade, o que exigirá do estudante um maior investimento cognitivo para compreendê-las e ter sucesso ao resolvê-las” (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 519). Esse aspecto exposto nessa situação-problema pode ser visto, também, na situação apresentada na Figura 33.

A próxima Figura (33) exemplifica uma situação-problema que mantém o esquema relacional discutido anteriormente, que relaciona o número de prestações com o valor de cada uma delas. No entanto, torna-se inviável somar 30 vezes o número de parcelas definidas, o que sugere o uso do algoritmo da multiplicação. Nesse tipo de situação, o autor enfatiza, conforme exposto nos volumes anteriores, o uso social das Grandezas e medidas, considerando identificar as medidas que estão presentes no cotidiano dos estudantes. Nessa situação, está explicitamente associada uma unidade de medida da grandeza prestações, com mais de uma unidade da grandeza reais.

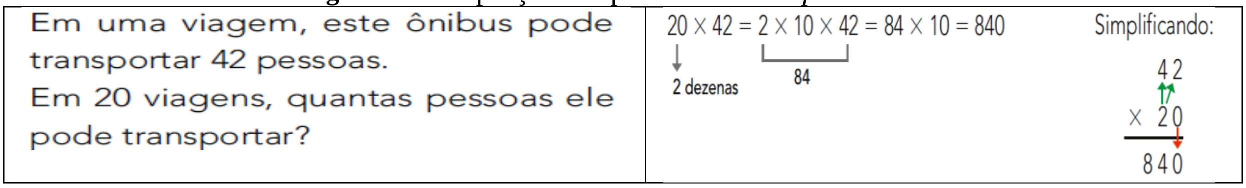
Figura 33 - Proporção Simples - classe *um para muitos* – a situação do preço do automóvel

Um automóvel está sendo vendido em 30 prestações de R$ 800,00 cada uma delas. Qual é o preço total desse automóvel?

Fonte: Dante (2019d, p. 133).

Na situação-problema exemplificada na Figura 34, é explorado o algoritmo da multiplicação em que os dois fatores possuem mais de um algarismo. Para sua resolução, o autor aborda duas estratégias: uma consiste na decomposição multiplicativa de um dos fatores $20 = 2 \cdot 20$, a fim de facilitar o processo de multiplicação pelo número 10, destacando o uso da tabuada; e a outra se constitui na utilização do algoritmo usual da multiplicação.

Figura 34 - Proporção Simples - classe *um para muitos*

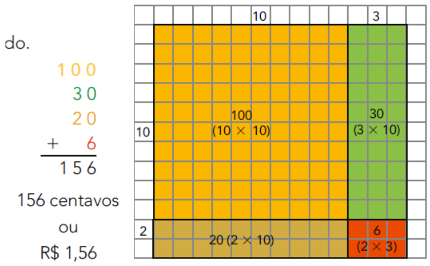


Fonte: Dante (2019d, p. 138).

Para a primeira estratégia apresentada, Vergnaud (2009, p. 186) afirma que o fato que "[...] na operação de multiplicação, a multiplicação por 30 é realizada por duas multiplicações, por 10 e por 3". De forma análoga, o livro traz a representação dessa estratégia. A multiplicação por 10 traduz-se pela escrita de um zero na coluna das unidades (ou pelo deslocamento de uma posição para a esquerda); e a multiplicação por 2, pela sequência do procedimento. Portanto, é fundamental que os estudantes percebam que, para multiplicar 42 por 20, basta fazer $42 \cdot 2$ dezenas = 84 dezenas, ou seja, 840 unidades.

Podemos observar que o fator unitário está explícito logo na primeira frase, fato que favorece os estudantes na busca pela resolução. Para a utilização do algoritmo usual da multiplicação, o autor enfatiza, ainda, ser "[...] mais conveniente colocar embaixo o número com menos algarismos e que esse procedimento pode ser feito de acordo com uma das regularidades (propriedades) da multiplicação: a ordem dos fatores não altera o resultado" (DANTE, 2019d, p. 138). O autor também explora a estratégia da decomposição, da soma reiterada de parcelas, e ainda, outra estratégia é sugerida para resolução de situação-problema, que envolve a multiplicação: a representação geométrica por meio da decomposição decimal dos fatores envolvidos, com o uso do papel quadriculado, conforme pode ser visto a partir da Figura 35.

Figura 35 - Ideia de multiplicação com auxílio da malha quadriculada

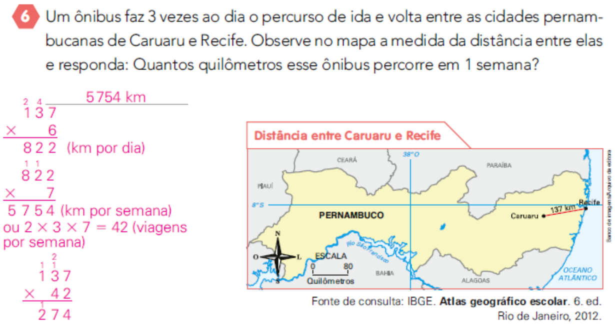


Fonte: Dante (2019d, p. 139).

A situação exemplificada na Figura 35 refere-se a: "[...] *uma operadora de celular oferece ligações para telefones fixos a 13 centavos o minuto. Quanto custa uma ligação de 12 minutos, nesse caso?"* (DANTE, 2019d, p. 139). Nela, é explorada uma multiplicação em que os dois fatores têm mais de um algarismo por meio do processo geométrico.

Finalizando a Unidade 5, a próxima situação (Figura 36) traz a ideia de correspondência *um para muitos*, na qual o fator unitário não é informado. Conforme indicação do autor, para resolver essa situação, os estudantes deverão descobrir a distância entre as cidades de Caruaru e Recife, que está expressa na figura de apoio fornecida, além de realizar o cálculo correspondente a grandeza um dia. Logo, os estudantes devem inferir o valor unitário, além de compreender que uma semana corresponde a sete dias.

Figura 36 - Proporção Simples - classe *um para muitos* – o mapa

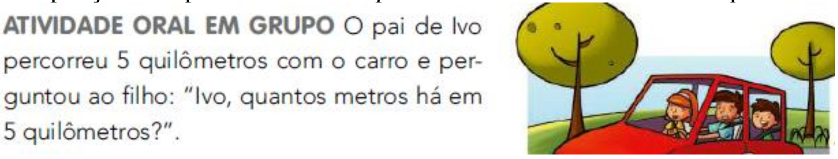


Fonte: Dante (2019d, p. 141).

Para a resolução dessa situação, é necessário que os estudantes realizem, inicialmente, cálculos intermediários, antes de definir quantos quilômetros são percorridos em uma semana. Para tanto, deve ser considerado o percurso de ida e de volta três vezes em um dia, conforme exposto pelo autor como resolução. Segundo Vergnaud (2009), a ausência de alguma informação intermediária traz um obstáculo maior à compreensão da situação para os estudantes, tendo em vista que devem ser realizadas análises fora do esquema requerido para a situação.

A Unidade 6, voltada à divisão com Números Naturais, também traz situações-problema relativas à classe *um para muitos*, conforme apresentada na Figura 37. Nessa situação-problema, o autor enfatiza a importância em trabalhar comparação de medidas de comprimento sem que sejam feitas as devidas medições, e solicita que os estudantes utilizem a transformação de uma medida de comprimento de quilômetros para metros para resolvê-la.

Figura 37 - Proporção Simples - classe *um para muitos* – os metros e os quilômetros



Fonte: Dante (2019d, p. 186).

No entanto, o fator unitário não é fornecido no enunciado da situação, tampouco na figura de representação utilizada. A informação respectiva à relação entre metros e quilômetros deve ser inferida pelos estudantes. Esse aspecto é fator importante, e implica significativamente no desempenho dos estudantes ao resolverem esse tipo de situação, pois exige conhecimentos prévios a respeito das relações envolvidas para sua resolução (SPINILLO; LAUTERT; SANTOS, 2021).

A unidade 6 busca, por meio de situações-problema, explorar as ideias da divisão, ou seja, a ideia de repartir igualmente (partição) e a ideia de medidas (divisão por quota), e tem como objetivos:

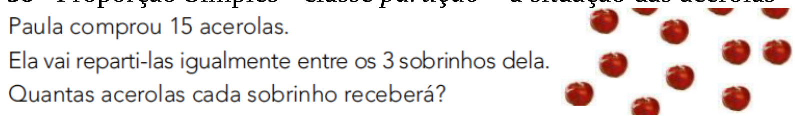
> [...] - Reconhecer as ideias da divisão; - Diferenciar divisão exata e divisão não exata; - Relacionar a divisão exata com a multiplicação; - Apresentar diferentes estratégias para efetuar uma divisão; - Apresentar o algoritmo usual da divisão; - Reconhecer as noções de metade, terça parte, quarta parte e quinta parte; - Resolver problemas envolvendo as quatro operações (DANTE, 2019d, p. 146).

Nessa Unidade, o autor destaca o uso de diferentes estratégias para a resolução de situações que envolvem a divisão, além de evidenciar a relação entre a divisão e a multiplicação como operações inversas. Inicialmente, a divisão por número de dois algarismos é apresentada por meio de subtrações sucessivas, fato que aponta a continuidade entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, seguindo para a utilização do algoritmo usual da divisão.

É possível perceber a preocupação do autor em recomendar a operação de divisão aos estudantes de forma adequada, considerando o tempo necessário para a compreensão das ideias e dos procedimentos envolvidos, pois destaca que eles apresentam maiores dificuldades na aprendizagem da operação de divisão, em comparação à aprendizagem da adição, da subtração e da multiplicação.

Observa-se, ao longo desse volume, o predomínio da ideia de divisão como distribuição; ou seja, a divisão partitiva que envolve *números pequenos e divisões simples*, conforme pode ser visto na Figura 38.

Figura 38 - Proporção Simples - classe *partição* – a situação das acerolas



Fonte: Dante (2019d, p. 149).

Para essa situação, o autor evidencia a ideia de repartir igualmente, e enfatiza que sejam retomadas as etapas da resolução de problemas com o uso de material concreto (tampinhas de garrafa PET, feijões, fichas do material próprio do livro, Material Dourado). O autor destaca que o Material Dourado facilita a visualização e a representação das trocas de cada dezena em 10 unidades e de cada centena em 10 dezenas.

Para esse tipo de situação, o autor chama atenção para o fato de que os elementos são separados em grupos com quantidades iguais, e o que se procura é o número de elementos em cada grupo. Portanto, pretende-se determinar o valor unitário, conforme exemplificado, também, na Figura 39. Nessa última, a ação é distribuir igualmente a quantidade de sabonetes por um número determinado pela quantidade de caixas (5), relacionando as grandezas de mesma natureza: *caixa com caixa e sabonetes com sabonetes*.

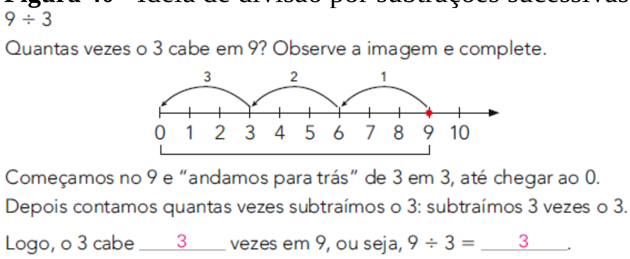
Figura 39 - Proporção Simples – classe *partição* – as caixas de sabonete

Rosana vai distribuir igualmente 40 sabonetes em 5 caixas. Quantos sabonetes ficarão em cada caixa? 8 sabonetes.

Fonte: Dante (2019d, p. 153).

Além da indicação do autor para que os estudantes utilizem a representação por meio de desenhos (representação gráfica) como estratégias de resolução, o quarto volume traz a ideia de divisão por meio de subtrações sucessivas: ideia apoiada no Campo Conceitual Aditivo $(9-3-3-3=0)$, conforme apresentado na Figura 40.

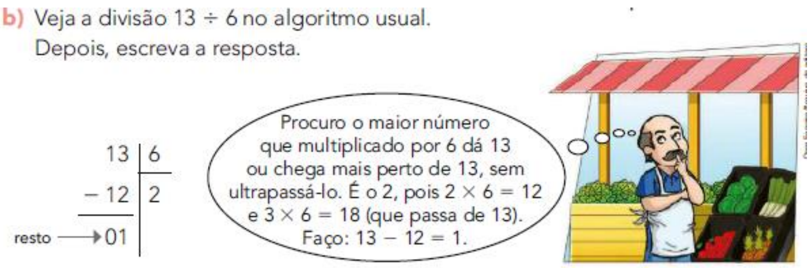
Figura 40 - Ideia de divisão por subtrações sucessivas



Fonte: Dante (2019d, p. 152).

Ainda, a reta numerada é utilizada para abordagem da divisão inexata, assim como divisão exata, além do uso da tabuada e da *divisão na chave*, ou *diagrama de chaves*, denominações dadas pelo autor para o algoritmo usual da divisão, destacando a nomenclatura dos elementos contidos na referida operação e enfatizando a operação de divisão como inversa à operação de multiplicação, conforme pode ser visto na Figura 41.

