

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

**TRANSFORMAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE
PRISMAS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS**

Júlio César Marques

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**

Campo Mourão,
2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

TRANSFORMAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE PRISMAS: UMA ANÁLISE DE
LIVROS DIDÁTICOS

Júlio César Marques

Orientadora: Profa. Dra. Mariana Moran
Coorientadora: Profa. Dra. Veridiana Rezende

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em educação matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Abril/2022

Marques, Júlio César

Transformações semióticas no estudo de prismas: uma análise de livros didáticos. / Júlio César Marques. – Campo Mourão – PR, 2022.

81f.:il.; color.

Orientador(a): Dra. Mariana Moran

Coorientador(a): Dra. Veridiana Rezende

Dissertação (Mestrado) – UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), 2022.

Linha de Pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática.

1. Educação Matemática. 2. Registros de Representação Semiótica. 3. Prismas 4. Livro Didático I. Moran, Mariana. II Rezende, Veridiana. III. Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão, PR IV Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. IV. UNESPAR.

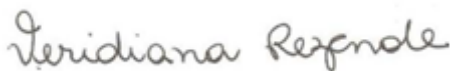
Júlio César Marques

TRANFORMAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE PRISMAS: UMA ANÁLISE DE
LIVROS DIDÁTICOS

Comissão Examinadora:



Profa. Dra. Mariana Moran – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná



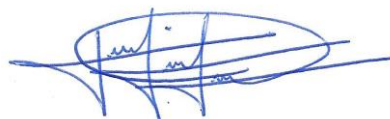
Profa. Dra. Veridiana Rezende – Coorientadora do trabalho
Universidade Estadual do Paraná



Profa. Dra. Maria Ivete Basniak – Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná



Profa. Dra. Raquel Polizeli Corradi - Membro da Banca
Universidade Tecnológica Federal do Paraná



Prof. Dr. João Henrique Lorin - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: Aprovado

Campo Mourão
Abril/2022

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar força e fé em todos os momentos da minha vida.

Aos meus pais, responsáveis por minha primeira formação, pelo carinho, amor e cuidado de sempre.

A minha esposa Jane e minhas filhas Helena, Ana Júlia e Alessandra, por sempre acreditarem em mim, por estarem ao meu lado e pelo apoio, incentivo, amor e compreensão.

À minha orientadora, Professora Dra. Mariana Moran, e à minha coorientadora, Professora Dra. Veridiana Rezende, pessoas admiráveis que, diante de todas as minhas dificuldades, não mediram esforços para me orientarem em minha pesquisa.

Às Professoras Dra. Maria Ivete Basniak, Dra. Raquel Polizeli Corradi e ao Professor Dr. João Henrique Lorin, que compuseram a banca de qualificação e defesa, pela paciente leitura e pelas importantes contribuições a essa dissertação.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM); ao Corpo Docente, pelas contribuições nas aulas e seminários; e aos funcionários, que sempre estiveram prontos a atender com muita dedicação e paciência.

Ao Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GEPEG, pelos encontros de estudos cheios de muitos aprendizados, proporcionando-me aprendizados como pesquisador.

Agradeço a minha turma de mestrado de 2019, que, de forma direta ou indireta, colaboraram comigo; agradeço pelo companheirismo e parceria, que agora se espalham por vários lugares desse Estado.

Agradeço a Professora Dra. Marcia Maioli, por acreditar em mim e sempre me incentivar.

Agradeço aos amigos, de modo geral, que se fizeram presentes e torceram por mim em todas as etapas agora vencidas. A vocês, um “muito obrigado” especial!

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar as transformações – tratamentos e conversões – entre representações semióticas relativas aos Prismas, presentes em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Para tal análise foram selecionados três livros didáticos dentre os recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e os adotados pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) para o ensino de Matemática, a partir do ano letivo de 2022. Os volumes analisados são da 2ª série do Ensino Médio, pelo fato de apresentarem o estudo de Prismas em seus conteúdos. O aporte teórico utilizado nesta pesquisa é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, que sustenta a identificação e análise de tratamentos e conversões apresentadas nos livros. Os resultados mostraram que existe variedade nos registros utilizados nos livros didáticos durante a abordagem do assunto Prismas, sendo eles: os registros em língua natural, registros figurais e registros simbólicos. Os tipos de registros mais utilizados nos livros investigados para representar os Prismas foram os registros figurais e os registros simbólicos, uma vez que o registro na língua natural ocorreu, em sua maioria, por meio de enunciados de problemas. No que se refere às transformações, houve tratamentos nos registros figurais e simbólicos. No caso dos primeiros, eles ocorrem, na maioria das vezes, na forma de planificação que representa a superfície do Prisma a partir de sua representação tridimensional; predominou, no entanto, o tratamento efetuado no âmbito da representação simbólica. As conversões, em sua maioria, se deram da representação em língua natural (na forma de enunciado) para a representação figural ou para a representação simbólica. Também ocorrem conversões da representação no registro figural para a representação no registro simbólico. Diante disso a pesquisa consistiu em uma análise das transformações semióticas observadas em livros didáticos de Matemática, a respeito do objeto geométrico Prismas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Registros de Representação Semiótica. Prismas. Livro Didático.

ABSTRACT

This research aims to analyze the transformations – treatments and conversions – among semiotic representations related to the study of Prisms, present in high school mathematics textbooks. For this analysis, three textbooks among those recommended by the National Textbook Program (PNLD) and those adopted by the Paraná State Department of Education (SEED) for the teaching of Mathematics have been selected, from the 2022 school year. The books analyzed are from the 2nd grade of High School, because they present the study of Prisms in their contents. The theoretical framework used in this research is the Theory of Semiotic Representation Records (TRRS), by Raymond Duval, which supports the identification and analysis of treatments and conversions presented in books. The results showed that there is variety in the records used in textbooks when approaching the subject Prisms, namely: records in natural language, figural records and symbolic records. The types of records most used in the books investigated to represent the Prisms were figural records and symbolic records, since the record in natural language occurred mostly through statements of problems. Regarding the transformations, the treatments permeated the figural and symbolic registers. In the case of the former, they occur, most of the time, in the form of planning that represents the surface; however, the treatment carried out within the scope of symbolic representation predominated. Most conversions took place from representation in natural language (in a statement form) to figural representation or symbolic representation. Conversions from representation in the figural record to representation in the symbolic record also occur. Therefore, the research consisted of selection of textbooks, analysis of the transformations of Prism exercises solved by the author and presentation of the results.

Keywords: Mathematic Education. Semiotic Representation Records. Prisms. Textbook.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Registro da Língua Natural.....	18
Figura 2: Exemplo de tratamento figural.....	20
Figura 3: Exemplo de uma reconfiguração em um prisma reto de base retangular.....	20
Figura 4: Exemplo de conversão de um prisma hexagonal.....	21
Figura 5: Capa do Livro do Ensino Médio.....	30
Figura 6: Capa do Livro do Ensino Médio.....	31
Figura 7: Capa do Livro do Ensino Médio.....	31
Figura 8: Atividades resolvidas nº 2.....	35
Figura 9: Atividades resolvidas nº 3.....	38
Figura 10: Atividades resolvidas nº 4.....	41
Figura 11: Atividades resolvidas nº 5.....	45
Figura 12: Atividades resolvidas nº 6.....	47
Figura 13: Tarefa resolvida R5.....	50
Figura 14: Problema – Passo a passo.....	53
Figura 15: Problema – Passo a passo.....	54
Figura 16: Tarefas resolvidas R6.....	57
Figura 17: Tarefa resolvida R7.....	61
Figura 18: Tarefa resolvida R8.....	63
Figura 19: Atividades resolvidas nº 3.....	66
Figura 20: Atividades resolvidas nº 4.....	69
Figura 21: Atividades resolvidas nº 5.....	71
Figura 22: Atividades resolvidas nº 6.....	74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).....	15
Quadro 2: Registros de Representação Semiótica e Prismas.....	16
Quadro 3: Tipos de Registros e Transformações do exemplo resolvido 2 do LD1.....	36
Quadro 4: Tipos de Registros e Transformações do exemplo resolvido 3 do LD1.....	38
Quadro 5: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 4 do LD1.....	42
Quadro 6: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 5 do LD1.....	45
Quadro 7: Transformações – tratamento e conversão no exemplo resolvido 6 do LD1.....	48
Quadro 8: Transformações – tratamento e conversão no exemplo resolvido 5 do LD2.....	50
Quadro 9: Transformações – tratamento e conversão no exemplo resolvido – Passo a passo do LD2.....	55
Quadro 10: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 6 do LD2.....	59
Quadro 11: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 7 do LD2	60
Quadro 12: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 8 do LD2.....	63
Quadro 13: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 3 do LD3.....	66
Quadro 14: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 4 do LD3.....	68
Quadro 15: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 5 do LD3.....	71
Quadro 16: Tipos de Registros e Transformações do exemplo resolvido 6 do LD3	73

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
1 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO.....	14
1.1 <i>A Teoria dos Registros de Representação Semiótica.....</i>	<i>14</i>
1.2 <i>Os registros de representação semiótica e a Geometria Espacial em Dissertações e Teses.....</i>	<i>24</i>
1.3 <i>O Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio.....</i>	<i>25</i>
2 DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO.....	29
2.1 <i>Característica da pesquisa.....</i>	<i>29</i>
2.2 <i>Contexto da pesquisa.....</i>	<i>29</i>
2.3 <i>Critérios para a análise dos dados.....</i>	<i>32</i>
3 ANÁLISES DA PESQUISA.....	33
3.1 <i>Análise dos livros didáticos.....</i>	<i>33</i>
3.2 <i>Análise dos registros e transformações presentes nos Livros Didáticos.....</i>	<i>33</i>
3.2.1 <i>Análise dos tipos de registros nos exemplos resolvidos do LD1.....</i>	<i>34</i>
3.2.2 <i>Análise dos tipos de registros nos exemplos resolvidos do LD2.....</i>	<i>48</i>
3.2.3 <i>Análise dos tipos de registros nos exemplos resolvidos do LD3.....</i>	<i>64</i>
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	76
REFERÊNCIAS.....	79

INTRODUÇÃO

Desde o princípio de minha carreira docente, sempre procurei¹ práticas que pudessem contribuir com a aprendizagem matemática de meus alunos, com o intuito de que eles compreendessem os conteúdos por meio de contextualizações, diferentes representações e resoluções de problemas. Especificamente no que se refere à Geometria, em minhas experiências em sala de aula, foi possível observar as dificuldades apresentadas pelos discentes ao visualizar e compreender as figuras geométricas desenhadas no “quadro” ou representadas nos livros didáticos.

Ao ingressar no curso de Mestrado pelo PRPGEM – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, passei a integrar o Grupo de Pesquisa em Ensino da Geometria – GPEG, que tem como líder a orientadora desta dissertação. A partir das discussões e investigações realizadas pelo grupo, meu interesse pela Geometria foi ampliado, assim, passei a estudar e me aprofundar ainda mais no tema. Notei que não só minhas inquietações, mas também as dificuldades vivenciadas pelos meus alunos também fazem parte da realidade de outros alunos e professores.

Nesse sentido, Rogensky e Pedroso (2009) mencionam que os estudantes têm dificuldades relacionadas aos conceitos e definições de geometria, e que apresentam dificuldades na visualização e representação de figuras geométricas. No desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, no que se refere à representação de um objeto geométrico, Duval (2012) afirma que:

Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra “representação”. Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal “representar”. Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele (DUVAL 2012, p. 268).

Em vista da importância do papel da representação na aprendizagem da Geometria, buscamos, nesta pesquisa, realizar uma análise, em livros didáticos, dos registros de representação semiótica utilizados para ensinar os assuntos da Geometria Espacial, mais especificamente Prismas, em livros didáticos indicados pela Base Nacional Comum Curricular

¹ A fim de descrever percursos pessoais e profissionais do pesquisador, utilizamos os verbos conjugados na primeira pessoa do singular. Posteriormente a essa descrição, passamos a utilizar a primeira pessoa do plural considerando o pesquisador e suas orientadoras como autores do presente trabalho.

(BNCC) para o Ensino Médio. Para realizar essa análise, utilizamos como suporte a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

A referida teoria considera essenciais as diferentes representações de um objeto matemático, e assevera que é o transitar entre essas diferentes representações, reconhecendo os elementos correspondentes ali presentes, que torna possível a compreensão do objeto em questão. Em outras palavras, a condição necessária ao processo de aprendizagem advém da possibilidade de exploração de diferentes tipos de registros, conforme explica Duval (2003, p. 14): “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação”.

De acordo com Moran (2015, p. 23):

[...] ao se visualizar somente um desenho (forma de expressão gráfica) de um objeto matemático – a figura bidimensional de um poliedro, por exemplo -, não é simples notar que esse objeto tem características particulares, como regularidades, paralelismo, ortogonalidades, ângulos agudos, obtusos ou retos, entre outras. Logo, faz-se necessário o contato com várias representações de um mesmo objeto para que suas propriedades e características fiquem evidentes, o que auxilia na sua compreensão.

Duval menciona que “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático” (DUVAL, 2003, p. 13). São considerados registros de representação semiótica aqueles que são utilizados com fins didáticos e que cumprem duas condições básicas: a produção de representações que permitam o acesso a objetos perceptiva ou instrumentalmente inacessíveis, e que proporcionam operações específicas que permitam a transformação de representações em novas representações (DUVAL, 2011).

Para Almouloud *et al.* (2004), embora os livros didáticos explorem alguns registros de representação semiótica, é importante que os professores fiquem atentos às transformações entre estes registros, pois, para os pesquisadores:

[...] alguns livros didáticos também contribuem para a origem de vários problemas, pois as situações de ensino apresentadas naqueles que analisamos e que são propostas para os alunos, de maneira geral, pela maioria dos professores, não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. Os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstrações (ALMOULOU *et al.*, 2004, p. 99).

Souza (2013, p. 19) afirma que “o livro didático se configura como um material indispensável a professores e alunos, se tornando, portanto, um dos mais importantes instrumentos na construção do saber”. Diante de tal reconhecimento, o livro didático da disciplina de Matemática torna-se um importante coadjuvante tanto no planejamento do

professor quanto no processo de aprendizagem dos alunos.

Diante disso tudo, estabelecemos o problema de pesquisa: *Quais transformações entre representações semióticas relativas aos Prismas estão presentes em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio?*

Procurando responder à questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo geral: *Analisar as transformações – tratamentos e conversões – entre representações semióticas, relativas aos Prismas, presentes em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.*

Para alcançar o tal objetivo, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar os tipos de registros de representação semiótica relativos aos Prismas;
- Investigar os tratamentos ocorridos nestes registros; e
- Investigar as conversões entre as representações semióticas no conteúdo de Prismas presentes nos livros didáticos.

Buscamos analisar os livros didáticos mais recentes, do PNL D 2021, devido à mudança para o novo Ensino Médio, no qual o aluno terá a formação geral básica que contempla todas as habilidades e competências presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

Com a finalidade de reconhecer e estudar pesquisas que se relacionem com o tema desta dissertação, realizamos um levantamento bibliográfico no Portal Periódico BDTD - Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, que será apresentado neste texto.

Para compor este texto de dissertação, procedemos à divisão em cinco partes, a saber: Introdução; Desenvolvimento Teórico - composto por três subseções: na primeira, apresentamos os aportes teóricos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica; na segunda, apresentamos os resultados de dissertações e teses que estão relacionados a este tema, na terceira, dispomos um estudo de livros didáticos para o Ensino Médio. Desenvolvimento Metodológico é a terceira parte do trabalho, também abrangendo três subseções: uma apresenta as características da pesquisa, outra o seu contexto e a última descreve os critérios para a análise dos dados. Para finalizar as ideias expostas, elaboramos as Considerações Finais conforme os resultados alcançados mediante as análises realizadas, e, por fim, apresentamos as Referências utilizadas.

1 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos a fundamentação teórica que sustenta o desenvolvimento da pesquisa, a saber, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da Geometria Espacial, que dará suporte para as análises da pesquisa. Para esse fim, procuramos abordar os principais aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), ilustrando com exemplos de Geometria Espacial. Em seguida, apresentamos teses e dissertações sobre a Geometria com sustentação na TRRS, e abordamos aspectos do Livro Didático de Matemática do Ensino Médio como uma possível ferramenta a favor do ensino e aprendizagem de Matemática.

1.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval inicialmente em 1986, tem seus estudos concentrados em aspectos cognitivos que contribuem para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Para o desenvolvimento da TRRS, Duval (2011) considera alguns aspectos relacionados aos signos que a compõem, destacando três princípios de análise que fundamentaram a semiótica: os modelos de Pierce; os de Saussure, tidos como pioneiros da semiótica como disciplina; e dois artigos de Frege. Duval (2011) afirma que, embora um estudo minucioso sobre os signos tenha ocorrido somente ao final do século XIX, eles acabaram por vir à tona de forma praticamente simultânea, porém disjuntas.

De acordo com Duval (2011, p. 38), os signos são “unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou gestos de mão. O que equivale a considerar os signos como as ‘coisas’ pelas quais é preciso para dar um sentido”.

Com base no estudo dos signos, constituiu-se o conceito de representação semiótica proposto por Duval. Para o pesquisador, as representações semióticas são produções estabelecidas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento, sendo essenciais à atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2012). Segundo ele:

O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada “**semiose**” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e “**noesis**” a

apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose** (DUVAL, 2012, p. 270, grifos do autor).

Conforme o exposto, “**semiose**” é a produção de uma representação semiótica, e “**noesis**” é a apreensão, ou seja, a apropriação do conceito de um objeto. Pensando nisso, o autor afirma que apropriação de um objeto matemático pelo sujeito acontecerá somente se ele coordenar as suas diferentes representações.

Duval (2003) classifica os registros de representação semiótica em quatro grandes tipos de registros: Língua natural, Simbólico (sistema de escrita), Gráficos e Figuras, conforme o quadro a seguir:

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações Verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • argumentar a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definições ou de teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escrita: <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (decimal, binária, fracionária, ...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • mudança de sistema de coordenadas; • interpolação e extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p. 14).

