

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA
GEOMETRIA DOS FRACTAIS EM LIVROS
DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO**

Ana Eliza Pescini

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA GEOMETRIA DOS FRACTAIS EM
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**

Ana Eliza Pescini

Orientadora: Mariana Moran
Apoio: Capes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

União da Vitória
Julho de 2021

Catálogo na publicação elaborada por Mauro Cândido dos Santos – CRB 9º/1416.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P473a Pescini, Ana Eliza.

Uma análise praxeológica da geometria dos fractais em livros didáticos do ensino médio / Ana Eliza Pescini - União da Vitória, 2021.
101 f.: il.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Mariana Moran.
Apoio: Capes

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória, Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação Matemática. União da Vitória, 2021.
Inclui bibliografia.

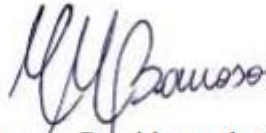
1. Educação matemática. 2. Geometria dos fractais. 3. Teoria antropológica do didático. 4. Livros didáticos. I. Universidade Estadual do Paraná. Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação Matemática. II. Moran, Mariana. III. Título.

CDD: 510.7
CDU: 51:37.02

Ana Eliza Pescini

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA GEOMETRIA DOS FRACTAIS EM
LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Comissão Examinadora:



Profa. Dra. Mariana Moran – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná



Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos - Membro da Banca
Universidade de Pernambuco



Profa. Dra. Veridiana Rezende - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: Aprovada

União da Vitória
Julho de 2021

AGRADECIMENTOS

À professora Mariana Moran Barroso, pela orientação, pela consideração, pelos conselhos e por se fazer sempre presente.

Aos meus pais e meu irmão, por estarem sempre me apoiando e incentivando a crescer profissionalmente e pessoalmente.

Ao meu namorado, por estar ao meu lado neste momento tão importante.

Aos meus amigos, pela amizade sincera, que torceram e torcem por mim.

Aos colegas do mestrado, que muitos se tornaram amigos que levarei comigo para sempre.

Aos colegas e amigos do grupo de estudos GPEG, pelos valiosos encontros e discussões que contrubuíram muito para o desenvolvimento desta pesquisa.

A todos os professores do PRPGEM que fizeram parte da minha formação neste momento tão importante.

Às professoras Dr^{as} Marilene Rosa dos Santos e Veridiana Rezende, pelas contribuições na qualificação e pelas discussões enriquecedoras.

À Capes, pela bolsa que possibilitou a conclusão desta pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo caracterizar praxeologias didáticas e matemáticas da abordagem do conteúdo Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio. Diante do conhecimento da inclusão da Geometria Fractal nas Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (DCE) desde 2008, para alcançar o objetivo geral da pesquisa, propomos-nos a analisar quatro coleções de livros didáticos aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, e que foram as mais adotadas entre as 5 maiores cidades, em termos de habitantes, deste estado. A análise dos dados produzidos foi realizada sob o ponto de vista das organizações praxeológicas, sendo nosso referencial teórico-metodológico a Teoria Antropológica do Didático, que oportunizou investigar escolhas matemáticas e didáticas dos autores das coleções. Diante das análises, podemos apontar que o conteúdo Geometria dos Fractais se faz presente, seja de modo teórico ou durante os exercícios, em 4 dos 16 livros didáticos analisados, de modo articulado com outros conteúdos matemáticos como, por exemplo, Números e Álgebra. Desta forma, observamos que o fato de o assunto Geometria dos Fractais não estar contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não impede que ele seja trabalhado em sala de aula, uma vez que promove a articulação com outras unidades temáticas indicadas no referido documento. Com relação aos Tipos de Tarefas encontrados, apresentam-se, assim como sugerido nas DCE (PARANÁ, 2008), mediante explorações dos fractais como o floco de neve e a curva de Koch; o triângulo e o tapete de Sierpinski. Porém, de maneira geral, predominou uma proposta de ensino para esse tema como meio para o ensino de outros conteúdos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria dos Fractais. Teoria Antropológica do Didático. Livros Didáticos.

ABSTRACT

This research aims at characterizing didactic and mathematical practices of the approach of the content Geometry of Fractals in high school textbooks. Given the knowledge of the inclusion of Fractal Geometry in the Curricular Guidelines of Mathematics of the State of Paraná (DCE) since 2008, to achieve the general objective of the research, we propose analyzing four collections of textbooks approved by the National Textbook Plan (PNLD) of 2018, and which were the most adopted among the 5 largest cities, in terms of inhabitants of this state. The analysis of the data produced was performed from the perspective of the praxeological organizations, and our theoretical-methodological framework was the Anthropological Theory of didactics, which opportunityed investigating mathematical and didactic choices made by the authors of the collections. In view of the analyses, we can point out that the content geometry of fractals is present either theoretically or during the exercises, in 4 of the 16 textbooks analyzed, articulated with other mathematical contents, such as both both aritmetics and algebra. Thus, we observed the fact that the subject Geometry of Fractals is not contemplated in the National Common Curriculum Base (BNCC) does not prevent it from being worked in the classroom, since it promotes articulation with other thematic units indicated in this document. Regarding the Types of Tasks found, these are presented, as suggested in the DCE (PARANÁ, 2008), through explorations of fractals such as the snowflake and the Koch curve; sierpinski triangle and carpet. However, in general, a teaching proposal for this theme was predominant as a means for teaching other contents.

Keywords: Mathematics Education. Fractal geometry. Anthropological Theory of Didactics. Textbooks.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO.....	18
2.1 Geometria dos Fractais	18
1.1.1 A Geometria dos Fractais em dissertações e teses	25
2.2 Teoria Antropológica do Didático (TAD)	33
2.2.1 Organização praxeológica em livros didáticos: um levantamento de dissertações e teses	40
2.2.2 TAD e a Geometria dos Fractais	49
3. DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO	53
3.1 Características da pesquisa	53
3.2 Contexto da pesquisa	53
3.3 Critérios para a análise dos dados	55
4. ANÁLISES DOS DADOS	57
4.1 Análise dos livros didáticos	57
4.2 Síntese dos dados produzidos nos livros didáticos	89
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	97
REFERÊNCIAS	100

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Níveis do floco de Neve de Koch	22
Figura 2: Níveis do Triângulo de Sierpinski	23
Figura 3: Organizações Praxeológicas	36
Figura 4: Modelo proposto por Gascón (2003)	38
Figura 5: Escala de codeterminação – Geometria dos Fractais	51
Figura 6: Ampliando fronteiras - Curva de Koch	59
Figura 8: Floco de neve de Koch	59
Figura 9: Tabela do cálculo do perímetro - Floco de neve de Koch.....	60
Figura 10: Investigação sobre os fractais	61
Figura 11: A Geometria dos fractais.....	63
Figura 12: Fractais da natureza	64
Figura 13: Fractais geométricos	65
Figura 14: Fractais de Mandelbrot	66
Figura 15: Atividade Resolvida	67
Figura 16: Atividade Resolvida item a.....	67
Figura 17: Atividade Resolvida item b	68
Figura 18: Atividade Proposta 1	70
Figura 19: Atividade Proposta 1 item a	70
Figura 20: Atividade Proposta 1 item b.....	71
Figura 21: Atividade Proposta 1 item c	72
Figura 22: Atividade Proposta 2	72
Figura 23: Atividade Proposta 2 item a	73
Figura 24: Atividade Proposta 2 item b.....	74
Figura 25: Atividade Proposta 3	75
Figura 26: Atividade Proposta 4	76
Figura 27: Atividade Proposta 4 item a	76
Figura 28: Atividade Proposta 4 item b.....	77
Figura 29: Atividade Proposta 5	78
Figura 30: Atividade Proposta 5 - parte 2	78
Figura 31: Atividade Proposta 5 - alternativas	78
Figura 32: Atividade Proposta 6	80

Figura 33: Atividade Proposta 6 - parte 2	81
Figura 34: Atividade Proposta 6 - Tarefas	81
Figura 35: Respostas Atividade Proposta 6.....	82
Figura 36: Atividade Proposta 7	85
Figura 37: Atividade Proposta 8	86
Figura 38: Atividade Proposta 9	87
Figura 39: Gráfico Tipos de Tarefa LD1.1.....	90
Figura 40: Gráfico Tipos de Tarefa LD1.2.....	91
Figura 41: Gráfico Tipos de Tarefa LD1.3.....	92
Figura 42: Gráfico Tipos de Tarefa LD Primeiro Ano	93
Figura 43: Síntese das praxeologias encontradas	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Levantamento de dados das coleções	54
---	-----------

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Dissertações e Teses – Geometria dos Fractais	27
Quadro 2: Dissertações e Teses – TAD e livro didático	41
Quadro 3: Abreviatura dos livros didáticos adotados.....	57
Quadro 4: Tipo de Tarefa 1	61
Quadro 5: Tipo de Tarefa 1	62
Quadro 6: Tipo de Tarefa 2	68
Quadro 7: Tipo de Tarefa 3	69
Quadro 8: Tipo de Tarefa 4	70
Quadro 9: Tipo de Tarefa 3	71
Quadro 10: Tipo de Tarefa 2	72
Quadro 11: Tipo de Tarefa 2	73
Quadro 12: Tipo de Tarefa 2	74
Quadro 13: Tipo de Tarefa 1	75
Quadro 14: Tipo de Tarefa 1	76
Quadro 15: Tipo de Tarefa 1	77
Quadro 16: Tipo de Tarefa 4	79
Quadro 17: Tipo de Tarefa 3	82
Quadro 18: Tipo de Tarefa 1	83
Quadro 19: Tipo de Tarefa 2	83
Quadro 20: Tipo de Tarefa 1	84
Quadro 21: Tipo de Tarefa 2	85
Quadro 22: Tipo de Tarefa 3	86
Quadro 23: Tipo de Tarefa 1	87
Quadro 24: Tipo de Tarefa 2	88
Quadro 25: Tipo de Tarefa 2	88

1. INTRODUÇÃO

A ideia de ser professora perpassava minha mente desde o Ensino Fundamental, e as disciplinas de exatas sempre foram as minhas preferidas, mas a disciplina pela qual eu apresentava maior afinidade era a Matemática.

No meu último ano do Ensino Médio, mais precisamente no segundo semestre de 2014, comecei a frequentar um cursinho preparatório para vestibular oferecido pela Universidade Federal de Santa Catarina. Naquele momento, indagações surgiram dentro de mim a respeito de que caminho seguir profissionalmente. Além da escolha docente, outros ramos me interessaram, como a área da Engenharia Civil. Porém, eu buscava cursar um ensino público, e por este motivo e pelas ofertas de cursos nas Universidades públicas da minha região, optei pelo curso de Licenciatura em Matemática ofertado pelo Instituto Federal Catarinense, no Campus de Concórdia. Fui aprovada!

Estava ansiosa pelo que o curso pudesse me oferecer, e por não possuir conhecimentos básicos sobre a formação docente do professor de Matemática, ilusoriamente acreditava passar 4 anos essencialmente *fazendo contas*. Logo no primeiro dia de aula da graduação deparei-me com a disciplina de *Leitura e produção de textos acadêmicos*! Para mim, que sempre apresentei maior facilidade nas disciplinas de exatas, e muitas vezes encontrei obstáculos na produção da minha escrita no período da Educação Básica, o primeiro dia de aula foi um choque. Entretanto, o curso foi me cativando aos poucos, e comecei a tomar gosto pela leitura e pela escrita.

Durante o segundo semestre do ano de 2016 fui convidada a participar de um Projeto de Pesquisa sobre a Geometria dos Fractais, e não sabia que, a partir daquele momento, muitas oportunidades apareceriam, e que meus gostos tomariam forma. Participei do projeto até o fim da minha graduação (2018).

Foi exatamente o momento em que tive meu primeiro contato com essa geometria não-euclidiana, a qual nunca tinha ouvido falar. Aos poucos fui conhecendo um pouco mais sobre essa teoria, e fui sendo cativada pelos resultados e aplicações dela. Além disso, despertou dentro de mim um amor pela pesquisa, pela investigação, pelos debates, que muitas vezes, por falta de tempo, passaram despercebidos nas aulas, mas que a pesquisa me proporcionou adquirir facilidade para ouvir e me expressar cada vez melhor. Trata-se de um período em que cresci, não apenas na minha formação profissional, mas pessoal também.

A pesquisa me possibilitou conhecer novos lugares e pessoas dispostas a dialogar sobre Educação, e essas experiências desencadearam sonhos dentro de mim, de continuar compartilhando e atribuindo conhecimentos sobre a Educação Matemática.

No meu último ano da graduação (2018), estava decidida que iria buscar por uma vaga no Mestrado em Educação Matemática, e assim realizei 3 seleções em Programas, todos no Estado do Paraná. Como minha proposta de pesquisa tratava-se de estudos que envolvessem a Geometria dos Fractais, e sabendo da inclusão desta teoria nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE), optei por escolher os Programas paranaenses. Dentre as aprovações estava o PRPGEM, e escolhi a UNESPAR pelo motivo de União da Vitória situar-se mais próxima da minha cidade natal.

Meu anseio inicial era pesquisar aplicações da Geometria dos Fractais por meio da modelagem, evidenciando sua relação com a Biologia. Após ingressar no mestrado, e diante das discussões recorrentes nas orientações¹, começamos os estudos preliminares para delinear que tipo de pesquisa mais contribuiria para o campo de estudo da Geometria dos Fractais.

Diante do conhecimento que as DCE (PARANÁ, 2008) indicam que sejam abordados em sala de aulas os conteúdos de noções de geometrias não-euclidianas, nos surgiu a indagação de como essas geometrias estão sendo apresentadas nos livros didáticos. Deste modo, optamos por olhar de maneira especial para as abordagens nos livros didáticos do conteúdo Geometria dos Fractais.

Nesse período de pouco mais de 12 anos desde a entrada oficial desse tema nas recomendações para a Educação Básica do estado do Paraná, o qual foi pioneiro no Brasil na implementação curricular desta geometria, surgiram pesquisas com foco nesse tema. Também, pesquisas em outras áreas da Matemática foram desenvolvidas no quadro teórico-metodológico sob a perspectiva da TAD, como podemos observar diante do levantamento que realizamos na plataforma da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD.

Para obter o levantamento de Dissertações e Teses sobre o tema Geometria dos Fractais e TAD, realizamos 2 pesquisas simultâneas na BDTD, pois não encontramos trabalhos que abordassem ambas as palavras-chave “Geometria dos Fractais” e “TAD”.