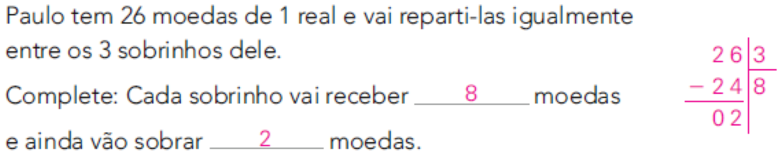
Figura 41 - Divisão inexata na chave



Fonte: Dante (2019d, p. 154).

Na figura acima, é apresentada a nomenclatura dos termos que envolvem a operação de divisão. Contudo, segundo o autor, deve-se dar destaque à compreensão das ideias envolvidas nessa operação, ao considerar o resto da divisão. Para exemplificar, a Figura 42 traz uma situação que envolve a ideia de *partição* em uma divisão inexata com o uso do algoritmo da divisão.

Figura 42 - Proporção Simples – classe *partição inexata*

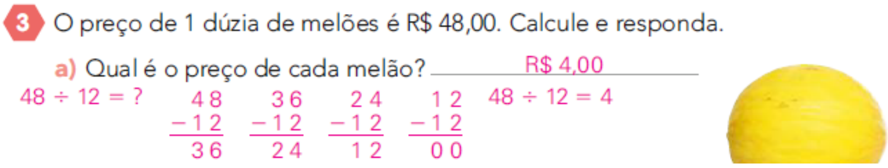


Fonte: Dante (2019d, p. 155).

Nela, a ênfase é dada à ideia de repartir igualmente, e para a qual é fornecida a quantidade total de moedas e a quantidade de sobrinhos que as receberão, associadas à pergunta “[...]Quantas moedas cada sobrinho irá receber?” (DANTE, 2019d, p. 155). No entanto, podemos constatar que, nas situações que envolvem divisões inexatas exploradas até então, não foi dada ênfase na utilização do resto da divisão, pois foram utilizadas grandezas discretas, para as quais o enfoque dado corresponde somente à utilização dos algoritmos da referida operação.

A divisão por meio de subtrações sucessivas é a estratégia utilizada também na divisão por números de dois algarismos, conforme exemplificado na Figura 43.

Figura 43 - Proporção Simples – classe *partição* – a situação dos melões



Fonte: Dante (2019d, p. 157).

Essa estratégia é sugerida pelo autor tanto para situações respectivas à classe *quotição* quanto para situações referentes à classe *partição*, para as quais evidencia a necessidade de identificação do quociente e do resto, que correspondem, respectivamente, ao número de subtrações efetuadas e ao resultado (a diferença) da última subtração. O autor destaca que, em todos os momentos, sejam realizadas intervenções de orientação pelos professores na compreensão do que o problema pede, no sentido de desafiar os estudantes, bem como na identificação dos termos e das relações entre eles em divisões elementares.

Uma proposta para ampliar o algoritmo usual da divisão, nesse caso, divisão partitiva, conforme exposto pelo autor, é exemplificada na Figura 44, em que o dividendo é composto por três algarismos.

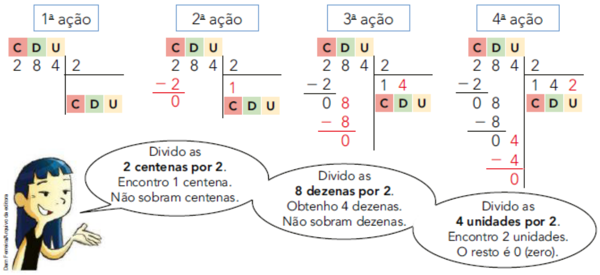
Figura 44 - Proporção Simples – classe *partição* – a bandeja de gelatina

Na festa de Bruno havia 284 copinhos de gelatina, separados igualmente em 2 bandejas grandes. Quantos copinhos de gelatina havia em cada bandeja?

Fonte: Dante (2019d, p. 162).

Nessa situação, o autor enfatiza a ideia de divisão em partes iguais por meio do algoritmo usual da operação, conforme exposto na Figura 45, além de incentivar o uso de materiais concretos. É possível perceber que o autor busca propor atividades que possibilitem aos estudantes atribuírem sentido e significados aos símbolos da Matemática.

Figura 45 - Algoritmo usual da divisão



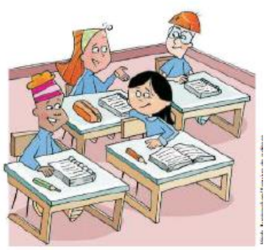
Fonte: Dante (2019d, p. 162).

A fim de trabalhar arredondamentos e aproximações em situações que envolvem a operação de divisão, o autor apresenta uma situação-problema que explora a ideia de *partição*, sugerindo que seja trabalhada informalmente com a ideia de média, conforme exemplificado na Figura 46.

Figura 46 - Arredondamento e resultado aproximado

Juntando 2 turmas de 3º ano de uma escola, temos 57 alunos.
As turmas têm, aproximadamente, a mesma quantidade de alunos. Então, há cerca de quantos alunos em cada turma?
Pensamos em um número próximo de 57 que seja fácil de dividir por 2.

$57 \div 2 \xrightarrow{\text{penso}} 60 \div 2 = 30$



Fonte: Dante (2019d, p. 169).

Nessa situação, os estudantes são incentivados a realizar o arredondamento da quantidade respectiva ao número de alunos de duas turmas para, então, descobrir a quantidade aproximada de alunos em cada turma.

5.1.5 *Aspectos das Estruturas Multiplicativas no Livro Didático – 5º ano EF*

Como nos volumes anteriores, observamos que o último volume da coleção investigada tem como principal opção metodológica desenvolver a capacidade dos estudantes em resolver problemas, a fim de possibilitar inferências e argumentações, além de trabalhar em grupo, instigar o uso do cálculo mental, e expor ideias de forma oral ou por escrito. Ainda, observamos que as atividades diferenciadas que propõem interdisciplinaridade são apresentadas ao final de cada seção.

O quinto volume está dividido também em 8 Unidades, conforme destacadas a seguir:

1 – Sistema de numeração decimal;

2 – Geometria;

3 – Adição e subtração com números naturais;

4 – Multiplicação e divisão com números naturais;

5 – Mais geometria;

6 – Frações;

7 – Decimais; e

8– Grandezas e suas medidas.

As situações-problema do tipo Proporção Simples, classes *um para muitos* e *partição*, encontram-se distribuídas a partir da Unidade 4, que é destinada a situações de multiplicação e divisão, e conforme explicita o autor, isso ocorre por meio de exemplos explorados e discutidos oralmente, de forma a valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes. Nesse sentido, os principais resultados das análises são apresentados a seguir, considerando, inicialmente, algumas situações-problema respectivas à classe *um para muitos.*

Figura 47 - Proporção Simples – classe *um para muitos* – as situações das dúzias de ovos e das horas

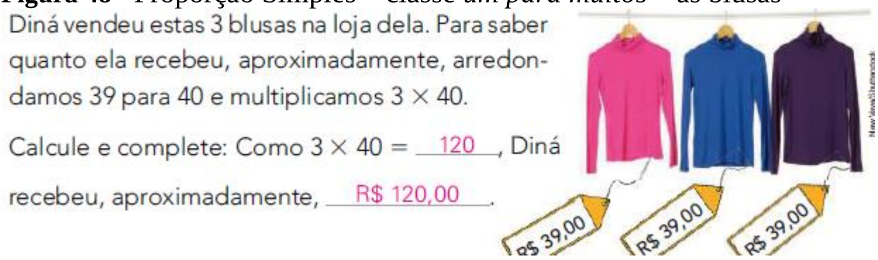
Se você comprar 5 dúzias de ovos, então quantos ovos terá comprado? 60 ovos. Fonte: Dante (2019e, p. 78).	Flávia trabalhou 25 horas por semana durante 12 semanas. Quantas horas ela trabalhou nesse período? Fonte: Dante (2019e, p. 79).

Os dois exemplos apresentados na Figura 47 referem-se a situações que envolvem a relação *um para muitos*, as quais podem ser representadas por um esquema “[...] que não traz qualquer espécie de dificuldade para as crianças e que mostra bem a relação existente entre quatro quantidades", pois estabelecem a correspondência entre duas espécies de quantidades, as "dúzias e os ovos"; as "semanas e as horas trabalhadas" (VERGNAUD, 2009, p. 240).

Além de sua estrutura, a forma pela qual as informações são explicitadas em ambas as situações, não traz dificuldades para os estudantes, porque são pertinentes e suficientes para sua resolução, além da natureza dos números em jogo, representadas por números pequenos e inteiros, fato que favorece sua resolução (VERGNAUD, 2009).

Algumas situações-problema trazem a ideia de arredondamento a partir de uma situação *um para muitos*, como nos volumes anteriores da coleção. De maneira análoga às situações presentes na Figura 47, a situação exemplificada na Figura 48 apresenta o valor unitário de forma explícita na relação entre as quantidades, sendo necessário encontrar as várias unidades da outra grandeza, conforme pode ser observado.

Figura 48 - Proporção Simples – classe *um para muitos* – as blusas



Fonte: Dante (2019e, p. 87).

O autor chama a atenção para que os estudantes se atentem para a ordem exata mais próxima necessária para a aproximação, ou seja, que identifiquem o arredondamento para a dezena exata utilizada.

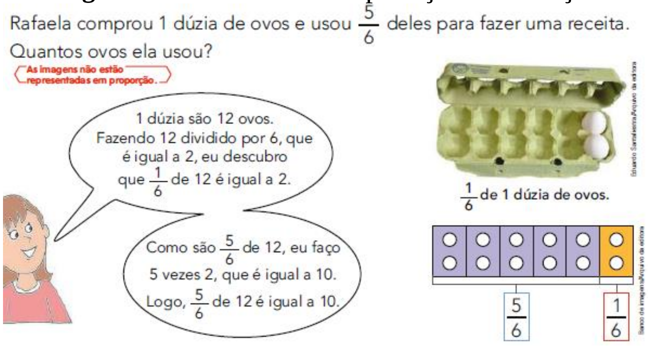
Na Unidade 6, o autor apresenta situações-problema que envolvem o conceito de fração, e afirma que, "[...] embora a representação de medidas na forma decimal seja a mais usada" (DANTE, 2019e, p. 128), no dia a dia, é necessário explorar a relação existente entre suas representações. O autor ainda exemplifica as frações mais comuns que podem ser observadas: "[...] fração de uma figura ou de um objeto, a fração de um conjunto de elementos, a fração de um número, fração e medida, fração e divisão, etc." (DANTE, 2019e, p. 128).

Ainda na Unidade 6, são abordados os números mistos, ou seja, números formados por um número natural e por uma fração, e em seguida, a ideia de frações equivalentes para, então, iniciar o estudo das operações com frações.

Dante (2019e) destaca, ainda, a importância de trabalhar o conceito de porcentagem, e afirma que ele "[...] surge naturalmente das frações de denominadores igual a 100" (DANTE, 2019e, p. 128). Além disso, de introduzir a ideia de probabilidade, por meio de atividades e problemas que envolvam esses três conceitos destacados: fração, porcentagem e probabilidade, conforme descrito nos objetivos definidos para essa Unidade.

A Figura 49, na página seguinte, representa uma situação-problema que envolve a ideia multiplicativa *um para muitos.* Essa situação envolve uma fração com denominador 6.

Figura 49 - Ideias de multiplicação com fração



Fonte: Dante (2019e, p. 134).

Para sua resolução, o autor sugere uma estratégia que pode ser vista nos balões utilizados. Contudo, dependendo da estrutura da situação, ela se refere a uma relação entre a grandeza ovos e a grandeza dúzia, na qual a fração $\frac{5}{6}$ representa o fator escalar: um número sem dimensão (relacionado à grandeza ovos). Essa interpretação, segundo Vergnaud (2009b), poderia ser realizada de outra maneira, por meio da divisão como quociente de dimensões: relacionando as grandezas de naturezas diferentes (ovos e dúzias), que demanda uma análise dimensional. No entanto, “[...] os alunos têm dificuldade em conceber esta operação de quociente” (VERGNAUD, 2009b, p. 15). Ainda, segundo Santana, Lautert, Filho (2017a, p. 50), esse número fracionário “[...] se refere a uma quantidade menor que um inteiro (um número decimal)”, fato que “[...] aumenta o grau de dificuldade para a resolução desse tipo de situação, pois envolve um número racional”.