Segundo Duval (2003), é a articulação dos registros de representação semiótica que proporciona a aprendizagem. Para o pesquisador a noção de registro de representação semiótica constitui ferramenta preciosa para o ensino da Matemática, pois relaciona-se a fatores cognitivos que determinam a maneira matemática de trabalhar. No caso desta pesquisa, quando nos referimos à Geometria Espacial, destacamos principalmente três tipos de registros de representação semiótica: Língua Natural, Figural e Simbólico. No que se refere à representação gráfica, Duval (2011) afirma que a “visualização gráfica de curvas algébricas ou de gráficos de funções é de natureza diferente da visualização geométrica de formas, a qual não tem nada de comum com o reconhecimento gestaltista de formas e objetos sobre as imagens.”. Assim, por este motivo, não utilizaremos nesta pesquisa o registro gráfico para representações geométricas.

De acordo com Coutinho e Moran (2014), a oralidade, realizada por meio da língua natural, é algo que ocorre com frequência durante as explicações, definições, formalizações de

propriedades e exemplos matemáticos nos registros escritos durante a aula e também nas explicações.

Já no registro figural, Duval (2011) esclarece que no processo de adquirir o conhecimento, no ensino de Matemática, mais especificamente na Geometria, as figuras geométricas formam um registro de representação semiótica. Segundo Moran (2015), no que se refere à geometria, a utilização de imagens auxilia na compreensão e na resolução de problemas. A pesquisadora ainda afirma que, quando se trata de enunciados de problemas, a imagem ou a figura podem modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre os aspectos a serem considerados para se chegar à conclusão necessária. A figura contribui para a resolução de problemas matemáticos por realizar um papel importante do ponto de vista cognitivo e na forma de ser e compreender o problema.

Outro tipo de registro mencionado por Duval é o registro simbólico, que pode ser a representação numérica, a exemplo da forma fracionária ou decimal, ou as representações algébricas, que são utilizadas para apresentar generalizações. Tal registro é uma possibilidade para a resolução de problemas, por exemplo.

Considerando estes três principais registros de representação semiótica, e com o enfoque no tema central desta investigação – Prismas, elaboramos o Quadro 2, que contém as representações associadas aos respectivos registros de representação semiótica.

Quadro 2: Registros de Representação Semiótica e Prismas

	Registros de Representação Semiótica			
	Figural	Simbólico		Língua Natural
		Númerico	Algébrico	
Representação dos objetos matemáticos	Representações das formas de figuras: prismas triangulares, quadrangulares, pentagonais etc. (3 dimensões); Planificações dos prismas (2 dimensões); Representações dos elementos de um Prisma: bases e faces laterais (2 dimensões).	Sistema de escrita numérico referente a medida de perímetro e área das bases e das faces laterais, e referente a medida do volume do Prisma.	Fórmulas, expressões e generalizações para os cálculos das medidas do perímetro e da área das bases e das faces laterais, e também da medida do volume do Prisma.	Definições, teoremas, enunciados de problemas e descrições do objeto Prisma e dos elementos que o compõem.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

Um objeto geométrico pode ser apresentado com o uso de diferentes representações ou diversos registros de representação semiótica. A associação entre as diferentes maneiras de

representação se dá por meio de coordenação, que poderá servir para gerar inter-relação entre esses registros de representação.

Especificamente para a Geometria, Duval (2011) explica que as figuras têm propriedades dos objetos representados pelos desenhos, propriedades essas que só podem ser aprendidas com a ajuda dos conceitos, isto é, os termos definidos nos enunciados.

Com base na classificação dos tipos de registros de representação semiótica descritos por Duval (2003), consideramos possível a análise de objetos da Geometria Espacial, em particular Prismas, de modo a tentar compreendê-los em termos de seus conceitos e propriedades.

No que diz respeito ao registro figural, é nesta classificação que obtemos as representações geométricas. Duval afirma que:

A importância legítima dada às atividades de construção de figuras é, neste ponto de vista, reveladora. As atividades de construção de figuras são atividades que privilegiam a formação de representação de um objeto matemático ou de uma situação matemática no registro figurativo [...] essas atividades levam, deste modo, a considerar as figuras geométricas como figuras matemáticas (DUVAL, 2012, p. 286).

Contudo, ao trabalhar com objetos da Geometria Espacial, também podemos explorar outros registros diferentes do figural, como o registro simbólico, por exemplo. Os registros simbólicos contemplam aspectos numéricos e algébricos relacionados, entre outros, aos valores numéricos para a medida dos lados, medidas das arestas ou dos segmentos. Além disso, o cálculo da área da superfície total, formada por todas as faces laterais e pelas bases de uma figura tridimensional, e o seu volume, podem ser escritos por uma expressão ou uma equação algébrica.

Sendo assim, de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões medem a , b e c , podemos obter a medida da área total de sua superfície dada por:

$$A_T = 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$$
$$A_T = 2(a.b + a.c + b.c)$$

Equação 1: Exemplo de representação simbólica

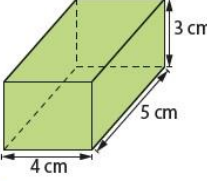
Fonte: DANTE (2020, p. 86)

Com relação ao registro na língua natural relacionado à Geometria Espacial, ele pode ser entendido como a descrição dos conceitos, das definições, das propriedades, das situações problemas, dos enunciados, dentre outros, conforme figura 1:

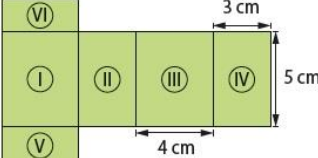
Figura 1: Registro da Língua Natural

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, determine a área total da superfície do paralelepípedo.



Resolução



A superfície do paralelepípedo é formada por seis faces retangulares, indicadas na planificação anterior. Note que I = III, II = IV e V = VI.

Calculando cada área, temos:

$$S_I = 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$$
$$S_{II} = 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$
$$S_V = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

Então:

$$S_t = 2S_I + 2S_{II} + 2S_V$$
$$S_t = 2(20 + 15 + 12) = 2 \cdot 47 = 94$$

Portanto, a área total da superfície é de 94 cm².

Fonte: BONJORNO (2020, p. 86)

Assim, no caso do exemplo resolvido, identificamos a presença do registro na forma de língua natural e também um registro figural auxiliar. No início da resolução, ocorre a reconfiguração da figural tridimensional para a planificação bidimensional, identificando-se suas medidas das arestas. Desse modo, utiliza-se o registro na língua natural auxiliar, com a intenção de identificar as faces que têm medidas de área correspondentes para o cálculo da área total das faces.

Segundo Duval (2003), os estudantes obtêm sucesso em atividades desenvolvidas por um único registro; no entanto, elas não garantem a aprendizagem. Nesse sentido, as atividades precisam provocar necessidades de mudanças de representações, na intenção de propiciar aprendizagem do assunto em questão.

Para Duval (2012), uma representação é considerada semiótica, somente, se possibilitar três atividades cognitivas:

- 1) A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: deve respeitar as regras de utilização, de identificação, de reconhecimento da

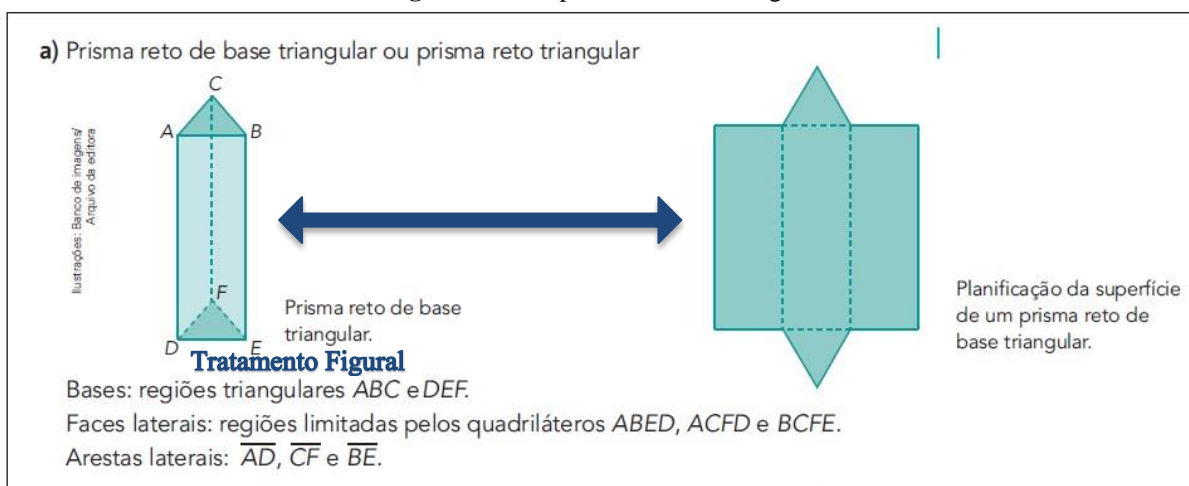
representação e a possibilidade de sua utilização para tratamentos, ou seja, fazer com que o objeto representado seja reconhecido e ter regras para aplicar os possíveis tratamentos.

- 2) O tratamento, que consiste na transformação de uma representação no mesmo registro em que foi formada. Para cada tipo de registro, existem regras para explorar uma representação, e tais regras “uma vez aplicadas, resultam em uma representação de mesmo registro que a de partida” (DUVAL 2009, p. 57).
- 3) A conversão, que é outro tipo de transformação necessária, do ponto de vista de Duval (2009), para a aprendizagem em matemática. O autor afirma que a conversão é a transformação de uma representação em outro registro semiótico, de forma que sua definição e propriedades do objeto matemático sejam conservadas e escritas em outra representação semiótica.

No que diz respeito aos dois tipos de transformações – tratamento e conversão -, estes ocorrem como forma de explorar e compreender os objetos de conhecimento estudados. Apresentamos a seguir exemplos de tratamento e conversão associados à Geometria Espacial, campo em que ocorrerão as análises de nosso trabalho.

Como exemplo de tratamento, apresentamos a figura 2, que se refere à planificação de um prisma triangular reto. Trata-se de um exemplo retirado de Dante (2020, p. 84), e no caso deste prisma, notamos que foi realizada uma planificação e no processo de planificação foram conservadas suas informações, como as bases, as faces laterais e as arestas, para possível realização do cálculo da área das superfícies desse sólido geométrico, conforme proposto no enunciado do exemplo. Sendo assim, a realização da planificação deste sólido pode ser compreendida como um tratamento que ocorreu de forma intencional de modo a obter consciência das unidades informacionais do objeto, ocorrendo internamente ao registro figural.

Figura 2: Exemplo de tratamento figural

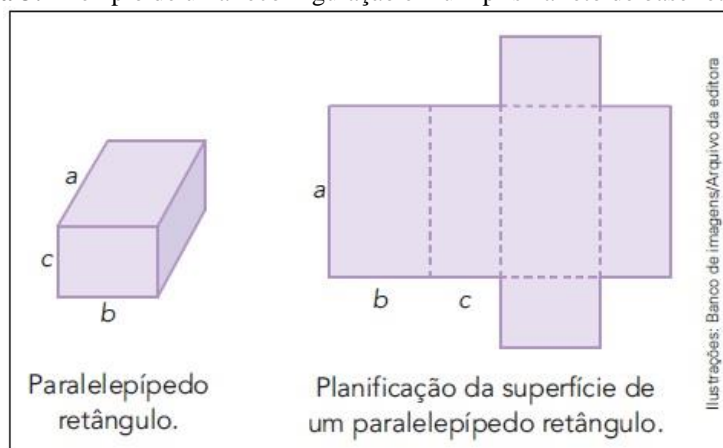


Fonte: DANTE (2020, p. 84)

Na representação acima, a figura do prisma reto de base triangular foi planificada, passando de uma figura tridimensional para uma figura bidimensional, o que caracteriza uma reconfiguração, *tratamento* se aplica a figuras geométricas. Os tratamentos de reconfiguração são intencionais, sendo “aqueles que tomam ao menos o tempo de um controle consciente para ser efetuados e que se apoiam exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados, numa percepção furtiva do objeto” (DUVAL, 2003, p. 52).

O registro figural de um sólido geométrico pode ser representado de diversas formas, e no exemplo da figura 3, a seguir, temos um prisma reto de base retangular representado inicialmente por sua forma tridimensional, utilizando registros simbólicos para identificar as dimensões, sendo elas: comprimento a , largura b e altura c . Nesse caso, é possível observar que houve uma reconfiguração para a planificação do prisma reto de base retangular, apresentando a figura na forma bidimensional:

Figura 3: Exemplo de uma reconfiguração em um prisma reto de base retangular



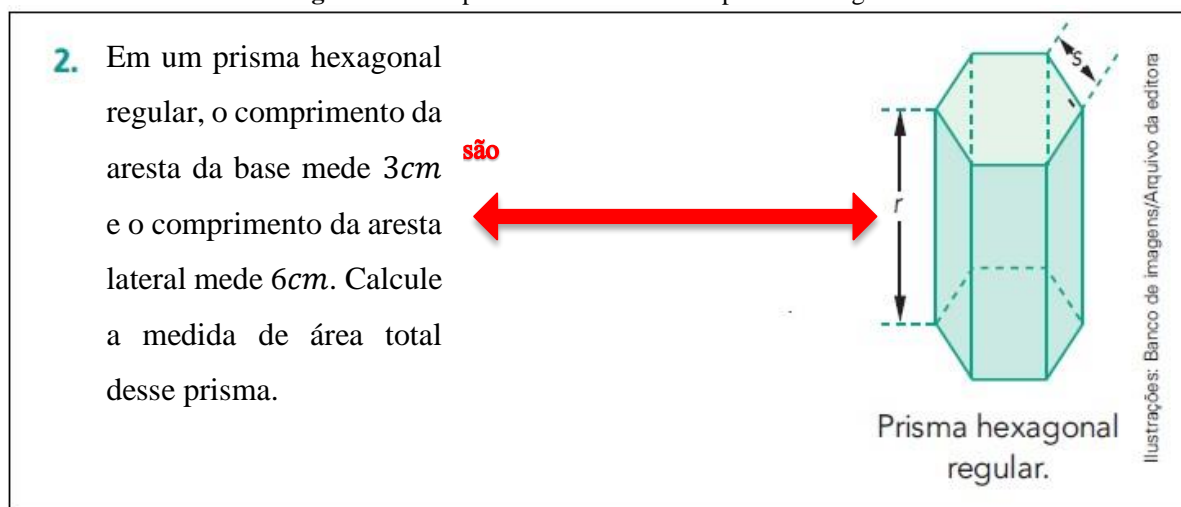
Fonte: DANTE (2020, p. 86)

No caso acima, inferimos que ocorreu um *tratamento* interno ao registro figural, uma vez que o paralelepípedo retângulo se encontrava em sua forma tridimensional e foi reconfigurado para sua planificação na forma bidimensional.

Além do tratamento, como mencionamos anteriormente, temos as *conversões*, que são transformações que ocorrem entre diferentes representações, mas se referem ao mesmo objeto, como a passagem da representação simbólica para a figural. Ou seja, “converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro de registro” (DUVAL, 2009, p. 58).

Como exemplo de conversão identificado nas atividades resolvidas do livro didático *Matemática em Contexto* (DANTE, 2020, p. 86), temos a transformação de uma representação dada em um registro da língua natural (enunciado da atividade) para a sua representação na forma figural (prisma hexagonal), conforme a figura 4 a seguir:

Figura 4: Exemplo de conversão de um prisma hexagonal



Fonte: DANTE (2020, p. 86)

Como citado anteriormente para Duval (2003), a conversão é a transformação de uma representação em outro registro semiótico, assim, o exemplo anterior representa uma *conversão*, por ocorrer transformação do enunciado (registro em língua natural) para a figura do prisma representada (registro figural). Para Duval (2009), a ilustração é a colocação em correspondência de uma palavra, de uma frase, ou de um enunciado com uma figura ou com seus elementos. Sendo assim, é possível considerar que há correspondência de cada elemento do exemplo na forma de registro em língua natural para o figural, validando a figura geométrica construída.

Assim, um objeto, ao contar com diferentes representações, apresenta características diferentes; no entanto, com base na TRRS, Damm (1999, p. 147) explica que “o que garante a apreensão do objeto matemático, a sua conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre esses registros de representação”.

Duval (2011, p. 22) evidencia que “é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, e não o inverso, qual seja, o ‘enclausuramento’ de cada registro”. Assim, o não ‘enclausuramento’ do registro possibilita, além do reconhecimento do objeto, a distinção entre ele e sua representação; logo, Duval (2012) afirma que a distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da Matemática.

Por considerar a necessidade de oferecer melhor formação matemática inicial aos alunos, Duval (2011) fez várias reflexões, no intuito de compreender quais as dificuldades dos discentes para compreender a Matemática. Na tentativa de buscar respostas a tais reflexões, o autor enfatiza que não podemos nos limitar ao campo matemático ou à sua história, afirmando que:

[...] se faz necessário uma abordagem cognitiva, pois o objeto do ensino da Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (DUVAL, 2011, p. 11).

Nesse caso, a abordagem cognitiva deverá buscar, inicialmente, descrever o funcionamento cognitivo de tal modo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino (DUVAL, 2011). Quando se estuda uma atividade cognitiva, é fundamental considerar as representações semióticas presentes na Matemática, principalmente pelo fato de as diferentes representações possibilitarem opções de tratamentos; as representações darem acesso aos objetos matemáticos, uma vez que estes não são diretamente observáveis; e de as muitas representações possibilitarem a reflexão a respeito do uso da representação mais “econômica¹”, a depender da situação-problema.

Dessa forma, é necessário dar sentido às representações semióticas de um objeto, pois elas:

São produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de reproduções que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.

¹ O termo “econômica” está sendo utilizado aqui no sentido de pensar na atividade a ser realizada como algo mais prático e suficiente para o que está sendo proposto.

Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. [...] As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2012, p. 269).

Pelo fato de os objetos matemáticos não existirem fisicamente, o acesso a eles se torna possível por meio da utilização de um sistema semiótico, uma vez que, na Matemática a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos. Duval (2011) explica que um sistema semiótico é um conjunto de signos, organizado segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. Em outras palavras, é um sistema que realiza a função de comunicação, uma vez que é capaz de produzir e transmitir informações.