Assim, a primeira investigação ocorreu através da pesquisa com os filtros “fractal”, “fractais”, buscando pelo formato de dissertações e teses, em que encontramos trabalhos publicados entre os anos de 1999 e 2020, sendo ao todo vinte e sete pesquisas relacionadas a

¹ A partir deste momento, o texto deixa de ser escrito na primeira pessoa do singular e passa a atribuir a pluralidade, por se tratar de uma construção conjunta, advinda do trabalho entre orientanda e orientadora.

essas características. Contudo, nenhuma delas aborda aspectos relacionados à análise de livros didáticos sobre a Geometria dos Fractais.

Isto posto, realizamos nossa segunda pesquisa, na qual buscamos pelos assuntos “Teoria Antropológica do Didático”, “Livro Didático”, “Organização Praxeológica”. Foram localizados quatorze teses e dissertações publicadas durante o período de 2005 a 2020; mas dentre estas pesquisas encontradas, nenhuma está relacionada ao estudo da Geometria dos Fractais.

Por conseguinte, observamos que nossa investigação relaciona dois pontos-chave, a Geometria dos Fractais e a Teoria Antropológica do Didático, e ambas, até o momento, não apresentam publicações de dissertações ou teses que relacionam os temas; desenvolvendo uma investigação praxeológica desta geometria, ainda não foram publicados.

No nosso trabalho, estamos considerando o livro didático como uma instituição, no sentido de Chevallard (1992), pois compreendemos que o saber vive em um livro didático possibilitando o desenvolvimento e a estruturação de uma praxeologia. Por isso, ao olharmos somente para o livro didático, como é o caso desta pesquisa, desconsideramos outros fatores que influenciam o trabalho do professor com esse livro, bem como o motivo de sua escolha, e por isso nossa instituição permanece sendo o livro didático, e não o Ensino Médio ou o PNLD.

Porém, mesmo sem apresentar dados que possibilitem uma discussão a respeito do que tem sido abordado sobre Geometria dos Fractais nas aulas de Matemática, concordamos com Frison et al (2009), que afirmam que a instituição livro didático é uma das ferramentas fundamentais que influenciam nas escolhas do professor, e assim apresentam reflexos no processo de ensino e de aprendizagem do conteúdo que está sendo trabalhado.

Bittar (2017, p. 364) comenta que “o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas”. “Conseqüentemente, é importante conhecer as propostas dos LD, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos, pois, independente da escolha teórica, é preciso levar em consideração seu contexto de ensino” (BITTAR, 2017, p. 366).

Quando o livro didático é adotado pelo professor em alguma instituição educacional, ele passa a auxiliá-lo em seus planejamentos, nas atividades a serem propostas, servindo de suporte para esclarecer suas dúvidas, entre outros aspectos. Para o aluno, o livro é uma ferramenta disponível a qualquer momento; deste modo, mesmo quando não houver outro recurso disponível para ser consultado, o livro desempenha esse papel.

Diante ao exposto, intrigou-nos pensar em como o assunto Geometria dos Fractais é abordado nos livros didáticos, e após leituras e discussões desenvolvidas no Grupo de Pesquisa

em Ensino de Geometria (GPEG) sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), decidimos pesquisar a respeito das organizações praxeológicas dessa Geometria presentes nos livros didáticos do Ensino Médio utilizados no Estado do Paraná, a partir do ponto de vista da TAD.

A TAD, nesta pesquisa, faz-se presente como ferramenta para análise e estudo do conteúdo de Geometria dos Fractais do ponto de vista matemático, tal como das escolhas didáticas contidas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Delimitamos nosso trabalho às análises da praxeologia didática ou organização didática, e da praxeologia matemática ou organização matemática, que trazem consigo elementos que subsidiaram as questões levantadas acerca de nossa investigação.

Assim, definimos nossa questão de pesquisa do seguinte modo: *O conteúdo Geometria dos Fractais pode ser identificado nas coleções de livros didáticos adotados para o Ensino Médio no Estado do Paraná? Se sim, quais são as propostas de ensino para esse conteúdo?*

Buscando responder nossa problemática de pesquisa, elencamos como nosso objetivo geral: Analisar a abordagem do saber Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio.

Para alcançar nosso objetivo geral, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Caracterizar as praxeologias didáticas e matemáticas do conteúdo Geometria dos Fractais;
- Investigar o conteúdo de Geometria dos Fractais nos capítulos das coleções selecionadas para a análise;
- Identificar os Tipos de Tarefas; as Técnicas e as Tecnologias encontradas na parte Curso (teoria) e na parte Prática (tarefas) dos livros escolhidos, de acordo com a TAD.

Inicialmente pretendíamos analisar as principais coleções que estavam presentes nas escolas públicas do Estado paranaense, mas ao iniciarmos o levantamento das escolhas dos livros didáticos, percebemos que esse processo demandaria muito tempo e sensibilizaria a qualidade da pesquisa.

Assim, optamos por realizar a pesquisa diante das principais adoções das coleções presentes nas 5 maiores cidades em termos de habitantes do estado do Paraná, segundo o IBGE, que são respectivamente: Curitiba, Londrina, Maringá, Ponta Grossa e Cascavel. Pelo tempo de pesquisa e pelo perfil de análise objetivado, decidimos investigar as 4 coleções mais adotadas, sendo 9 livros analisados. Esta escolha ocorreu por pensarmos em priorizar a qualidade da

pesquisa, e possuir uma aproximação da realidade presente na maioria das escolas públicas das cidades selecionadas.

Nosso trabalho é apresentado em 2 partes, a primeira é composta pela Introdução, seguida do Capítulo 2, o qual contempla 3 subseções. Na primeira subseção apresentamos elementos teóricos sobre a Geometria dos Fractais, além de resultados de dissertações e teses que envolvem este tema. Na segunda subseção destinamos o estudo aos elementos teóricos e metodológicos relacionados a nossa pesquisa à luz da TAD, bem como ao levantamento realizado de pesquisas relativas a esta teoria. A segunda parte, também composta por 3 subseções, é relativa à produção e análise dos dados. Cada subseção contempla a análise dos livros didáticos de um segmento de ensino. Por fim, apresentamos nossas considerações finais quanto aos nossos resultados obtidos por meio das análises realizadas, além das referências.

2 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Apresentaremos, nesta seção, uma fundamentação teórica sobre a Geometria dos Fractais e a Teoria Antropológica do Didático. Tal fundamentação serve de respaldo para as análises realizadas adiante. Para isso, desenvolvemos um breve histórico, ressaltando conceitos que fundamentam o presente estudo, assim como estudiosos que contribuíram para pesquisas desses assuntos.

2.1 Geometria dos Fractais

É possível afirmar que o que denominamos hoje de Geometria Euclidiana surgiu há aproximadamente 4.000 anos no Egito e na Babilônia, de maneira não sistemática, mas de uma maneira intuitiva, com sequências de regras práticas sugeridas pela experiência, com objetivo principal de aplicação às medições. Efetivamente, as relações dessas sociedades, baseadas nas propriedades, instituíram a necessidade de medir.

Sob outra perspectiva, a geometria com caráter dedutivo, apoiado em proposições, iniciou na antiga Grécia, com Tales de Mileto 1 e Pitágoras. Segundo Brito (1995, p. 25), “Thales apenas preparou a transformação da matemática para ciências dedutiva; a verdadeira transição ocorreu mais tarde, devido ao trabalho de Pitágoras”.

A Geometria Euclidiana foi considerada a única geometria possível e perfeita até meados do século XIX, com o intuito de descrever o espaço em que vivemos. A obra *Elementos*, escrita pelo matemático Euclides, que sistematizou todo o saber geométrico da época (300 a.C.), tornou-se referência de uma geometria que até então não apresentava questionamentos sobre si.

Euclides, em sua obra *Elementos*, foi o primeiro a apresentar um sistema axiomático para a geometria, isto é, um sistema formado por noções primitivas, definições, postulados, axiomas e teoremas. Conforme Brito (1995, p. 32), “[...] o sistema axiomático deriva do método dedutivo e do esquema de organização local, ou seja, daquele que estabelece a validade de um resultado a partir de outros fatores geométricos conhecidos de antemão”.

Os axiomas (na obra *Elementos*, são chamados de noções comuns) são o início dessa cadeia dedutiva, e são, também, as afirmações não demonstráveis de caráter mais geral. Os postulados, da mesma forma, são afirmações não demonstráveis, mas de caráter mais ligado ao conteúdo a que se quer tratar. Para Brito (1995, p. 35), “Hoje, porém, não fazemos mais esta

diferenciação. Atualmente, entendemos por postulados o conjunto de axiomas e regras de inferência utilizadas na demonstração”.

Os cinco axiomas que aparecem no livro I de Euclides² como noções comuns são:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
2. Se iguais são somadas a iguais, os totais também são iguais;
3. Se iguais são subtraídas de iguais, os restos também são iguais;
4. Coisas que coincidem entre si, são iguais entre si; e
5. O todo é maior que a parte.

De acordo com Gerônimo e Franco (2005), seguem os cinco postulados de Euclides, conforme escritos no livro I dos Elementos:

1. Por dois pontos distintos passa uma única reta;
2. Um segmento retilíneo pode sempre ser prolongado;
3. Existe uma única circunferência com centro e raio dados;
4. Todos os ângulos retos são iguais; e
5. Se uma reta r corta duas outras retas s e t (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores (α e β) de um mesmo lado de r é menor que dois retos, então s e t , quando prolongadas suficientemente, cortam-se daquele lado de r .

Seguem, de acordo Gerônimo e Franco (2005), os cinco postulados (hoje chamados axiomas), numa linguagem atual:

1. Dois pontos distintos determinam uma reta;
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada, é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário;
3. É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;
4. Todos os ângulos retos são iguais; e
5. Dados um ponto P e uma reta r , existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r .

² Segundo o site www.euclides.org

O quinto postulado, que não tinha uma formulação tão simples quanto os primeiros, aguçou o interesse de muitos matemáticos por mais de dois mil anos. O próprio Euclides deve ter julgado o quinto postulado pouco inequívoco, pois diferiu o uso deste postulado o quanto possível. Brito (1995, p. 54) frisa que “A organização que ele deu aos Elementos foi esta. Os primeiros vinte e oito teoremas necessitavam somente dos primeiros quatro postulados para suas demonstrações e, a partir do vigésimo nono, utilizou o quinto postulado”.

Nenhum matemático apresentou questionamentos sobre a veracidade do quinto postulado até meados do século XIX porque, para eles, não se tratava de um postulado, e sim de um teorema. Confiavam na hipótese que seria possível demonstrá-lo usando os quatro primeiros postulados e um conjunto de definições. Grandes matemáticos buscaram demonstrá-lo, mas não obtiveram sucesso, pois a maior parte dessas tentativas admitiam fatos que, ou eram equivalentes a ele, ou não podiam ser demonstrados usando unicamente os outros quatro postulados. Em meio aos grandes matemáticos, podemos citar Legendre.

Para Brito (1995, p. 67), “As várias tentativas que Legendre fez para demonstrar o quinto postulado de Euclides apareceram, de 1749 a 1833, sucessivamente, nas diversas edições de seu livro referido anteriormente”. Encontram-se tentativas de demonstração de todos os tipos, desde as mais simples, que foram facilmente negadas, até as mais complexas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitavam de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Contudo todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, apresentavam sempre um raciocínio global que escondia, dentro da questão lógica da demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar (CABARITI, 2004).

Após diversas tentativas de demonstrar o quinto postulado, foi sua negação que levou à construção de novas geometrias, tão consistentes como a de Euclides. Existem duas maneiras de negar o quinto postulado. A *descoberta* das Geometrias não-euclidianas provocou uma mudança na maneira de pensar o espaço e a verdade matemática. Essa mudança permitiu que se abrisse espaço para o estudo de outras geometrias.

Ao pensar nos fenômenos e imagens encontradas na natureza, percebemos que apresentam mistérios e belezas que, por muitas vezes, são incompreensíveis e inexplicáveis euclidianamente, mas são observadas, admiradas e estudadas por diversos pesquisadores. Salvador (2009, p. 1) menciona que,

Na Geometria do mundo que vivemos, observamos atentamente as formas tortuosas dos caminhos, das costas oceânicas, dos vales, dos montes, das nuvens, do sistema vascular humano, das folhas, dos galhos de arbustos ou

árvores, na forma dos brócolis ou de uma couve-flor e também na forma esburacada de um pão ou de um pedaço de queijo, e no nível nanométrico dos objetos encontramos formações rugosas que apresentam estruturas auto-similares, em que partes pequenas do objeto parecem ou são réplicas reduzidas do todo.

Os geômetras da antiguidade, incluindo Euclides, consideravam as formas da natureza perfeitas em seus aspectos e beleza. Benoit Mandelbrot (1924-2010) olhou para tais formas com um novo olhar: ele pesquisou “a geometria de objetos com uma forma que se auto repete dentro de si e que parece sempre semelhante, independente da ampliação ou redução da sua imagem, introduzindo assim o conceito de fractal” (SALVADOR, 2009, p. 2).

Mandelbrot nasceu em Varsóvia, sempre gostou de Geometria, e procurava resolver problemas de Matemática com o auxílio dela. Observou a relação entre padrões, simetrias, o caos e a ordem, estudando e investigando os Fractais. O nome Geometria Fractal vem do latim, cujo verbo *frangere* significa criar fragmentos irregulares, fragmentar.

Mandelbrot definiu um objeto fractal por meio de três características principais: autossemelhança, dimensão fracionária e complexidade infinita. Santaló (2006, p. 22, grifo do autor) destaca que, nas últimas décadas, a Geometria dos Fractais

[...] tem despertado muito interesse pelo seu amplo espectro de aplicações, desde as artes plásticas até a física, a biologia e a astronomia, e que tem muitos vínculos com a computação e, também, com as teorias ‘caóticas’ questão se desenvolvendo conjuntamente a partir da física e da filosofia.

No que se refere à autossemelhança ou autossimilaridade, Barbosa (2002) destaca que esta característica busca explicar o traçado de formas fragmentadas e irregulares, além de apresentar o impacto de surpresa de ordem existente na desordem. Para além disso, as características mencionadas possibilitam visualizar ordem e padrões onde antes se via apenas irregularidades, o imprevisível, o caótico. Ademais, a dimensão de um Fractal, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um número inteiro, podendo ser um número fracionário. No entanto, compreender e determinar a dimensão de um Fractal requer cálculos mais sofisticados, porém não muito complexos. Com relação à complexidade infinita, temos que os processos geradores dos Fractais podem ser recursivos, tendo um número infinito de iterações atribuído a ele; em outras palavras, podemos ampliar uma figura Fractal quantas vezes desejarmos sem nunca obter a imagem final.

O estudo dos Fractais também possibilita o pensar na Geometria de forma diferenciada, levando em conta a percepção e a existência do belo no senso estético da Matemática, além de apresentar o impacto de surpresa de ordem existente na desordem.