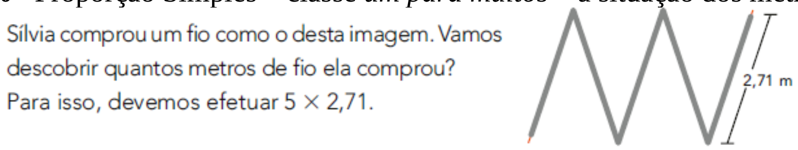
De acordo com Vergnaud (2009, p. 190), considerando a regra operatória da divisão, ela “[...] evidentemente é a mais complexa das quatro operações porque implica, ao mesmo tempo, a subtração, a multiplicação e a busca por tateio ou enquadramento dos algarismos do quociente”. Esse mesmo autor ainda enfatiza que “[...] a divisão por um número com vírgula, por exemplo, parece fora do alcance da maioria das crianças de 10 ou 11 anos” (VERGNAUD, 2009, p. 190). Nesse contexto, podemos inferir que a primeira dificuldade apresentada nessa situação reside em requerer dos estudantes a operação de divisão. A segunda dificuldade está relacionada aos valores numéricos utilizados, considerando sua representação por meio de frações.

Na Unidade 7, que se refere aos decimais, a ideia de 1 décimo é trabalhada para que os estudantes compreendam “[...] que a unidade, ou inteiro, foi dividida em 10 partes iguais e foi tomada apenas uma dessas partes” (DANTE, 2019e, p. 164). Seus objetivos são: “[...] - retomar e aprofundar o estudo dos decimais: significado, comparação, operações e cálculo mental; - explorar decimais e medidas; - resolver problemas envolvendo decimais” (DANTE, 2019e, p. 164). Nessa Unidade, o autor destaca questões que têm enfoque na relação entre frações e decimais em situações do cotidiano.

A situação explicitada na Figura 50 traz a multiplicação de um número decimal por um número natural. Ela explora a relação *um para muitos,* em que o valor unitário é fornecido, e para a qual o esquema relacional associa uma unidade de uma grandeza (representada pela secção do fio) com várias unidades da outra grandeza (metros). Esse exemplo pode ser resolvido com uma multiplicação e utilizando estratégias diferentes: o operador escalar multiplicativo ou o operador funcional.

No entanto, a dificuldade respectiva aos exemplos contidos nas situações representadas, tanto na Figura 48 quanto nas Figuras 49 e 50, não é a mesma, pois entre os exemplos “[...] é reencontrada a diferença entre números inteiros e números decimais, entre grandezas discretas e grandezas contínuas” (VERGNAUD, 2009, p. 241). Além disso, para essa última relação, “[...] as noções às quais elas fazem referência não são de mesmo nível” (VERGNAUD, 2009, p. 214).

Figura 50 - Proporção Simples – classe *um para muitos* – a situação dos metros de fio



Fonte: Dante (2019e, p. 184).

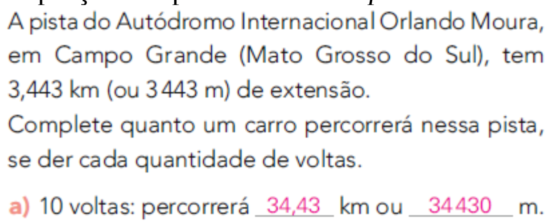
O caráter contínuo dos comprimentos (para os quais, entre dois comprimentos sempre se pode encontrar um intermediário), segundo Vergnaud (2009, p. 151), “[...] leva necessariamente à introdução de uma nova categoria de números, os números decimais ou números com vírgula”.

Nesse sentido, o mesmo autor afirma que a introdução da multiplicação como adição reiterada faz-se com maior facilidade com grandezas discretas e números inteiros. Assim, são necessárias explicações suplementares para fazer o estudante compreender que uma parte do fio que corresponde a 2,71m é o mesmo que 2 metros mais 0,71 metro, repetidamente, por cinco vezes. Embora essa replicação seja necessária para manter a proporção entre as grandezas, essa compreensão representa outro tipo de obstáculo aos estudantes.

No que se refere aos procedimentos metodológicos, as sugestões dadas pelo autor para resolução desse tipo de situação referem-se à adição de parcelas repetidas, ao algoritmo usual da multiplicação, bem como à decomposição do número decimal em parte inteira e parte decimal. A situação em questão pode ser representada por: $5 \cdot 2,71 = 5 \cdot (2\textit{inteiros} + 71\textit{centésimos}) =$ 10 inteiros + 355 centésimos = 10 inteiros + 3 centésimos (equivalem a 3 inteiros) + 55 centésimos = 13 inteiros + 55 centésimos.

A análise precedente pode ser utilizada para a situação-problema apresentada na Figura 51, em termos de estrutura, pois ela coloca em jogo um cálculo relacional que envolve quatro quantidades, e a operação requerida para sua resolução é a multiplicação. O valor unitário é fornecido no enunciado de maneira explícita, envolvendo grandezas de natureza contínua. Nela, o autor evidencia o uso da multiplicação por 10 e por 100, relacionadas a medidas de comprimento em quilômetros e em metros.

Figura 51 - Proporção Simples – classe *um para muitos* – o autódromo



A pista do Autódromo Internacional Orlando Moura, em Campo Grande (Mato Grosso do Sul), tem 3,443 km (ou 3 443 m) de extensão.

Complete quanto um carro percorrerá nessa pista, se der cada quantidade de voltas.

a) 10 voltas: percorrerá 34,43 km ou 34 430 m.

Fonte: Dante (2019e, p. 186).

Nesse tipo de situação, a ênfase dada pelo autor está na transformação de unidades de medida de comprimento, particularmente de quilômetros para metros, destacando a multiplicação por 1000.

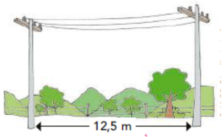
A Unidade 8, destinada especificamente a Grandezas e suas medidas, traz como objetivos:

> [...] - retomar e aprofundar o estudo das grandezas massa, temperatura, comprimento, área e capacidade; - estudar a grandeza volume; - apresentar as principais unidades padronizadas de medida das grandezas citadas; - calcular as medidas de perímetro, de área e de volume de figuras geométricas; - resolver problemas envolvendo grandezas e medidas (DANTE, 2019e, p. 198).

Um exemplo de situação-problema, conforme pode ser visto na Figura 52, respectiva à classe *um para muitos*, busca explorar medidas de comprimento já trabalhadas em anos anteriores.

Figura 52 - Proporção Simples – classe *um para muitos* – medida de comprimento

Um eletricista instalou estes fios ligando os 2 postes. Para saber quantos metros de fio gastaria, ele calculou inicialmente a medida da distância entre os postes. Esse é um exemplo de situação na qual se usa **medida de comprimento**. Calcule e responda: No mínimo, quantos metros de fio o eletricista gastou? 37,5 m



$$\begin{array}{r} 12{,}5 \\ \times\ 3 \\ \hline 37{,}5 \end{array}$$

Fonte: Dante (2019e, p. 208).

Essa situação envolve uma relação entre quatro quantidades de naturezas distintas, duas a duas, sendo o valor unitário fornecido na figura de apoio utilizada, mas não de forma explícita, precisando que o valor da unidade de referência seja inferido pelos estudantes. A situação apresenta a quantidade de metros utilizada em um fio (conforme expresso na figura de apoio), e quer saber a quantidade de três fios. Logo, os estudantes devem inferir que entre um poste e outro serão utilizadas três vezes o valor unitário correspondente ao fio elétrico. Embora possa ser trabalhada no campo aditivo, considerando a magnitude das grandezas envolvidas, é possível esperar dos estudantes dificuldades de leitura e de interpretação ao resolverem esse tipo de situação, pois as informações contidas não estão expressas de forma explícita.

Para resolver a situação-problema seguinte (Figura 53), é necessário que o estudante compreenda o conceito de área e estabeleça a relação entre metros e metros quadrados, levando em consideração que "[...] um metro quadrado não é apenas a área de um quadrado de um metro de lado; é também o produto de um metro por um metro" (VERGNAUD, 2009, p. 157).

Figura 53 - Proporção Simples – classe *um para muitos* – a situação do elevador

Considere 5 pessoas por metro quadrado.

a) Calcule e responda: Quantas pessoas cabem em um elevador cujo piso é uma região quadrada com o comprimento dos lados medindo 2 m?

20 pessoas.

Fonte: Dante (2019e, p. 215).

Uma primeira solução consiste em calcular a área do piso do elevador pela simples multiplicação entre esses dois números, $2 \cdot 2 = 4$; ou seja, pensar no produto direto entre as duas dimensões. Nesse sentido, deve-se considerar uma análise fora do esquema, a partir do conhecimento prévio do estudante sobre o conceito de área. Em seguida, obtém-se o número de pessoas que cabem no elevador a partir do cálculo relacional entre as quatro quantidades envolvidas, e a relação fixa entre as duas quantidades, considerando que cada metro quadrado comporta até cinco pessoas: assim, fica estabelecida a relação *um para muitos*, definindo seu valor unitário.

Nesse caso, os estudantes devem compreender que a medida de uma superfície é igual ao produto de seu comprimento (2m) por sua largura (2m), e que, então, trata-se de uma medida composta, redutível a uma composição de medidas mais elementares. Logo, é possível utilizar, como estratégias de resolução para essa situação-problema, tanto a análise vertical quanto a análise horizontal.

Com a mesma estrutura, variando o valor desconhecido, a situação exposta na Figura 54 envolve a ideia de divisão partitiva.

Figura 54 - Proporção Simples – classe *partição* – a fábrica

Em uma fábrica trabalham 456 funcionários, distribuídos igualmente em 3 setores. Quantos funcionários trabalham em cada setor?

Fonte: Dante (2019e, p. 84).

Nessa situação, é necessário determinar a quantidade de funcionários em cada setor, ou seja, busca-se o valor unitário da relação. Como estratégia de resolução, é possível utilizar tanto o operador escalar quanto o operador funcional. Segundo Vergnaud (2009), a dificuldade apresentada nessa situação reside no fato de que, para encontrar a quantidade de funcionários em um setor, a operação requerida corresponde a uma divisão e não a uma multiplicação, e conforme já discutido anteriormente, a dificuldade encontra-se ligada à regra operatória da operação de divisão. Ainda, considerando a magnitude dos números envolvidos, por se tratar de um divisor de três algarismos, torna-se inviável que sejam realizadas subtrações de parcelas sucessivas como estratégia para sua resolução. Logo, a natureza dos números em jogo envolvidos na relação não favorece recorrer a certos procedimentos de resolução, promovendo a ruptura entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Algumas das situações-problema respectivas à classe *partição* apresentam estratégias de resolução utilizando arredondamentos, assim como nas situações respectivas à classe *um para muitos*, e em atividades discutidas oralmente em grupo, conforme apresentado na Figura 55.

Figura 55 - Proporção Simples – classe *partição*

<table>
<tr>
<td>

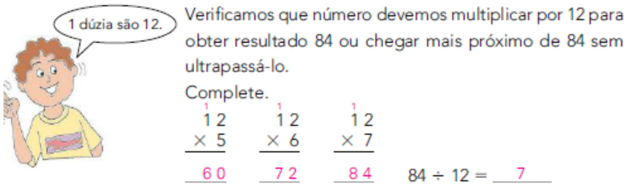
Fonte: Dante (2019e, p. 87).</td>
<td>ATIVIDADE ORAL EM GRUPO O dono de uma loja comprou 21 bonecas de mesmo preço por R$ 756,00. Quanto custou cada boneca?
Fonte: Dante (2019e, p. 89).</td>
</tr>
</table>

Ambas as situações possuem mesma estrutura e nível de complexidade, pois requerem uma divisão para sua resolução. A primeira diz respeito a uma situação na qual é necessário fazer arredondamentos. O autor indica que "[...] essa atividade integra o arredondamento do preço para a dezena exata mais próxima com a relação de operação inversa da multiplicação e da divisão" (DANTE, 2019e, p. 87). No entanto, aspectos vistos na situação precedente permitem o cálculo por estimativa, com apoio no campo aditivo.

A segunda situação da Figura 55 difere da anterior por abordar a divisão por números com dois (2) algarismos. Para os estudantes, esse fato representa um caráter desafiador, e consequentemente pode provocar desequilíbrio em sua resolução, quando considerados os valores numéricos das quantidades envolvidas na operação requerida.

No entanto, observa-se que o autor explora a compreensão e as habilidades dos estudantes por meio de situações-problema que requerem tanto a multiplicação quanto a divisão, aumentando gradativamente seus valores numéricos; com o uso da operação inversa[31]; e em seguida, com o algoritmo das estimativas. Somente após isso se apresenta o uso do algoritmo da divisão, conforme pode ser observado na Figura 56.

Figura 56 - Ideias da divisão por meio da multiplicação



Fonte: Dante (2019e, p. 88).

A Figura acima, conforme expõe o autor, "[...] explora a relação entre a multiplicação e a divisão, importante na verificação do resultado das divisões exatas" e "aborda a divisão por meio do 'caminho inverso'" (DANTE, 2019e, p. 86, grifo do autor).

Para além do fator relacional, "[...] de modo geral, a complexidade cresce, no interior de uma mesma classe de problemas, com a dificuldade do cálculo necessário" (VERGNAUD, 2009, p. 212). Essa afirmação do autor decorre da facilidade maior ou menor do cálculo numérico necessário, pois considera que "[...] os números grandes ocasionam mais dificuldades que os números pequenos, os números decimais, mais dificuldades que os números inteiros" (VERGNAUD, 2009, p. 212). Contudo, é diferente ao considerar uma situação em que "[...] a operação necessária se reduz a uma composição de números pequenos

[31] Vamos admitir a nomenclatura das operações elementares da Aritmética.

ou a operações mentais simples, exemplos: $4.000+9.000$, $666-555$, etc.” (VERGNAUD, 2009, p. 212).