De acordo com o pesquisador, os diferentes sistemas semióticos possibilitam vários tipos de representações de um mesmo objeto, proporcionando aumento das capacidades cognitivas do indivíduo; sendo assim, a aprendizagem da Matemática ocorre a partir da capacidade do indivíduo de transitar entre diferentes registros de representação semiótica. Nesse sentido, Duval (2011) caracteriza e diferencia a matemática, ao explicar que:

Na Matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc). O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. [...] isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação (DUVAL, 2011, p. 21).

Deste modo, podemos inferir que, em Matemática, boa parte da comunicação se estabelece com base nas representações de seus objetos, e sua compreensão resulta na habilidade de mudar de registros e efetuar tratamentos de modo a explorar seus resultados e propriedades.

Sendo assim, ao trabalhar com problemas matemáticos, principalmente aqueles que envolvem conceitos de Geometria, o uso de imagens auxilia no momento da interpretação e da resolução de exercícios ou problemas, uma vez que, ao utilizar a imagem, pode-se obter uma modificação do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre determinados aspectos ali considerados e propiciando a conclusão esperada.

De acordo com Moreira (1996, p.3), as “imagens são representações específicas que retêm muitos dos aspectos perceptivos de determinados objetos ou eventos, vistos de um ângulo particular, com detalhes de certa instância do objeto ou evento”, e, por essa razão, sua utilização é de fundamental importância, visto que permitem maior acesso aos objetos representados, formulação de conjecturas e resolução de problemas.

Portanto, no intuito de obter informações sobre como têm ocorrido pesquisas que relacionam a TRRS e a Geometria, na próxima seção realizamos um levantamento bibliográfico de pesquisas a respeito de trabalhos que apresentam aspectos relacionados aos registros de representação semiótica em Geometria Espacial, e também a forma como estão presentes nos livros didáticos.

1.2 Os registros de representação semiótica e a Geometria Espacial em Dissertações e Teses

Conforme posto anteriormente, com a finalidade de reconhecer e estudar pesquisas que se relacionam com o tema desta dissertação, realizamos um levantamento bibliográfico no Portal Periódico BDTD - Biblioteca Digital de Teses e Dissertações.

Tal mapeamento foi realizado no mês de setembro de 2021, quando foi feita busca avançada e utilizado como refinamento de busca o período de 2012 a 2021, com a intenção de encontrar todos os trabalhos possíveis ao longo do período, dentro do tema proposto. Feito isso, foram encontradas 13 dissertações e 5 teses, que apresentaram em seu *corpus* de estudo a correlação das referidas palavras-chaves/descriptores: Registros de Representação Semiótica, Geometria Espacial e Livro Didático. Estas palavras-chaves/descriptores foram relacionadas, uma vez que o interesse de investigação foram os estudos que demonstrassem a correlação entre seus objetos de estudo.

Após a realização das leituras dos trabalhos completos, constatamos que 17 pesquisas, embora contendo as palavras-chave investigadas, não se referem à análise de livro didático. Sendo assim, identificamos somente uma dissertação, que trata de análise de Livro Didático, Geometria Espacial e Registros de Representação Semiótica, de modo que foram analisados seu objetivo e os procedimentos metodológicos.

A dissertação encontrada foi a de Silva (2014), intitulada “Triângulos nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Um Estudo Sob a Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica”. Nessa pesquisa, foram investigadas representações gráficas de triângulos nos livros didáticos de matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2013. A autora recorreu à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, como aporte teórico, por acreditar ser uma teoria adequada para uma pesquisa relativa à representação de objetos matemáticos. Em seu trabalho, investigou-se o manual do professor; com isso, a autora constatou que predominam as representações gráficas de triângulos

equiláteros ou isósceles, e que há relativamente poucas imagens gráficas de triângulos escalenos. Foram propostas atividades em que os alunos realizassem conversão de registros, e os resultados revelaram uma atenção insuficiente a esse tipo de atividade.

Na subseção a seguir, apresentamos, como um instrumento didático importante, o livro didático de Matemática para o Ensino Médio.

Por fim, justificamos a pertinência da presente pesquisa, pelo fato de constar, no Banco de teses e dissertações – BDTD, apenas uma pesquisa que analisou livros didáticos com foco no conteúdo de Geometria, e nenhuma pesquisa que trata especificamente de prismas, registros de representação semiótica e livros didáticos de matemática.

1.3 O Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio

A seleção dos livros didáticos no Brasil é determinada pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O PNLD contém um conjunto de ações direcionadas para a avaliação de distribuição de obras didáticas, pedagógicas e literárias. O livro didático de cada disciplina chega às escolas depois de escolha dos professores a partir da leitura do Guia do Livro Didático. Todo esse processo resulta em responsabilidade para as escolas e para os professores, tencionando que o livro didático seja um aliado seu e dos seus alunos. Acerca disso, Brasil (2007) afirma que:

É preciso observar, no entanto, que as possíveis funções que um livro didático pode exercer não se tornam realidade, caso não se leve em conta o contexto em que ele é utilizado. Noutras palavras, as funções acima referidas são histórica e socialmente situadas e, assim, sujeitas a limitações e contradições. Por isso, tanto na escolha quanto no uso do livro, o professor tem o papel indispensável de observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica e ao seu aluno (BRASIL, 2007, p.12).

Consideramos o Livro Didático o principal instrumento didático em sala de aula. Dependendo de cada situação, o livro didático talvez seja o único instrumento disponível para o professor e para o aluno, uma vez que “há lugares em que o livro didático é o único a que algumas pessoas têm acesso na vida” (CASSIANO, 2017, p. 87).

No ensino público, a escolha dos livros didáticos é realizada de quatro em quatro anos pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD. O processo do PNLD tem início com a adesão das escolas ao programa, passando pela publicação dos editais, e finalizando com a distribuição e recebimento dos materiais didáticos pelas instituições de ensino.

O livro didático, de acordo com Santos e Martins (2011), é um instrumento de grande valor educacional, e mesmo não sendo acessível para muitos, esteve e ainda está presente no

contexto histórico do Brasil desde o período colonial. Sua utilização ganhou força depois do acordo MEC-USAID, ocorrido em 1966, que propõe a edição de livros didáticos em larga escala para atender a demanda escolar. Entretanto, foi somente nas décadas de 1970 e 1980 que os livros didáticos assumiram um papel relevante na prática pedagógica no sistema educacional brasileiro.

Tido por Lajolo (1966, p. 7) como “[...] um instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal”, o livro didático acaba por constituir ferramenta de natureza complexa, podendo ser visto como um “[...] produto cultural; como mercadoria ligada ao mundo editorial e dentro da lógica de mercado capitalista; como suporte de conhecimentos e de métodos de ensino das diversas disciplinas e matérias escolares; e, ainda, como veículo de valores, ideológicos ou culturais” (BITTENCOURT, 2004, p. 471).

Essa forma de se entender o livro didático deu-se tão somente por ser evidente, ao longo dessas décadas, mais para o final da década de 1980, especificamente, uma desvalorização do ensino público, bem como a falta de professores qualificados, o que obriga a tornar o livro didático instrumento indispensável de ensino. No entanto, começam surgir também questionamentos acerca da qualidade desse instrumento, e o foco volta-se para a fragmentação e a banalização dos conhecimentos escolares, fortalecendo as críticas à utilização do livro didático.

Santos e Martins (2011) afirmam que foi nos anos 1990 que reformas educacionais surgiram como meio de sensibilização para a necessidade de alterações nos conteúdos e nas metodologias de ensino. Foi também chamada atenção para a necessidade de elaboração de programas de reformas, visando a alterações no contexto escolar, mas que, na maioria das vezes, não chegavam ao conhecimento dos professores, os maiores consumidores dos livros didáticos e agentes de formação acerca dos mesmos.

Foi também na década de 1990 que se deu a criação do Programa Nacional de Livro Didático (PNLD), que objetivava não só a garantia da qualidade dos livros didáticos a serem adotados, mas também se comprometia em avaliar pedagógica e adequadamente esses mesmos livros antes que chegassem às salas de aula, o que demonstra a preocupação com a compreensão de que o livro didático está intimamente ligado ao processo de ensino (SANTOS; MARTINS, 2011).

De acordo com Souza *et. al.* (2018), daí em diante os livros didáticos passaram a ser considerados fundamentais na sala de aula, sendo a base para os planejamentos e atividades. Destaca-se, porém, que o livro não tem como objetivo determinar o que o professor deve ou

não fazer em sua prática pedagógica, uma vez que ele não é capaz, por si só, de suprir toda a necessidade que requer o processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Lajolo (1966), a grande importância atribuída pela sociedade ao livro didático fez com que ele acabasse determinando conteúdos e estratégias de ensino, ou seja, ao livro didático foi dado o poder de determinar o que se ensina e como se ensina. Todavia, para Choppin (2004, p. 552-553) ele deve constituir apenas uma referência, “[...] o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário de conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações”.

Segundo o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2010, p. 12-13), “o livro didático é um interlocutor que dialoga com professor e aluno, que pode auxiliar no planejamento e na gestão das aulas”. É preciso entender que ele não deve ser visto como o único recurso utilizado, principalmente nas aulas de Matemática. Ele é um complemento, uma vez que “a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento” (idem, p. 67).

Ainda de acordo com o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2010, p. 12-13), “é preciso considerar especificidades sociais e culturais de cada ambiente escolar em que o livro é utilizado”, entendendo-se também que é preciso o acompanhamento dos processos de ensino e de aprendizado vivenciados por professores e alunos que utilizam esse livro.

O livro didático deve ser visto como um parceiro no cotidiano de sala de aula, e, ao utilizá-lo, o professor deve definir prioridades, modificar sequências propostas, ampliar ou reduzir quantidade de atividades, entre outros, para fazer bom uso dele e não fazer com que o material se torne um obstáculo ao projeto pedagógico da escola, afirmam Centurion e Jacobovic (2012, p. 5).

De acordo com Mendes (2016), o livro didático assume a posição de artefato tecnológico que vai ajudar a fazer a transposição do saber acadêmico ao saber escolar. Assim, considera-se a importância do livro didático ao vê-lo como um potencial material de apoio, para auxiliar o professor no ensino, na reflexão, na pesquisa, no treinamento e na assimilação dos conhecimentos a serem ensinados, de modo a ajudar a proporcionar ao indivíduo uma forma mais compreensiva de aprender os assuntos escolares e extraescolares.

Assim, considerando a importância do livro didático para a ação pedagógica do professor em sala de aula; que não foram identificadas teses e dissertações brasileiras que analisam livros didáticos com o foco no conceito de prismas; e a importância de o professor propor tarefas matemáticas com vistas à diversidade de registros de representação semiótica e suas transformações, justificamos o desenvolvimento desta pesquisa, que visa *Analisar as*

transformações – tratamentos e conversões – entre representações semióticas, relativas ao estudo de Prismas, presentes em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.

2 DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

Apresentaremos, neste capítulo, as características da pesquisa, seu contexto e os critérios para a análise dos dados coletados, de modo a compor o desenvolvimento metodológico.

2.1 Característica da pesquisa

A presente pesquisa se respalda em uma abordagem de natureza qualitativa, que permite compreender a complexidade e os detalhes das informações obtidas. Para D'Ambrósio (2006), a pesquisa qualitativa tem como foco entender e interpretar dados e discursos e, no entendimento desse pesquisador, é por meio da pesquisa qualitativa que podemos escapar da “mesmice”, dando atenção às pessoas e às ideias, procurando trazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. Deste modo, ao realizarmos uma pesquisa qualitativa que consiste em uma análise de livros didáticos, daremos atenção para dados e informações que poderiam estar ocultos sob o ponto de vista do tema que nos dedicaremos a investigar.

A seguir apresentaremos o contexto em que a pesquisa se encontra.

2.2 Contexto da pesquisa

As ideias que conduziram a pesquisa se baseiam em uma investigação da unidade temática Geometria, com especificidade na Geometria Espacial. Ao longo de minha atuação lecionando Matemática, sempre observei as dificuldades dos estudantes com relação a esse assunto, e, desse modo, participando do Grupo de Pesquisa em Ensino da Geometria – GPEG, o qual minha orientadora coordena, eu pude fazer leituras acerca de temáticas desenvolvidas no âmbito da Geometria; durante tais leituras, nós, participantes do grupo, entendemos que uma das formas de investigarmos os objetos geométricos é o olhar para eles sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Ao estudar tal teoria, inferimos que é possível investigarmos aspectos de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, pela abrangência do tema e pelo fato de não identificarmos teses e dissertações desenvolvidas com este enfoque, optamos a investigar o conteúdo de Prismas.

No desenvolvimento desse estudo, realizamos nossa pesquisa com interesse em analisar as transformações – tratamentos e conversões – entre registros de representação semiótica,

relativas ao ensino de Prismas, presente em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizados no Estado do Paraná que foram indicados pelo PNLD 2021.

Para compor o material de análise, selecionamos três coleções de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio. Ao iniciarmos as análises, em setembro de 2021, ainda não tínhamos a relação dos livros didáticos selecionados pelos professores das Escolas Públicas do Ensino Médio do Estado do Paraná. Por isso, iniciamos a investigação com as análises da coleção do Livro Didático (LD1), que tem como título *Matemática em Contextos: geometria plana e geometria espacial*, de Luiz Roberto Dante, publicado pela editora Ática no ano de 2020.

Figura 5: Capa do Livro do Ensino Médio



Fonte: DANTE (2020)

A escolha dessa coleção se deu pela percepção de que, em edições anteriores, suas obras foram analisadas, selecionadas e aprovadas pelo PNLD do Ensino Médio, conforme apresentado nos Guias do PNLD dos anos de 2012, 2015 e 2018, publicados no site do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) – Ministério da Educação.

Para a análise dos outros dois livros, selecionamos os dois mais adotados pelos colégios do Núcleo Regional de Educação – NRE de Cianorte/PR, aprovados pelo PNLD – 2021. Os Livros Didáticos do Ensino Médio selecionados contemplam a Área de Conhecimento Matemática e suas Tecnologias, que de acordo com a PNLD 2021, formam um conjunto de seis volumes do livro didático. De acordo com a relação recebida, analisamos as obras por área de conhecimento, no caso “Matemática e suas tecnologias”.

O Livro Didático (LD2) selecionado para a presente pesquisa faz parte da coleção *Quadrante Matemática e suas Tecnologias: geometria plana e espacial*, de Eduardo Chavante, publicado pela Edição SM, 2020, que foi aprovada pelo PNLD – 2021.

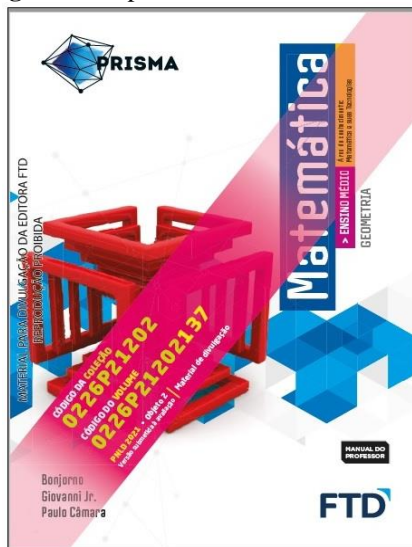
Figura 6: Capa do Livro do Ensino Médio



Fonte: CHAVANTE (2020).

O Livro Didático (LD3) também analisado no âmbito da pesquisa tem como título *Prisma Matemática: Geometria*, de José Roberto Bonjorno, publicada pela editora FTD, 2020, também aprovada pelo PNLD 2021.

Figura 7: Capa do Livro do Ensino Médio



Fonte: BONJORNO (2020)

Na seção a seguir, abordaremos os critérios para a análise dos dados que utilizamos em nossa pesquisa.

2.3 Critérios para a análise dos dados

Com a intenção de responder à questão de pesquisa, *Quais transformações entre representações semióticas relativas ao ensino de Prismas, estão presentes em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio?*, adotamos os procedimentos de análises descritos a seguir.

- Focalizamos nos exemplos resolvidos das obras selecionadas com um olhar para o estudo dos Prismas.
- Para cada exemplo resolvido nas obras, acerca de Prismas, buscamos identificar: i) os tipos de registros de representação semiótica presentes; e ii) as possíveis transformações do tipo tratamento e conversão, entre as representações encontradas.

No próximo capítulo realizaremos as análises dos dados dos livros didáticos selecionados para a nossa pesquisa.

3 ANÁLISES DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos a análise dos dados, obtidos a partir dos três livros didáticos selecionados para a investigação. O capítulo foi dividido em duas partes: a primeira parte se refere aos tipos de registros de representação semiótica encontrados nos livros didáticos para a abordagem de Prismas; a segunda trata das possíveis transformações – tratamento e conversões - de representações apresentadas nos exemplos resolvidos nos livros didáticos analisados.

3.1 Análise dos livros didáticos

Apresentamos, nesta seção, as análises dos exemplos resolvidos de três livros didáticos que contemplam o conteúdo de Geometria. No que se refere ao objeto de conhecimento Prisma, foi possível analisar os exemplos resolvidos e relações dadas, abarcando conteúdos matemáticos com aspectos da TRRS, tais como as suas possíveis representações e transformações.

A nossa investigação do objeto de conhecimento Prisma teve início com o volume *Geometria Plana e Espacial*, da coleção “Matemática em Contextos”; em seguida foi realizada investigação no volume da coleção “*Quadrante Matemática e suas Tecnologias: geometria plana e espacial*” e, investigamos o volume da coleção “*Prisma Matemática: Geometria*”. No tópico de cada volume investigado, os autores retomam e aprofundam o estudo do sólido geométrico Prisma, apresentam as características desse sólido e determinam as expressões para o cálculo da medida da área da superfície e de volume. Os autores procuram explorar a planificação do sólido Prisma.

3.2 Análise dos registros e transformações presentes nos Livros Didáticos

No que se refere aos registros de representação semiótica, Duval (2011) afirma que são ferramentas que possibilitam analisar as produções matemáticas, principalmente aquelas construídas com o objetivo de ensino e aprendizagem. O pesquisador ainda destaca que os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos.

Duval classifica os diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático. Para o pesquisador, a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de

ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registros de representação. Ele ainda afirma que um único registro pode parecer privilegiado ao se resolver um problema, mas deve existir sempre a possibilidade de se passar de um registro para o outro. Desse modo, serão identificados os tipos de registros e as transformações – tratamento e conversão -, que constam nos referidos Livros Didáticos.