Para Barbosa (2002, p. 10),

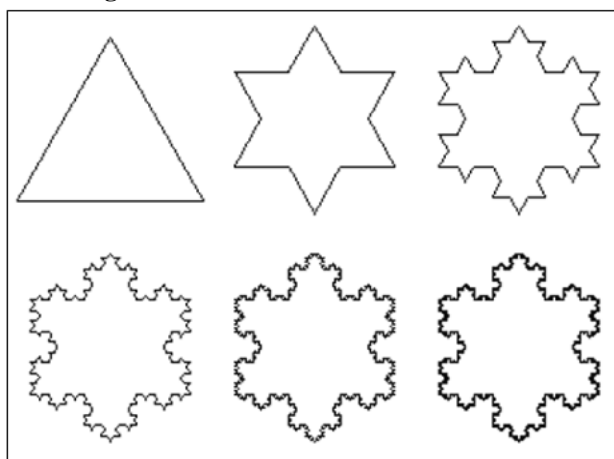
Nessas quatro ou cinco décadas vimos o nascimento e o subsequente desenvolvimento de uma nova ciência, denominada CAOS. Biólogos, físicos, economistas, astrônomos, meteorologistas, ecologistas, fisiologistas e cientistas de várias outras especialidades se depararam com questões oriundas da natureza, procurando dar enfoque mais adequados à sua complexidade.

Em uma figura Fractal não é possível determinar um *final*, pois ela é composta por iterações infinitas, não concluindo, assim, uma *imagem final*, podendo ser continuamente ampliada.

Na sequência apresentamos, como exemplo, dois modelos de Fractais na Matemática: o Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski.

O Floco de Neve de Koch foi desenvolvido pelo matemático Helge Von Koch, e para a sua construção, partimos de um triângulo equilátero para obter o Fractal (nível 0), de tal forma que cada lado do triângulo inicial seja dividido em três partes iguais, e a parte do meio desta divisão seja substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados. Assim sendo, transforma-se cada um dos três segmentos em quatro outros segmentos, existindo, portanto, 12 segmentos congruentes. Esta etapa é considerada o nível 1 do Fractal. Para obter os demais níveis, devemos proceder da mesma forma em cada um dos 12 segmentos obtidos sucessivamente.

Figura 1: Níveis do floco de Neve de Koch

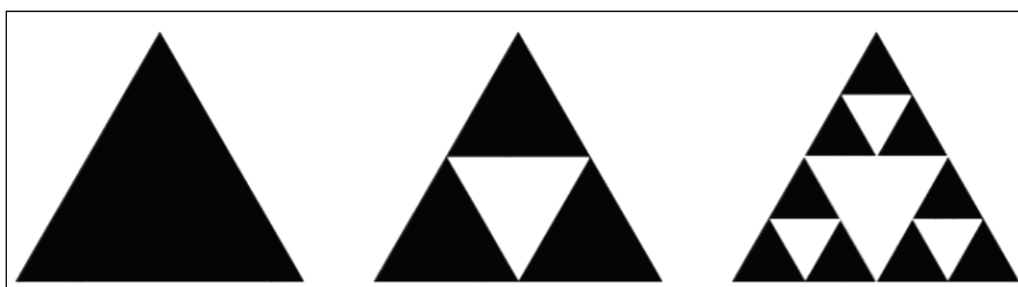


Fonte: A autora (2019).

Quando o número de iterações deste objeto Fractal tende para o infinito, o perímetro do Floco de Neve de Koch tende para o infinito, sua área será finita e sua dimensão não inteira.

O Triângulo de Sierpinski, por sua vez, foi estudado por Waclaw Sierpinski (1882-1969), e seu processo consiste em uma remoção padrão de partes da figura. Esse processo de remoção parte da construção de um triângulo equilátero de tal forma que, ao encontrar o ponto médio de cada um dos lados, devemos marcar os segmentos com origem nos pontos médios para, com isso, obter quatro triângulos equiláteros. Logo após, o triângulo central da figura formada é removido. Esta etapa é considerada o nível 1 do Fractal, e para obter os demais níveis, basta procedermos da mesma maneira nos triângulos que sobraram, e assim sucessivamente.

Figura 2: Níveis do Triângulo de Sierpinski



Fonte: A autora (2019).

No caso do Triângulo de Sierpinski, quando o número de iterações tende para o infinito, seu perímetro tende para infinito e sua área tende para zero. O triângulo de Sierpinski também não tem dimensão inteira.

Logo, a atribuição do estudo da Geometria dos Fractais nas salas de aula, bem como sua abordagem em um contexto educativo, possibilita aos alunos manterem o contato com este assunto, aprimorando seus saberes e provocando a criticidade sobre uma nova Geometria. Sobre isto, Picolli (2006, p. 07) comenta:

A realidade das salas de aula aponta para um ensino muitas vezes descontextualizado; os alunos não chegam, em geral, a fazer uma relação entre os assuntos estudados na escola e suas vivências extra-escolares [sic], e, por isso, talvez, acabem por, simplesmente, memorizar conceitos prontos, regras, fórmulas que perdem o significado no cotidiano. Percebe-se, assim, a necessidade de aproximar escola e aluno.

No que tange as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE quanto à inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica do Ensino Médio do Estado do Paraná, temos:

Na geometria dos fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski. Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera [sic], pontos ideais,

triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto a medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: pólos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 27-8).

O documento mostra a importância da abordagem dos conceitos das Geometrias não-euclidianas para que os alunos do Ensino Médio ampliem seus conhecimentos e pensamentos geométricos.

Com relação ao ensino de Geometria, as reformas nas leis que organizam o ensino no Brasil oportunizaram perceber uma crescente onda de resgate do ensino deste tema, conteúdo que, por muitas, vezes foi esquecido devido à grande valorização dos conceitos algébricos, resultado do Movimento da Matemática Moderna. Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) apontam para a carência dos conteúdos de geometria no ensino de Matemática, verificadas como possíveis causas a formação do professor, o currículo, e até mesmo o livro didático. Lorenzato (1995, p. 06) reforça essa ideia, afirmando que

São inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que entre nós desempenha o livro didático.

Deste modo, a partir da década de 90, influenciados pelas novas concepções a respeito da construção do conhecimento e dos trabalhos de Piaget, Vygotsky e Vergnaud, surgiram discussões sobre a importância do conhecimento geométrico buscando seu resgate. “Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver situações de vida que forem geometrizadas [...]” (LORENZATO, 1995, p. 5).

Priorizar, no ensino de Matemática na Educação Básica, os conceitos de Geometria, é colaborar com o aluno para que ele amplie o seu horizonte de conhecimento, visto que o ambiente em que vivemos está mais próximo dos conceitos das geometrias não-euclidianas. Cruz (2008, p. 4) confirma esta utilidade:

É necessário discutir com os alunos que a perfeição dos espaços geográficos é consequência da atividade humana, sendo que, em muitos espaços onde

vivemos nos deparamos com situações que fogem das alterações proferidas pelas pessoas e, portanto, foge aos conceitos de geometria plana, uma geometria Euclidiana. É coerente, do ponto de vista da aprendizagem matemática, explorar os conceitos de Geometria Não Euclidiana [sic].

Argumentos como esses evidenciam a importância do ensino de Geometria, visando à ampliação do universo de conhecimento do aluno e de seu senso crítico na sociedade.

Tendo conhecimento da presença da Geometria dos Fractais nas DCE, surgiu a indagação da comparência deste conteúdo nos livros didáticos adotados no estado do Paraná, uma vez que, segundo Frizon, (2009, p.3) “a realidade da maioria das escolas, mostra que o livro didático tem sido praticamente o único instrumento de apoio do professor e que se constitui numa importante fonte de estudo e pesquisa para os estudantes”.

Sobre o livro didático, Lopes (2007, p. 208) atribui uma definição clássica a esta instituição, a qual há “de ser uma versão didatizada do conhecimento para fins escolares e/ou com o propósito de formação de valores que configuram concepções de conhecimentos, de valores, identidades e visões de mundo”.

Para realizar nossa pesquisa diante da indagação da comparência do conteúdo Geometria dos Fractais nos livros didáticos, avançamos para a realização de estudos praxeológicos didáticos e matemáticos advindos da compreensão da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Ao falar de produções científicas envolvendo a Geometria dos Fractais, podemos afirmar que elas não abrangem uma única área do conhecimento. Como visto anteriormente, ela promove exatidão em seus resultados, tornando-se satisfatória em suas aplicações.

À vista disso, com o objetivo de tomar conhecimento dos trabalhos produzidos que estudam a Geometria dos Fractais, realizamos um levantamento de teses e dissertações acerca deste tema, o qual apresentaremos na sequência.

1.1.1 A Geometria dos Fractais em dissertações e teses

Para a obtenção dos dados que compõem esta subseção, realizamos uma pesquisa bibliográfica na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD. Definimos como o assunto de nossa busca “fractal”, “fractais”, com os seguintes critérios de inclusão:

1. **Temática:** estudos que tenham abordado o assunto “fractal” ou “fractais”;
2. **Período de publicação:** estudos que foram publicados de 1999 a 2020;

3. **Idioma:** estudos que estão somente em português; e
4. **Tipo de publicação:** publicações que estejam no formato de dissertações e teses.

Durante essa pesquisa, deparamo-nos com aplicações e estudos da Geometria dos Fractais em diversas áreas, sendo elas: Educação Matemática, Matemática Pura, Engenharia Elétrica, Computação, Agronomia, Sistemas Ambientais e Física. Dessa forma, percebe-se quão extensa é a aplicabilidade da Geometria dos Fractais, e o quão importante é o seu aprendizado.

A seguir, exibimos um quadro que apresenta 27 trabalhos encontrados, demonstrando seu título, tipo do documento, ano de defesa, autores e área. Este quadro foi organizado de modo que, nas primeiras linhas, apresentamos as dissertações e, posteriormente, as teses, em ordem crescente a partir do ano de suas defesas.

Quadro 1: Dissertações e Teses – Geometria dos Fractais

TÍTULO DO TEXTO	TIPO DOCUMENTO	ANO DA DEFESA	AUTOR	PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO	INSTITUIÇÃO DE DEFESA
Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações como transformações geométricas no plano	Dissertação	2004	Ricardo Ronaldo Ebersson	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Um modelo multifractal aplicado a predição de tráfego de redes-proposta e avaliação	Dissertação	2005	Gabriel Rocon Bianchi	Engenharia Elétrica e de Computação	Universidade Estadual de Campinas
Os Fractais na formação docente e sua prática em sala de aula	Dissertação	2006	Arlete Aparecida Oliveira de Almeida	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Identificação de dimensões fractais a partir de uma analogia dinâmica	Dissertação	2007	Marcelo Miranda Barros	Modelagem Computacional	Laboratório Nacional de Computação Científica
Novas configurações de monopólios planares quase-fractais para sistemas de comunicações móveis	Dissertação	2008	Marcelo Ribeiro da Silva	Engenharia Elétrica	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Contribuições à geração de tráfego fractal por meio da transformada wavelet.	Dissertação	2008	Isabelle Reis Lund	Engenharia Elétrica	Universidade de São Paulo
Atratores para sistemas dinâmicos discretos: dimensão	Dissertação	2009	Matheus Cheque Bortolan	Matemática	Universidade de São Paulo

fractal e continuidade da estrutura por perturbações					
Geração de meios porosos fractais com uma nova equação do tipo Kozeny-Carman	Dissertação	2010	Juan Diego Cardoso Brêttas	Modelagem Computacional	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática	Dissertação	2011	Nilson Jorge Baldovinotti	Educação Matemática	Universidade Estadual Paulista
Antenas impressas compactas para sistemas WIMAX	Dissertação	2012	Leonardo Bastos Moraes	Engenharia Elétrica	Universidade de São Paulo
Conhecendo fractal no ensino médio: árvore pitagórica	Dissertação	2013	Celso Henrique Nicola	PROFMAT	Universidade Federal de São Carlos
Noções de geometria fractal elementar	Dissertação	2014	Anderson Tadeu Gonçalves de Araujo	PROFMAT	Universidade Federal de Sergipe
Classificação de data streams utilizando árvore de decisão estatística e a teoria dos fractais na análise evolutiva dos dados	Dissertação	2014	Mirela Teixeira Cazzolato	Ciência da Computação	Universidade Federal de São Carlos
Introdução ao estudo dos fractais	Dissertação	2014	Marília Gomes Negri	PROFMAT	Universidade Federal de Goiás
Estudo da geometria fractal clássica	Dissertação	2015	Ricardo Anselmo Zanotto	PROFMAT	Universidade Federal de Goiás
Geometria fractal: da natureza para a sala de aula	Dissertação	2015	José Roberto Ferreira Filho	PROFMAT	Universidade Federal de Sergipe

Teoria matemática implícita na geometria fractal: construindo fractais com a ferramenta computacional Asymptote	Dissertação	2015	Jerrimar Moraes de Araújo	PROFMAT	Universidade Federal de Roraima
Análise multifractal da variabilidade espacial pluviométrica no estado de Minas Gerais	Dissertação	2017	Flavio Henrique Nery	Sistemas Ambientais	Universidade Federal de Minas Gerais
Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações	Dissertação	2017	Laís Fernanda Mucheroni	Matemática	Universidade Estadual Paulista
Análise de estruturas inspiradas em fractais aplicadas em antenas e superfícies seletivas de frequência	Dissertação	2018	Yuri Max Vieira Batista	Engenharia Elétrica e de Computação	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Análise não-linear no reconhecimento de padrões sonoros: estudo de caso para sons pulmonares	Tese	1999	Ricardo Felipe Custódio	Modelagem Computacional	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Identificação de correlações usando a Teoria dos Fractais	Tese	2006	Elaine Parros Machado de Sousa	Ciências da Computação e Matemática Computacional	Universidade de São Paulo
Dimensão topológica e mapas auto organizáveis de Kohonen	Tese	2006	Sarajane Marques Peres	Engenharia Elétrica	Universidade Estadual de Campinas
Análise do desempenho dos arranjos físicos	Tese	2007	José Hamilton Chaves Gorgulho Júnior	Engenharia Mecânica	Universidade de São Paulo

distribuídos em ambiente de roteamento de tarefas com flexibilidade de seqüência de fabricação					
Máquina de somar, conjuntos de Julia e fractais de Rauzy	Tese	2011	Rafael Asmat Uceda	Matemática	Universidade Estadual Paulista
Variabilidade espacial da emissão de CO2 e sua relação com propriedades do solo em área de cana-de-açúcar no Sudeste do Brasil	Tese	2011	Alan Rodrigo Panosso	Agronomia	Universidade Estadual Paulista
Descritores fractais aplicados à análise de texturas	Tese	2013	João Batista Florindo Odemir Martinez Bruno	Física	Universidade de São Paulo

Fonte: A autora (2020).