Ainda na mesma Unidade (4), a situação presente na Figura 57 retrata a divisão equitativa: traz a ideia de *partição*. Nela, as quantidades não representam dificuldades de resolução para os estudantes, considerando a magnitude de seus valores numéricos, conforme pode ser visto pela Figura 57.

Figura 57 - Proporção Simples – classe *partição* – a situação dos livros

No final do ano letivo, os alunos do 5º ano **A** de uma escola se reuniram em duplas para fazer o levantamento da quantidade de livros que cada um leu durante o ano. Descubra os números em cada caso e registre.

a) Marcos: 8 livros; Sabrina: 8 livros.
Juntos: 16 livros.
Ambos leram a mesma quantidade de livros. $16 \div 2 = 8$

Fonte: Dante (2019e, p. 96).

Passando para a Unidade 7, a situação-problema apresentada na Figura 58, segundo o autor, busca explorar a divisão não exata de números naturais com resultado decimal. Para isso, explora ideias de décimos, centésimos e milésimos por meio do algoritmo usual da divisão, e enfatiza o uso do Material Dourado a fim de representar de maneira concreta as divisões.

Figura 58 - Proporção Simples – classe *partição* – o grupo de alunos

Para desenvolver uma atividade de Educação Física, a professora resolveu formar 2 grupos com a mesma quantidade de alunos. Mas havia 13 alunos.

a) Qual é o número máximo de alunos que ela pode colocar em cada grupo?

Fonte: Dante (2019e, p. 178).

Na situação acima, o autor chama a atenção para que os estudantes compreendam a ideia do resto 1 e seu significado, considerando que o número 1 está associado à quantidade que representa 1 aluno, e desse modo não é possível propor a divisão em metades. Essa análise é fundamental para a compreensão dos estudantes, pois “[...] as relações entre números apoiam-se em relações entre objetos” (VERGNAUD, 2009, p. 129). Para Vergnaud (2009), nesse caso, os grupos possíveis formam um conjunto discreto. Em outras palavras, eles podem ser vizinhos e distintos e representar o primeiro grupo e o segundo grupo, sem que qualquer outro grupo intermediário possa ser colocado entre eles.

Na sequência, a Figura 59, na página seguinte, apresenta a mesma estrutura da situação anterior em duas atividades análogas, no que diz respeito às suas estruturas multiplicativas, mas com a possibilidade de utilizar o resto da divisão, enfatizando a ideia de decimal. Esse fato expressa a intenção do autor em evidenciar os tipos de grandezas: discretas e contínuas.

Figura 59 - Proporção Simples – classe *partição* – quantidades contínuas

Alice quer separar igualmente 13 quilogramas de arroz em 2 pacotes e saber quanto irá em cada pacote.	Orlando cortou um rolo com 53 m de arame em 4 pedaços iguais. Observe a divisão ao lado e depois escreva qual é a medida do comprimento de cada pedaço, em metros. 13,25 m
Fonte: Dante (2019e, p. 178).	Fonte: Dante (2019e, p. 178).

Observamos que o autor evidencia a resolução das situações que envolvem divisão inexata por meio do algoritmo usual da divisão, bem como por estimativas. No entanto, em ambas as situações, o dividendo representa uma quantidade contínua (quilogramas de arroz e metros de arame), possibilitando a quebra de unidade. Essa característica das grandezas envolvidas nas situações permite, como solução, a divisão em partes iguais com a utilização do resto da operação. Isso porque, assim como no conjunto dos quilogramas de arroz como no conjunto dos metros de arame, "[...] sempre se pode encontrar um intermediário" (VERGNAUD, 2009, p. 129).

As três últimas atividades expostas nas Figuras 58 e 59 implicam em decisões diferentes, no caso do uso ou não do resto da divisão pelos estudantes, e dessa forma, exigem deles diferentes formas de interpretação. O autor evidencia esse fato a partir de questionamentos junto aos estudantes, e sugere que discutam entre si: "[...] Qual é a unidade em cada situação? Podemos continuar a divisão do resto obtido nas unidades? Por quê?" (DANTE, 2019e, p. 178). O intuito é comparar as soluções, as hipóteses e as conclusões por meio de reflexões críticas dos estudantes; ou seja, a autoavaliação de seus resultados.

Ainda explorando a divisão não exata de números naturais, mas agora com resultado decimal, na próxima Figura (60), as dificuldades principais não procedem do dividendo, tampouco do divisor, considerando números com muitos dígitos ou números com vírgula, conforme destaca o autor.

Figura 60 - Proporção Simples – classe *partição* – os litros de suco

b) Se 3 L de suco forem repartidos igualmente em 4 copos, então cada copo ficará com 0,75 L de suco. $\frac{7}{20} = 7 \div 20 = 0,35$ ou $0,35 = \frac{35^{\div 5}}{100_{\div 5}} = \frac{7}{20}$

6 **ATIVIDADE ORAL EM GRUPO** Troque ideias com os colegas para esclarecer a dúvida de Juliana. O resultado é o mesmo, mas indicado de 2 formas diferentes (fração e decimal).

Fonte: Dante (2019e, p. 179).

A indicação do autor para os estudantes, na busca pela solução da situação, refere-se ao uso do algoritmo da divisão, para o qual destaca: ao dividir o dividendo pelo divisor, obtém-se um número menor do que 1. O autor enfatiza como estratégia que, "[...] quando o número é menor do que 1 inteiro, colocamos o algarismo 0 para representar a parte inteira do número" (DANTE, 2019e, p.179). Nessa situação, o fato de o dividendo ser um número inferior ao divisor se constitui em um obstáculo incontestável para os estudantes. Segundo Vergnaud (2009, p. 189), dificuldade semelhante se torna evidente quando, no "[...] caso em que o divisor, tendo n algarismos, os primeiros algarismos do dividendo formam um número inferior ao divisor", como por exemplo: na divisão de 285 por 4, ou ainda, ao se dividir 1542 por 225. Para Vergnaud (2009), desde o início da introdução da operação de divisão, é possível utilizar quaisquer números no dividendo, mas isso não ocorre para os valores atribuídos ao divisor.

Ainda, a situação traz a indicação para que sejam identificadas as frações e os decimais correspondentes, recordando a ideia de divisão expressa na forma de fração, conforme já trabalhadas em Unidades anteriores.

A próxima situação, retratada na Figura 61, refere-se à classe *partição*, e explora a divisão de um número decimal por um número natural. O autor enfatiza que, nessa Unidade (7), também são exploradas "[...] a divisão de decimal ou de natural por 10, 100 ou 1000, sem propor aos alunos a divisão de decimal por decimal" (DANTE, 2019e, p. 187).

Figura 61 - Proporção Simples – classe *partição* – a situação do secador de cabelo

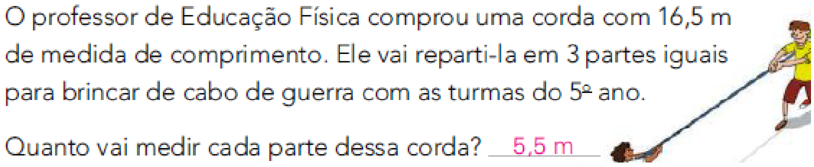
Laura comprou um secador de cabelos por R$ 63,75 e fez o pagamento em 3 prestações iguais. Qual foi o valor de cada prestação?

Fonte: Dante (2019e, p. 187).

O autor destaca o uso do algoritmo convencional da divisão, e chama atenção para que os estudantes identifiquem a posição da vírgula no número que está no quociente. Logo, para que os estudantes se atentem para o fato de que dividir um decimal com duas casas decimais implica em obter como quociente a mesma condição, ou seja, um decimal com duas casas decimais. As atividades propostas pelo autor sugerem o uso de calculadora para trabalhar cálculos mais complexos, incluindo a multiplicação e a divisão de decimal por decimal. Pode ser observado, também que as atividades propostas relacionam decimais (Unidade temática Números) e medidas de comprimento em centímetros e em milímetros (Unidade temática Grandezas e medidas), pelo fato de representarem contextos comuns do cotidiano dos estudantes.

A próxima Figura (62) retrata uma situação análoga: divisão de um número decimal com uma casa decimal por número natural com a ideia equitativa. O autor sugere que essa situação seja resolvida por meio do algoritmo usual da divisão, destacando a mesma interpretação da análise precedente, que se refere à divisão de um decimal com uma casa decimal, tendo como resultado um decimal com apenas uma casa decimal.

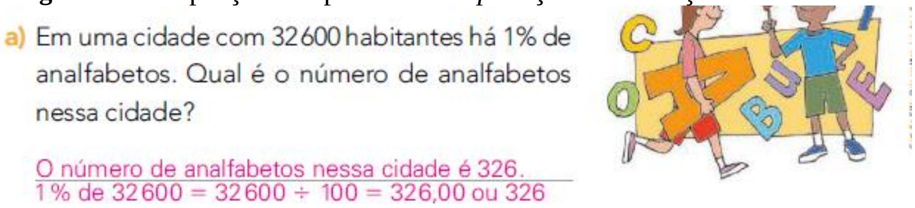
Figura 62 - Proporção Simples – classe *partição* – a situação do cabo de guerra



Fonte: Dante (2019e, p. 188).

Ainda na Unidade 7, há situações-problema relativas à classe *partição* que relacionam porcentagens com as divisões de decimais por 10 e por 100, conforme explicitado na Figura 63.

Figura 63 - Proporção Simples – classe *partição* – a situação dos habitantes



Fonte: Dante (2019e, p. 190).

Nessa situação, sabendo que o percentual de analfabetos de uma cidade com 32600 habitantes corresponde a 1%, e querendo saber a que quantidade de analfabetos corresponde essa porcentagem, é possível pensar na ideia de divisão partitiva. Para ela, as grandezas envolvidas correspondem, uma, ao *percentual de analfabetos*; e a outra, ao *número de habitantes*. Reafirmamos que, para essa situação ser resolvida, é possível utilizar tanto o operador escalar quanto o operador funcional. No entanto, os estudantes devem compreender o conceito de porcentagem para, assim, pensarem no cálculo relacional. Contudo, o autor sugere que sejam utilizadas as ideias que relacionam as porcentagens com as frações, e enfatiza que, no caso de 10%, seja pensado na divisão por 10; e no caso de 1%, basta dividir o número por 100.

Seguindo a análise, a Unidade 8, respectiva ao estudo de Grandezas e suas medidas, traz situações-problema relacionadas à classe *partição*, conforme exemplificado na Figura 64. Para essa situação, o autor não apresenta sugestão de resolução, apenas enfatiza a possibilidade de trabalho interdisciplinar com Ciências e Educação Física.

Figura 64 - Proporção Simples – classe *partição* – a situação dos pulmões

Em 1 ano, o movimento de encher e esvaziar os pulmões se repete 7300000 vezes! Então, em 1 dia, esse movimento se repete 20000 vezes.

Fonte: Dante (2019e, p. 206).

O número de vezes que representa o movimento dos pulmões em 1 ano foi fornecido no enunciado da situação: cerca de 7.300.000 vezes. Dessa forma, com o mesmo cálculo relacional da situação anterior, para sua resolução, o estudante deve inferir que um (1) ano equivale a 365 dias para, então, estabelecer as relações entre as quantidades envolvidas na situação. Portanto, é necessário considerar a existência de conhecimentos implícitos que orientem o desenvolvimento na busca pela resolução. Ainda, considerando a magnitude dos números envolvidos na divisão, é possível inferir que esse tipo de situação exige maior esforço cognitivo dos estudantes.

Finalizada a análise dos cinco volumes que compõem a Coleção Ápis, reafirmamos que nosso objetivo não se consistiu somente em identificar e analisar as estruturas das situações-problema respectivas ao eixo Proporção Simples, classes *um para muitos* e *partição;* e ao eixo Proporção Múltipla, com base em Vergnaud, no que tange a classificação das estruturas multiplicativas. Nosso interesse também se voltou para a classificação decorrente dos resultados da pesquisa realizada por Gitirana *et al.* (2014), a fim de refletir sobre outros aspectos de complexidade nelas existentes, no que concerne à classificação das extensões relativas aos tipos de situações-problema que envolvem as estruturas multiplicativas.

Os dados desta investigação revelam que houve significativo crescimento no desempenho dos estudantes na Prova Paraná, relativamente às edições realizadas em 2019. Dessa forma, buscamos compreender a relação entre esse desempenho dos estudantes e a natureza das situações-problema presentes nos livros didáticos, bem como sua possível influência nos resultados apresentados.