3.2.1 Análise dos tipos de registros nos exemplos resolvidos do LD1.

A análise foi feita do Capítulo 2, “Geometria espacial do LD1”, da subseção intitulada *Prisma e Cilindro*. O conteúdo de Prisma é desenvolvido em 16 páginas, nas quais se lê definições dos elementos referentes ao Prisma, bem como atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e exercícios. No que diz respeito ao conteúdo de Prisma, tanto as explicações das definições como as atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e os exercícios são divididos em tópicos no decorrer do conteúdo: *Prisma, Construção e definição de prisma, Caso particular: o paralelepípedo, Medida de área da superfície de um prisma, Medida de volume de sólidos geométricos, Conexões*.

Após a explanação dos tópicos *Medida de área da superfície de um prisma* e *Medida do volume de sólidos geométricos*, são apresentadas as atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e exercícios. Vale salientar que as atividades resolvidas (exemplos resolvidos) do conteúdo de Prisma iniciam no número dois, pois a de número um está relacionada ao conteúdo anterior, que tem como título *Poliedro regular*. No que se refere às atividades resolvidas (exemplos resolvidos), foram identificadas um total de cinco, de modo que, duas estão relacionadas ao cálculo de área e as outras três ao cálculo de volume. Assim, no que diz respeito às análises dos exemplos resolvidos, analisamos os diferentes tipos de registros de representação e as transformações – tratamento e conversão apresentados.

Exemplo resolvido 1:

O exemplo resolvido pelo autor demonstra como calcular a área total de um prisma hexagonal regular. É feito o desenho de um prisma hexagonal regular, identificando o comprimento da aresta da base e o comprimento da aresta lateral. É realizada a planificação da superfície do prisma hexagonal, para calcular a área lateral. Como cada face do prisma é retangular, foi utilizado a fórmula $A_l = 6 \cdot (r \cdot s)$. Uma vez que cada face do prisma é retangular, é efetuado o cálculo da área de um retângulo e em seguida multiplicado por 6, que,

corresponde ao número de faces laterais. Em seguida, é calculada a área das faces das bases utilizando a fórmula do triângulo equilátero. Para finalizar o cálculo da área total do prisma hexagonal regular, efetuou-se a soma da área lateral e a área das bases.

Figura 8: Atividades resolvidas nº 2

Atividades resolvidas

2. Em um prisma hexagonal regular, o comprimento da aresta da base mede 3 cm e o comprimento da aresta lateral mede 6 cm. Calcule a medida de área total desse prisma.

Resolução

Na figura, temos:

r : medida de comprimento da aresta lateral, que é 6 cm.

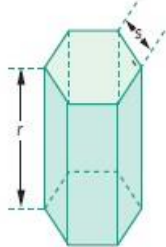
s : medida de comprimento da aresta da base, que é 3 cm.

Assim:

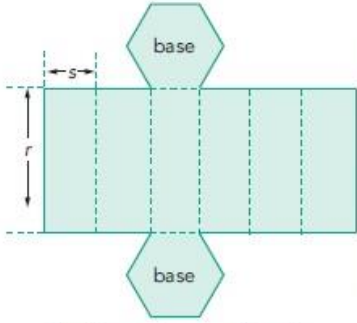
Medida de área lateral: $A_l = 6(r \cdot s) = 6(6 \cdot 3) = 108$

Portanto, $A_l = 108 \text{ cm}^2$.


Uma região limitada por um hexágono regular pode ser decomposta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros.



Prisma hexagonal regular.



Planificação da superfície de um prisma hexagonal regular.



Medida de área da base: $A_b = 6 \cdot \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$

Portanto, $A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

Medida de área total do prisma:

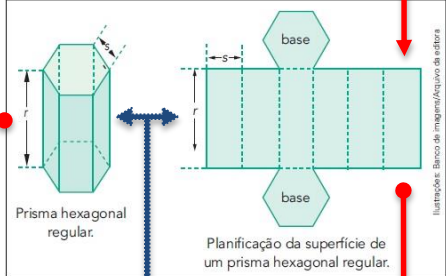
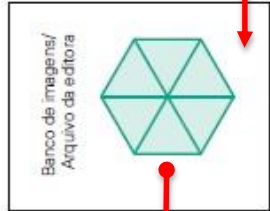
$$A_T = A_l + 2A_b = 108 + 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_T = (108 + 27\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

Como $\sqrt{3} \approx 1,7$, temos $A_T \approx 153,9 \text{ cm}^2$.

Fonte: DANTE (2020, p. 86)

O exemplo resolvido, disposto no Quadro 3, é a primeira atividade resolvida para o conteúdo de Prisma. O enunciado propõe o cálculo da área total de um prisma hexagonal regular, e é dado em registro na língua natural.

Quadro 3: Tipos de Registros e Transformações do exemplo resolvido 2 do LD1.

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural Em um prisma hexagonal regular, o comprimento da aresta da base mede 3 cm e o comprimento da aresta lateral mede 6 cm. Calcule a medida de área total desse prisma.	
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.		Registro Figurado 
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico Na figura, temos: r: medida de comprimento da aresta lateral, que é 6 cm. s: medida de comprimento da aresta da base, que é 3 cm. $A_l = 6(r \cdot s) = 6(6 \cdot 3) = 108$ $A_l = 108 \text{ cm}^2.$	
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural Uma região limitada por um hexágono regular pode ser decomposta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros.	Registro Figurado 
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico $A_b = 6 \cdot \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ $A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$	
	Registro Simbólico $A_T = A_l + A_b = 108 + 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow A_T = (108 + 27\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ Como $\sqrt{3} \approx 1,7$, $A_T = 153,9 \text{ cm}^2$	

Neste exemplo, foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: no enunciado, o registro multifuncional, a representação discursiva apresenta o objeto matemático mediante o registro na língua materna. Já no desenvolvimento de sua resolução, o registro multifuncional, na representação não discursiva, apresenta o objeto matemático mediante o registro figural, para auxiliar o desenvolvimento da resolução e, como registro monofuncional, os registros simbólicos (numérico e algébrico) para a conclusão da resolução do exercício.

Em relação às transformações, no exemplo resolvido, o enunciado é dado em registro na língua natural. Assim, é realizada a conversão do enunciado apresentado como registro na língua natural para representação em registro figural, sólido geométrico prisma hexagonal regular, ocorrendo um tratamento, ou seja, uma reconfiguração da sua forma tridimensional para a planificada (bidimensional). Desse modo, identifica-se o comprimento da aresta lateral “ r ” e o comprimento da aresta da base “ s ” e seus respectivos valores “6cm” e “3cm”. Dessa forma, é feita outra conversão, do registro figural para o registro simbólico.

Após a conversão, é efetuado tratamento para o cálculo da área lateral. Já para o cálculo das bases hexagonais, o autor utiliza-se do registro na língua natural e faz a conversão para o registro figural. Dessa forma, faz a conversão do registro figural para o registro simbólico, efetuando o tratamento interno, com o objetivo de calcular as áreas das bases. No que se refere ao cálculo, “o cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras: ele substitui novas expressões dadas no mesmo registro de escritura de números” (DUVAL, 2009, p. 57). Assim, a área total do prisma hexagonal regular é a soma da área lateral com a área das bases.

Exemplo resolvido 2:

O exemplo resolvido 2 trata do cálculo de área da superfície total de um prisma reto de base retangular. Para o início da resolução, são apresentadas as principais características do sólido, na sua forma tridimensional e sua planificação. É importante salientar que o sólido apresentado ao lado do enunciado é distinto do sólido apresentado na resolução para determinar a expressão da área da superfície total. Assim, é preciso relacionar as medidas das arestas a , b e c , que correspondem a largura, comprimento e altura, à sua forma planificada para se obter a expressão, para se calcular quantos metros quadrados serão necessários. Como o cálculo é

determinado em metros quadrados, e as dimensões da caixa estão em centímetro, relembra-se como realizar conversões de metro para centímetro e metro quadrado para centímetro quadrado.

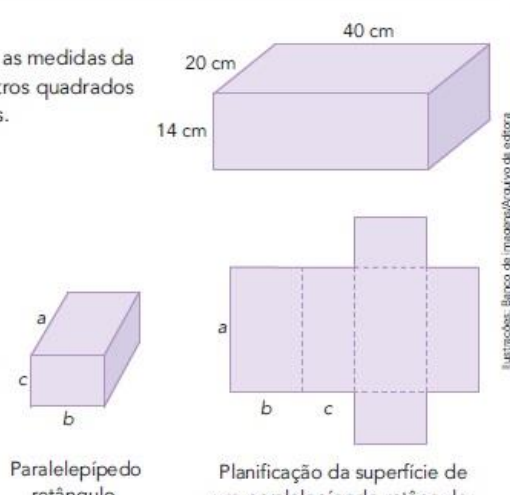
Figura 9: Atividades resolvidas nº 3

3. Uma indústria precisa fabricar 10000 caixas de sabão com as medidas da figura ao lado. Desprezando as abas, calcule quantos metros quadrados de papelão serão necessários para fabricar todas as caixas.

Resolução
 A caixa tem formato de um paralelepípedo retângulo:
 Todo paralelepípedo retângulo é formado por 6 faces:

- duas retangulares de medidas de comprimento a e b ;
- duas retangulares de medidas de comprimento a e c ;
- duas retangulares de medidas de comprimento b e c .

Assim, temos que a medida de área total é $A_T = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$.
 Nesse caso,
 $A_T = 2(40 \cdot 20 + 40 \cdot 14 + 20 \cdot 14) =$
 $= 2(800 + 560 + 280) = 3280$
 $A_T = 3280 \text{ cm}^2$
 Como são 10000 caixas, temos:
 $A = 3280 \cdot 10000 = 32800000$
 $32800000 \text{ cm}^2 = 3280 \text{ m}^2$
 Portanto, serão necessários pelo menos 3280 m^2 de papelão.



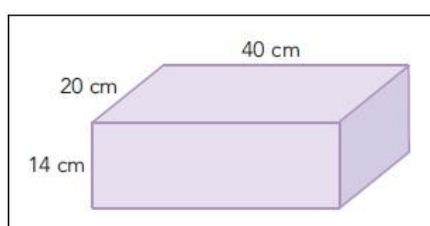
Paralelepípedo retângulo. Planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo.

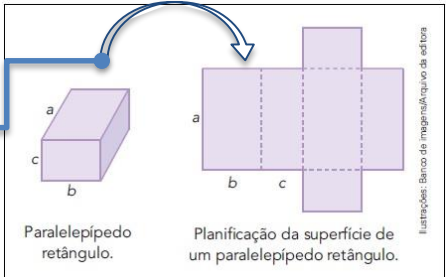
Fique atento
 Se $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, então $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$.

Fonte: DANTE (2020, p. 86)

O Quadro 4 apresenta os tipos de registros e transformações do exemplo resolvido. Os seguintes registros de representação semiótica foram identificados no exemplo 2: registro na língua natural, registro figural e registro simbólico (numérico e algébrico).

Quadro 4: Tipos de Registros e Transformações do exemplo resolvido 3 do LD1.

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.		Registro Figural 
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA

<p>REGISTROS MULTIFUNCAIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>		<p>Registro Figural</p>  <p>Paralelepípedo retângulo. Planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo.</p> <p><small>Ilustrações: Banco de Imagem/Arquivo da editora.</small></p>
<p>REGISTROS MONOFUNCAIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.</p> <p>Tratamento RS</p>	<p>Registro Simbólico</p> <p>RF</p> $A_T = 2ab + 2ac + 2bc =$ $= 2(ab + ac + bc).$ <p>Conversão RF → RS</p> $A_T = 2(40 \cdot 20 + 40 \cdot 14 + 20 \cdot 14) =$ $= 2(800 + 560 + 280) = 3\ 280$ $A_T = 3\ 280\ cm^2$ $A = 3\ 280 \cdot 10\ 000 = 32\ 800\ 000$ $32\ 800\ 000\ cm^2 = 3280\ m^2$ <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $1\ m = 100\ cm$ $1\ m^2 = 10000\ cm^2$ </div>	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de DANTE (2020, p. 86)

O exercício resolvido 2 é composto pelo enunciado apresentando uma situação-problema, e, ao lado, um prisma que é um tipo de registro figural. O prisma em questão é caracterizado como um prisma reto de base retangular. Para início da resolução, o autor não utiliza o registro figural apresentado ao lado do enunciado, mas adota outro registro figural, de modo que é realizado um tratamento de um prisma reto de base retangular para a sua planificação, de forma genérica, com o objetivo de determinar a expressão correspondente à área total do prisma, de forma que, as medidas das arestas a , b e c correspondem aos valores 40, 20 e 14, respectivamente, para auxiliar o desenvolvimento da resolução, no entanto, cabe destacar, que o autor, na resolução do exemplo, não relaciona as medidas das arestas a , b e c , com seus respectivos valores 40, 20 e 14, assim, possivelmente poderá dificultar o entendimento para a resolução do exemplo.

De acordo com Duval (2009), a representação intermediária, no caso o registro figural, é utilizado para auxiliar o aluno na resolução do exercício; no entanto, os registros figurais que o autor utiliza para generalizar e desenvolver a expressão para o cálculo total da superfície do prisma não estão relacionados com o registro figural que complementa o enunciado.

Para a resolução, é realizada a conversão do registro figural para o registro simbólico e, na sequência, utilizando como registro simbólico, a expressão que representa a área total do

prisma é realizado o tratamento interno, que substitui o registro algébrico pelo registro numérico para efetuar o cálculo da área total da caixa e o cálculo da quantidade total de papelão que deverão utilizar para construir as 10.000 caixas.

Exemplo resolvido 3:

O exemplo resolvido 3 apresenta um problema que relaciona o volume do depósito com a vazão da torneira. Em sua resolução, espera-se que seja calculado o intervalo de tempo necessário para a torneira encher completamente o depósito, levando em consideração que a vazão seja constante. Para isso, o autor propõe um planejamento para a resolução do exercício, calculando o volume total do depósito e o volume da parte do depósito que já está preenchida. Para calcular o intervalo de tempo para preencher o restante do depósito, calculou o volume que falta ser preenchido.

Assim, para ser calculado o intervalo de tempo utiliza-se a regra de três, relacionando o volume preenchido com tempo correspondente, e o volume que falta ser preenchido com “x”, que corresponde ao tempo a ser calculado. O autor sugere, no item 5, que seja calculado o custo para se construir o depósito, e propõe uma discussão a respeito da importância do correto armazenamento de produtos consumíveis e as consequências do armazenamento incorreto, bem como o processo de produção transporte e venda desses produtos.

Figura 10: Atividades resolvidas nº 4

Atividades resolvidas

Não escreva no livro.

Resolvida passo a passo

4. (Enem) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo. Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8. b) 10. c) 16. d) 18. e) 24.

Resolução

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
É dado o formato do depósito de armazenamento de leite, composto de duas partes cúbicas, com a parte maior apresentando uma aresta com medida de comprimento igual ao dobro da medida de comprimento da aresta da parte menor. Além disso, é informada a medida de intervalo de tempo que a torneira leva para encher certa parte do depósito.

b) O que se pede?
Pede-se a medida de intervalo de tempo necessária para a torneira encher completamente o depósito, considerando que a vazão seja constante.

2. Planejando a solução

Uma das maneiras de solucionar o problema é calcular a medida de volume do depósito, considerando que a medida de comprimento da aresta da parte cúbica maior seja igual a $2a$ e a da parte cúbica menor, a . Calculada a medida de volume do depósito, comparamos o valor obtido com a medida de volume da parte do depósito que já está preenchida, e assim, por regra de três simples, encontraremos a medida de intervalo

de tempo necessária para preencher o restante do depósito.

3. Executando o que foi planejado

- Medida de volume do depósito de armazenamento:
 $V_T = (2a)^3 + (a)^3 = 8a^3 + a^3 = 9a^3$
- Medida de volume da parte do depósito que já está preenchida:
 $V_C = 2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3$
- Cálculo da medida de intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito:
Sendo V_p a medida de volume do restante do depósito que precisa ser preenchido:

$$V_p = V_T - V_C$$

$$V_p = 9a^3 - 4a^3 = 5a^3$$

$4a^3$		8 min
$5a^3$		x min

$$x = \frac{40a^3}{4a^3} \Rightarrow x = 10; x = 10 \text{ min}$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b. 5a) R\$ 10.640,00.**

5. Ampliando o problema Aproximadamente 66,7 L/s.

a) Considere que a seja igual a 2 metros e que o valor do metro quadrado do material de que é feito o depósito é de R\$ 95,00. Quanto o fazendeiro gastou para construir o depósito? E qual será a vazão da torneira que o preenche, em litros/segundo (L/s)?

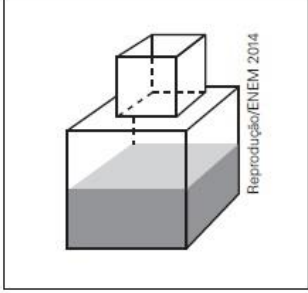
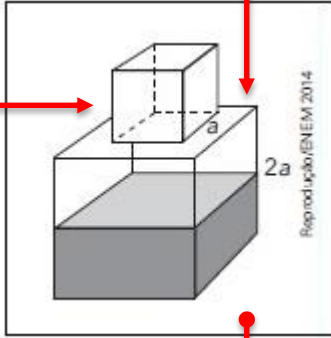
b) Troque ideias com os colegas sobre o armazenamento dos produtos que consumimos diariamente e sobre o processo de produção, transporte e venda. Discutam sobre a importância do correto armazenamento de produtos consumíveis e sobre as consequências do armazenamento incorreto.

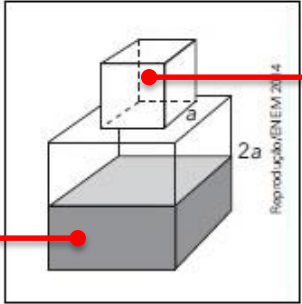
Resposta pessoal.

Fonte: DANTE (2020, p. 89)

O exemplo resolvido apresentado no Quadro 5 apresenta tipos de registros distintos, sendo eles registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 5: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 4 do LD1.