Diante do quadro apresentado, analisamos o objetivo e os procedimentos metodológicos dos trabalhos por meio de seu resumo. No entanto, nesse momento, optamos por apresentar somente as dissertações e teses de Programas de Mestrado em Matemática, Programas de Mestrado Profissional em Matemática e Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática. Tal opção ocorreu devido à observação de que, nesses trabalhos, a Geometria Fractal foi abordada com um objetivo existente na própria Matemática ou no seu ensino. Contudo, outros trabalhos, da Matemática Pura e de outras áreas foram encontrados, mas devido à complexidade de suas aplicações, omitiremos apresentar suas informações, por não serem relevantes para o nosso trabalho.

Dentre os trabalhos apresentados, 6 pertencem a Programas de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 3 de Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, e 2 de Pós-Graduação em Matemática.

Iniciamos esta parte de nosso trabalho descrevendo um breve resumo sobre os trabalhos que abordaram aspectos da Geometria Fractal encontrados nos PROFMAT.

A dissertação de Zanotto (2015) aborda temas iniciais da geometria não-euclidiana, e no decorrer do trabalho, expõe o estudo sobre fractais, seu histórico, construções e principais fractais (conhecidos como fractais clássicos). Também aborda relações entre os conteúdos dos anos escolares e como usar fractais neles, além de algumas de suas aplicações.

A dissertação de Ferreira Filho (2015) trata do estudo da geometria fractal, enfatizando suas principais características compreendidas com base nos sistemas naturais que as motivam. Apresenta alguns nomes que contribuíram para o surgimento e desenvolvimento dos fractais matemáticos, destacando os exemplos de fractais naturais, e as contribuições do pioneiro Benoit B. Mandelbrot.

O trabalho de Araújo (2014) demonstra alguns dos principais fractais elementares, ressaltando alguns padrões matemáticos e suas autossimilaridades. O autor faz sugestões de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio. Além dessa apresentação, analisa ferramentas matemáticas básicas estudadas no plano cartesiano, e recorre à álgebra linear a fim de compreender conceitos iniciais necessários à Geometria Fractal elementar. Por fim, desenvolve um breve estudo sobre uma das características fundamentais que um fractal possui, a dimensão de fractais elementares.

O trabalho de Araújo (2015) consiste em um relato sobre a origem da Geometria Fractal, tendo em destaque a figura de Benoît Mandelbrot, identificado como pioneiro nesta área, cujo

fractal leva seu nome. Mostra os fractais pioneiros, assim como a construção deles através da ferramenta computacional Asymptote. É necessário informar que, a partir da construção desses fractais, percebe-se, com facilidade, um intenso uso de conteúdos presentes no currículo escolar do ensino básico como, por exemplo, o cálculo de perímetro e de áreas de figuras planas, potenciação, problemas de contagens, entre outros. Eles podem ser abordados com o intuito de introduzir tal conteúdo, ou mesmo aprofundá-lo. Por fim, o trabalho faz uso 'de Indução Matemática para demonstrar algumas das fórmulas encontradas.

A dissertação de Negri (2014) teve como objetivo estudar os fractais com suas características: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionada. Nesse sentido, o autor estudou alguns fractais geométricos, cujas aproximações podem ser construídas em papel, e outros fractais nos quais sua complexidade de formação só pode ser representada e gerada por meio de recursos computacionais. Dessa forma, para realização do trabalho, foi feito um levantamento bibliográfico desse assunto, complementado com o cálculo de dados apenas indicados em suas referências. Foram citados, também, alguns exemplos de aplicações da geometria fractal.

O trabalho de Nicola (2013) teve o objetivo de expor os resultados de uma experiência didática que envolveu o uso de software de geometria dinâmica em uma área restrita da Matemática, denominada fractal, a qual apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza. Para tanto, são apresentados alguns fractais, em particular, a Árvore Pitagórica. Para as construções, foi escolhido o software GeoGebra, baseado em aulas de geometria de um curso que o autor participou. Além disso, é explorado o Teorema de Pitágoras e outros conteúdos de matemática, tais como contagem. Ele estudou as principais tendências ligadas à informática a fim de aproveitar os recursos da tecnologia computacional para colaborar com a construção e a aprendizagem do aluno, inserindo-o no novo cenário educacional fundado na presença da informática.

O autor Almeida (2006) objetivou investigar uma abordagem para o ensino da geometria dos Fractais sob o olhar do professor e sua receptividade no desenvolvimento de uma sequência didática para abordar o conceito de Fractais. A pesquisa foi realizada junto a um grupo de professores da Rede Pública Estadual, desenvolvida em dois encontros. As análises apontam que o professor está receptivo às novas propostas, precisando apenas de oportunidade e espaço para reflexão sobre suas ações.

Os trabalhos de Uceda (2011) e Mucheroni (2017) são voltados à aplicação e não ao ensino, e por isso não nos aprofundamos sobre suas finalidades.

Tal levantamento foi efetuado com o intuito de elencar, tomar conhecimento e realizar uma análise de algumas das produções feitas sobre fractais em livros didáticos. No entanto, a abrangência dos dois temas concomitantemente em uma única pesquisa não foi encontrada. Por esse motivo, apresentamos somente suas aplicações nas diferentes áreas do conhecimento realizadas até os dias de hoje.

A fim disso, quando estudamos de que maneira a organização praxeológica da Geometria dos Fractais apresenta-se nos livros didáticos, estamos nos importando em como está sendo sugerido que este conteúdo seja estudado no Estado do Paraná. Ainda, quando buscamos por tomar conhecimento das produções científicas sobre esse conteúdo, queremos saber até que ponto essa Geometria está sendo estudada, ou está sendo importante no meio acadêmico de modo geral.

Portanto, tal levantamento possibilitou que vislumbrássemos a abrangência das pesquisas na área, e tendo em vista do que se trata a Geometria Fractal e a diversidade de suas aplicações, reforçamos a importância e a necessidade de que ela seja trabalhada em sala de aula. Assim, destacamos a relevância que seus principais aspectos sejam abordados em livros didáticos de Matemática, de modo a explorar seu potencial como conteúdo, que possibilita a compreensão de diversos assuntos da Matemática e de outras áreas a ela relacionada.

Desse modo, como base para a nossa pesquisa, no que diz respeito ao conteúdo Geometria Fractal em livros didáticos, abordamos a seguir, alguns aspectos da Teoria Antropológica do Didático, a qual subsidia nossa investigação.

2.2 Teoria Antropológica do Didático (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard, trata-se de uma teoria desenvolvida no quadro da Didática da Matemática e que permite, particularmente, analisar situações de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Entretanto, os estudos da TAD podem ser desenvolvidos em outras áreas do conhecimento, como por exemplo a Física, a Biologia e demais áreas, uma vez que podemos aplicar seus conceitos em atividades desenvolvidas ao longo de um processo de ensino, não somente matemático.

A TAD está associada à teoria da Transposição Didática, também desenvolvida por Yves Chevallard, a qual estuda o processo que permite que o saber passe de uma instituição para outra instituição de ensino, em que compreende transformações que um saber sofre a fim de ser ensinado.

No contexto da TAD, Chevallard (1992) considera instituições os locais onde o saber vive, por exemplo, *uma sala de aula*, ou *uma família*, isto é, um local, não unicamente relacionado ao sentido físico, mas por se tratar de onde possa ser desenvolvida uma praxeologia. Segundo Chevallard (1989), um saber não existe em um vazio social, estando, assim, ligado a pelo menos uma instituição. Portanto, há certas “condições e restrições que devem ser respeitadas para que um certo saber possa existir nesta instituição” (BITTAR, 2017, p. 366). A escola, por sua vez, pode ser considerada uma instituição por se tratar de um dispositivo social que impõe condições e regras para aqueles que nela ocupam alguma função, como o professor, o aluno, entre outros.

Em nossa pesquisa, estudamos o conceito Geometria Fractal vivendo na instituição livro didático (LD). Freitas e Rodrigues (2007, p.39) comentam que o “o livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e, ao longo de tantas transformações na sociedade, ele ainda possui uma função relevante para a criança, na missão de atuar como mediador na construção do conhecimento”. Assim sendo, podemos destacar a influência da abordagem do conteúdo no LD, sobre a atuação na prática profissional do professor e no conteúdo que será ministrado.

Outra teoria, também necessária de ser compreendida, é a Ecologia dos Saberes, que estuda as condições de existência de um saber em uma determinada instituição. Ao estudar a Ecologia dos Saberes, investiga-se o contexto do conceito em questão, como por exemplo: o que e por que existe? Ou não existe? O que poderia existir? Analisando um conjunto de condições, quais objetos podem ou não existir nessas circunstâncias? |Em outras palavras, é investigar a razão de ser do objeto. Realizar uma análise de 3 livros didáticos, a priori, do Primeiro Ano, permitiu-nos estudar possibilidades da Ecologia da Geometria dos Fractais nesses contextos, conforme pode ser observado nas análises desta dissertação.

A Teoria Antropológica do Didático, por sua vez, oferece subsídios para investigar e modelar a atividade matemática. Essa teoria considera que toda atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard de praxeologia ou organização praxeológica (BITTAR, 2017).

O conhecimento, sob a perspectiva proposta pela TAD, é oriundo de alguma atividade humana. Em vista disso, conhecimentos matemáticos transcorrem de atividades matemáticas. De acordo com Casabò (2001, p. 15)

Tanto o conhecimento como a atividade matemática são construções sociais que se realizam em instituições – em comunidade –, seguindo determinados

contratos institucionais. Estudar as condições de produção e difusão do conhecimento matemático requer então que sejamos capazes de descrever e analisar determinados tipos de atividades humanas que se realizam em condições particulares [...] (*apud* KARPARY; BITTAR, 2014, p. 39-40).

Em nosso trabalho, atemo-nos à abordagem da teoria Geometria Fractal e às atividades matemáticas propostas por alguns livros didáticos. Para analisar e descrever essa e qualquer outra prática matemática, a TAD nos oferece “instrumentos claramente operatórios”³ (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 4). Trata-se de resultados da composição de um modelo que recebe o nome de praxeologia ou organização praxeológica. Este modelo é composto pelos seguintes elementos: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. A seguir, descrevemos brevemente cada um deles.

O Tipo de Tarefa é determinado por uma proposição composta por um verbo concernente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo, e é representado pela letra T. Como exemplo, *aplicar a fórmula de Bháskara* é uma tarefa; *desenvolver a fórmula da soma e produto* é outra tarefa, que tem semelhança com a anterior. Podemos falar, então, em tarefas que são de um mesmo tipo: encontrar as raízes de uma equação do segundo grau. Cada tarefa desse conjunto demanda uma técnica que depende dos coeficientes da equação de que cada questão apresenta: encontrar as raízes de uma equação incompleta pelo método de soma e produto é diferente de encontrar as raízes de uma equação completa pelo método de Bháskara. O tipo de tarefa é descrito ou definido por um verbo de ação (encontrar) e um complemento (raízes da equação); observamos, assim, a necessidade do complemento para que o tipo de tarefa se apresente bem definido.

Mediante a uma técnica τ , sendo esta um modo ou modelo escolhido para desempenhar a tarefa, uma ação ou um passo a passo se inicia com o objetivo de cumprir o tipo de tarefa proposto. A técnica, por sua vez, é justificada por uma tecnologia θ , que fundamenta e embasa o seu emprego, fornecendo credibilidade e confiabilidade à técnica escolhida. A teoria Θ , no que lhe diz respeito, tem atribuição de justificar e explicar a tecnologia de forma aprofundada. Por fim, estes quatro elementos compõem o quarteto praxeológico, o qual é simbolizado pela notação $[T, \tau, \theta, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999).

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 251, grifos dos autores),

Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas, e de outro, as tecnologias e as teorias. A primeira parte é o que

³ “*des instruments clairement opératoires*”.

podemos chamar de “prática”, em grego a *práxis*. A segunda é composto por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de *logos*.

Esses blocos constituem o quarteto $[T, \tau, \theta, \Theta]$, no qual temos o bloco prático-técnico $[T, \tau]$ relativo à *práxis*; bem como o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, relativo ao *logos*.

Com relação ao bloco da *práxis*, os tipos de tarefas são aquelas semelhantes, de certo tema. Segundo Bittar (2017), esse tipo de tarefas é definido por um verbo de ação e um complemento; percebe-se, desta forma, a necessidade do complemento para que o tipo de tarefa esteja bem definido. No que diz respeito às técnicas, não significa que elas serão as mesmas para todos os tipos de tarefa. Ela é constituída de uma forma ou um modelo escolhido para resolver uma tarefa, uma ação ou um passo a passo. Para cada tarefa existe uma técnica a ser empregada.

A tecnologia, por sua vez, está inserida no segundo bloco do quarteto praxeológico, denominado bloco *logos*. A tecnologia é o que é necessário conhecer para aplicar uma determinada técnica; é o estudo da técnica. A tecnologia justifica, fundamenta e embasa o emprego da técnica na resolução de um tipo de tarefa. Segundo Chevallard (1999), a tecnologia deve:

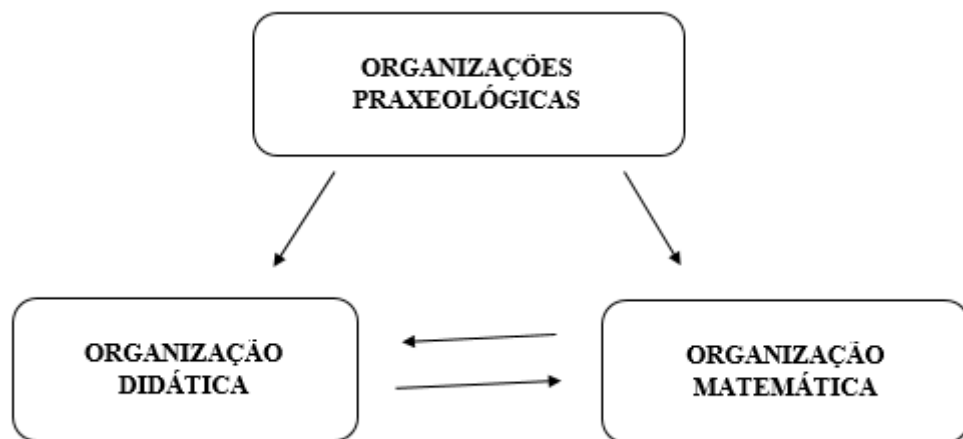
1. Justificar: garantir que uma dada técnica permita realizar as tarefas $t \in T$;
2. Explicar: tornar inteligível a técnica, expondo porque a técnica é correta; e
3. Produzir novas técnicas: a partir de tecnologias que estão associadas a poucas ou a nenhuma técnica.