Nessa perspectiva, considerando que o Livro Didático representa significativa influência na ação docente, no que tange seu planejamento, tanto como fonte teórica quanto como recurso metodológico, buscamos analisar se os aspectos relativos aos tipos de situação, bem como a frequência com que são apresentados nesse instrumento pedagógico representam alguma influência na resolução das situações-problema investigadas no capítulo anterior da pesquisa.

Conforme discutido anteriormente, a complexidade de uma situação-problema, além de depender de sua tipologia estabelecida por Vergnaud (2009) e de suas estruturas, as quais envolvem diferentes cálculos relacionais, também pode variar, "[...] de acordo com uma diversidade de fatores, tais como grandezas contínuas ou discretas, medidas explícitas no problema, ou não, assim como o significado assumido pela operação" (GITIRANA, *et al*. 2014, p. 44). Esses fatores, associados às estruturas matemáticas das diferentes situações, podem definir sua complexidade a partir dos raciocínios requeridos para resolução de cada uma delas.

Voltando ao problema inicial de pesquisa, o insucesso expressivo observado na situação Q20 (referente à 1ª edição ocorrida em 2019) pode ser explicado por vários aspectos. Relembramos que a situação a que se refere Q20 pertence ao eixo Proporção Múltipla, que segundo Gitirana *et al.* (2014), configura-se como uma situação de 3ª extensão, considerando o grau de dificuldade estabelecido para sua resolução.

Nessa perspectiva, consideramos o desempenho dos estudantes nessa situação, inicialmente, em termos de complexidade, dependendo de sua tipologia, ou seja, em função de sua estrutura e do cálculo relacional exigido para sua resolução.

Segundo Vergnaud (1996, p. 175) "[...] a combinação de duas proporções não coloca os mesmos problemas cognitivos quando se faz por encadeamento das funções que ligam as variáveis duas a duas". Portanto, situações que envolvem Proporção Múltipla, por serem composição de duas proporções simples, exigem maior investimento cognitivo dos estudantes. Isso leva a inferir que esse tipo de situação é pouco compreendido pelos estudantes. Para esse mesmo autor, "[...] sem surpresa, as primeiras situações compreendidas pelos alunos são situações de proporção simples, nas quais é preciso efetuar uma multiplicação, com números inteiros pequenos" (VERGNAUD, 2019, p. 13).

No entanto, nas situações que envolvem Proporção Múltipla, para além da compreensão das relações existentes nas Proporções Simples, os estudantes devem perceber que, "[...] ao aumentar ou diminuir a quantidade de uma das grandezas, consequentemente aumenta ou diminui as demais na mesma proporção". Portanto, deve-se considerar a existência de uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017b, p. 31). Para Vergnaud (2009b), as situações mais complexas envolvem uma combinação de relações elementares, e nesse caso, embora esse fato exija dos estudantes a compreensão em trabalhar com vários conjuntos de grandezas ao mesmo tempo e exija níveis de conceitualização muito diferentes, possibilitam o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Em consonância, Gitirana *et al.* (2014, p. 86, grifo dos autores) afirmam que esse tipo de situação se refere a uma "[...] composição de duas proporções simples, à qual Gerárd Vergnaud denomina de 'proporção múltipla' ou concatenação de proporções", fato que exige maior esforço cognitivo dos estudantes para sua resolução. Em outras palavras, conceitualmente, as situações de Proporção Múltipla, assim como as de proporção dupla, são consideradas mais difíceis, "[...] pois elas acionam muitos elementos de uma só vez: seis grandezas e três razões para proporção dupla, sem contar as funções e razões intermediárias a considerar" (VERGNAUD, 1993, p. 16).

Nesse contexto, alguns conceitos como fração, número racional, produto e quociente de dimensões escalar, função linear e multilinear "[...] assumem sentido, primitivamente, nos problemas de proporção e se desenvolvem como instrumentos de raciocínio através do progressivo domínio dessas situações, muito antes de poderem ser introduzidos e tratados como objetos matemáticos" (VERGNAUD, 1993, p. 16).

Em pesquisa realizada por Gitirana *et al.* (2014), esse tipo de situação não teve um percentual de acertos significativo por estudantes do Ensino Fundamental. Ao contrário, os dados revelam que, do 5º ao 9º ano, esse índice não ultrapassou os 40 %, e por isso são classificadas como 3ª extensão, ocupando o penúltimo lugar da escala definida por esses autores.

De acordo com pesquisa realizada por Santana, Lautert e Filho (2017b, p. 98), um dado surpreendente vem do relato de uma professora investigada, a qual enfatiza que, ao se deparar com alguma situação mais complexa no Livro Didático que utiliza como instrumento pedagógico, afirma "[...] pular porque essa é difícil", por julgar, a partir de sua concepção, que os estudantes não chegariam ao sucesso de sua resolução. Isso permite perceber que fatos como esse restringem as situações, de forma a simplificar e empobrecer sua diversidade.

Outro aspecto que deve ser considerado reside na familiarização dos estudantes investigados com esse tipo de situação, pois de acordo com Rodrigues e Rezende (2021), situações respectivas ao eixo Proporção Múltipla não foram encontradas na coleção de livros didáticos utilizada como objeto de investigação.

Peron, Nogueira e Rezende (2019), em pesquisa semelhante, direcionada ao volume correspondente ao 5º ano do Ensino Fundamental, respectivo a outra coleção investigada, também constataram a ausência desse tipo de situação. Esse dado é preocupante, pois revela a fragilidade das obras investigadas, no que diz respeito à presença das tipologias que contemplam todo o Campo Conceitual Multiplicativo.

Considerando a complexidade relativa às classes de situações e seu progressivo domínio, segundo Vergnaud (2009), para que ocorra a aprendizagem, é necessário que o estudante seja confrontado com uma variedade de situações e com diferentes níveis de complexidade. Isso porque a aprendizagem demanda longo tempo, por meio da experiência oportunizada através dos anos estudados (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017b).

Essa afirmação dos autores advém da premissa de que, para Vergnaud (1996, p. 190), "[...] um conceito não assume a sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito". Explicando de outro modo, é fundamental propor aos estudantes uma variedade de situações em um dado campo conceitual, pois "[...] os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram" (VERGNAUD, 1996, p. 190).

Apesar de podermos observar que esse Campo Conceitual está presente em todos os volumes da coleção investigada, a escassez de algumas classes de situação, mais especificamente o eixo Proporção Múltipla, deve ser considerada de extrema relevância. A partir dessas informações, podemos inferir que esse tipo de situação é pouco explorado com estudantes dessa etapa de ensino, fato que pode justificar seu baixo desempenho na Prova Paraná.

Logo, podemos inferir a existência de estreita relação entre a ausência desse tipo de situação no instrumento de pesquisa utilizado como fonte de dados e o baixo desempenho dos estudantes na primeira edição da Prova Paraná. Na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, esse fato mostra que a escola não está preparada para lidar com a expansão do Campo Conceitual Multiplicativo.

Seguindo a análise, é necessário relembrar que, na segunda edição da Prova Paraná realizada em 2019, com relação ao mesmo descritor, D20, na classe *partição*, 76,6% dos estudantes investigados tiveram sucesso na resolução da situação; e na terceira edição, classe *um para muitos*, esses mesmos estudantes chegaram ao percentual de acertos de 83,33%. Esse avanço dos estudantes ao resolverem as duas situações-problema pode ser interpretado como indicador de aprendizagem, mas para confirmarmos essa proposição, há necessidade de um aprofundamento na análise.

Inicialmente, essa melhora no desempenho dos estudantes nos levou a inferir que, por se tratar de um mesmo descritor, D20, que tem a função de avaliar as habilidades dos estudantes em resolver problemas com números naturais envolvendo uma multiplicação ou uma divisão, o processo de aprendizagem foi atingido de forma satisfatória. Em outras palavras, acreditamos que essa melhora significativa pudesse ser atribuída ao domínio progressivo das situações-problema respectivas a cada edição, considerando a existência de complexidade cognitiva crescente entre elas.

No entanto, conforme já comentado anteriormente, a situação em que a performance dos estudantes mais cresceu (3ª edição – Q13) é uma situação de mais simples resolução, quando comparada à situação apresentada na 2ª edição (Q4), pois esta última requer a operação de divisão para sua resolução, com a ideia de divisão por partes.

Essas duas situações podem ser representadas por esquemas análogos, e sob esse aspecto, apresentam níveis semelhantes de complexidade, tendo em vista sua estrutura, que não traz "[...] qualquer espécie de dificuldade para as crianças e que mostra bem a relação existente entre as quatro quantidades" (VERGNAUD, 2009, p. 240). Contudo, esse mesmo autor refere-se a outra natureza de dificuldade para os estudantes, as operações requeridas para sua resolução que não colocam em jogo os mesmos cálculos relacionais.

Segundo Vergnaud, (2009), isso se deve ao fato de as características das situações em uma mesma categoria, nesse caso, envolverem a correspondência *um para muitos*, e dependendo da posição da incógnita, demandam diferentes operações, ou uma multiplicação ou uma divisão. Isso pode justificar seus diferentes desempenhos.

Em consonância com a pesquisa realizada por Santana, Lautert e Filho (2017c), em situações semelhantes, os estudantes obtiveram melhor desempenho quando a situação requeria a operação de multiplicação, do que em situações que requisitavam a operação de divisão. Os mesmos autores enfatizam que esse fato não "[...] se restringe ao domínio do algoritmo, mas está ligada também à compreensão das relações envolvidas na situação" (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017c, p. 53).

Santana, Lautert e Filho (2017c, p. 46) afirmam que "[...] essa diferenciação de desempenho entre as classes pode ocorrer em função da complexidade das relações inerentes à própria classe dos conceitos envolvidos". Portanto, as duas classes de situações-problema possuem dificuldades desiguais, mesmo apresentando a mesma estrutura, pois as situações respectivas à classe *partição* requerem uma divisão para sua solução, e conforme discutido neste capítulo, apresentam maior dificuldade, quando comparadas à operação de multiplicação, de acordo com a "[...] complexidade das regras operatórias implicadas pela divisão" (VERGNAUD, 2009, p. 190). Em outras palavras, essas duas classes de situação, mesmo sendo consideradas como situações prototípicas da multiplicação, apresentam dificuldades distintas aos estudantes investigados.

Santana, Lautert e Filho (2017c, p. 47) também afirmam ainda que, além da distinção das estruturas presentes em cada situação, conforme já visto no capítulo anterior, “[...] a escassez do trabalho pedagógico acerca de algumas dessas situações durante toda a educação básica” são fatores que influenciam significativamente o desempenho dos estudantes.

Assim, ao analisar a tipologia das três situações (Proporção Múltipla, Proporção Simples, classes: *partição* e *um para muitos*, pudemos inferir que essa diferenciação e melhora gradativa no desempenho dos estudantes, constatadas entre as edições, ocorre principalmente em função da complexidade do tipo de cada situação-problema. Ela ocorre em função de sua estrutura, levando em consideração o que afirma Vergnaud (1993, p. 16), que “[...] essa diversidade de tipos pode, entretanto, ser facilmente hierarquizada se considerarmos os três grandes fatores da complexidade cognitiva: a estrutura dos problemas, os valores numéricos e as áreas de experiência”.

Portanto, ainda que se perceba um crescimento significativo no percentual de acertos, quando comparadas a primeira e a segunda edições da Prova Paraná, é possível inferir que esse fato decorre da tipologia de ambas as situações (Proporção Múltipla e Proporção Simples – classe *partição*, respectivamente). Isso pode ser observado, também, quando constatada melhora no desempenho dos estudantes na terceira edição (Proporção Simples – classe *um para muitos*).

Conforme foi possível verificar neste capítulo, as situações pertencentes ao eixo Proporção Simples aparecem com maior frequência nos livros didáticos investigados. Com maior incidência aparecem as situações-problema respectivas à classe *um para muitos*, seguidas pelas situações relativas à classe *partição* (RODRIGUES; REZENDE, 2021).

Segundo pesquisas realizadas com estudantes do Ensino Fundamental, as situações-problema pertencentes ao eixo Proporção Simples respectivas a classes *um para muitos* são apontadas como as situações mais propostas aos estudantes dessa etapa de escolaridade (GITIRANA, *et al.*, 2014b).

Em pesquisa semelhante realizada por Santana, Lautert e Filho (2017b), o percentual de acertos em situações semelhantes, realizado por um grupo de estudantes investigados, matriculados nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, também aponta para o sucesso na resolução desse tipo de situação.

Depreende-se que esse aspecto está ligado ao fato de esse tipo de situação ser explorado de forma majoritária nos livros didáticos, conforme aponta a pesquisa realizada por Rodrigues e Rezende (2021), principalmente quando observado o crescimento no número de situações-problema dessa classe nos volumes respectivos ao 4º e 5º ano e, consequentemente, são situações muito presentes na prática docente.

Em consonância, Santana, Lautert e Filho (2017b) apontam, ainda, que mesmo quando analisadas situações pertencentes à mesma classe, os resultados mostram-se desiguais pelos mesmos estudantes, quando consideradas as variáveis didáticas envolvidas.

A melhora do desempenho dos estudantes nas 2ª e 3ª edições chama atenção e aponta para outras peculiaridades, que podem ser observadas a partir da análise da coleção investigada, que nos permitiu levantar algumas hipóteses.