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>4. (Enem) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo. Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito? a) 8. b) 10. c) 16. d) 18 e) 24.</p>	<p>Registro Figural</p> 
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>1. Lendo e compreendendo</p> <p>“..duas partes cúbicas, com a parte maior apresentando uma aresta com medida de comprimento igual ao dobro da medida de comprimento da aresta da parte menor.”</p> <p><i>Conversões R → R</i></p> <p>2. Planejando a solução</p> <p>“..calcular a medida do volume do depósito, considerando que a medida de comprimento da aresta da parte cúbica maior seja igual a $2a$ e a parte cúbica menor, a. ...”</p> <p><i>Conversões RF → RS</i></p>	<p>Registro Figural</p> 
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	<p>Registro Simbólico</p> $V_T = (2a)^3 + (a)^3 = 8a^3 + a^3 = 9a^3$	

	$V_c = 2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3$							
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algorítmizáveis. <small>Tratamento RS</small>	Registro na Língua Natural "... Calculada a medida de volume do depósito, comparamos o valor obtido com a medida de volume da parte do depósito que já está preenchida, e assim, por regra de três simples , encontramos a medida de intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito."	Registro Figural 						
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos. <small>Tratamento RS</small>	Registro Simbólico $V_p = V_t - V_c$ $V_p = 9a^3 - 4a^3 = 5a^3$ <hr/> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">$4a^3$</td> <td style="text-align: center;">_____</td> <td style="text-align: center;">8 min</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$5a^3$</td> <td style="text-align: center;">_____</td> <td style="text-align: center;">x min</td> </tr> </table> $x = \frac{40a^3}{4a^3} \Rightarrow x = 10; x = 10 \text{ min}$	$4a^3$	_____	8 min	$5a^3$	_____	x min	
$4a^3$	_____	8 min						
$5a^3$	_____	x min						

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de DANTE (2020, p. 89)

No exemplo resolvido 4 foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: registro na língua natural, registro figural e registro simbólico (numérico e algébrico). No enunciado, o registro na língua natural é complementado com o registro figural, tornando possível identificar que ocorre uma transformação do tipo conversão entre o registro na língua natural e o registro figural. Na resolução, o registro multifuncional (representação discursiva) apresenta o registro na língua natural como planejamento, ou seja, a orientação “passo a passo” para a resolução do exercício proposto.

No que se refere às transformações, as orientações referentes ao enunciado do exercício para resolução caracterizam-se como tratamento do registro da língua natural entre o enunciado e a resolução, pois, no “item 1.”, “Lendo e compreendendo”, “parte a)”, são fornecidos elementos como: “*duas partes cúbicas, com a parte maior apresentando uma aresta com medida de comprimento igual ao dobro da medida de comprimento da aresta da parte menor*

[...], de modo que também, é possível identificar transformação do tipo conversão do registro da língua natural para o registro figural. No “item 2.”, “Planejando a solução”, são fornecidos elementos como: “*a medida de comprimento da aresta da parte cúbica maior seja igual a $2a$ e a parte cúbica menor, a* ”. Deste modo identificamos a transformação do registro na língua natural para o registro simbólico. Ainda, no tocante à resolução, “Planejando a solução”, identificamos o registro na língua natural, de maneira a orientar um procedimento para efetuar o cálculo “*do intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito*”. Dessa forma, identificamos a transformação do tipo conversão do registro da língua natural para o registro simbólico (algébrico e numérico). Dos registros simbólicos utilizados para o cálculo do volume total (V_T), volume da parte que já está preenchida (V_C), o volume do restante do depósito que precisa ser preenchida (V_P) e a medida do intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito (x), também são realizadas transformações do tipo tratamento. Ainda, no registro multifuncional, é realizada uma transformação do tipo conversão, que ocorre do registro da língua natural para o registro figural. Isso porque é possível realizar a leitura do enunciado e identificar em sua resolução o registro figural. Também, são realizadas conversões do registro figural para o registro simbólico, obtendo o volume total do depósito e, na próxima conversão, é calculado o volume já preenchido da parte do depósito. Assim, para se calcular a medida do volume do restante do depósito que precisa ser preenchido, realiza-se uma transformação do tipo tratamento, que é a diferença entre a medida do volume total e a medida do volume da parte do depósito que já está preenchida. Assim, após as duas conversões, são realizados tratamentos nos registros simbólicos. Como citado acima, para o cálculo da medida de intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito, efetuou-se o cálculo de diferença entre os dois volumes e realizou-se a regra de três, relacionando os respectivos valores, caracterizando assim um tratamento.

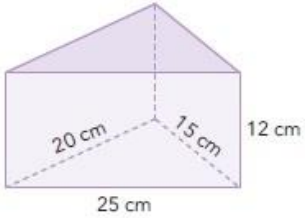
Exemplo resolvido 4:

É proposto, no exemplo resolvido da figura 11, que se calcule o volume de um prisma reto, cuja base é um triângulo retângulo. Para a sua resolução, calcula-se primeiramente a área da base, para, em seguida, calcular a medida do volume que é dada por $V = A_b \cdot h$.

Figura 11: Atividades resolvidas nº 5

Atividades resolvidas

5. Calcule a medida de volume do prisma reto indicado na figura abaixo, cuja base é um triângulo retângulo.



Resolução

A base desse prisma é uma região limitada por um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos medem 15 cm e 20 cm. Então:

$$A_b = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

A medida de comprimento da altura do prisma é de 12 cm. Assim, a medida de volume é dada por:

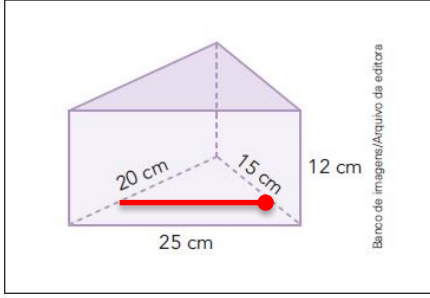
$$V = A_b \cdot h = 150 \cdot 12 = 1800$$

Logo, a medida de volume do prisma é de 1800 cm³.

Fonte: DANTE (2020, p. 92)

No Quadro 6, realiza-se a análise do exemplo resolvido, identificamos os possíveis tipos de registros e transformações apresentados.

Quadro 6: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 5 do LD1.

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
<p>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.</p> <p>Tratamento RS</p>	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>Calcule a medida de volume do prisma reto indicado na figura abaixo, cuja base é um triângulo retângulo.</p> <p>Conversão RF → R</p>	<p>Registro Figural</p> 
RESOLUÇÃO		
<p>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>A base desse prisma é uma região limitada por um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos medem 15 cm e 20 cm.</p>	
<p>REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Registro Simbólico</p> $A_b = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$	

REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural A medida do comprimento da altura é de 12 <i>cm</i> .	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	$V = A_b \cdot h = 150 \cdot 12 = 1\,800$ Conversão <i>RF → R</i>	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de DANTE (2020, p. 92)

*Conversão
RF → RS*

Tratamento

RS

Na resolução desse exemplo, foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: no registro multifuncional, a representação discursiva apresenta em seu enunciado o objeto matemático Prisma, o registro na língua natural e fazendo parte do enunciado a representação não discursiva apresentando o objeto matemático por meio do registro figural. Em sua resolução, como registros multifuncionais, as representações discursivas apresentam os registros na língua natural, informações do tipo: “A base desse prisma é uma região limitada por um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos medem 15 *cm* e 20 *cm*” e também, “A medida do comprimento da altura do prisma é de 12*cm*. ...” possibilitando o cálculo da medida da área da base do prisma e o seu volume respectivamente. Como registros monofuncionais, a representação discursiva apresenta o objeto matemático proposto por meio do registro simbólico (numérico e algébrico).

No que se refere às transformações, identificamos, em sua resolução, que ocorre inicialmente uma transformação do tipo conversão. Observando a base que é o triângulo retângulo, é possível verificar uma conversão do registro figural, para o registro na língua natural e para o registro simbólico. Assim, é efetuado o cálculo da medida da área da base, de modo que ocorre outra transformação do tipo tratamento no registro simbólico. Para o cálculo do volume do prisma reto, cuja base é um triângulo retângulo, foi identificado a sua altura, para então ser realizado o cálculo da medida do volume, assim, houve uma conversão do registro figural para o registro simbólico, sendo realizado tratamento no registro simbólico.

Exemplo resolvido 5:

O exemplo resolvido 5, apresentado na figura 12, é referente ao cálculo da medida do volume de uma caixa, cuja forma é um prisma regular hexagonal. Para sua resolução, primeiramente calcula-se a área da base, de modo que, o cálculo da medida do volume é dado por $V = A_b \cdot h$.

Figura 12: Atividades resolvidas nº 6

6. Um engenheiro quer encher de areia uma caixa igual à representada na figura à esquerda, cuja base é uma região limitada por um hexágono regular. Qual é a medida de volume dessa caixa?

Resolução

A base dessa caixa é uma região limitada por um hexágono regular cujo comprimento do lado mede 10 cm. Sabemos que uma região limitada por um hexágono regular pode ser decomposta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros. Logo, a medida de área da base dessa caixa é dada por:

$$A_b = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25 \sqrt{3} = 150 \sqrt{3}$$

Portanto, $A_b = 150 \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A medida de volume do prisma é dada por:

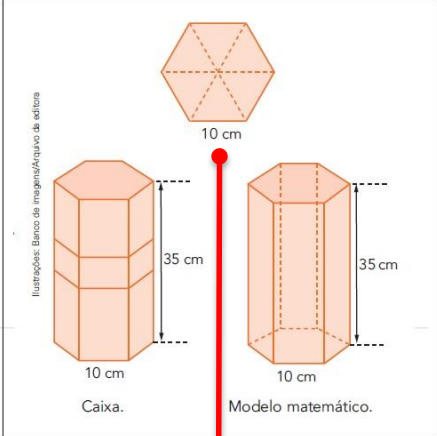
$$V = A_b \cdot h = 150 \sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 35 \text{ cm} = 5250 \sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow V \approx 9090 \text{ cm}^3$$

O volume dessa caixa mede, aproximadamente, 9090 cm³ ou, aproximadamente, 9 L.

Fonte: DANTE (2020, p. 92)

O Quadro 7 apresenta os tipos de registros distintos, sendo eles, registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 7: Transformações – tratamento e conversão no exemplo resolvido 6 do LD1.

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>Um engenheiro quer encher de areia uma caixa igual à representada na figura à esquerda, cuja base é uma região limitada por uma hexágono regular. Qual é a medida de volume dessa caixa?</p>	<p>Registro Figural</p> 
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>A base dessa caixa é uma região limitada por um hexágono regular cujo comprimento do lado med 10 cm 10 cm. Sabemos que uma região limitada por uma hexágono regular pode ser composta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros.</p>	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	<p>Registro Simbólico</p> <p>Tratamento RS</p> $A_b = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$ $A_b = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$ <hr/> $V = A_b \cdot h = 150\sqrt{3} \cdot 35 \text{ cm} = 5\,250\sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow V \simeq 9\,090 \text{ cm}^3 = 9 \text{ L.}$	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de DANTE (2020, p. 92)

Na resolução do exemplo resolvido 6 foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: no registro multifuncional, a representação discursiva apresenta em seu enunciado o objeto matemático Prisma, o registro na língua natural e, fazendo parte do enunciado, representações não discursivas apresentando o objeto matemático por meio dos registros figurais. Em sua resolução, o autor define a base da seguinte forma: “A base dessa

caixa é uma região limitada por um hexágono regular cujo comprimento do lado mede 10 cm. [...]”, assim, identificamos na resolução o registro na língua natural. Nos registros monofuncionais, por meio da representação discursiva, é identificado fórmula da área da base hexagonal $A_b = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4}$ e a fórmula do volume do prisma regular hexagonal $V = A_b \cdot h$ que representa o objeto matemático proposto por meio dos registros simbólicos (numérico e algébrico).

O enunciado na língua natural propõe o cálculo do volume de uma caixa no formato de um prisma hexagonal regular; para isso, utiliza o registro figural como auxílio, para ilustrar a caixa descrita no enunciado. A base hexagonal é apresentada como registro figural; assim, é realizada conversão do registro figural para o registro na língua natural, em seguida é realizado uma conversão do registro na língua natural para o registro simbólico, sendo efetuado um tratamento, para se obter a área da base. Em seguida, ocorre uma segunda conversão do registro figural para o registro simbólico e, na sequência, é efetuado tratamento para o cálculo do volume.

3.2.2 Análise dos tipos de registros nos exemplos resolvidos do LD2

A análise do LD2 foi feita no Capítulo 3: “Poliedros”, que contempla a subseção intitulada *Prisma*. O conteúdo de Prisma é desenvolvido em 13 páginas, que são separadas em definições dos elementos referentes ao Prisma, assim como tarefas resolvidas (exemplos resolvidos) e exercícios. No que se refere ao conteúdo de Prisma, tanto as explicações das definições como as atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e os exercícios são separados em tópicos no decorrer do conteúdo: *Prisma*, *Área da superfície de um prisma*, *Volume de um prisma* e *Valores em ação*.

Após a explicação dos tópicos *Área da superfície de um prisma* e *Volume de um prisma* são apresentadas Tarefas resolvidas (exemplos resolvidos) e Tarefas (exercícios). Vale destacar que as Tarefas resolvidas (exemplos resolvidos) do conteúdo de Prisma iniciam no exercício de número cinco (R5), de modo que os exercícios anteriores estão relacionados com o conteúdo inicial do Capítulo 3: Poliedros. No que se refere às Tarefas resolvidas (exemplos resolvidos) foram apresentadas cinco Tarefas resolvidas no total, de forma que uma se refere ao cálculo de área, e as outras quatro, ao cálculo de volume. Desse modo, no que diz respeito às análises dos exemplos resolvidos, realizamos as análises identificando os diferentes tipos de registros de representação e as transformações – tratamento e conversão apresentados.

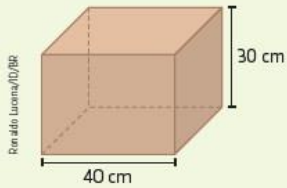
Exemplo resolvido 1:

No exemplo resolvido, o autor propõe o custo do material para serem confeccionadas 300 caixas; para isso, é necessário calcular a área total da caixa, que tem o formato de um prisma retangular regular.

Figura 13: Tarefa resolvida R5

Tarefa resolvida

R5. Calcule o custo de material necessário para a confecção de 300 caixas com formato de bloco retangular regular com tampa, conforme modelo abaixo, desconsiderando desperdícios. Considere que o valor do material é R\$ 3,60 o metro quadrado.



40 cm 30 cm

Resolução

Para determinar a quantidade de material necessária para a confecção dessas caixas, calcularemos a área da superfície de cada caixa.

Como essa caixa possui o formato de um bloco retangular regular, calculamos sua área total adicionando as áreas dos quatro retângulos que formam as laterais da caixa com as áreas dos dois quadrados de suas bases.

- Área lateral, em cm^2 : $A_l = 4(40 \cdot 30) = 4800$
- Área da base, em cm^2 : $A_b = 40^2 = 1600$
- Área total, em cm^2 : $A_t = A_l + 2A_b = 4800 + 2 \cdot 1600 = 8000$

Como o valor de um metro quadrado de material é R\$ 3,60, convertamos os 8000 cm^2 para metros quadrados:

$$8000 \cdot 0,0001 = 0,8$$

Para o custo das 300 caixas, calculamos:

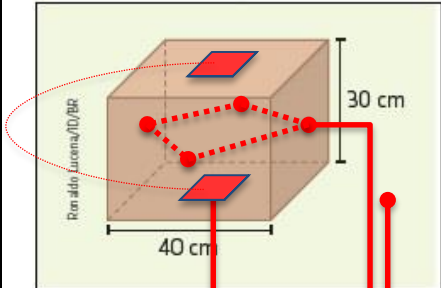
$$300 \cdot 0,8 \cdot 3,60 = 864$$

Logo, o custo de material necessário para a confecção das 300 caixas é R\$ 864,00.

Fonte: CHAVANTE (2020, p. 88)

O exemplo resolvido no Quadro 8 apresenta os tipos de registros distintos, sendo eles registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 8: Transformações – tratamento e conversão no exemplo resolvido 5 do LD2.

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.		Registro Figural 
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural “Calculamos sua área total adicionando as áreas dos quatro retângulos que formam as laterais da caixa com as áreas dos <u>dois</u> quadrados de suas bases.”	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico $A_l = 4(40 \cdot 30) = 4800$	
Tratamento RS	Registro Simbólico $A_b = 40^2 = 1600$	
	Registro Simbólico $A_t = A_l + 2A_b = 4800 + 2 \cdot 1600 = 8000$	
	Registro Simbólico $8000 \cdot 0,0001 = 0,8$	“...convertemos os 8000 cm ² para metros quadrados:”
	Registro Simbólico $300 \cdot 0,8 \cdot 3,60 = 864$ R\$ 864,00	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de CHAVANTE (2020, p. 88)

Neste exemplo, o enunciado é complementado, pela figura, que é um bloco retangular com tampa, caracterizado como registro multifuncional, representação não discursiva, sendo o objeto matemático Prisma um registro figural. No enunciado não foi identificado o registro na língua natural, pois, o enunciado e as orientações para resolução do exemplo não caracterizam como representação semiótica, por não satisfazer as três características descritas por Duval

(2003), citadas anteriormente. Já, na resolução, foi identificado o registro na língua natural. Ainda, na resolução, nos registros monofuncionais, por meio da representação discursiva, é apresentado o objeto matemático proposto por meio do registro simbólico (numérico e algébrico).

Na resolução do exemplo, para ser efetuado o cálculo total da área, ocorre transformações do tipo conversão do registro figural para o registro simbólico. Assim, são realizados os cálculos das áreas laterais e a área da base; esses cálculos são efetuados separadamente, utilizando o registro simbólico e para isso, ocorreram transformações do tipo tratamento interno. Desta forma, utilizando a fórmula $A_t = A_l + 2A_b$, foi possível efetuar o cálculo da área total do objeto matemático prisma. Na sequência, por meio do registro simbólico é efetuado o tratamento interno, que acontece uma mudança de centímetro quadrado (cm^2), para metro quadrado (m^2), possibilitando o cálculo do custo de material necessário para a confecção das caixas, conforme apresentado no enunciado.