A teoria desempenha papel de justificação, explicação e produção para a tecnologia, o mesmo papel que a tecnologia tem para com a técnica, e assim como Chevallard (1999) se refere, afirmando que a teoria seria *tecnologia da tecnologia*.

A TAD oferece subsídios para empregarmos como metodologia de pesquisa, bem como metodologia de ensino, investigando e explorando tarefas, de maneira a elaborar modelos praxeológicos, os quais podem orientar a realização do desenvolvimento de atividades matemáticas.

Para a análise de livros didáticos, Chevallard (1999) permite a identificação de organizações praxeológicas, envolvendo tanto a organização matemática (ou praxeologia matemática), como a organização didática (ou praxeologia didática).

Figura 3: Organizações Praxeológicas



Fonte: A Autora (2020).

A análise de uma praxeologia matemática baseia-se no entorno do estudo da Matemática: da sua identificação; melhor dizendo, é a verificação proposta dos tipos de tarefa, das técnicas, de suas tecnologias e teorias, relacionada ao quarteto praxeológico.

Diante da organização didática, podemos entendê-la como o modo pelo qual é construída e organizada a praxeologia matemática. A praxeologia didática, além de ser estruturada pelo quarteto, também pode ser descrita por momentos didáticos, ou momentos de estudo propostos por Chevallard (1999), os quais descrevemos resumidamente a seguir.

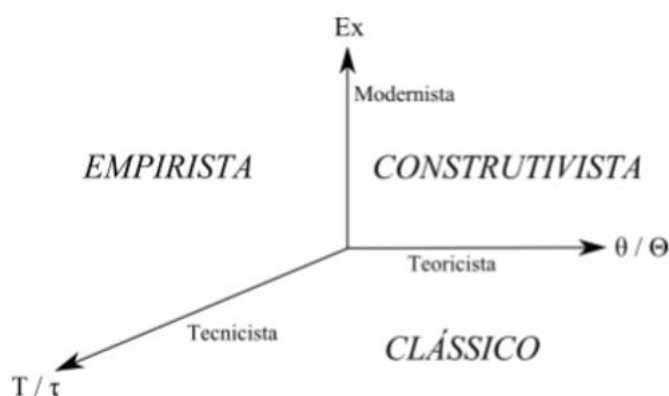
- Primeiro encontro com a praxeologia proposta: caracteriza-se pelo primeiro contato com a praxeologia em questão, salientando que tal organização pode ou deve ser revista no decorrer do período escolar. Na maior parte dos casos, esse momento didático não tem a função de explorar excessivamente o objeto matemático, o que poderá ser realizado no decorrer dos demais momentos;
- Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica para resolver esse tipo de tarefa: é o momento da exploração das tarefas, início da elaboração de uma técnica. Chevallard (2008) ressalta que o estudo de um determinado tipo de tarefa, por si só, não faria sentido, se não fosse para a elaboração de técnicas, que é a finalidade de qualquer atividade matemática;
- Constituição do entorno tecnológico-teórico $[\theta, \theta]$: desde o primeiro contato com a praxeologia, há princípios tecnológico-teóricos que foram vistos no decorrer dos anos escolares, e que são evocados, nesse momento, conjuntamente com a ocasião da exploração de um tipo de tarefa e técnica, para a construção de uma nova praxeologia. Em outras abordagens, este terceiro momento atribui-se de forma a iniciar os estudos da praxeologia; melhor dizendo, “apresentam-se as

justificativas, para então, estudar os tipos de tarefas que podem ser subsidiados por esse entorno tecnológico-teórico” (GONÇALVES, 2016, p. 62);

- Trabalho com a técnica: é o momento que tem como finalidade estudar e explorar a técnica desenvolvida, com o intuito de torná-la mais eficiente e confiável;
- Institucionalização da praxeologia: momento da formalização do saber matemático estudado, dispondo daqueles que se fizeram mais eficientes para a construção da praxeologia; e
- Avaliação da organização praxeológica: este momento se articula com o momento da institucionalização, é a ocasião de refletir sobre a eficiência das técnicas atribuídas, bem como investigar e verificar o que foi estudado até o presente.

Se faz preciso esclarecermos que tais momentos não obedecem necessariamente a uma ordem, eles não se sucedem em sequência, e podem se repetir inúmeras vezes. Diante desses momentos didáticos, Gascón (2003) estabelece um modelo espacial das possíveis organizações didáticas, que podem ser apontadas em organizações praxeológicas da atividade matemática. Ele esquematiza tal modelo conforme a figura 4.

Figura 4: Modelo proposto por Gascón (2003)



Fonte: Gascón (2003, p. 21).

Em um espaço tridimensional, Gascón (2003) representa três momentos relacionados à organização didática, descritos por Chevallard (1999): teoricista, modernista e tecnicista. As organizações didáticas teoricistas priorizam a aprendizagem matemática voltada diretamente a aspectos teóricos; secundarizam, por sua vez, as atividades matemáticas. O aluno é orientado através de conceitos simples até a elaboração de atividades teóricas complexas.

A segunda organização didática, modernista, apresenta um olhar especial para o momento da exploração das tarefas, bem como para a elaboração das técnicas. Ao aluno, nesse espaço, são propostos problemas de diferentes naturezas, possibilitando que eles utilizem técnicas diversas, apliquem resultados conhecidos, possam buscar problemas semelhantes ao proposto, e formular conjecturas e contraexemplos.

Por fim, a característica fundamental da terceira organização didática, tecnicista, é a supervalorização do momento de trabalho com a técnica. A reprodução repetitiva de técnicas e o domínio de diferentes maneiras de resolução definem o ato de aprender, nessa organização.

Podemos concluir que as três organizações citadas anteriormente se tratam relativamente do momento tecnológico-teórico, momento exploratório, e momento de trabalho com a técnica (GASCÓN, 2003). Gáscon (2003) comenta que esses modelos de ensino são extremamente reducionistas. Assim sendo, os processos de ensino são pensados exclusivamente pelo professor, e o aluno tem papel de reprodutor do ensino, nesse propósito (GONÇALVES, 2016).

Deste modo, podemos considerar praxeologias desenvolvidas no contexto de mais de uma dessas vertentes, originando-se outros três tipos de organizações didáticas formadas pela combinação de cada dupla de eixo. Originam-se, então, ensinamentos do tipo empirista, clássico e construtivista.

A primeira delas consiste em atribuir maior valorização aos aspectos práticos ou técnicos do estudo da matemática, a segunda se caracteriza pela maior valorização de aspectos teóricos e tecnológicos, e a terceira tendência consiste em priorizar atitudes mais exploratórias ou construtivistas da atividade matemática escolar (BITTAR; FREITAS; PAIS, 2013, p. 19).

Vale destacar que as organizações matemáticas, em determinadas ocasiões, podem demonstrar maior ou menor proximidade com uma dessas perspectivas, a fim de que as escolhas didáticas que põem em atividade a matemática estudada, inevitavelmente impliquem na matemática apreendida pelo aluno.

Desta forma, ao buscar compreender o cenário do conteúdo Geometria dos Fractais nas escolas, a análise da organização didática proposta pelas coleções de livros didáticos adotadas se faz fundamental.

Isto posto, apresentamos, na sequência, a subseção que expõe o levantamento de teses e dissertações que utilizam a TAD em análises de livros didáticos, mais especificamente estudos de ordem de organização praxeológica, apresentadas até meados de 2020.

2.2.1 Organização praxeológica em livros didáticos: um levantamento de dissertações e teses

Com a finalidade de aquisição dos dados que constituem esta subseção, realizamos uma pesquisa bibliográfica na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD. Definimos como temas de nossa busca “Teoria Antropológica do Didático”, “Livro Didático”, e “Organização Praxeológica”, com os seguintes critérios de inclusão:

1. **Descritores:** estudos que abordam “Teoria Antropológica do Didático”, “Livro Didático” e “Organização Praxeológica”;
2. **Período de publicação:** estudos que foram publicados de 2005 a 2020;
3. **Idioma:** estudos que estão somente em português; e
4. **Tipo de publicação:** publicações que estejam no formato de dissertações e teses.

Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, deparamo-nos com trabalhos realizados em Programas de Pós-graduação em Educação Matemática, em Educação, Ensino de Ciências e Educação Científica e Tecnológica.

Na sequência, exibimos um quadro que apresenta 14 trabalhos encontrados, demonstrando seu título, tipo do documento, ano de defesa, autores e área. Este quadro foi organizado de modo que nas primeiras linhas apresentamos as dissertações, e posteriormente, as teses, em ordem crescente a partir do ano de suas defesas.

Quadro 2: Dissertações e Teses – TAD e livro didático

TÍTULO DO TEXTO	TIPO DOCUMENTO	ANO DA DEFESA	AUTOR	PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO	INSTITUIÇÃO DE DEFESA
A noção de variável em livros didáticos de Ensino Fundamental: um estudo sob ótica da organização praxeológica	Dissertação	2005	Eliana da Silva Cruz	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias	Dissertação	2006	Renata Rossini	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica	Dissertação	2007	Pedro Mateus	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
A organização praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do ensino fundamental	Dissertação	2008	Cristini Kuerten Maia	Educação Científica e Tecnológica	Universidade Federal de Santa Catarina
A calculadora como recurso didático nos anos iniciais do Ensino Fundamental	Dissertação	2009	Vania Marina Prates de Abreu	Educação Matemática	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique	Dissertação	2010	Jacinto Ordem	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Progressões aritméticas e geométricas:	Dissertação	2012	Eliane Aparecida Martins de Almeida	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso

praxeologias em livros didáticos de matemática					
Regressão linear simples nos livros de estatística para cursos de Administração: um estudo didático	Dissertação	2013	Marcelo Massahiti Yamauti	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental	Dissertação	2014	Handus Silva Freitas	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso
Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental	Dissertação	2016	Valéria Ciabotti	Educação	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático	Tese	2009	Abraão Juvencio de Araújo	Educação	Universidade Federal de Pernambuco
Investigando o processo de transposição didática externa: o conceito de transformação química em livros didáticos	Tese	2009	José Aercio Silva das Chagas	Educação	Universidade Federal de Pernambuco
A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um	Tese	2015	Marilene Rosa dos Santos	Ensino das Ciências	Universidade Federal Rural de Pernambuco

olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático					
Análise combinatória: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009	Tese	2015	Carlos Alberto de Miranda Pinheiro	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Fonte: A Autora (2020).

Entre os 14 trabalhos encontrados nesta pesquisa, 6 deles foram produzidos em Programas de Pós-graduação em Educação Matemática, sendo igual ao número de produções desenvolvidas em Programas de Pós-graduação em Educação. Logo, os 2 trabalhos complementares ao levantamento fazem parte de outros dois Programas de Pós-graduação, sendo um deles em Ensino de Ciências e outro em Educação Científica e Tecnológica. Diante da pesquisa e estruturação do quadro apresentado, foram analisados os objetivos centrais dos trabalhos, explorando seus resumos e conteúdos, os quais apresentamos na sequência.

Cruz (2005), em seu estudo, propôs-se a responder a seguinte questão de pesquisa: como os livros didáticos abordam a noção de variável sob a ótica da organização praxeológica de Chevallard? Para tanto, foi desenvolvida uma análise qualitativa e documental de quatro coleções de livros didáticos de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. A pesquisa fundamentou-se na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1991), e fez uso de uma adaptação da Organização Praxeológica proposta pelo autor. O autor procurou identificar os exercícios que atendem aspectos, tal qual o tipo de tarefa proposta, qual a maneira de cumprir essa tarefa, qual é a técnica envolvida, e qual o discurso teórico-tecnológico que é contemplado na técnica evidente. Foi possível perceber que, embora os livros didáticos tragam várias concepções da Álgebra e trabalhem as variáveis sob diferentes enfoques, ainda há a predominância de exercícios para aplicação de técnicas.

O trabalho produzido por Mateus (2007) tem como questão de pesquisa: o que é que os livros didáticos disponíveis sugerem quanto à construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral? As bases teóricas do trabalho foram a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003); a Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1999); e a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1977). Com base nas análises dos resultados, o pesquisador concluiu que a articulação entre os registros de representação semiótica é débil, pois há preferência do uso de registros algébricos e seus tratamentos, em vez de promover a articulação na forma de conversão entre os registros; trabalha-se mais sobre o bloco prático-técnico do que a combinação entre o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico-teórico; e a exposição formal do conteúdo é a predominante em vez da contextualização como fio condutor das idéias para a formalização

A pesquisa de Yamauti (2013) insere-se no contexto de um curso de Administração, e teve por objetivo analisar como os livros-texto de Estatística para tais cursos organizaram as atividades propostas, referentes ao estudo do tema Regressão Linear Simples, verificando se estas contribuem para o desenvolvimento do Pensamento Estatístico. Com o intuito de alcançar

tal objetivo, o autor analisou 6 livros-texto, considerando os exercícios propostos no capítulo referente ao tema em questão. O quadro teórico que fundamentou as análises foi a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard, com o olhar da organização praxeológica. Além deste, também foi buscada fundamentação no que se define como Pensamento Estatístico, proposto por vários autores da área da Didática da Estatística. Apoiadas nessas teorias, as análises foram realizadas com o intuito de responder a duas questões de pesquisa: Quais organizações praxeológicas (Estatística/Matemática) os livros-texto de Estatística para cursos de Administração apresentam em relação ao conteúdo Regressão Linear Simples? Quais características do Pensamento Estatístico são contempladas nessas organizações identificadas? Para isto, foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa com enfoque documental. Os resultados das análises dos livros-texto apontaram para o fato de que o professor precisa ser mais criterioso na escolha de uma atividade proposta, se o objetivo a ser alcançado for o desenvolvimento do Pensamento Estatístico dos alunos

Juvencio de Araújo (2009), objetivou em seu trabalho, caracterizar e comparar as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil, sobre o ensino de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita. Para tanto, apoiou-se na Teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991), que ressalta o papel das instituições na relação com os objetos de saberes escolares, bem como na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), como um método de análise que permite reconstruir a organização matemática existente no interior de uma determinada instituição de ensino. Os resultados indicam que, no Ensino Fundamental, a álgebra não é destacada como um domínio próprio do conhecimento matemático nos dois países. No caso do ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, os resultados mostram que, tanto na França quanto no Brasil, ele é justificado como uma ferramenta para resolver problemas de contextos sociais e de outros domínios da matemática. As organizações matemáticas existentes nos documentos oficiais analisados não fornecem elementos que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes, nesses dois países, em torno da resolução de equações do 1º grau. O trabalho realizado nos livros didáticos analisados dos dois países nem sempre é feito de forma a esclarecer as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas explorados, bem como sobre os limites ou potencialidades das técnicas elaboradas e/ou sistematizadas. Os alunos investigados dos dois países não têm boas relações pessoais com esse objeto do saber da álgebra.