Outro aspecto observado nas situações analisadas refere-se às características dos números envolvidos. Para Vergnaud (2009), deve-se levar em consideração os valores numéricos utilizados e as dificuldades estabelecidas nas operações requeridas para sua resolução, quer seja uma multiplicação ou uma divisão, ou de acordo com o domínio de experiência em referência. Isso porque, "[...] aos oito anos, não se entende da mesma maneira a transformação de uma quantidade de bolas de gude, de uma importância em dinheiro, de uma massa, de um volume ou de uma posição" (VERGNAUD, 1993, p. 15).

Nessa perspectiva, "[...] não se pode escapar à classificação das relações, dos problemas e das operações de pensamento necessárias à sua resolução" (VERGNAUD, 1993, p. 25), também é fundamental levar em consideração as informações em função das variáveis didáticas envolvidas em cada situação, cuja natureza e dificuldades devem ser evidenciadas. O mesmo autor afirma que, no caso de situações que envolvem a correspondência *um para muitos*, existem "[...] vários exemplos que colocam em evidência dificuldades muito desiguais", a saber: números inteiros pequenos, números inteiros grandes, valor unitário decimal, números decimais nas demais grandezas, valor unitário inferior a 1 e números de unidades inferior a 1 (VERGNAUD, 2009, p. 261). Para Vergnaud (2009), as três últimas subclasses são ainda mais difíceis para a maior parte dos estudantes ao final da escola elementar (cujos alunos são crianças da faixa etária de 9 a 10 anos).

Embora exista uma diversidade de situações que envolvem proporção simples - *um para muitos* e proporção simples - *partição,* os resultados encontrados a partir da análise realizada nos livros didáticos investigados revelam que o nível de complexidade de cada classe, considerando os tipos de variáveis didáticas envolvidas nas relações, apresentam dificuldades significativas.

Esse fato pode ser verificado pela gradação de dificuldade nos valores numéricos envolvidos nas relações de cada situação-problema analisada. Esse aspecto pode ser considerado fecundo na aprendizagem da multiplicação, pois permite perceber que o autor se preocupa com a compreensão dos estudantes nas situações-problema, na compreensão das relações existentes e não somente no *cálculo* requerido para sua resolução.

Nesse sentido, além da forma como se estabelecem as relações nas situações, foram identificados, nos cinco volumes investigados, aspectos que também devem ser considerados como elementos que podem diferenciar o grau de dificuldade das situações analisadas, considerando que em uma mesma classe de situações é possível perceber diferentes níveis de desempenho dos estudantes (SANTANA; LAUTERT; FILHO, 2017c).

Com relação à classe *um para muitos,* investigada na coleção Ápis, foram identificadas similaridades na forma como são apresentados os enunciados. Também foram verificadas sugestões para resolução, de forma significativa, por meio da adição de parcelas repetidas. Da mesma forma, em muitas situações respectivas à classe *partição*, a divisão pode ser substituída por subtrações sucessivas, quando considerados os valores numéricos envolvidos, explicitando a continuidade entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo presente na coleção.

Entretanto, a ideia de utilização da adição reiterada para resolver situações multiplicativas pode ser considerada uma limitação do tratamento didático, pois essa ideia é limitada e local, podendo ser interpretada em situações que trabalhem no conjunto dos Números Naturais, quando os estudantes são levados a compreender que, ao realizar uma multiplicação, necessariamente o resultado sempre aumenta, ou que a divisão sempre diminui (ZANELLA; KRACHINSCKI; ZANELLA, 2019).

Há a necessidade de que se compreenda que, se existe continuidade em determinadas situações, existe também sua ruptura, e trabalhar a multiplicação por meio da adição sucessiva não promove tal descontinuidade, tampouco a expansão do Campo Conceitual Multiplicativo. Isso porque, "[...] à medida que as ideias sobre a multiplicação evoluem, os modelos construídos pelos alunos também devem evoluir, mas para isso, é necessário proporcionar diversificadas situações aos estudantes" (ZANELLA; KRACHINSCKI; ZANELLA, 2019, p. 483).

Nessa perspectiva, as dificuldades podem ser percebidas quando da "[...] extensão dos raciocínios aos números decimais menores que 1" (VERGNAUD, 2019, p. 14), demonstrando a descontinuidade entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo. Dessa forma, "[...] o caráter crescente da função: se – 0,70 < 1, então f (0,70) < f (1), se transforma em obstáculo ao raciocínio proporcional" (VERGNAUD, 2019, p. 14).

Esse fato decorre do uso da introdução da multiplicação por meio de procedimentos aditivos, que foi observada de forma majoritária nas situações presentes nos quatro primeiros volumes analisados. Ainda, outro aspecto a ser enfatizado é a ideia de que a multiplicação nem sempre é comutativa, quando são consideradas "as dimensões das grandezas envolvidas na situação e não somente seus valores numéricos" (VERGNAUD, 2019, p. 14). Do ponto de vista cognitivo, explorar a multiplicação apoiada em procedimentos aditivos pode causar obstáculos à aprendizagem dos estudantes (MERLINI, 2012).

A partir da análise, foi possível verificar que o quinto volume, ao não incentivar a utilização de procedimentos aditivos para a resolução de situações multiplicativas, busca centrar as estratégias no uso do algoritmo usual dessa operação, e assim induzir a ruptura entre os respectivos campos conceituais, mas isto, por si só, não é suficiente. Situações em que o produto dos fatores é menor do que eles, ou o quociente de uma divisão é maior do que o dividendo podem e devem ser destacadas para promover a descontinuidade entre os conceitos de adição e de multiplicação.

Outro aspecto identificado refere-se às situações-problema apresentadas nos volumes analisados, que de forma majoritária, exploram situações do cotidiano dos estudantes. Principalmente, as relações entre as grandezas são apresentadas de forma explícita, tendo como referência a unidade de uma das grandezas envolvidas, o que facilita a compreensão dos estudantes na busca da relação de correspondência *um para muitos.*

Nessa perspectiva, Vergnaud (1996) evidencia a importância de apresentar situações produtivas aos estudantes, pois elas facilitam a interpretação dos enunciados, bem como a busca das relações pertinentes, e assim possibilitam avançar adequadamente nas soluções. No entanto, o mesmo autor pontua: "[...] é verdade que a forma dos enunciados e o número de elementos em jogo são fatores pertinentes da complexidade, mas o seu papel é subordinado" (VERGNAUD, p. 167).

A forma como são apresentados os enunciados de cada situação-problema respectiva às classes investigadas, seja *partição* ou *um para muitos*, como foi possível evidenciar na análise, apesar de serem expostos por meio de frases sucintas, permitem constatar que possibilitam, aos estudantes, extrair as informações pertinentes, de forma a estabelecer as relações envolvidas entre as grandezas para, então, compreender as operações requeridas para sua resolução. Dessa forma, possibilitam aos estudantes pensar matematicamente sobre as relações multiplicativas sem o ensino formal das operações de multiplicação por meio de seus algoritmos.

No entanto, ainda foi possível perceber que, de maneira expressiva, as situações-problema são apresentadas nos volumes por meio de enunciados sem o uso de suporte auxiliar. Assim, tanto a natureza das quantidades, que se referem às características numéricas dos problemas quanto os suportes de representação são fatores que podem facilitar ou tornar mais complexas as situações-problema, influenciando diretamente o desempenho dos estudantes (SPINILLO; LAUTERT; SANTOS, 2021).

Outro aspecto que pode ser considerado positivo e foi observado na coleção refere-se à incidência de situações respectivas às classes investigadas, *um para muitos* e *partição*, distribuídas pelas unidades não específicas da multiplicação. Embora algumas unidades não tratassem especificamente de situações multiplicativas, situações desse tipo foram exploradas de forma a articular as Unidades Temáticas e seus respectivos conteúdos.

Nesse sentido, considerando o Livro Didático como importante instrumento pedagógico, é fundamental que o professor faça seu planejamento tendo como base cada Unidade da coleção, para poder propiciar, mesmo em situações com a mesma estrutura, formas de raciocínio diversas com diferentes graus de complexidade, "[...] para não ficar repetindo problemas que requeiram o mesmo raciocínio, ao longo da formação inicial do aluno" (GITIRANA *et al*., 2014, p. 41).

Logo, tendo o professor como mediador essencial, a eficácia da comunicação didática proveniente dele depende "[...] da escolha das situações a serem propostas aos alunos, e da representação de sua estrutura conceitual por meio de formas acessíveis" (VEGNAUD, 2011, p. 26). Essas situações influenciam o processo de aprendizagem e, consequentemente, refletem seu desempenho. Dessa forma, considera-se fundamental que o professor conheça o Campo Conceitual Multiplicativo, bem como suas especificidades, principalmente no que tange suas estruturas, as relações implicadas entre as grandezas (um para muitos, muitos para muitos, proporcionalidade etc.), além dos aspectos das variáveis didáticas envolvidas nas situações.

O levantamento feito nos cinco volumes investigados revela que, em geral, os conteúdos e a forma de serem tratadas as situações-problema de estruturas multiplicativas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental envolvem desafios por meio de situações motivadoras e apresentam atividades que incentivam o cálculo mental, o uso de calculadora, de materiais manipulativos, de jogos etc. Esse fato favorece o desenvolvimento de competências por parte dos estudantes. No entanto, pudemos perceber que as Unidades específicas para abordar conceitos de multiplicação e de divisão concentram maior número desse tipo de situação.

Esses resultados permitem ponderar que a quantidade significativa de situações pertencentes ao eixo Proporção Simples, classe *um para muitos* de *partição*, distribuídas ao longo de cada volume analisado, favorecem a compreensão desses tipos de situações e refletem o sucesso de suas resoluções, ou seja, refletem o desempenho dos estudantes em cada situação-problema investigada a partir da Prova Paraná.

Por serem apresentadas com maior frequência no instrumento desta investigação, bem como em outras pesquisas citadas, podemos inferir que são as situações mais trabalhadas em sala de aula. No entanto, embora estejam presentes em todos os volumes da coleção analisada, depreende-se que a abordagem das situações respectivas à classe *um para muitos* e à classe *partição* não avança em relação ao nível de dificuldade, quando considerados os tipos de situações-problema pertencentes ao Campo Conceitual Multiplicativo.

Vergnaud (2009, p. 313) afirma ser "[...] um enorme erro pedagógico considerar, sob o pretexto de que o ensino é necessariamente feito de demasiados exercícios de caráter repetitivo, de hábitos ou de procedimentos já prontos". Pelo contrário, o autor enfatiza a importância de que os estudantes "[...] percebam as ligações que as regras mantêm com a estrutura relacional dos problemas aos quais se aplicam" (VERGNAUD, 2009, p. 314). Portanto, segundo o autor, o estudante se apropria de um conceito a partir de uma variedade de situações, "[...] cada vez mais complexas contendo novos aspectos, mais poderosos, de um mesmo conjunto de conceitos, eventualmente um conceito novo" (VERGNAUD, 1986, p. 81).

Conforme explicita Vergnaud (1996, p. 190), "[...] um conceito não assume a sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa como o auxílio de um único conceito". Assim, são as situações que dão sentido aos conceitos, e um conceito torna-se significativo a partir de uma variedade de situações. Para esse mesmo autor, é por meio da resolução das situações e dos problemas que um conceito adquire sentido para a criança.

De forma geral, foi possível constatar que o tratamento dado ao Campo Conceitual Multiplicativo pelo autor da coleção analisada, ao ser constatada a inexistência de situações-problema que envolvem Proporção Múltipla, não explora todos os tipos de situação nele contidas, o que dificulta sua expansão, pois não possibilita seu domínio progressivo. Segundo Vergnaud (1996), a ideia de domínio progressivo de um campo conceitual está ligada ao trabalho com situações de diferentes graus de complexidade ao longo dos anos escolares.

A compreensão da TCC subsidia o professor na busca em selecionar uma maior variedade de situações, de forma a possibilitar maior diversidade de raciocínio e ampliação do conhecimento dos estudantes nesse campo conceitual. Ao propor situações que aumentem sua complexidade, o professor proporciona mais oportunidades de ampliações do conhecimento, considerando não limitar os estudantes a apenas situações que apresentem os mesmos cálculos relacionais, tampouco limitá-los a situações com as mesmas características numéricas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi analisar as relações entre os tipos de situação-problema de estruturas multiplicativas presentes na Prova Paraná com a frequência e a abordagem desses tipos de situação-problema do Livro Didático à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Para alcançar este objetivo geral, dois objetivos específicos foram delineados: (a) Analisar as situações-problema de estruturas multiplicativas presentes na Prova Paraná e no Livro Didático à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud; e (b) Analisar se os percentuais de acerto dos estudantes em situações-problema de estruturas multiplicativas na Prova Paraná representam crescimento na aprendizagem.