Exemplo resolvido 2:

O exemplo proposto é referente a um problema em que o autor apresenta o cálculo do número máximo de peças que podem ser lavadas simultaneamente no recipiente, de modo que a água do recipiente não transborde. Para isso, o autor, propõe a resolução “Passo a passo”, realizando a resolução do problema seguindo algumas etapas, haja vista que tenciona estimular o desenvolvimento de um método para resolver o problema, estabelecendo um padrão para ter soluções em problemas semelhantes.

Figura 14: Problema – Passo a passo

Passo a passo

Veja uma sugestão de como podemos resolver um problema seguindo algumas etapas.

Problema

Uma fábrica de peças produz cubos de metal cujo volume de cada um é 8 cm^3 . Em determinada fase da produção, as peças são lavadas com água em um recipiente acrílico sem tampa em forma de cubo, cuja área da superfície interna é igual a 180 cm^2 . Sabendo que a altura do nível de água corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura do recipiente, a quantidade máxima de peças que podem ser lavadas ao mesmo tempo sem fazer a água do recipiente transbordar é:

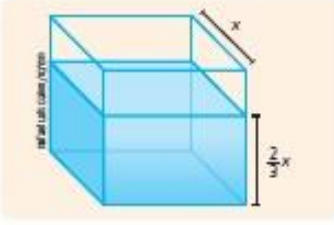
a) 2 b) 5 c) 11 d) 10 e) 9

Entendendo o problema

1. Determinamos o que se pede no problema.

Identificar a maior quantidade de peças possível que podem ser lavadas ao mesmo tempo sem que a água do recipiente transborde.
2. Identificamos as informações e as condições apresentadas para resolver o problema.

Cada peça tem o formato de um cubo com volume igual a 8 cm^3 . O recipiente tem formato de cubo, não possui tampa e tem área da superfície interna igual a 180 cm^2 . O nível de água no recipiente corresponde a $\frac{2}{3}$ de sua altura.
3. Se possível, desenhamos um esquema para representar a situação proposta.



Construindo e executando um plano

4. Com base nos conhecimentos prévios, avaliamos se já resolvemos um problema parecido e se é possível utilizá-lo para obter a solução do problema apresentado. Além disso, analisamos se há algum recurso ou ferramenta disponível para nos auxiliar no processo de resolução.

Pode-se fazer o uso de uma calculadora para agilizar os cálculos.
5. Elaboramos e executamos um plano.

Fonte: CHAVANTE (2020, p. 92)

Figura 15: Problema – Passo a passo

Passo 1: Utilizando as informações apresentadas no problema, determinamos o comprimento da aresta do recipiente.

Seja x o comprimento, em centímetros, de cada aresta do recipiente. Sabendo que o recipiente não possui tampa, então:

$$\begin{array}{l} \text{Área}_{\text{recipiente}} = \underbrace{5}_{\text{quantidade de faces do recipiente}} \cdot \underbrace{x^2}_{\text{área de cada face do recipiente}} \\ 180 = 5 \cdot x^2 \\ x^2 = 36 \\ x = 6 \end{array}$$

Assim, cada aresta do recipiente mede 6 cm.

Consequentemente: altura_{água} = $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Logo, a altura do nível da água é 4 cm.

Passo 2: Agora, calculamos o volume da parte do recipiente que não possui água:

$$\begin{aligned} \text{Volume}_{\text{sem água}} &= \text{Volume}_{\text{recipiente}} - \text{Volume}_{\text{água}} \\ \text{Volume}_{\text{sem água}} &= 6^3 - 6 \cdot 6 \cdot 4 \\ \text{Volume}_{\text{sem água}} &= 216 - 144 \\ \text{Volume}_{\text{sem água}} &= 72 \end{aligned}$$

Assim, para que a água não transborde, deve ser adicionado uma quantidade de peças cuja soma de seus volumes seja, no máximo, 72 cm^3 .

Passo 3: Finalmente, sabendo que cada peça tem volume de 8 cm^3 , fazemos:

$$\text{Quantidade}_{\text{máx}} = \frac{\overbrace{72}^{\text{volume do recipiente que não contém água}}}{\underbrace{8}_{\text{volume de cada peça}}} = 9$$

Portanto, a quantidade máxima de peças que podem ser lavadas ao mesmo tempo sem que a água transborde é 9 peças. Assim, a alternativa correta é e.

- Volume_{peças} = $2 \cdot 8 = 16 < 72$

Logo, a alternativa a é uma opção válida de resposta, pois a água não vai transbordar.

- Volume_{peças} = $5 \cdot 8 = 40 < 72$

Assim, a alternativa b é uma opção válida de resposta, pois a água não vai transbordar.

- Volume_{peças} = $11 \cdot 8 = 88 > 72$

A alternativa c não é uma opção válida de resposta, pois a água vai transbordar.

- Volume_{peças} = $10 \cdot 8 = 80 > 72$

A alternativa d não é uma opção válida de resposta, pois a água vai transbordar.

- Volume_{peças} = $9 \cdot 8 = 72$

A alternativa e é uma opção válida de resposta, pois a água não vai transbordar.

Como estamos querendo a quantidade máxima de peças que possam ser lavadas e que a água não vá transbordar, a alternativa e é a correta, pois o volume total de 9 peças é igual ao volume do recipiente que não possui água.

Se, nesse momento, for verificado que a solução do problema está incorreta, voltem ao início e sigam os passos indicados no esquema a seguir.



7. Caso a solução esteja correta, refletimos sobre todo o processo e as estratégias adotadas, a fim de compartilhar com os colegas e o professor. Reservem um momento para essa conversa.

Avaliando o resultado

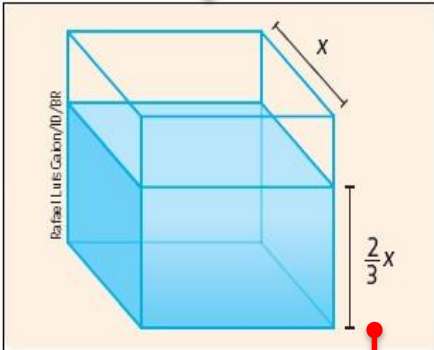
6. Nessa etapa, analisamos se é possível verificar a solução do problema e escolhemos uma estratégia para isso.

Sabendo que o volume do recipiente que não possui água é igual a 72 cm^3 , podemos verificar, entre as alternativas apresentadas, qual é a verdadeira:

Agora é com vocês!

Conforme as orientações do professor elaborem e executem um plano, diferente do exemplo apresentado, para solucionar o mesmo problema proposto nesta seção. Retomem todas as etapas, a fim de se familiarizar com o passo a passo.

Quadro 9: Transformações – tratamento e conversão no exemplo resolvido – Passo a passo do LD2

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>Uma fábrica de peças produz cubos de metal cujo volume de cada um é 8 cm^3. Em determinada fase da produção, as peças são lavadas com água em um recipiente acrílico sem tampa em forma de cubo, cuja área da superfície interna é igual a 180 cm^2. Sabendo que a altura do nível de água corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura do recipiente, a quantidade máxima de peças que podem ser lavadas ao mesmo tempo sem fazer a água do recipiente transbordar é:</p>	<p>Registro Figural</p> 
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>(Obs.: Entendendo o problema. Item 2.)</p> <p>Cada peça tem o formato de um cubo com volume igual a 8 cm^3. [...]</p>	
	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>(Obs.: Entendendo o problema. Item 2.)</p> <p>[...] O recipiente tem formato de cubo, não possui tampa e tem área da superfície interna igual a 180 cm^2. O nível do recipiente corresponde a $\frac{2}{3}$ de sua área.</p> <p style="text-align: center;">Conversão RI → RS</p>	
	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>(Obs.: contribuindo e executando um plano. Passo 1:)</p> <p style="text-align: center;">Tratamento</p> <p>[...] Seja x o comprimento, em centímetros, de cada aresta do recipiente. [...]</p>	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	<p>Registro Simbólico</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p> $\text{Área}_{\text{recipiente}} = 5 \cdot \widehat{x^2}$ <small>área de cada face do recipiente</small> <small>quantidade de faces do recipiente</small> </p> <p style="text-align: right;"> $180 = 5 \cdot x^2$ $x^2 = 36$ $x = 6$ </p> <p style="text-align: center;">Conversão RF → RS</p> </div>	
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os	Registro na Língua Natural	

tratamentos não são algoritmizáveis.	(Obs.: contribuindo e executando um plano. Passo 1:) [...], cada aresta do recipiente mede 6 <i>cm</i> .	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico Consequentemente: $A_{\text{água}} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$	
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural (Obs.: contribuindo e executando um plano. Passo 1:) Logo, a altura do nível da, água é 4 <i>cm</i> .	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico Passo 2: Agora, calculamos o volume da parte do recipiente que não possui água: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\begin{aligned} \text{Volume}_{\text{sem água}} &= \text{Volume}_{\text{recipiente}} - \text{Volume}_{\text{água}} \\ \text{Volume}_{\text{sem água}} &= 6^3 - 6 \cdot 6 \cdot 4 \\ \text{Volume}_{\text{sem água}} &= 216 - 144 \\ \text{Volume}_{\text{sem água}} &= 72 \end{aligned}$ </div>	<p style="color: red; font-weight: bold;">Conversão RF → RS</p>
Tratamento RS	Registro Simbólico Passo 3: Finalmente, sabendo que cada peça tem volume de 8 <i>cm</i> ³ , fazemos: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p style="text-align: center;">volume do recipiente que não contém água</p> $\text{Quantidade}_{\text{máx}} = \frac{\overbrace{72}}{\underbrace{8}_{\text{volume de cada peça}}} = 9$ </div>	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de CHAVANTE (2020, p. 93)

No exemplo resolvido Passo a passo, em seu enunciado e na resolução que propõe o livro didático foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: no registro multifuncional, a representação discursiva apresenta em seu enunciado o objeto matemático, o registro na língua natural e, como complemento, a representação não discursiva - registro figurado. Em sua resolução, nos registros monofuncionais, a representação discursiva é apresentada, e o objeto matemático proposto por meio dos registros simbólicos (numérico e algébrico).

No que se refere às transformações, primeiramente ocorre uma conversão do registro figurado para o registro simbólico; na sequência, realiza-se o tratamento simbólico, com o intuito

de calcular o valor de “x”, uma vez que já foi dada a área total do recipiente. Dessa forma, realizou-se um tratamento para obter o valor da altura da água no recipiente. Em seguida, houve uma conversão do registro figural para o registro simbólico. Assim, na sequência foi realizado tratamento para obter o número de peças possível.

Exemplo resolvido 3:

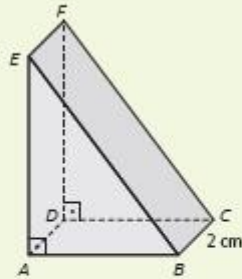
O enunciado do exemplo resolvido apresentado na Figura 15 propõe o cálculo do volume de um prisma cuja base é um triângulo retângulo. Inferindo a figura que complementa o enunciado, é possível verificar que as bases ABE e CDF respectivamente, estão em uma posição perpendicular.

Para o início da resolução, o autor propõe que as bases ABE e CDF sejam rotacionadas, de modo que, fiquem na posição horizontal. Assim, considerando a medida da área $ABCD = 6 \text{ cm}^2$ e a aresta $BC = 2 \text{ cm}$, foi possível calcular a medida da aresta $AB = 3 \text{ cm}$. Utilizando a medida da área da face $BCFE = 10 \text{ cm}^2$ e o lado $BC = 2 \text{ cm}$, obteve a medida do lado $BE = 5 \text{ cm}$. Com as medidas dos lados AB , cateto adjacente ao ângulo reto e BE , que corresponde à medida e à hipotenusa, aplicando o teorema de Pitágoras, calculou-se a medida do lado AE . Com as medidas das arestas AE e AE foi possível calcular a medida da área da face ABE , sendo possível então o cálculo do volume.

Dessa forma, verifica-se que para a resolução do exercício é necessário identificar elementos que compõem o prisma, como vértices, arestas e faces. O cálculo de área e, o teorema de Pitágoras são utilizados para determinar medidas importantes para o cálculo do volume do prisma supracitado.

Figura 16: Tarefas resolvidas R6

16. (ESPM-RJ) No sólido representado abaixo, sabe-se que as faces $ABCD$ e $BCFE$ são retângulos de áreas 6 cm^2 e 10 cm^2 , respectivamente.



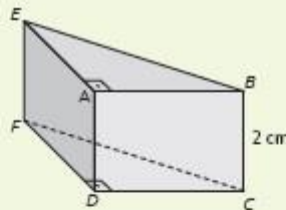
ESPM-RJ Faculdade ESPM

O volume desse sólido é de:

- a) 8 cm^3
- b) 10 cm^3
- c) 12 cm^3
- d) 16 cm^3
- e) 24 cm^3

Resolução

O sólido da figura corresponde a um prisma de base ABE e altura EF .



ESPM-RJ Faculdade ESPM

Como a área A_1 da face $ABCD$ é igual a 6 cm^2 e \overline{BC} mede 2 cm , temos:

$$A_1 = 6 \Rightarrow BC \cdot AB = 6 \Rightarrow 2 \cdot AB = 6 \Rightarrow AB = 3$$

Analogamente, para a área A_2 da face $BCFE$, temos:

$$A_2 = 10 \Rightarrow BE \cdot 2 = 10 \Rightarrow BE = 5$$

Como ABE é um triângulo retângulo em A , temos:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + AE^2 \Rightarrow AE = 4$$

Calculando o volume desse prisma, temos:

$$V = A_b \cdot h = \left(\frac{AE \cdot AB}{2} \right) \cdot EF = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 12$$

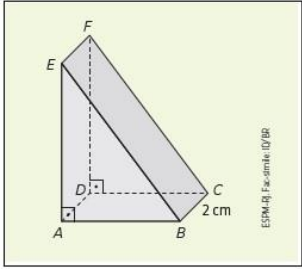
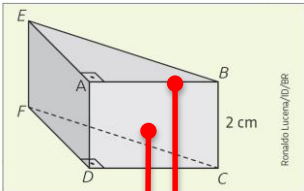
Logo o volume desse prisma é 12 cm^3 .

Portanto, a alternativa correta é a c.

Fonte: CHAVANTE (2020, p. 94)

No Quadro 10, é possível identificar os diferentes tipos de registros, no exemplo resolvido, que são: registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 10: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 6 do LD2

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCAIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural No sólido representado abaixo, sabe-se que as faces $ABCD$ e $BCFE$ são retângulos de áreas 6 cm^2 e 10 cm^2 , respectivamente. O volume desse sólido é de: a) 8 cm^3 b) 10 cm^3 c) 12 cm^3 d) 16 cm^3 e) 24 cm^3	Registro Figural 
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCAIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Tratamento RF	Registro Figural 
REGISTROS MONOFUNCAIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico Conversão RF → RS área A_1 da face $ABCD$ é igual a 6 cm^2 e \overline{BC} mede 2 cm	
Tratamento RS	Registro Simbólico $A_1 = 6 \Rightarrow BC \cdot AB \xrightarrow{\text{Conversão RF} \rightarrow \text{RS}} 2 \cdot AB = 6 \Rightarrow AB = 3$	
	Registro Simbólico área A_2 da face $BCFE$, temos: $A_2 = 10 \Rightarrow BE \cdot 2 = 10 \Rightarrow BE = 5$	
Tratamento RS	Registro Simbólico Como ABE é um triângulo retângulo em A , temos: $BE^2 = AB^2 + AE^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + AE^2 \Rightarrow AE = 4$	
	Registro Simbólico Calculando o volume desse prisma, temos: $V = A_b \cdot h = \left(\frac{AE \cdot AB}{2}\right) \cdot EF = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 12\text{ cm}^3$	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de CHAVANTE (2020, p. 94)

No exemplo resolvido 3, o enunciado no registro na língua natural e o registro figural se complementam. Na resolução proposta pelo livro didático pode-se identificar o registro multifuncional, em que a representação discursiva apresenta em seu enunciado o objeto matemático, havendo complementação entre o registro na língua natural e a representação não discursiva, o registro figural. Em sua resolução, nos registros multifuncionais, utiliza-se da representação não discursiva, registro figural; no entanto, a figura é apresentada em outra posição, tendo sido feita rotação de forma, fazendo com que as bases do prisma fiquem horizontais. No desenvolvimento da resolução, nos registros monofuncionais, a representação discursiva corresponde ao registro simbólico (numérico e algébrico).

Já as transformações têm início com uma transformação no registro figural do tipo tratamento, de modo que é realizada rotação de noventa graus para que assim as bases do prisma fiquem na horizontal. É realizada uma conversão intermediária, de modo que o registro figural A_1 , que é a face $ABCD$, é convertido para o registro simbólico correspondente a 6 cm^2 , de modo análogo ao registro figural A_2 , que é a face $BCFE$, é convertido e corresponde ao registro simbólico 10 cm^2 .

É possível identificar que ocorre mais uma conversão envolvendo a base ABE , de forma que é aplicado o teorema de Pitágoras para calcular a medida do lado AE . Assim, com a área da base $\frac{AE \cdot AB}{2}$ e a altura EF , foi possível realizar a conversão do registro figural prisma, cuja base é um triângulo retângulo para o seu volume representado no registro simbólico, de modo que ocorre um tratamento.

Exemplo resolvido 4:

A Figura 17 apresenta a resolução do exemplo 4 sugerido pelo autor do livro didático, que propõe o cálculo do volume de um prisma cuja base é um quadrado, solicitando que se esbocem os possíveis prismas. Vale ressaltar que, para a resolução desse exemplo, é necessário o conhecimento dos elementos de um quadrado, de modo a ser considerada a medida de seus lados e sua diagonal, como é referido no exemplo. Outro pré-requisito que deve ser considerado para a resolução deste exemplo é o teorema de Pitágoras, pois ele possibilita o cálculo da medida da base quadrada do prisma.

Na continuação de sua resolução, é determinado que sejam esboçados alguns exemplos de poliedros referentes às informações e cálculos realizados no exemplo. Para isso, é importante

saber que na família dos Poliedros estão contidos os prismas, sendo eles regulares ou oblíquos, conforme são sugeridos no exemplo resolvido.