Chagas (2009), em sua tese, objetivou estudar como ocorre o processo de transposição didática externa (TDE) do conceito de transformação química presente nos livros didáticos, e analisar como esse conceito é re-significado, enquanto saber escolar, no domínio desses

manuais didáticos. Utiliza como suporte teórico, nesse estudo, a Teoria da Transposição Didática (Chevallard, 1991) e a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999). Foram verificadas manifestações da transposição didática externa nos dois planos de análise viabilizados na pesquisa; ou seja, no exame dos capítulos que tratam do conceito de reação química, no domínio do saber sábio e do escolar, bem como na análise da organização praxeológica presente nos saberes citados. Observou-se a manifestação do envelhecimento de saberes na apresentação da irreversibilidade como critério de diferenciação de reações químicas e transformações físicas; a necessidade de *vigilância epistemológica* em função do uso da linguagem informal e próxima do senso comum; e manifestações da noosfera no sentido de compatibilizar o sistema de ensino com a sociedade da época como, por exemplo, atendimento a exigências da pedagogia tecnicista.

No trabalho de Santos (2015) foi desenvolvida uma análise do distanciamento entre a prática docente do professor de matemática e a abordagem do livro didático adotado por ele, no 6º ano do Ensino Fundamental, em relação ao conceito de área de figuras geométricas planas. A fundamentação teórica dessa pesquisa está alicerçada no modelo de área enquanto grandeza, proposto nos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989), Bellemain e Lima (2002), Bellemain (2013); e na Teoria da Transposição Didática e Teoria Antropológica do Didático, ambas desenvolvidas por Chevallard (1991; 1999) e seus colaboradores. A metodologia baseia-se em uma abordagem qualitativa de cunho etnográfico, que consistiu na análise das organizações matemática e didática do livro didático, e da prática docente do professor de matemática de uma escola pública municipal da Cidade do Paulista. Os resultados indicam que existe, sim, uma relação entre a abordagem do livro didático e a prática docente. No entanto, essa relação é divergente em muitos aspectos (Tipos de tarefas e técnicas abordadas, tecnologias e teorias, exploração de técnicas, organização didática) e convergentes em outros (definição e abordagem conceitual da área de figuras planas). Também foi possível perceber que há uma distância considerável entre a abordagem didática do livro didático e da prática docente em relação ao conceito de área, que pode estar sendo influenciada pela concepção que o professor tem sobre o ensino de matemática e pela relação que ele tem com o objeto de estudo.

Almeida (2012), em sua dissertação, teve como objetivo geral investigar como os livros didáticos propõem o estudo das progressões aritméticas e geométricas no primeiro ano do Ensino Médio. Os livros que se agregam a esta pesquisa pertencem ao primeiro ano do Ensino Médio, os quais foram selecionados por comporem o catálogo do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio e, além disso, por serem utilizados pelas escolas estaduais do município de Cuiabá. Como opção metodológica, foi adotada uma pesquisa qualitativa, com

ênfase em análise documental. Os estudos dos documentos livros didáticos fundamentam-se essencialmente na Teoria Antropológica do Didático (TAD), mais especificamente nas praxeologias, propostas por Chevallard (1999); e na Teoria dos Jogos de Quadros de Douady (1992). Os resultados dessa investigação, associados à teoria pertinente, possibilitaram o diagnóstico de livros didáticos, os quais evidenciaram que as organizações praxeológicas de dois dos livros analisados não explicitam a estreita relação entre progressões e funções. Percebeu-se, também, que os livros selecionados para essa investigação não propõem com frequência tarefas que incentivam a generalização de padrões, ainda que esteja explícita como intencionalidade dos autores dos quatro livros selecionados para a investigação. Ainda há o predomínio de tarefas dos gêneros calcular, determinar, que se constituem em tarefas de imitação, podendo conduzir à rotinização da técnica. Entre outros aspectos, foi identificado um número reduzido de tarefas que possibilitam a articulação dos diferentes quadros (numérico, algébrico e geométrico) propostos por Douady (1992). Na maioria das vezes, priorizam o quadro algébrico. Entre os livros selecionados para os estudos, o autor constatou que nenhum deles é *completo*, de forma a contribuir efetivamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudos das progressões. Mesmo se contemplasse, segundo o autor, todas as recomendações dos documentos oficiais, não seria completo; então, cabe ao professor selecionar o livro que considerar mais adequado, segundo a sua opinião e de acordo com a realidade de seus estudantes.

O trabalho de Ciabotti (2016) teve por objetivo analisar o processo de elaboração de livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard (1996, 2001), na organização praxeológica didática e matemática (probabilística). A questão orientadora da investigação foi apresentar o processo de elaboração de um livro paradidático no Ensino de Probabilidade para os anos finais do Ensino Fundamental sob a luz da TAD na organização praxeológica didática e matemática (probabilística) que contemple aspectos relacionados aos conteúdos probabilísticos, e que atenda às necessidades de compreensão e assimilação por parte dos alunos que estão terminando um ciclo de estudos. O desenvolvimento desse trabalho está caracterizado pela elaboração de atividades desenvolvidas a partir da produção do livro paradidático, com o título *Jogando na Olimpíada Nacional de Probabilidade*, que foi dividido em quatro capítulos, e em que cada um deles apresenta uma das etapas de uma Olimpíada, que contempla aspectos relacionados aos conteúdos probabilísticos com o intuito de proporcionar, aos alunos, a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005). As ações utilizadas no livro paradidático foram elaboradas,

segundo o autor, tomando como base alguns jogos que, a nosso ver, são importantes para agregar motivação às atividades, também para relacionar os conteúdos probabilísticos a serem abordados. A intenção da construção do paradidático, segundo Ciabotti (2016), não é substituir o livro didático, mas complementá-lo, e inserir esse material com elementos essenciais na formação dos alunos da Educação Básica em relação aos conteúdos probabilísticos.

Na pesquisa desenvolvida por Freitas (2014), o objetivo foi investigar a abordagem do conteúdo de expressões numéricas pelos livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, adotados por uma escola estadual de Cuiabá-MT, para o triênio 2011-2013. Para efetivar esse objetivo, foram analisados dois volumes de livros didáticos por ela adotados, tendo em vista a introdução desse conteúdo como uma técnica de cálculo aritmético, que contém sinais de operação e de associação, e abordagem das expressões numéricas apresentadas nos dois volumes. Como referencial teórico-metodológico para a análise dos livros foi utilizada a Teoria Antropológica do Didático (TAD), mais especificamente as praxeologias propostas por Chevallard (1999), e por meio do estudo da organização matemática focou-se a análise nos tipos de tarefas e técnicas que contemplam o conteúdo das expressões numéricas com números naturais. Os dados foram coletados por meio de análise documental. Com relação à organização didática, segundo o autor, os dois livros introduzem as expressões numéricas a partir de situações-problema. Ambos buscam aspectos históricos da matemática, e constatou-se um número relativamente grande de imagens, gráficos e tabelas. O recurso da calculadora também é explorado em ambos os volumes. A análise praxeológica foi dividida em dois gêneros de organização matemática. No primeiro gênero foram analisados como é abordado o conceito de expressão numérica; e no segundo gênero, as expressões numéricas com as quatro operações.

Abreu (2009) desenvolveu sua pesquisa com livros didáticos do 5º ano do Ensino Fundamental. O objetivo principal foi analisar a função atribuída à utilização da calculadora em atividades matemáticas em livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os objetivos específicos foram: 1º) Analisar as pontuações fornecidas pelos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) relativas ao uso da calculadora nos anos iniciais do Ensino Fundamental; 2º) Identificar as atividades que fazem uso da calculadora em livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; 3º) Identificar elementos da organização praxeológica nas atividades matemáticas que fazem uso da calculadora nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; e 4º) Identificar tendências implícitas nas práticas prescritas em atividades com a utilização da calculadora em livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que utiliza análise do conteúdo para extrair o discurso exposto nessas fontes de influência do ensino de Matemática para o uso da

calculadora. O referencial teórico fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard. Os resultados, segundo o autor, apontam uma valorização da utilização da calculadora nos livros didáticos, e mostram, também, organizações didáticas que enfatizam a construção de praxeologias pelo aluno.

A fim de tomar conhecimento das produções apresentadas até meados de 2020, que envolvessem aspectos metodológicos sobre a TAD, concomitantemente a organizações praxeológicas e livros didáticos, desenvolvemos esta pesquisa. Diante das análises realizadas, foi possível evidenciar o uso da Teoria Antropológica do Didático, nessa ocasião, em análises de livros didáticos, de forma satisfatória, a fim de explorar o cenário proposto aos alunos nas escolas por intermédio das coleções adotadas.

Além disso, os trabalhos encontrados, que são provenientes de pesquisas que relacionam à TAD, organização praxeológica e livro didático, podem auxiliar na nossa pesquisa, uma vez que se contribuem para tomarmos conhecimento de que maneira é produzido um trabalho acadêmico relacionando estes elementos: livro didático, TAD e organização praxeológica.

Frente aos levantamentos realizados, observamos que, até o presente momento, não há uma pesquisa que articule a TAD com a Geometria dos Fractais, ou que apresente características de ordem praxeológica desenvolvidas diante deste tema.

Diante do exposto até o momento, a subseção a seguir dispõe de um viés particular do já apresentado, sobre o qual nos debruçamos no desenvolvimento de uma relação entre alguns conceitos presentes na Teoria Antropológica do Didático e características da Geometria dos Fractais.

2.2.2 TAD e a Geometria dos Fractais

Ao estudar aspectos relacionados à TAD e à Geometria dos Fractais, entendemos que esta última pode ser estudada sob o ponto de vista da primeira. Em outras palavras, a TAD permite que compreendamos o objeto matemático sob um ponto de vista particular, que abrange sua existência e o motivo para tal. Desse modo, no que se refere a aplicações da Geometria dos Fractais em diferentes áreas do conhecimento, podemos pensar em fenômenos, como a Transposição Didática e a Ecologia do Saber. Explicando de outro modo, a teoria estudada pode ser ensinada de forma diversificada, dependendo de suas condições de existência, sofrendo adaptações com o intuito de seu melhor uso e entendimento. A exemplo disso, podemos citar a Medicina, que a utiliza no estudo de características de fenômenos cardíacos e pulmonares, além de uma aplicação notável na tomografia computadorizada por meio da análise de imagens

geradas, possibilitando, assim, uma nova visão, aos médicos, da anatomia interna do corpo humano (NUNES, 2006).

A utilização da Geometria dos Fractais encontra-se, também, no estudo da Meteorologia, na determinação da dimensão fractal de perímetro de nuvens, usando imagens obtidas com satélites e radares meteorológicos. No que diz respeito às tecnologias, podemos citar a utilização de antenas para equipamentos móveis, que para além da otimização do espaço, também aumentam a sua capacidade de transmissão (NUNES, 2006).

Ademais, a Geometria dos Fractais modela a análise de solos, o movimento dos rios, e estruturas de vários cristais que se fazem presentes no ramo da agricultura (NUNES, 2006). Dessa forma, foi possível perceber que essa Geometria passou a ser uma ferramenta para o auxílio de resultados eficazes em diversas áreas do conhecimento, e que seu estudo e aplicação sofre mudanças, dependendo de suas condições e finalidades. Logo, nos contextos apresentados anteriormente, observamos a influência da Transposição Didática, em que o saber é transformado com o intuito de ser aplicado ou compreendido. Da mesma forma, faz-se presente a Ecologia dos Saberes, já que o objeto Fractal desempenha papel diferente, dependendo do ambiente em que vive (habitat) e de qual função desempenha (nicho ecológico).

A fim de estudar a atividade matemática, para além dos elementos praxeológicos citados anteriormente, outros dois se fazem essenciais.

Nós falaremos de objeto ostensivo [...] para nos referirmos a todo objeto tendo uma natureza sensível, uma certa materialidade, e que, por isso, adquire para o ser humano uma realidade perceptível. Esse é o caso de um objeto material qualquer e, notadamente, de objetos materiais particulares que são os sons [...], os grafismos [...] e os gestos. Os objetos não ostensivos são então todos os “objetos” que, como as ideias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido em que lhe atribuímos uma existência – sem, entretanto, poderem ser vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por si mesmos: eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou um longo discurso) (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 10, grifo dos autores).

A TAD possibilita analisar e modelar os objetos ostensivos e não ostensivos presentes na atividade matemática, e esta análise pode ser empregada na abordagem de assuntos matemáticos sugeridos em coleções de livros didáticos.

Entre os exemplos citados anteriormente, em que a Geometria dos Fractais colabora em sua aplicação aperfeiçoando seus resultados, podemos elencar alguns objetos ostensivos que se fazem presentes nesses contextos, como os radares meteorológicos, tomografia

computadorizada, nuvens e movimento dos rios. Contudo, ao pensar em objetos ostensivos que delineiam um fractal, podemos mencionar aqui, também, as construções realizadas em *softwares* matemáticos, como a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski. Entretanto, não somente eles, mas as construções desses fractais com materiais manipuláveis e instrumentos de desenho também.