A pesquisa buscou analisar a Prova Paraná, particularmente o que seus resultados apontam em relação ao desempenho dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. De natureza qualitativa interpretativa, o problema de pesquisa foi seccionado em duas partes para poder aprofundar melhor o entendimento da temática, configuradas da seguinte maneira: A Prova Paraná reflete a aprendizagem de conceitos de estruturas multiplicativas por estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental? As situações-problema presentes na Prova Paraná são compatíveis com o Livro Didático?

Durante o estudo, foram analisadas 18 situações relacionadas ao Campo Conceitual Multiplicativo presentes em cinco cadernos de provas relativos ao 5º ano do Ensino Fundamental, considerando três edições realizadas em 2019, uma em 2020 e uma em 2021. É importante destacar que a Prova Paraná foi pensada para verificar a evolução (ou não) dos alunos no decorrer do ano, e por isso se apresenta em três edições, como as que ocorreram em 2019, por seu caráter diagnóstico. Entretanto, o contexto pandêmico parece ter impedido a realização de outras edições das provas nos anos subsequentes, quando a Prova Paraná foi aplicada em apenas uma edição a cada ano.

Assim, o quarto capítulo desta dissertação trouxe a identificação e classificação das situações-problema de estruturas multiplicativas na Prova Paraná considerando seu caráter diagnóstico.

Utilizando como subsídio a classificação das extensões com relação à complexidade dos tipos de problemas elaborada por Gitirana *et al.*(2014), buscou-se identificar a existência (ou não) de progressividade no nível de dificuldade das situações. A discussão centrou-se no eixo Proporção Simples, classes um para muitos, partição e quotição; eixo Comparação Multiplicativa, classe referido desconhecido; eixo Proporção Múltipla; e eixo Produto

Cartesiano, classe área, pois foram os únicos tipos identificados na referida avaliação. O eixo Função Bilinear não foi contemplado nas situações presentes nos cadernos de prova analisados.

Após as análises sobre os dados levantados, buscou-se responder às questões de pesquisa, especificamente a primeira delas: A Prova Paraná reflete a aprendizagem de conceitos de estruturas multiplicativas por estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental?

Na primeira edição de 2019 da Prova Paraná, a situação exemplificada como Q20, segundo a classificação de Vergnaud (2009), pertence ao eixo Proporção Múltipla. A partir dessa classificação, Gitirana *et al.* (2014) destacam que esse tipo de situação é classificado como de 3ª extensão, considerando o tipo de estrutura e o cálculo relacional entre as grandezas envolvidas. Esse fato lhe confere grau de dificuldade significativo para sua resolução. O desempenho dos estudantes ao resolver a situação Q20 se assemelha ao resultado obtido na pesquisa de Gitirana *et al*. (2014). Apesar de estar previsto nos documentos orientadores do currículo do Paraná, esse tipo de situação é ainda pouco compreendido por estudantes até o 9º ano do Ensino Fundamental.

A segunda edição da Prova Paraná (2019) contou com a situação-problema Q4 pertencente ao eixo Proporção Simples, classe *partição*, tendo em vista a classificação de Vergnaud (2009). Esse mesmo eixo foi contemplado na terceira edição da Prova Paraná (2019), a partir da situação Q13, pertencente à classe *um para muitos*.

Embora sejam as duas situações, Q4 e Q13, caracterizadas como situações prototípicas da multiplicação, foi possível observar que o nível de complexidade varia de acordo com as relações a serem compreendidas em cada situação e pela operação a ser utilizada. Enquanto a situação Q4 parte de uma quantidade maior em busca da quantidade menor, e requer, para sua resolução a operação de divisão, a situação Q13 faz o inverso: busca uma quantidade maior a partir da quantidade menor, e pode ser resolvida por meio da operação de multiplicação. Esse fato pode justificar a diferença de desempenho dos estudantes entre a segunda e terceira edições da Prova Paraná, pois, segundo Vergnaud (2009, p. 190), “[...] a divisão é uma operação complexa”, quando comparada à regra operatória das demais operações.

Observa-se, nas três edições da Prova Paraná (2019), a apresentação implícita de informação nas situações-problemas que deveriam ser resolvidas pelos estudantes, e por não estar explícita, pode ser um dos fatores de dificuldade na resolução da situação, conforme apontam Gitirana *et al.* (2014). Ao não apresentar as informações de forma explícita nas situações-problema, pode-se considerar que esse fato interfere no desempenho dos estudantes. Santos (2012) pontua ser imprescindível que as situações-problema apresentem precisão nos fatos numéricos a serem operados para que não haja equívoco na interpretação do enunciado, tendo em vista a necessidade de interpretar e compreender as expressões linguísticas, além de operar adequadamente as informações apresentadas.

As situações trazem diversos fatores, identificados como variáveis didáticas, que podem influenciar na resolução das situações-problema, como valores numéricos de grande extensão, além de conhecimentos prévios que os alunos precisam ter, e que podem influenciar no desempenho dos alunos.

É importante destacar, aqui, o caráter diagnóstico da Prova Paraná, que conforme mencionado anteriormente, foi planejada em três edições para efetivamente diagnosticar a construção do conhecimento dos alunos. Embora as edições de 2020 e 2021 tenham sido analisadas, o fato de se constituírem por apenas uma edição cada não permite uma avaliação do aprofundamento da necessidade de funções cognitivas dos alunos.

Comparando os resultados, as informações obtidas na parte inicial desta pesquisa, relacionadas à identificação dos tipos de situações-problema do Campo Multiplicativo presentes nas três primeiras edições realizadas em 2019, e à caracterização quanto ao seu grau de dificuldade, é possível perceber que são fundamentais para compreensão e reflexões sobre o desempenho dos estudantes. Embora os percentuais tenham demonstrado melhor desempenho dos alunos a cada edição, nossa análise permite inferir que, em cada edição, não houve aumento da necessidade de esforço cognitivo dos alunos. O baixo desempenho na primeira edição justifica-se pelo início da construção do conhecimento das estruturas multiplicativas, considerando a complexidade relacionada à sua estrutura. Contudo, os resultados evolutivos nas edições seguintes não permitem afirmar que houve evolução da construção de conhecimento dos estudantes. Os resultados estatísticos parecem mascarar uma evolução, que na verdade é inexistente, pois não há aumento gradativo do requerimento de esforço cognitivo dos estudantes. Pelo contrário, o nível de dificuldade das situações-problema, de acordo com suas estruturas e cálculos relacionais exigidos, não aumenta gradativamente, conforme o esperado para uma avaliação diagnóstica. Em suma, os resultados mostram que o melhor desempenho dos estudantes observado na Prova Paraná não representa seu desenvolvimento de competências complexas, considerando a ordem decrescente no grau de complexidade dos tipos de situações analisadas.

Os resultados, então, fazem emergir um novo questionamento: a partir do baixo desempenho dos estudantes obtido na primeira edição da Prova Paraná, com relação ao descritor 20 (D20), a intenção para as demais edições foi trazer tipologias mais simples? A pesquisa não permite provar essa conjectura, e por isso passamos à análise dos Livros

Didáticos, para compreender se existe relação entre as situações elaboradas para a prova e os Livros Didáticos. Essa parte do estudo nos permite responder à segunda parte da questão-problema desta pesquisa, qual seja: As situações-problema presentes na Prova Paraná são compatíveis com o Livro Didático?

O Livro Didático de matemática adotado como um dos instrumentos pedagógicos – a coleção Ápis - Matemática (DANTE, 2019a; 2019b; 2019c; 2019d; 2019e), serviu como fonte de dados e informações. As situações de estruturas multiplicativas identificadas encontram-se distribuídas ao longo dos cinco volumes investigados da seguinte forma: três no primeiro ano, 11 no segundo ano, 24 no terceiro ano, 65 no quarto e 42 no quinto ano, totalizando 145 situações-problema de estruturas multiplicativas.

O Livro Didático é um instrumento pedagógico importante, sendo fundamental que o professor faça seu planejamento tendo como base os tipos de situações-problema de cada Unidade da coleção. Desta forma, é possível propiciar formas de raciocínio diversas com diferentes graus de complexidade, mesmo em situações com a mesma estrutura. O levantamento nos cinco volumes investigados revela que os conteúdos e a forma de serem tratadas as situações-problema de estruturas multiplicativas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, de forma geral, envolvem desafios por meio de situações motivadoras. Também apresentam atividades que incentivam o cálculo mental, o uso de calculadora, de materiais manipulativos, que favorecem o desenvolvimento de competências por parte dos estudantes.

Foi possível perceber, de maneira expressiva, que as situações-problema são apresentadas, em todos os volumes, por meio de enunciados sem o uso de suporte auxiliar. Assim, tanto a natureza das quantidades, que se referem às características numéricas dos problemas quanto os suportes de representação são fatores que podem facilitar ou tornar mais complexas as situações-problema, influenciando diretamente o desempenho dos estudantes, conforme destacam Spinillo, Lautert e Santos (2021). Contudo, a análise demonstrou que as Unidades específicas para abordar conceitos de multiplicação e de divisão concentram maior número de situações elementares, ou seja, situações prototípicas da multiplicação.

Ainda, os resultados permitem ponderar que a quantidade significativa de situações-problema pertencentes ao eixo Proporção Simples, classes *um para muitos* e *partição*, distribuídas ao longo de cada volume analisado, favorecem a compreensão desses tipos de situações e refletem o sucesso de suas resoluções, ou seja, refletem o desempenho dos estudantes em cada situação-problema investigada a partir da Prova Paraná.

Embora o crescimento no desempenho dos estudantes tenha sido significativo na segunda (76,8%) e terceira (83,3%) edições da Prova Paraná realizadas no ano de 2019, ao identificar os tipos de situações a partir de suas estruturas, foi possível perceber que não se tratava de situações com o mesmo nível de complexidade para sua resolução. Nesse sentido, podemos inferir que o expressivo crescimento no desempenho dos estudantes nas 2ª e 3ª edições decorre desses dois fatores: situações que exigem menor esforço cognitivo dos estudantes e a frequência com que se apresentam no Livro Didático.

O grau de complexidade identificado se apresenta em ordem decrescente, considerando o esforço cognitivo demandado para resolver cada situação. Esses dados revelam que os estudantes apresentam conhecimentos prévios acerca das estruturas multiplicativas que lhes permitem resolver situações que requerem tipos de raciocínio mais elementares.

No entanto, sabe-se que para proporcionar o progressivo domínio dos estudantes em um campo conceitual, em destaque nesta pesquisa o Campo Conceitual Multiplicativo, é fundamental criar situações propícias de desenvolvimento cognitivo. Isso evitaria o risco de manter os estudantes em níveis mais elementares de aprendizagem.

Os resultados apontam que, a partir da análise realizada na coleção de livros, a abordagem de situações de estruturas multiplicativas nesse material didático pode interferir no desempenho dos estudantes, bem como não possibilita a expansão do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

Assim, outras questões emergiram após a realização das análises: a partir do baixo desempenho dos estudantes obtido na primeira edição da Prova Paraná, a intenção para as demais edições foi trazer tipologias mais simples? Ou ainda, ao trazer as situações como as que são vistas nas 2ª e 3ª edições, o objetivo era aproximar às situações propostas nos Livros Didáticos? Mais uma vez, reiteramos que os resultados desta pesquisa não permitem provar essas conjecturas, que na verdade emergiram a partir dos resultados alcançados.

Entretanto, outros questionamentos que emergiram a partir de nossos resultados podem suscitar novas investigações, como descobrir se a escolha dos Livros Didáticos pelos professores é feita levando em consideração as orientações curriculares que são os documentos norteadores da educação no Estado. Ainda, quem define o que vai ser ensinado na escola, o Livro Didático ou as orientações curriculares? Esses indicativos não podem ser comprovados nesta pesquisa, mas podem promover outras pesquisas e reflexões importantes.

REFERÊNCIAS

ALMOLOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

BITAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como Ferramenta Metodológica para análise de Livros Didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, set./dez.2017, p. 364-387. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640. Acesso em: 20 jun. 2020.

BONAMINO, A.; SOUSA, S. Z. Três gerações de avaliação da educação básica no Brasil: interfaces com o currículo da/na escola. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 38, n. 2, jun. 2012.

BRASIL. Portaria Nº 10, de 8 de janeiro de 2021. **Diário Oficial da União.** Disponível em: https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-10-de-8-de-janeiro-de-2021-298322305. Acesso em: 20 jun. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Prova Brasil – Apresentação.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/prova-brasil. Acesso em: 22 ago. 2022.

BROOKE, N.: CUNHA, M. A. de A. A avaliação externa como instrumento da gestão educacional nos estados. **Estudos & Pesquisas Educacionais**, São Paulo, n. 2, p. 17 – 79, nov. 2011.

BROOKE, N.; SOARES, J. F. (Orgs). **Pesquisa em eficácia escolar: origens e trajetórias**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008

CASTRO, J. B. **Construção do conceito de covariação por estudantes do ensino fundamental em ambientes de múltiplas representações com suporte das tecnologias digitais**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza (CE), 2016. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/15908. Acesso em: 31 ago. 2022.