Figura 17: Tarefa resolvida R7

R7. Calcule o volume de um prisma de altura 5 cm, cuja base é um quadrado de diagonal medindo $2\sqrt{2}$ cm. Em seguida, esboce alguns exemplos de poliedros para esse caso.

Resolução

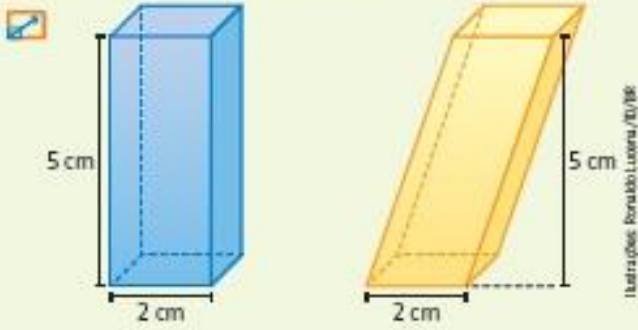
Seja ℓ a medida do lado do quadrado. Como a sua diagonal mede $2\sqrt{2}$ cm, temos:

$$(2\sqrt{2})^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow \ell = 2$$

Calculando o volume desse prisma, obtemos:

$$V = A_b \cdot h = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Logo, o volume do prisma é 20 cm^3 .
Observe dois exemplos de prismas para esse caso.

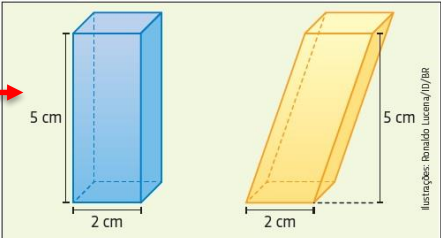


Fonte: CHAVANTE (2020, p. 94)

No Quadro 11, os tipos de registros e transformações apresentados no exemplo resolvido, são registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 11: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 7 do LD2

ENUNCIADO	
Tratamento <i>RLN</i>	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA <i>Conversão RLN → RS</i>
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural Calcule o volume de um prisma de altura 5 cm, cuja base é um quadrado de diagonal medindo $2\sqrt{2}$ cm. Em seguida, esboce alguns exemplos de poliedros para esse caso.
RESOLUÇÃO	

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico l a medida do lado do quadro. Como a sua diagonal mede $2\sqrt{2}$ cm, temos: $(2\sqrt{2})^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow l = 2$	
Tratamento REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro Simbólico $V = A_b \cdot h = 2^2 \cdot 5 = 20 \text{ cm}^3$ Conversão RLN → RS	Registro Simbólico Conversão RLN → RS
	Conversão RLN → RF	Registro Figurado 

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de CHAVANTE (2020, p. 94)

Na resolução desse exemplo 4, foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: no registro multifuncional, a representação discursiva apresenta o objeto matemático Prisma, por meio do registro na língua natural. Já em sua resolução, nos registros monofuncionais, a representação discursiva apresenta o objeto matemático proposto por meio de registros simbólicos (numérico e algébrico). Para finalizar a resolução do exercício, propõe-se que se esbocem alguns exemplos de poliedros para esse caso, o que é classificado como registros multifuncionais/representação não discursiva/registro figurado.

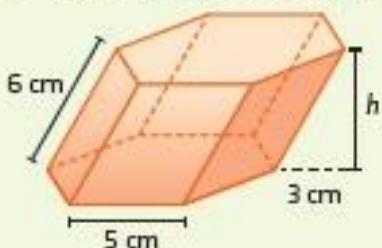
O exemplo resolvido apresenta-se como registro na língua natural. No início de sua resolução, primeiramente, ocorre um tratamento intermediário no registro da língua materna, com o objetivo de se calcular a medida da aresta da base, de modo que na sequência ocorre uma conversão entre o registro na língua natural e o registro simbólico. Assim, ao efetuar o tratamento no registro simbólico, utilizando o teorema de Pitágoras, obtém-se, então, a medida do lado da base quadrada do prisma. O volume do prisma, cuja base é quadrada, se dá pela conversão do enunciado, registro na língua natural para o registro simbólico, no qual é efetuado tratamento no registro simbólico.

Exemplo resolvido 5:

No tocante ao exemplo resolvido na Figura 18, o enunciado determina o cálculo do volume do prisma oblíquo, cuja base é hexagonal. O que se espera, em sua resolução, é obter a área de um hexágono regular de lado l , igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado l , ou seja, $A = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$. Observando o registro figural, prisma hexagonal oblíquo, é possível identificar a medida da aresta lateral e a medida da aresta da base; é também informada a distância do vértice do prisma até sua altura h . Com esses dados, que a figura fornece, é possível calcular a altura h , utilizando o teorema de Pitágoras. Calculado a área da base hexagonal regular do prisma oblíquo e sua altura, é possível calcular sua área, conforme a resolução do autor.

Figura 18: Tarefa resolvida R8

R8. Calcule o volume do prisma oblíquo abaixo.



Resolução

Estudamos no capítulo 1 que a área de um hexágono regular de lado ℓ é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ ; portanto, a área do hexágono regular é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2}$$

Nesse caso, a área da base do prisma, em cm^2 , é:

$$A_b = \frac{3 \cdot 5^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular a altura h desse prisma, aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$6^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow 27 = h^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

Calculando o volume desse prisma, temos:

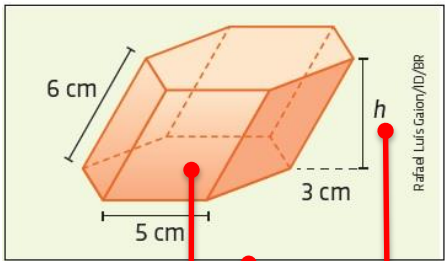
$$V = A_b \cdot h = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{675}{2}$$

Logo, o volume desse prisma é $\frac{675}{2} \text{ cm}^3$.

Fonte: CHAVANTE (2020, p. 94)

No Quadro 12, os tipos de registros distintos e transformações são apresentados no exemplo resolvido, em registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 12: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 8 do LD2

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural Calcule o volume do prisma oblíquo abaixo.	Registro Figural 
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico $A = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$ $A_b = \frac{3 \cdot 5^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$	
Tratamento RS	Registro Simbólico $6^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow 27 = h^2 \cdot 3 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$	
	Registro Simbólico $V = A_b \cdot h = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{675}{2} \text{ cm}^3$	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de CHAVANTE (2020, p. 94)

Neste exemplo resolvido 5, o enunciado contempla o registro na língua natural e o registro figural, de modo a se complementarem. Foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: no enunciado, como registros multifuncionais, a representação não discursiva apresenta o objeto matemático por meio do registro figural. Já na resolução, nos registros monofuncionais, por meio da representação discursiva, é apresentado o objeto matemático proposto por meio de registros simbólicos (numérico e algébrico).

Em sua resolução, define-se a fórmula da área da base hexagonal; assim, ocorre uma transformação, por meio da conversão do registro figural para o registro simbólico. Feito isso, definida a fórmula da área da base, é efetuado tratamento, obtendo, então, a área da base hexagonal. Como a altura do prisma oblíquo hexagonal está implícita, é então, realizado o

tratamento, de modo que o cálculo da altura é obtido utilizando o teorema de Pitágoras. E finalizado o cálculo do volume do prisma oblíquo hexagonal, ocorre uma conversão do registro figural para o registro simbólico, no qual é realizado o tratamento simbólico, obtendo então, o seu volume.

3.2.3 Análise dos tipos de registros nos exemplos resolvidos do LD3

Nessa obra, o Prisma é apresentado na subseção do Capítulo 3: “Poliedros”, do LD3. A subseção *Prisma* é organizada em 11 páginas, separadas em definições dos elementos referentes ao Prisma, atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e exercícios. No que diz respeito ao conteúdo de Prisma, as definições, as atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e os exercícios são organizados por tópicos no decorrer da subseção: *Prisma*, *Secção transversal de um prisma*, *Volume*, *Volume de um paralelepípedo*, *Volume de um cubo*, *Princípio de Cavalieri* e *Volume de um prisma*.

Após a explanação dos tópicos *Área da superfície de um prisma* e *Volume de um prisma*, são apresentadas atividades resolvidas (exemplos resolvidos) e atividades (exercícios). Vale ressaltar que as atividades resolvidas (exemplos resolvidos) em Prisma têm início no exercício de número três (3), de forma que as atividades resolvidas anteriormente estão relacionadas com o conteúdo que se inicia Poliedros, no início do capítulo. No que diz respeito às atividades resolvidas (exemplos resolvidos) foram apresentados um total de quatro diferentes exercícios, de modo que três estão relacionados ao cálculo da medida de área, e um relacionado ao cálculo da medida do volume. Assim, no que se refere às análises dos exemplos resolvidos, elas foram realizadas com o intuito de identificar os diferentes tipos de registros de representação e as transformações – tratamento e conversão - apresentadas.

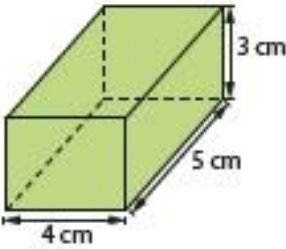
Exemplo resolvido 1:

O exemplo resolvido apresentado na Figura 19 propõe o cálculo da área total da superfície do paralelepípedo reto retângulo. O exemplo é composto pelo enunciado que informa as dimensões de suas arestas e a figura, possibilitando a visualização das seis faces do paralelepípedo em sua forma tridimensional. Em sua resolução, propõe-se a reconfiguração do sólido em sua forma tridimensional, para a planificação em sua forma bidimensional. Assim o autor identifica as áreas iguais, $S_I = I = III$, $S_{II} = II = IV$ e $S_V = V = VI$, dando condições para calcular área total da figura.

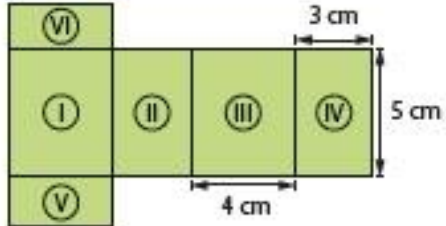
Figura 19: Atividades resolvidas nº 3

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, determine a área total da superfície do paralelepípedo.



Resolução



A superfície do paralelepípedo é formada por seis faces retangulares, indicadas na planificação anterior. Note que $I = III$, $II = IV$ e $V = VI$. Calculando cada área, temos:

$$S_I = 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$$
$$S_{II} = 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$
$$S_V = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

Então:

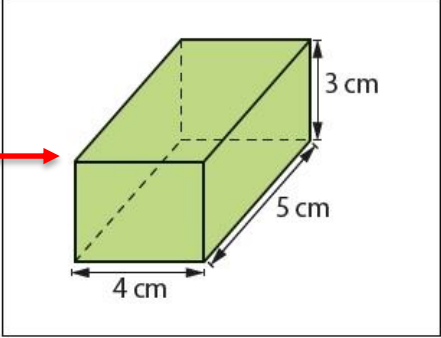
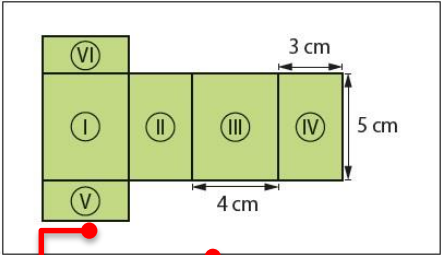
$$S_t = 2S_I + 2S_{II} + 2S_V$$
$$S_t = 2(20 + 15 + 12) = 2 \cdot 47 = 94$$

Portanto, a área total da superfície é de 94 cm^2 .

Fonte: BONJORNO (2020, p. 86)

No Quadro 13 constam os tipos de registros distintos e transformações que ocorrem no exemplo resolvido, nos registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 13: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 3 do LD3

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro na Língua Natural 3. Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, determine a área total da superfície do paralelepípedo.	Registro Figural 
	Conversão R → R	
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Tratamento RF	Registro Figural 
	Registro na Língua Natural Conversões RF → RLN A superfície do paralelepípedo é formada por seis faces retangulares, indicadas na planificação anterior. Conversões RF → RS	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos. Tratamento RS	Registro Simbólico Conversões RF → RS Note que $I = III$, $II = IV$ e $V = VI$	
	Registro Simbólico Conversões RF → RS $S_I = 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$	
	Registro Simbólico Conversões RF → RS $S_{II} = 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$	
	Registro simbólico Conversões RF → RS $S_V = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$	
	Registro Simbólico $S_t = 2S_I + 2S_{II} + 2S_V$ $S_t = 2(20 + 15 + 12) = 2 \cdot 47 = 94 \text{ cm}^2.$	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de BONJORNO (2020, p. 86)

Assim, no exemplo resolvido 1, foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: nos registros multifuncionais, a representação discursiva apresenta o objeto matemático mediante o registro na língua natural; e também a representação não discursiva apresenta o objeto paralelepípedo (prisma) por meio do registro figural. Já em sua resolução, é proposta a planificação do sólido geométrico prisma, classificado como registro multifuncional, representação não discursiva, registro figural; na sequência, no desenvolvimento da resolução, entre os registros monofuncionais (representação discursiva), é apresentado o objeto matemático proposto por meio de registros simbólicos (numérico e algébrico).

Assim, as transformações têm início no princípio da resolução, sendo realizada uma reconfiguração do sólido geométrico na forma planificada. Para auxiliar nos cálculos, essa reconfiguração é um tratamento realizado no registro figural. No cálculo da área total das superfícies do paralelepípedo, faz-se conversão auxiliar, possibilitando o tratamento, ou seja, o cálculo das áreas das faces congruentes; na sequência, é realizada conversão do registro figural para o registro simbólico, referente à área total da superfície do paralelepípedo, de modo que é efetuado o cálculo, configurado como tratamento, chegando então ao valor da área total, representado no modo registro figural.

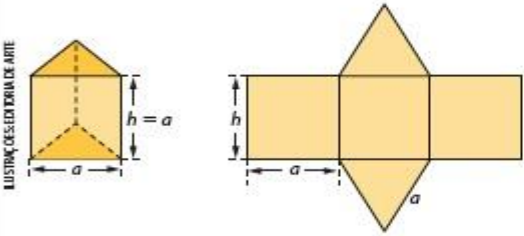
Exemplo resolvido 2:

Nesse exemplo resolvido, o enunciado propõe o cálculo da área total do prisma triangular regular, sendo suas faces laterais quadradas. Como sugerido na resolução, a figura do sólido geométrico auxilia a identificação das arestas da base em formato do triângulo equilátero, e das arestas das faces laterais. A reconfiguração do sólido tridimensional para a planificação bidimensional é uma possibilidade para calcular a área total do prisma triangular regular. Assim, o cálculo da área total é a adição das áreas das faces laterais e das bases do prisma triangular regular. Dessa forma, o exemplo aborda o cálculo de área de figuras planas, como quadrado e triângulo equilátero; também como pré-requisito é necessário utilizar potência, raízes, frações e frações equivalentes.

Figura 20: Atividades resolvidas nº 4

4. Em um prisma triangular regular, a medida a da aresta da base é igual à medida h da altura do prisma. Sabendo que a área lateral é 10 m^2 , calcule a área total do prisma.

Resolução
Planificando a superfície do prisma, temos:



A face lateral é um retângulo de dimensões a e h .

$$S_l = 3 \cdot (a \cdot h) \Rightarrow S_l = 3 \cdot (a \cdot a) \Rightarrow S_l = 3a^2$$

Como $S_l = 10 \text{ m}^2$, temos:

$$3a^2 = 10 \Rightarrow a^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{30}{9}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ m, pois } a > 0.$$

A base é um triângulo equilátero cujo lado mede a . Assim:

$$S_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{10}{3} \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{10\sqrt{3}}{12} \text{ m}^2$$

Cálculo da área total:

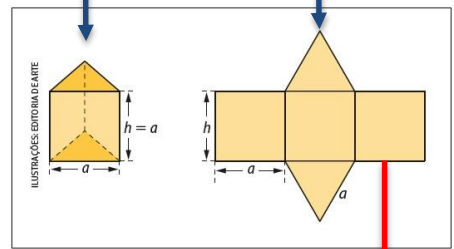
$$S_t = S_l + 2 \cdot S_b = 10 + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{12} = 10 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

Portanto, $S_t = 10 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \text{ m}^2$.

Fonte: BONJORNO (2020, p. 86)

O Quadro 14 apresenta os tipos de registros distintos e transformações que acontecem no exemplo resolvido, nos registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 14: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 4 do LD3

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p><i>Conversão</i> <i>RLN</i> \downarrow <i>RF</i></p> <p>Em um prisma triangular regular, a medida a da aresta da base é igual à medida h da altura do prisma. Sabendo que a área lateral é 10 m^2, calcule a área total do prisma.</p> <p>Tratamento <i>RF</i></p>	
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.		<p>Registro Figural</p> 

<p>REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.</p> <p>Tratamento RS</p>	<p>Registro Simbólico</p> $S_l = 3(a \cdot h) \Rightarrow S_l = 3(a \cdot a) \Rightarrow S_l = 3a^2$	
	<p>Registro Simbólico</p> <p>$S_l = 10 \text{ m}^2$, temos:</p> $3a^2 = 10 \Rightarrow a^2 = \frac{10}{3} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{30}{9}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ m, pois } a > 0.$ <p><i>Conversões RF → RS</i></p>	
	<p>Registro Simbólico</p> $S_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{10}{3} \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{10\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$	
	<p>Registro simbólico</p> $S_t = S_l + 2 \cdot S_b = 10 + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{12} = 10 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$ $S_t = 10 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \text{ m}^2$ <p><i>Conversão RF → RS</i></p>	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de BONJORNO (2020, p. 86)

No exemplo resolvido 2 foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: nos registros multifuncionais, a representação discursiva apresenta o objeto matemático mediante o registro na língua natural; já na resolução, no registro multifuncional, a representação não discursiva apresenta o objeto matemático prisma mediante o registro figural. Assim, continuando a resolução, nos registros monofuncionais, por meio da representação discursiva, é apresentado o objeto matemático proposto por meio de registros simbólicos (numérico e algébrico).