Por outro lado, Benoit Mandelbrot determina a autossimilaridade, a dimensão fracionária e a complexidade infinita como as principais características de um objeto fractal, e ao refletir especificamente sobre as particularidades do Fractal, entendemos que ele, na sua condição de complexidade infinita, é um objeto não-ostensivo. Chevallard e Bosch (1999, p. 40, gifs dos autores) comentam que objetos não-ostensivos

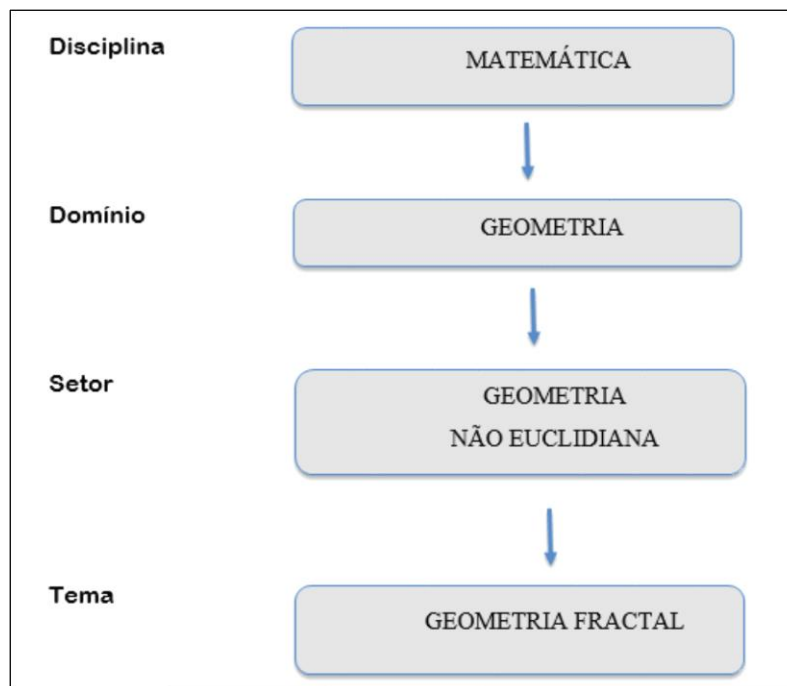
[...] são todos esses objetos que como ideias, intuições ou conceitos, existem institucionalmente – no sentido em que atribuímos uma existência a eles – sem poder ser visto, dito, ouvido, percebido ou mostrado por eles mesmos: eles só podem ser *evocados* ou *invocados* pelo manuseio adequado de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um gráfico, escrita, gesto ou um discurso completo)⁴.

À vista disso, aliada às características da complexidade infinita, comentada anteriormente, em que trata do processo gerador de um fractal, podendo ser recursivo, possuindo um número infinito de iterações, ou ainda podendo ser ampliado quantas vezes desejarmos sem nunca obter a imagem final, entendemos a não ostensividade desse objeto final. Assim, a associação do fractal a um objeto não-ostensivo se deve ao fato de que, ao pensar em um objeto fractal e imaginarmos sua n-ésima iteração, reconhecemos o estado e a ideia de um objeto não-ostensivo, uma vez que não podemos conceber visualmente e nem mentalmente a representação desse objeto nesse estado.

Diante dessas reflexões a respeito dos objetos fractais, emergiu a necessidade de situar a Geometria dos Fractais, de modo que tal ação contribuísse para melhor entendimento da dependência ou independência deste assunto. Deste modo, elaboramos a escala de codeterminação, que permitiu entender melhor as condições e restrições institucionais a respeito dos sistemas didáticos e que possibilita, aos pesquisadores, uma elaboração de infraestruturas matemáticas alternativas.

Figura 5: Escala de codeterminação – Geometria dos Fractais

⁴ “[...] *sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu’être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours)*”.



Fonte: A autora (2020).

Desse modo, podemos interpretar a Geometria dos Fractais sob o ponto de vista da TAD como um Tema, uma vez que os objetos fractais podem ser compreendidos diante de conceitos presentes na Geometria e, especificamente, na Geometria não-euclidiana. Logo, ao realizar as análises apresentadas posteriormente, situamos a Geometria dos Fractais no Domínio da Geometria, embora tal tema possa ser utilizado para explorar outros domínios, conforme observado no capítulo de análises dos dados.

3. DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentaremos os procedimentos metodológicos requeridos para o desenvolvimento deste trabalho. Descrevemos as características da pesquisa, seu contexto e os critérios para a análise dos dados coletados.

3.1 Características da pesquisa

A presente pesquisa apoia-se em uma abordagem de natureza qualitativa, sobre a qual Alves-Mazotti e Gewandsznajer (2004) comentam que tem se tornado frequente na produção de trabalhos no campo das ciências sociais. Os estudiosos também ressaltam que o planejamento da pesquisa qualitativa não é simples porque, “ao contrário do que ocorre com as pesquisas quantitativas, as investigações qualitativas, por sua diversidade e flexibilidade, não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de casos” (ALVES-MAZOTTI; GEWANDSZNAJER, 2004, p. 147).

3.2 Contexto da pesquisa

As ideias que nortearam nossa pesquisa partiram de princípios relacionados ao conteúdo Geometria dos Fractais, pois já havíamos tido proximidade com o tema, e tratava-se de algo que nos despertava interesse. Assim, com algumas leituras realizadas no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), interessamo-nos pela realização de uma pesquisa que envolvesse a Geometria dos Fractais à luz da TAD. Amadurecendo essa ideia, em conjunto ao conhecimento da inclusão das Geometrias não-euclidianas nas DCE do estado do Paraná, fomos aprimorando nossa pesquisa com o foco de investigar a presença da Geometria dos Fractais nos livros didáticos utilizados no Estado no Paraná.

No início, pensávamos sobre a realização de uma pesquisa que abrangesse todas as escolas públicas do estado do Paraná, mas após iniciar o levantamento das coleções adotadas pelas instituições, percebemos que se tratava de algo muito trabalhoso, podendo comprometer a qualidade de nossa pesquisa. Assim, decidimos por realizar nosso estudo sobre as 3 coleções mais adotadas pelas escolas públicas pertencentes as 5 maiores cidades em termos de habitantes do Estado do Paraná, sendo elas: Curitiba; Londrina; Maringá; Ponta Grossa e Cascavel, as quais adotaram livros de Matemática contemplados no PNLD 2018 – Ensino Médio.

Optamos por realizarmos as análises no Manual do Professor, uma vez que estes livros apresentam atividades resolvidas, dando subsídios para identificarmos as técnicas que o autor espera que os alunos mobilizem. Porém, após realizar as análises dos livros do primeiro ano, e iniciar as análises nos livros do segundo e terceiro ano, deparamo-nos com pouco material para investigação. Decidimos, assim, contemplar mais uma coleção para implementar nossa pesquisa, e realizamos o estudo acerca das 4 coleções mais adotadas nas cidades mencionadas anteriormente. Estabelecemos, como critério de busca, as principais coleções do Ensino Médio adotadas pelas escolas dessas cidades, e tomamos como hipótese a maior circulação de obras utilizadas pelos professores e alunos. Assim, buscamos obter maior proximidade com a realidade do suporte didático disponibilizado aos professores e estudantes.

Apresentamos, na sequência, a tabela que construímos referente ao levantamento das coleções adotadas pelas 289 escolas.

Tabela 1: Levantamento de dados das coleções

QUANTIDADE DE ESCOLHAS DA COLEÇÃO PELAS ESCOLAS PÚBLICAS DO PARANÁ	COLEÇÃO	EDITORA	AUTORES
73	Contato Matemática	FTD	Joamir Souza; Jacqueline Garcia
61	Matemática - contexto & aplicações	Editora Ática S/A	Luiz Roberto Dante
56	Quadrante Matemática	Edições SM	Eduardo Chavante; Diego Prestes
46	Matemática. Ciência e aplicações	Saraiva Educação Ltda.	Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périgo; Nilze de Almeida
23	Matemática: interação e tecnologia	LEYA	Rodrigo Dias Balestri
16	Conexões com a Matemática	Editora Moderna Ltda.	Fabio Martins de Leonardo; Willian Raphael Silva
12	Matemática Paiva	Editora Moderna LTDA	Manoel Paiva
2	Matemática para compreender o mundo	Saraiva Educação Ltda.	Kátia Stocco Smole; Maria Igeez Diniz

Fonte: A Autora (2020).

De acordo com as informações da Tabela 1, observamos que a coleção Contato Matemática, da editora FTD, foi a mais escolhida em meio ao levantamento realizado. Em contrapartida, a editora Saraiva Educação Ltda., com a coleção Matemática para Compreender o Mundo, foi adotada por apenas duas escolas. Vale ressaltar que, ao realizar o levantamento, observamos que a maioria das escolas de uma mesma cidade não optou por uma coleção comum, havendo duas ou mais coleções adotadas que se sobressaíam com relação as outras. Maringá, por sua vez, apresentou uma variação na escolha das coleções: a coleção Quadrante Matemática está presente em aproximadamente 70,5% das escolas deste município.

Deste modo, optamos por analisar as seguintes coleções: Contato Matemática; Matemática – Contexto & Aplicações; Quadrante Matemática; e Matemática Ciência e Aplicações, uma vez que estas foram as 4 coleções mais adotadas pelas 5 maiores cidades em termos de habitantes do Estado do Paraná.

3.3 Critérios para a análise dos dados

A análise das coleções dos livros didáticos investigados foi realizada diante dos 3 volumes correspondentes a cada coleção. Buscamos, ao apresentar as análises, revelar como o ensino da Geometria dos Fractais se desenvolve nessas obras. Para tal, realizamos a análise da Parte Curso, das Atividades Resolvidas e das Atividades Propostas presentes nos livros que integraram a organização praxeológica do conteúdo Geometria dos Fractais. Sobre esses conceitos, Bittar (2017, p. 371-373) comenta:

A Parte Curso compreende a explanação de definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. Nessa Parte os autores do livro didático trazem, mesmo que implicitamente, o que consideram que os alunos daquele nível de escolaridade devem aprender e é nessa Parte que os alunos buscam pistas para resolver o que lhes é pedido. A análise da Parte Curso permite identificar alguns tipos de tarefas que parecem importantes naquela instituição, neste caso o LD. [...] Uma vez realizada a análise da Parte Curso, passamos às Atividades Propostas. Nesse momento buscamos analisar cada atividade identificando qual é a tarefa do aluno e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa, tendo como apoio a(s) praxeologia(s) anteriormente identificada(s).

Durante nossas análises dos livros didáticos, observamos que o conteúdo Geometria dos Fractais também foi contemplado em algumas Atividades Resolvidas, por isso reservamos uma parte das análises a esse momento do livro. Outro fator a ser destacado é que toda a análise

praxeológica foi feita com base no que o autor de cada coleção esperava que o estudante fizesse. Para isso, realizamos uma análise praxeológica pautada no Manual do Professor, o qual subsidiou o olhar diante da teoria e das atividades propostas em cada livro didático.

À vista disso, nossa problemática de pesquisa caracterizou-se como: O conteúdo Geometria dos Fractais pode ser encontrado nas coleções de livros didáticos adotados para o Ensino Médio no Estado do Paraná? Se sim, quais são as propostas de ensino para este conteúdo?

Para a investigação da organização praxeológica referente ao ensino da Geometria dos Fractais, contemplados nas coleções selecionadas, realizamos o estudo da organização matemática (OM) e da organização didática (OD) de acordo com a Teoria Antropológica do Didático.

No que diz respeito à OM, identificamos: os tipos de tarefas propostas, presentes nas Atividades Resolvidas e nas Atividades Propostas, em forma de exercícios. Agrupamos os tipos de tarefas que apresentaram semelhança entre si, a fim de reconhecer suas potencialidades, as técnicas instigadas, e os aspectos tecnológicos-teóricos que permitiram justificar o uso das técnicas.

No aspecto da OD, analisamos a presença e a apresentação dos seis momentos didáticos no ensino proposto, para auxiliar na compreensão da construção e organização do quarteto praxeológico identificado na organização matemática.

Escolhemos investigar, por toda a obra, os capítulos que abrangessem o estudo da Geometria dos Fractais, haja vista que este objeto de saber apresenta conexões com outros objetos matemáticos ou não matemáticos. Buscamos, também, analisar as convergências e diferenças entre o que é sugerido nas Diretrizes Curriculares e o que é implementado nas coleções de livros didáticos analisadas.

4. ANÁLISES DOS DADOS

Nesta seção, apresentamos as descrições dos resultados da produção e análise dos dados. O capítulo está dividido em 3 partes: a primeira diz respeito à análise dos livros do Primeiro Ano; em seguida, as dos do Segundo Ano; e para finalizar, as análises dos daqueles do Terceiro Ano.. Em cada subseção estão presentes as análises da Parte Curso, Atividades Resolvidas e as Atividades Propostas, respectivamente.

As coleções investigadas são: Contato Matemática, da editora FTD; a coleção Matemática - contexto & aplicações, publicado pela Editora ÁTICA S/A; os volumes da coleção Quadrante Matemática, da Edições SM; e a quarta coleção Matemática. Ciência e aplicações, da Saraiva educação Ltda.

Para que as análises ficassem mais fluentes, adotamos como critério a abreviatura, para nos direcionar aos livros didáticos de cada ano, as quais estão apresentadas no quadro 3.

Quadro 3: Abreviatura dos livros didáticos adotados

COLEÇÃO	PRIMEIRO ANO	SEGUNDO ANO	TERCEIRO ANO
Contato Matemática	LD 1.1	LD 2.1	LD 3.1
Matemática - contexto & aplicações	LD 1.2	LD 2.2	LD 3.2
Quadrante Matemática	LD 1.3	LD 2.3	LD 3.3
Matemática ciência e aplicações	LD 1.4	LD 2.4	LD 3.4

Fonte: A Autora (2020).

4.1 Análise dos livros didáticos

Apresentamos, nesta subseção, as produções e análises dos volumes das coleções correspondentes ao Primeiro, Segundo e Terceiro Anos do Ensino Médio. No que diz respeito ao conteúdo de Geometria dos Fractais encontrado nos livros didáticos, de modo geral, observamos que esses materiais estão atrelados a atividades direcionadas a outros conteúdos matemáticos, e por isso apresentamos os conteúdos estruturantes (de acordo com as DCE) correlacionados a este tema. Ainda, e principalmente, a Parte Curso sobre essa geometria não-euclidiana só foi identificada em dois dos doze volumes analisados, o LD 1.3 e o LD 2.4. Destacamos que, ao analisar o LD 2.1, o LD 2.2 e o LD 2.3, não encontramos Parte Curso, nem

Atividades Resolvidas e Propostas; ou seja, nenhum resquício foi localizado nestes livros a respeito da Geometria dos Fractais. Também, nenhum dos volumes correspondentes ao Terceiro Ano apresentou abordagem da Geometria dos Fractais. No que diz respeito aos tipos de fractais apresentados, o Triângulo de Sierpinski aparece em todos os livros do Primeiro Ano analisados, contemplado em uma atividade cada; acompanhado deste fractal, o Tapete de Sierpinski é apresentado no LD 1.3, assim como o Floco de neve de Koch.

Parte Curso

As análises da Parte Curso presente nos livros didáticos estão norteadas pela Organização Didática, passando pelos momentos didáticos propostos por Chevallard (1998). Deste modo, para iniciar nossas análises, destacamos que, dentre os livros do Primeiro Ano, o LD 1.1, o LD 1.2 e o LD 1.4 não apresentaram Parte Curso destinada ao conteúdo de Geometria dos Fractais. Portanto, as análises desta parte são destinadas unicamente ao LD 1.3, o qual se apresentou como único livro do Primeiro Ano a contemplar essa exploração.