CÔRTES, E. M. **O impacto do Saerjinho nas concepções de avaliação externa e interna em uma escola do noroeste fluminense**. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação em Educação Pública. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2013.

COSTA, D. G. **Baixo desempenho em matemática e práticas de ensino**: inquietações necessárias, explicações possíveis. 2019. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação em Educação Pública. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora-MG, 2019.

DANTAS, L. M. V. **As contribuições das políticas de avaliação educacional em larga escala: o caso da avaliação de aprendizagem na Bahia.** Salvador, 2009. Salvador, Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, 2009.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática – 1º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2019a.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática – 2º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2019b.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática – 3º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2019c.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática – 4º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2019d.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática – 5º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2019e.

FERREIRA, P. V. G. **Estudo comparado da ação gestora na apropriação dos resultados do proalfa**: análise de dois casos de sucesso em Governador Valadares. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação em Educação Pública. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2012.

FERREIRA, A. S. V. **Interpretação e apropriação dos resultados do SIMAVE**: Um estudo de caso do uso das informações da avaliação externa de matemática como instrumento de gestão curricular. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação em Educação Pública. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2019.

FONTANIVE, N. S. A Divulgação dos Resultados das Avaliações dos Sistemas Escolares: limitações e Perspectivas. Ensaio: **aval. pol. públ. Educ**., Rio de Janeiro, v. 21, n. 78, p. 83-100, jan./mar. 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ensaio/a/bwqdfSqzysvDG5gjNgbXRFw/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 20 jul. 2019.

FREITAS, L. C de. *et al*. **Avaliação educacional**: caminhando pela contramão. São Paulo: Vozes, 2009.

GEWEHR, G. G. **Avaliação da educação básica: políticas e práticas no contexto de escolas públicas municipais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ciências humanas). PUCPR, Curitiba, 2010.

GILSON, R de B. A. **SAERJINHO** – desafios e conquistas na busca por uma educação de qualidade para o estado do RJ. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação em Educação Pública. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2012.

GIMENES, N. *et al.* Além da Prova Brasil: investimento em sistemas próprios de avaliação externa. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 24, n. 55, p. 12-32, ago. 2013.

GITIRANA, V. *et al*. **Repensando multiplicação e divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2013.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. SPINILLO, A. **Repensando Multiplicação E Divisão**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. 1ed., Editora PROEM. São Paulo, 2014b.

HORTA NETO, J. L. **As avaliações externas e seis efeitos sobre as políticas educacionais: uma análise comparada entre a União e os estados de Minas Gerais e São Paulo**. Tese (Doutorado em Política Social) – Instituto de Ciências Humanas, Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

KAILER, E. Z. **O papel da gestão escolar no Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná** – SAEP. EDUCERE – XII Congresso Nacional de Educação, 2015.

KLEIN, R.; RIBEIRO, S. C. Censo Educacional e o Modelo de Fluxo: O problema da repetência. 1991. **Revista Brasileira de Estatística.** vol. 52, IBGE, p. 5-45.

KLEIN, R.; FONTANIVE, N. S. Avaliação em larga escala. **Em Aberto**, Brasília, DF, v. 15, n. 66, p. 29-34, 1995.

KOETZ, C. M. **O sistema de avaliação do rendimento escolar do Estado do Rio Grande do Sul - SAERS**: institucionalização. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade do Vale do Rio dos Sinos. São Leopoldo-RS, 2011.

LIBÂNEO, José Carlos. **Organização e gestão da escola: teoria e prática**. Goiânia: MF Livros, 2008.

MACHADO, C. Avaliação externa e gestão escolar: reflexões sobre usos dos resultados. **Revista @mbienteeducação**, [S.l.], v. 5, n. 1, p. 70 - 82, jan./jun. 2012. Disponível em: https://publicacoes.unicid.edu.br/index.php/ambienteeducacao/article/view/117. Acesso em: jul. 2019.

MACHADO, C. Políticas estaduais de avaliação externa: tendências e implicações. **Quaestio,** Sorocaba, São Paulo, v. 22, n 1, p. 205 – 233, jan./abr./ 2020. Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:o-nBMwaPMO0J:periodicos.uniso.br/ojs/index.php/quaestio/article/download/3358/3680/10654+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br. Acesso em: jul. 2020.

MACHADO, C.; ALAVARSE, O. M.; ARCAS, P. H. Sistemas estaduais de avaliação: interfaces com qualidade e gestão da educação. **Revista Brasileira de Política e Administração da Educação - Periódico científico editado pela ANPAE**. v. 31, n. 3, p. 667 - 680, jun. 2016. ISSN 2447-4193. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/rbpae/article/view/63800. Acesso em: 20 nov. 2020.

MAGINA, S. M. P. **A Teoria dos Campos Conceituais**: Contribuições da Psicologia para a Prática Docente. Unicamp. Campinas, 2005. Acesso em <https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2019.

MAGINA, S. et al. Concepções e Concepções Alternativas de Média: um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. **Educar em Revista**, Curitiba, n. especial 2, p. 59 - 72, 2010.

MAGINA, S. M. P. As estruturas multiplicativas e a formação de professores que ensinam Matemática na Bahia - PEM. Projeto de Pesquisa FAPESB (PES 0019/2013): **Edital Inovação em Práticas Educacionais nas Escolas Públicas da Bahia.** Ilhéus, 2013.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3, 2012, Fortaleza. **Anais.** Fortaleza, 2012. p. 1-12.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação**, São Paulo, UNESP, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. A estrutura multiplicativa à luz da teoria dos campos conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO FILHO, J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. (Org.). **Matemática, Cultura e Tecnologia: Perspectivas Internacionais**. 1. ed. Curitiba: Editora CRV, 2016. P. 65-82.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTANA, E. Situações-problema das Estruturas Multiplicativas sob a ótica do professor que ensina matemática. In: Actas del VII CIBEM, 2013, Montevideo, Uruguai. p. 5989 – 5987.

MARQUES, M. V. S. **Apropriação de resultados da avaliação em larga escala em uma escola mineira de ensino médio**: limites e possibilidades de ações gestoras. (Dissertação). Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação da Educação Básica. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2017.

MEDEIROS, D. S. M. **A avaliação diagnóstica da secretaria da educação do estado de Goiás**: das intenções às ações. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014

MERLINI, V. L. **As potencialidades de um processo formativo para a reflexão na e sobre a prática de uma professora das séries iniciais**: um estudo de caso. (Tese). Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área.** Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2004.

MOREIRA, A. F. Avaliações externas: uma proposta para diagnosticar as dificuldades de aprendizagem em Matemática de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE,** 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_ufpr_abimaelfernandomoreira.pdf. Acesso em: 20 ago. 2019.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. **A Teoria dos Campos Conceituais no Ensino de Números Irracionais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática.** Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Vol 6, nº1, Unesp. Campo Mourão, 2014. Disponível em: http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/3950. Acesso em: 20 jul. 2019.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V.; ZANQUETTA, M. E. M. T. Esquemas de Contagem de alunos surdos sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: Implicações da Teoria Piagetiana para a sala de aula**. Anais do IV Colóquio de Epistemologia e Psicologia Genéticas**: teoria e prática na construção do conhecimento. Marília: Unesp, 2016.

NOGUEIRA, R. S. **Avaliação em larga escala como regulação**: o caso do Sistema Estadual de Avaliação da Aprendizagem Escolar - SEAPE/ACRE. (Tese) Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Paraná, 2015.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Tradução de: COSTA, S. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **SAEP**. 2012. Disponível em: https://saep.caedufjf.net/colecao/2012-2/. Acesso em: 20 maio 2021.
PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense.** 2018. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep2021_matematica_seriesiniciais.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Prova Paraná.** [s.d.]a. Disponível em: https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2019-06/lista_descritores_prova_parana_2_ed.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Prova Paraná.** [s.d.]b. Disponível em: https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2019-08/91_prova_parana_3_edicao.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Avaliação e Monitoramento.** [s.d.]c. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoparana.caeddigital.net/#!/programa. Acesso em: 31 ago. 2022.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Avaliação Comentada.** [Impresso]. 2019a.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Avaliação Comentada.** [Impresso]. 2019b.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Avaliação Comentada.** [Impresso]. 2019c.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Prova Paraná:** avaliação de fluência. [s.d.c]. Disponível em: https://www.provaparana.pr.gov.br/Pagina/Avaliacao-de-Fluencia. Acesso em: 31 ago. 2022.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Prova Paraná.** [s.d.d]. Disponível em: https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2021-06/prova_parana_professor_matematica2_14062021.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Prova Paraná.** 2020. Disponível em: https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2020-08/caderno_prof_mat_fund_revisado.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

PEROVANO, A. P. Quando professores do Ensino Fundamental elaboram situações-problema envolvendo as estruturas multiplicativas: que situações priorizar? **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, Brasil. V. 3 n 8, p. 131-144, maio/agosto 2019.

PERON, L. D. C.; NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Análise de problemas do Campo Conceitual Multiplicativo presentes em livros didáticos de 5º ano ofertados pelo PNLD. **Ensino Da Matemática Em Debate**, *6*(3), 89–119, 2019. https://doi.org/10.23925/2358-4122.2019v6i3p84-109

PORTO, E. R. S. **Raciocínio proporcional:** a resolução de problemas por estudantes da EJA. (Dissertação). Programa de Pós-Graduação de Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco. 2015. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17760/1/Dissertacao%20do%20Mestrado%20Edna%20Porto.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

RODRIGUES, C. L. B. H; REZENDE, V. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 17, n. 39, p. 271-287, dez. 2021. ISSN 2317-5125. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/10713. Acesso em: 31 ago. 2022. doi:http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v17i39.10713.

SALERNO, G. **Avaliação institucional participativa [re]formulação de uma política pública educacional**. (Tese) Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2017.

SANTANA, E. R. S.; LAUTERT, S.L.; FILHO, J. A de C (Orgs). **Ensinando Multiplicação e Divisão no 1º e 3º anos**. Itabuna: Via Litterarum, 2017a.

SANTANA, E. R. S.; LAUTERT, S.L.; FILHO, J. A de C (Orgs). **Ensinando Multiplicação e Divisão no 4º e 5º anos**. Itabuna: Via Litterarum, 2017b.

SANTANA, E. R. S.; LAUTERT, S.L.; FILHO, J. A de C (Orgs). **Ensinando Multiplicação e Divisão no 6º ao 9º anos**. Itabuna: Via Litterarum, 2017c.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005.

SANTOS, A. **Processos de formação colaborativa com foco no Campo Conceitual Multiplicativo**: um caminho possível com professores polivalentes. (Tese). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica – PUC, 2012. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10904/1/Aparecido%20dos%20Santos.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas**: reflexões teóricas e práticas. 1. Ed. Curitiba: Appris, 2015.

SILVA, V.; CARVALHO, C. P. Usos e efeitos das avaliações externas como objeto de pesquisa. **Estudos em Avaliação Educacional**. 25. 10.18222/eae255920143154.

SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO PARANÁ - SAEP. **Revista Pedagógica**. Paraná: Secretaria de Estado e Educação do Paraná-SEED, 2017. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/saep/. Acesso em: 20 ago. 2021.

SOUSA, M. E. M. **Avaliação da Aprendizagem em Processo**: limites e possibilidades de uso em uma Escola da Rede Estadual de São Paulo. (Dissertação) Mestrado Profissional em Educação - Formação de Professores. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. A Importância da Explicitação da Correspondência Um para Muitos na Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online]. 2021, v. 35, n. 69 p. 112-128. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a06. Acesso em: 31 ago. 2022. DOI https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a06.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. (Tese) Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas**. Um exemplo: as estruturas aditivas. Análise Psicológica, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro**. Instituto de Matemática da UFRJ. 1993. p. 1- 26.

VERGNAUD, G.; BRUN, J. **A Teoria dos Campos Conceituais**: Didática das matemáticas. Tradução por Maria José Figueiredo. Instituto Piaget. Lisboa, 1996.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: Grossi, Esther Pillar. **Por que ainda há quem não aprende?** 2.ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. A **Criança, A Matemática e a Realidade**: Problemas de ensino da matemática na escola elementar. Editora da UFPR. Curitiba, 2009.

VERGNAUD F, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**. Editora UFPR. p. 15-27. Curitiba, 2011.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Journal for the Study of Education and Development**, 36:2, 131-161, 2013. DOI: 10.1174/021037013806196283

VERGNAUD, G. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud**: Teoria dos Campos Conceituais TCC. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, G. Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder? **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online),** v. 9 n. 1 (2019): Teorias e Métodos em Didática da Matemática - número especial.

VIANNA, H. M. Avaliações Nacionais em Larga Escala: análises e propostas. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 27, p. 41 – 76, jan./jul. 2003b.

VIANNA, H. M. Fundamentos de um programa de avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 28, p. 23 – 28, jul./dez. 2003a.

ZANELLA, M.; KRACHINSCKI, J.; ZANELLA, I. Estrutura multiplicativa de números naturais: um olhar para o livro didático de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental. **ACTIO**: Docência em Ciências. 4. 465, 2019. 10.3895/actio.v4n3.10603.