No tocante às transformações, no início da resolução realizou-se uma conversão do registro da língua natural para o registro figural, de modo que ocorre tratamento no registro figural, da figura tridimensional para sua planificação. Assim, para calcular a área das faces laterais, uma conversão do registro figural para o registro simbólico foi feita. No cálculo da área das bases realiza-se conversão do registro figural para o registro simbólico. Por fim, realiza-se uma conversão do registro figural para o registro simbólico, sendo realizado o tratamento para o cálculo da área total do prisma.

Exemplo resolvido 3:

No exemplo resolvido apresentado na figura 21, o autor propõe que se calcule o custo do revestimento para cobrir a área interna da piscina. De acordo com a resolução sugerida, é necessário não só calcular a área total do paralelepípedo considerado, mas também a área de uma cerâmica na forma de quadrado. Na resolução, o autor faz uma consideração, afirmando que, por se tratar de uma piscina, o revestimento não será colocado em uma das faces, mas, não especifica qual das faces. Vale ressaltar que, por se tratar de uma piscina na forma de paralelepípedo, a face que deve ser desconsiderada é uma das bases. Para calcular a quantidade de cerâmicas necessárias para o revestimento, é efetuada a divisão da área total da piscina pela área total de uma cerâmica. Sendo dado pelo enunciado o valor da unidade de revestimento, deve-se então calcular a quantidade total de revestimento, para então chegar ao cálculo do custo do revestimento. Para a resolução do exercício, os assuntos necessários são: cálculo da área total de um paralelepípedo, área de um quadrado, conversões de unidades de medida, divisão de número inteiro e número decimal e multiplicação de um número inteiro e um número decimal.

Figura 21: Atividades resolvidas nº 5

5. Felipe está construindo uma piscina no quintal de sua casa no formato de um bloco retangular que possui internamente 8 metros de comprimento, 4 metros de largura e 1,5 metro de profundidade. O revestimento escolhido por Felipe para cobrir a área interna da piscina é formado por quadrados de cerâmica com 25 cm de lado vendidos por R\$ 1,50 a unidade. Considerando que não haverá espaço entre os quadrados, calcule o valor que Felipe deve gastar para comprar a quantidade exata de revestimento necessário para cobrir a área interna da piscina.

Resolução

A área total de um paralelepípedo reto retângulo é dada por $S_t = S_l + 2 \cdot S_b$.
Por se tratar de uma piscina, o revestimento não será colocado em uma das faces do paralelepípedo. Assim, temos:

$$S_t = 8 \cdot 4 + 2(4 \cdot 1,5) + 2(8 \cdot 1,5) = 68 \text{ m}^2$$

A área de cada revestimento é:

$$A_r = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

O total de unidades necessárias para o revestimento é de $\frac{68}{0,0625} = 1088$.

Felipe precisará comprar 1088 unidades. Como cada unidade custa R\$1,50, então o custo total do revestimento é dado por:

$$1088 \cdot 1,5 = 1632$$

O custo do revestimento será de R\$1.632,00.

Fonte: BONJORNO (2020, p. 86)

No Quadro 15, apresentamos os tipos de registros e transformações que acontecem no exemplo resolvido; são eles: registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 15: Tipos de Representações e Transformações do exemplo resolvido 5 do LD3

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>5. Felipe está construindo uma piscina no quintal de sua casa no formato de um bloco retangular que possui internamente 8 metros de comprimento, 4 metros de largura e 1,5 metro de profundidade. O revestimento escolhido por Felipe para cobrir a área interna da piscina é formado por quadrados de cerâmica com 25 cm de lado vendidos por R\$ 1,50 a unidade. Considerando que não haverá espaço entre os quadrados, calcule o valor que Felipe deve gastar para comprar a quantidade exata de revestimento necessário para cobrir a área interna da piscina.</p>	
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	<p>Registro Simbólico Conversão RLN → RS</p> $S_t = S_l + 2 \cdot S_b.$ $S_t = 8 \cdot 4 + 2(4 \cdot 1,5) + 2(8 \cdot 1,5) = 68 \text{ m}^2$	
Tratamentos RS	<p>Registro Simbólico</p> <p>(A área de cada revestimento é:)</p> $A_R = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$	
	<p>Registro Simbólico</p> <p>(O total de unidades necessárias para o revestimento é de ...)</p> $\frac{68}{0,0625} = 1088.$	
	<p>Registro Simbólico</p> $1088 \cdot 1,5 = \text{R\$ } 1.632,00.$	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de BONJORNO (2020, p. 86)

Assim, no exemplo resolvido acima, pode-se identificar os seguintes registros de representação semiótica: no enunciado, no que se refere aos registros multifuncionais, a representação discursiva apresenta o objeto matemático mediante o registro na língua natural. Já na resolução, nos registros monofuncionais, a representação discursiva apresenta o objeto matemático proposto por meio de registros simbólicos (numérico e algébrico).

No que se refere às transformações, a resolução abarca uma conversão do registro da língua natural para o registro simbólico, e realiza-se então um tratamento neste registro. No enunciado, é informado que, para cobrir a área interna da piscina, optou-se por quadrados de cerâmica com 25 cm de lado; sendo assim, ocorre uma conversão entre as unidades, de centímetro para metro, e, dessa forma, é realizado um tratamento de registro simbólico, de modo que é calculada a área de uma peça de cerâmica. Para calcular a quantidade de cerâmica necessária para revestir a piscina, foi realizado o tratamento simbólico, que corresponde à quantidade total de cerâmicas necessária para revestir a superfície da piscina. Para finalizar, é efetuado o tratamento do registro simbólico, que resulta no valor total necessário para revestir a piscina.

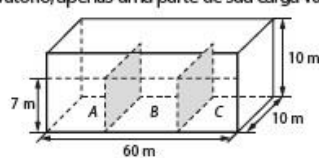
Exemplo resolvido 4:

Na Figura 22, o exemplo resolvido apresenta a resolução de um problema do Enem. É uma questão diversificada, considerada uma situação-problema. Trata-se do cálculo do volume do petróleo derramado. Para resolução, espera-se que se calcule o volume das regiões acima das placas de aço retangulares de dimensões 7 m de altura e 10 m de base, e também o volume do compartimento C, considerando suas dimensões (60: 3) m de comprimento, 10 m de largura e 7 m de altura. Um segundo modo de resolução é calcular o volume total do reservatório e subtrair o volume dos compartimentos A e B, como sugerido pelo autor.

Figura 22: Atividades resolvidas nº 6

ATIVIDADE RESOLVIDA

6. (Enem/MEC) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por $60\text{ m} \times 10\text{ m}$ de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A , B e C , de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C . Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume do petróleo derramado terá sido de

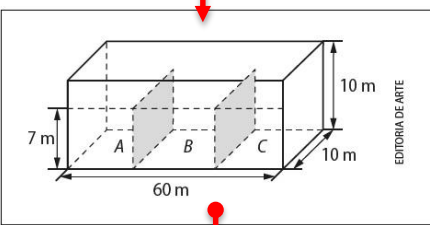
a) $1,4 \times 10^3\text{ m}^3$ c) $2,0 \times 10^3\text{ m}^3$ e) $6,0 \times 10^3\text{ m}^3$
 b) $1,8 \times 10^3\text{ m}^3$ d) $3,2 \times 10^3\text{ m}^3$

Resolução
 Vamos calcular o volume da região acima das placas e do compartimento C , onde está o furo que provocará o vazamento. Assim, temos:
 $V = 60 \cdot 10(10 - 7) + (60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$
 $V = 1800 + 1400$
 $V = 3200$
 Dessa maneira, o volume de petróleo derramado é igual a $3,2 \cdot 10^3\text{ m}^3$.
 Outro modo de resolver é calcular o volume total do reservatório e subtrair o volume dos compartimentos A e B .
 $V = 60 \cdot 10 \cdot 10 - 2(60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$
 $V = 6000 - 2800$
 $V = 3200$
 A resposta correta é a alternativa **d**.

Fonte: BONJORNO (2020, p. 91)

Os tipos de registros e transformações que ocorrem no exemplo resolvido, apresentados no Quadro 16, são: registros multifuncionais e monofuncionais, registros discursivos e não discursivos.

Quadro 16: Tipos de Registros e Transformações do exemplo resolvido 6 do LD3

ENUNCIADO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	<p>Registro na Língua Natural</p> <p>6.(Enem/MEC) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por $60\text{ m} \times 10\text{ m}$ de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.</p> <p>Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume do petróleo derramado terá sido de</p>	<p>Registro Figural</p> 

	a) $1,4 \times 10^3 m^3$ b) $1,8 \times 10^3 m^3$ c) $2,0 \times 10^3 m^3$ d) $3,2 \times 10^3 m^3$ e) $6,0 \times 10^3 m^3$	
RESOLUÇÃO		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Registro Simbólico $V = 60 \cdot 10(10 - 7) + (60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$ $V = 1800 + 1400$ $V = 3200$ $V = 3,2 \cdot 10^3 m^3$	Conversão <i>RF → RS</i>
	Registro Simbólico $V = 60 \cdot 10 \cdot 10 - 2(60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$ $V = 6000 - 2800$ $V = 3200$	
Tratamento RS		

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021, a partir de BONJORNO (2020, p. 91)

No exemplo resolvido 4 foram identificados os seguintes registros de representação semiótica: nos registros multifuncionais, a representação não discursiva apresenta o objeto matemático por meio do registro na língua natural e, complementando o enunciado, a representação não discursiva apresenta o objeto referido no enunciado mediante o registro figural. Já em sua resolução, nos registros monofuncionais, por meio da representação discursiva, é apresentado o objeto matemático proposto mediante os registros simbólicos (numérico e algébrico).

O enunciado é representado por meio do registro de língua natural, e o registro figural complementa o exemplo, auxiliando na resolução. Assim, é realizada uma transformação, do tipo conversão, do registro figural para o registro simbólico. Já no registro simbólico, é efetuado um tratamento interno, para o cálculo do volume do vazamento do petróleo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da questão de pesquisa *Quais transformações entre representações semióticas relativas ao estudo de Prismas estão presentes em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio?*, buscamos atingir os objetivos específicos, que por sua vez dão respaldo para alcançar o objetivo geral, gerando as respostas almejadas.

No decorrer do trabalho, após definir o objeto matemático Prisma, considerar livros didáticos de Matemática como fonte de dados para a pesquisa, e a teoria dos Registros de Representação Semiótica como suporte para a análise das obras, procuramos atingir cada um dos objetivos específicos, conforme descritos a seguir.

O primeiro objetivo específico tratou-se de *identificar os tipos de registros de representação semiótica relativos ao estudo de Prismas*. As análises da pesquisa mostram que três dentre os principais tipos de registros apontados por Duval (2003), quais sejam, língua natural, figural e simbólico, são identificados nos exemplos resolvidos pelos autores dos LD1, LD2 e LD3. No LD1 e no LD2, encontramos cinco exemplos resolvidos em cada; e no LD3, quatro, totalizando 14 exemplos resolvidos, todos analisados no âmbito de nossas discussões. Destes 14 exemplos resolvidos, identificamos 13 que utilizaram o registro na língua natural, entre os enunciados e suas resoluções. No que se refere ao registro simbólico, dos 14 exemplos resolvidos nos livros didáticos, identificamos 48 registros simbólicos – utilizados em todos os exemplos resolvidos dos livros didáticos. Assim, constatamos ter sido o tipo de registro mais utilizado pelos autores dos livros didáticos. No que se refere ao registro figural, verificamos que esteve presente em todos os exemplos resolvidos, com exceção do exemplo resolvido 3 do LD3, totalizando 25 registros figurais entre os enunciados e suas resoluções, nas suas formas planas e tridimensionais.

Para o segundo objetivo específico, buscamos *investigar os tratamentos ocorridos nos registros*. Ao analisar os exemplos resolvidos, identificamos que nos registros figurais são realizados tratamentos do tipo planificação. As planificações são realizadas nos exemplos resolvidos 1 e 2 do LD1 e LD3, respectivamente. As planificações são reconfigurações, ou seja, são tratamentos que podem ser realizados nos registros figurais, podendo auxiliar na visualização, identificando cada uma das faces e possibilitando o cálculo da medida de área da superfície total de um prisma. No entanto, o tipo de registro que mais se destaca, no que se refere à transformação “tratamento”, é o registro simbólico, apresentado na forma de cálculos para as resoluções dos exemplos resolvidos. De acordo com Duval (2009, p. 23), “o cálculo é

um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números”. Os tratamentos foram realizados nos 14 exemplos resolvidos, sendo, no LD1, dois tratamentos no registro figural e 11 tratamentos no registro simbólico; no LD2, um tratamento no registro figural, um na língua natural e 14 no registro simbólico; já no LD3, foram realizados dois tratamentos no registro figural e nove tratamentos no registro simbólico, chegando ao total de 40 tratamentos, em se considerando os três livros analisados.

Já o terceiro objetivo específico estabelecido foi *investigar as conversões entre as representações semióticas no conteúdo de Prismas presentes nos livros didáticos*. Para isso, analisamos os exemplos resolvidos dos livros didáticos LD1, LD2 e LD3. Dentre os 14 exemplos analisados, foi possível identificar 6 conversões do registro da língua natural para o registro simbólico; 7 conversões do registro na língua natural para o registro figural; 3 conversões do registro figural para o registro na língua natural e 35 conversões do registro figural para o registro simbólico.

Sendo assim, a pesquisa, realizada e norteada pelos objetivos específicos, dá respaldo para alcançar o objetivo geral, que se trata de analisar as transformações – tratamentos e conversões – entre representações semióticas, relativas ao ensino de Prismas, presentes em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizados no Estado do Paraná e indicados pelo PNLD 2021. Consequentemente, a partir do momento em que se atinge tal objetivo, torna-se possível responder à questão de pesquisa.

A análise dos livros didáticos evidenciou que, no LD1, no conteúdo Prisma, o autor explorou o cálculo da medida do volume com três exemplos resolvidos, e o cálculo de área com dois exemplos resolvidos. No LD2, o autor propôs um exemplo resolvido para o estudo do cálculo da medida da área total de um prisma e, para o cálculo da medida do volume, utilizou quatro exemplos resolvidos. Já no LD3, o autor sugere três exemplos resolvidos no tocante ao cálculo da medida da área e, um exemplo correspondente ao cálculo da medida do volume.

Pesquisas futuras poderão vir ao encontro de algumas potencialidades de nossa pesquisa, a exemplo de análises dos exercícios propostos, comparando-os com os exemplos resolvidos pelos autores; estudo acerca dos exemplos resolvidos pelos autores como forma de subsídios para a resolução dos exercícios propostos, dentre outros. Também é possível aprofundar as análises olhando para os fenômenos de congruência e não congruência entre as conversões de registros identificadas nos livros analisados, tal qual investigar o manual do professor, verificando quais orientações são apresentadas sob a ótica da TRRS e ainda organizar

sequências didáticas acerca do conceito de Prismas a serem implementadas com alunos em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. da; CAMPOS, T. M. M. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/xzRGKxDRJ6XS4ZXxLnBTkFL/?format=pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021.
- BITTENCOURT, C. M. F. Em foco: história, produção e memória do livro didático (Apresentação). **Educação e Pesquisa (USP)**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 471- 473, 2004.
- BONJORNO, J. R. **Prisma Matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias**/José Roberto Bonjorno, José Rui Giovanni Junior, Paulo Roberto Câmara de Souza. – 1, ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2008. Matemática**. Brasília: MEC, 2007.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.
- BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011. Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2010.
- BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012. Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2011.
- BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015. Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2014.
- BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2018. Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2017.
- CASSIANO, C. C. de F. Política e economia do mercado do livro didático no século XXI: globalização, tecnologia e capitalismo na educação básica nacional. In: ROCHA, Helenice; REZNIK, Luis; MAGALHÃES, Marcelo de S. **Livros didáticos de história: entre políticas e narrativas**. Rio de Janeiro: Ed. FGV, 2017.
- CENTURIÓN, M.; JACUBOVIC, J. **Matemática: teoria e contexto**. 6º ano. 1ª ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2012.
- CHAVANTE, E. **Quadrante matemática e suas tecnologias: geometria plana e espacial**/Eduardo Chavante, Diego Prestes. --- 1, ed. – São Paulo: Edições SM, 2020.
- CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa** — FEUSP, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.
- D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. IN. BORBA, M. C. et al. (ORG.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2 ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DAMM, R. F. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO. In: MACHADO, S. D. A. ... et al. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução.** - São Paulo: EDUC, 1999, p.135-153.

DANTE, L. R. **Matemática em contextos: geometria plana e geometria espacial**/Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. – 1. ed. – São Paulo: Ática, 2020.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I).** Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.** e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas.** Org.: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

LAJOLO, M. Livro Didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

MORAN, M.; COUTINHO, M. D. **Ensinando polígonos por meio de várias representações: uma experiência com alunos do 6º ano.** 2014. Disponível em: <http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/RELATOS/autores/REA012.PDF> Acesso em: nov. 2021.

MORAN, Mariana. **As apreensões em geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais.** Universidade Estadual de Maringá – UEM. Maringá/PR, p. 23, 2015.

MOREIRA, M. A. **Modelos mentais.** Investigações em Ensino de Ciências – V1(3). Pp. 193-232, 1996. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/modelosmentaisport.pdf>. Acesso em: jul. 2021.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades.** 2009. Disponível em: <https://bit.ly/3gr6jsF>. Acesso em: jul. 2021.

SANTOS, V. A.; MARTINS, L. A importância do livro didático. **Candombá – Revista Virtual**, v. 7, n. 1, p. 20-33, jan – dez, 2011.

SILVA, A. B. **Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica.** Amanda Barbosa da Silva. – Recife: O autor, 2014.

SOUZA, T. A.; ALMEIDA, L. S.; MONTEIRO, R. L. ; SANTOS, J. B. S.; LUQUETTI, E. C. F. **O livro didático e suas implicações na formação de professores.** (2018). Disponível

em: <https://sigev.ead.unesp.br/index.php/submission/downloadFileProceedings/1782>. Acesso em: jul/2021.

SOUZA, Ângela. Abordagem do conceito de fração: uma análise de livros didáticos. In: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática** – Curitiba – PR, 2013.