Com relação aos livros didáticos do Segundo Ano, salientamos que o LD 2.1, o LD 2.2 e o LD 2.3 não apresentaram Parte Curso destinada ao conteúdo de Geometria dos Fractais. Logo, as análises desse nível são pautadas unicamente no LD 2.4, o qual contempla essa exploração.

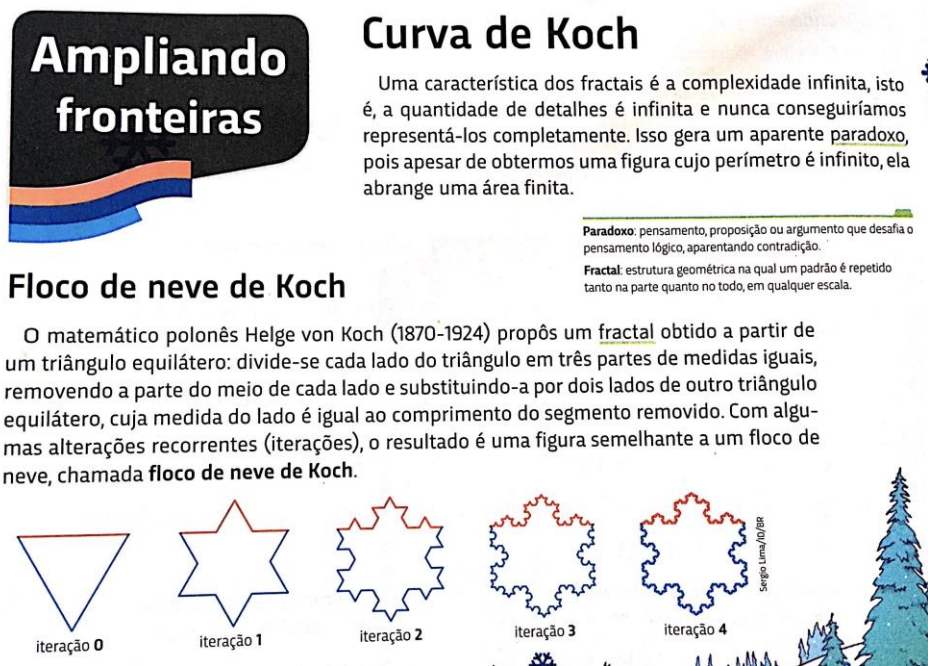
A respeito da Parte Curso presente nos livros do Terceiro Ano, nada foi possível evidenciar, uma vez que não encontramos exploração do conteúdo de Geometria dos Fractais nesses volumes. As DCE sugerem a exploração da Geometria dos Fractais no segundo ano, porém alguns conteúdos trabalhados no terceiro ano dão subsídios para a exploração de ideias fractais relacionadas a outros temas, como por exemplo os conteúdos relacionados a Geometria analítica.

No LD 1.3, ao final do estudo de todos os capítulos, o livro apresenta uma breve seção intitulada *Ampliando fronteiras*, a qual apresenta aos leitores: conteúdos, curiosidades matemáticas não contempladas em seus capítulos, e outros destaques que o autor do livro entende ser necessários apresentar. Após o capítulo 10, destinado ao ensino de Trigonometria, temos o primeiro contato, nessa obra, com o conteúdo da Geometria dos Fractais. De forma sucinta, em duas páginas, a obra apresenta aspectos gerais sobre esta geometria não-euclidiana, e a primeira modelação em forma de praxeologia concebe-se por meio da exploração da Curva de Koch ou Floco de neve de Koch.

Inicialmente são exibidas as características gerais dos fractais como, por exemplo, sua complexidade infinita, comentando sobre aspectos relacionados à área e perímetro destas

figuras. Foi possível observar que o aluno atua como expectador dessa exploração e elaboração, pois, ao explicar sobre a construção do Floco de neve de Koch, são apresentadas as características e as ilustrações das quatro primeiras iterações deste fractal, conforme a figura 6.

Figura 6: Ampliando fronteiras - Curva de Koch

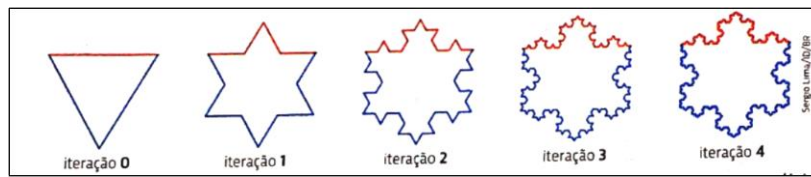


Cabe observar que, até o aparecimento ilustrativo das primeiras iterações do floco de neve de Koch, foi descrita a construção deste fractal de forma detalhada, explicando os traçados e fragmentos das iterações. Até esse momento do livro, não identificamos indagações aos alunos sobre essa teoria ou sobre esse objeto fractal, apenas houve apontamento de aspectos específicos de um dos tantos fractais possíveis de serem estudados.

Sobre a teoria fractal, de modo geral, o que o autor retrata, como comentado anteriormente, refere-se ao paradoxo da complexidade infinita, mencionando que tal figura fractal apresenta seu perímetro infinito e, em contrapartida, tem sua área finita.

Diante disso, o autor propõe explorar o perímetro da figura apresentada anteriormente, mas para sua construção, ele salienta que considerará apenas o comprimento da linha apresentada nas imagens, a qual é denominada Curva de Koch. Podemos observar novamente as figuras ilustradas pelo autor na figura 8.

Figura 7: Floco de neve de Koch



Fonte: Chavente e Prestes (p. 248, 2016).

Nesse momento, o autor experimenta uma situação oriunda de um objeto matemático apresentado anteriormente, buscando explorar o conceito de perímetro para esse fractal, elaborando uma tabela para que o aluno possa explorar, a fim de entender seu perímetro, bem como seu processo de formação. Os traçados em vermelho das figuras serviram para a construção da tabela apresentada a seguir, considerando um segmento inicial de comprimento “1” (letra “l”), conforme segue.

Figura 8: Tabela do cálculo do perímetro - Floco de neve de Koch

	Iteração	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento (u.c.)	Comprimento total da curva (u.c.)
	0	1	l	$l = \left(\frac{4}{3}\right)^0 l$
	1	4	$\frac{l}{3}$	$4 \frac{l}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1 l$
	2	4^2	$\frac{l}{3^2}$	$4^2 \frac{l}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 l$
	3	4^3	$\frac{l}{3^3}$	$4^3 \frac{l}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 l$
	4	4^4	$\frac{l}{3^4}$	$4^4 \frac{l}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 l$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	n	4^n	$\frac{l}{3^n}$	$4^n \frac{l}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n l$

Fonte: Chavente e Prestes (p. 249, 2016).

Na sequência da tabela, o livro faz menção ao conteúdo de progressão geométrica (PG), indicando que os termos do comprimento total da curva em cada iteração representam os termos de uma PG de razão $\frac{4}{3} > 1$. Deste modo, busca apresentar, ao aluno, um exemplo relacionado ao paradoxo da complexidade infinita, exibindo o comprimento total da Curva de Koch, que não é finito e, conseqüentemente, o perímetro do floco de neve de Koch é infinito.

Após contemplar o momento da apresentação de definições de conceitos fractais, e o momento que contempla a proposta de ensino pela qual perpassa a construção da tabela envolvendo o perímetro do fractal explorado, o autor investiga o próximo momento, o qual diz respeito à aplicação do que foi pré-determinado, tais como indagações e pesquisas sobre a teoria fractal.

A exploração das técnicas desenvolvidas até então, sendo elas relacionadas aos conhecimentos de comprimento do segmento, comprimento total e perímetro das figuras, juntamente com a investigação a respeito de outros exemplos de fractais e informações complementares sobre paradoxos matemáticos, são invocadas por meio de tarefas contempladas na sequência deste livro, como indicado na sequência.

Figura 9: Investigação sobre os fractais

- A** Você conhece outros tipos de fractais? Cite-os.
- B** Considerando o quadro apresentado, qual a quantidade de segmentos, o comprimento de cada segmento e o comprimento total da curva de Koch na iteração 5?
- C** Calcule o perímetro das figuras que representam as quatro primeiras iterações do floco de neve de Koch, considerando $\ell = 3$ cm.
- D** Como o paradoxo da curva de Koch, há outros paradoxos matemáticos, como o paradoxo do hotel de Hilbert, o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, entre outros. Realize uma pesquisa a respeito e explique a um colega.

Fonte: Chavente e Prestes (p. 249, 2016).

Os momentos propostos nessas investigações dizem respeito à busca de uma formalização ou reflexão sobre o saber matemático estudado.

A figura 10 permite observar que os itens A e D possibilitam diversas respostas, dependendo diretamente do aluno; sendo assim, caracterizamos estas atividades como tarefas de caráter pessoal. Entretanto, os itens B e C oferecem subsídios para pensar sobre suas OM, as quais comentamos na sequência.

Com relação ao item B, observamos que ele apresenta questionamentos sobre o comprimento da curva de Koch em cada etapa, conforme explorado na figura 8. Por esta tarefa vincular-se a aspectos sobre perímetro, ela foi caracterizada como o Tipo de Tarefa *Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal*, e modelamos suas técnicas provenientes do desenvolvimento apresentado no livro do professor sobre esta atividade, cuja OM apresenta-se a seguir.

Quadro 4: Tipo de Tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	$\tau 1a$: Interpretar o quadro sobre perímetro. $\tau 1b$: Substituir a quantidade de segmentos na etapa desejada. $\tau 1c$: Substituir o comprimento de cada segmento pela etapa desejada. $\tau 1d$: Substituir o comprimento total da curva pela etapa desejada.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometria e Funções.

Fonte: A autora.

A respeito do item C, verificamos que ele aborda, assim como o item anterior, conhecimentos sobre o perímetro do fractal explorado nesse momento. Contudo, ele apresenta uma informação extra, que o autor havia disponibilizado em sua descrição até o momento, atribuindo um valor numérico ao comprimento do segmento desse objeto fractal. Desta forma, suas técnicas diferem das mobilizadas no item anterior. Apresentamos, na sequência, sua OM.

Quadro 5: Tipo de Tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	$\tau 1a$: Interpretar do quadro sobre perímetro. $\tau 1b^*$: Substituir o valor numérico do comprimento de segmento no comprimento total da curva em cada etapa desejada.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Identificação da dimensão fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometria e Funções.

Fonte: A autora.

Observamos que, nessas duas Organizações Matemática, as técnicas mobilizadas dependeram diretamente da Figura 8, e o passo a passo das atividades sem o auxílio dessa tabela já construída requereria uma ampla interpretação dos conhecimentos sobre perímetro, como também do padrão figural desse fractal, obtendo assim a compreensão a partir do entendimento deste não ostensivo fractal.

A Parte Curso, apresentada no LD 1.3, é explorada de forma breve, descontextualizada e como uma curiosidade; uma introdução ao assunto Fractal foi realizada por meio de um exemplo e uma proposta de perguntas investigativas. Alguns aspectos figurais, numéricos e algébricos foram abordados, direcionando o aluno no conhecimento da existência desse objeto geométrico e da sua possível exploração matemática.

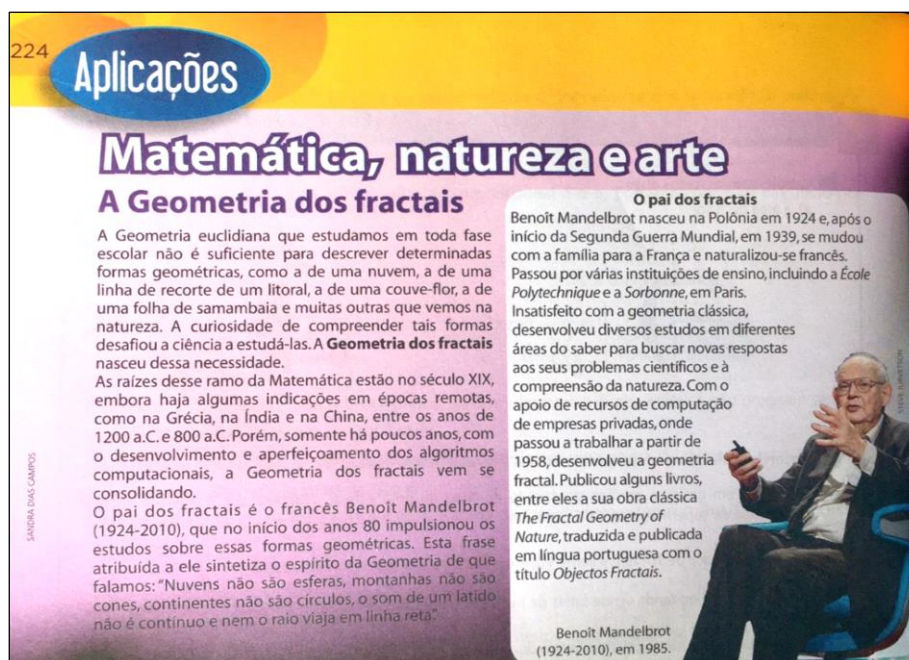
O volume 2 da coleção Matemática Ciência e Aplicações apresenta, logo após o término de cada capítulo, uma parte nomeada *Aplicações*, sobre aplicações matemáticas encontradas no nosso dia a dia. Em uma dessas seções *Aplicações*, encontramos a Parte Curso desse livro voltada ao conteúdo da Geometria dos Fractais.

Situada logo após o capítulo 9 do LD2.4, destinado ao ensino de *Corpos redondos*, o qual aborda os temas cilindro, cone e esfera, e anterior ao capítulo sobre *Análise Combinatória*, os autores designam uma abordagem dos fractais, embora seus conhecimentos não tenham sido explorados no capítulo anterior e nem no próximo.

A primeira abordagem desse tema traz posicionamentos com relação ao estudo escolar da Geometria. Segundo os autores, a Geometria euclidiana estudada em todas as fases escolares pelos alunos não é suficiente para entender e descrever determinadas formas geométricas apresentadas na natureza como, por exemplo, a linha de corte de um território litoral ou uma nuvem, também uma couve-flor. Partindo desta curiosidade, a ciência foi desafiada a estudá-las e, assim, surgiu a Geometria dos Fractais.

Logo após apresentar esse posicionamento, os autores designam um momento para falar sobre o pai dos fractais, o francês Benoît Mandelbrot, que sintetiza o espírito da Geometria que falamos através desta frase: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som de um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta”.

Figura 10: A Geometria dos fractais



Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 224-225).

Em seguida, os autores apresentam algumas ideias principais sobre os fractais, tratando de seu significado e suas características. Para ilustrar aos alunos, são apresentadas, logo na sequência, três imagens de fractais encontrados na natureza, como o detalhe de uma variedade de couve-flor e as folhas de uma samambaia, que se observarmos cada pequena parte da folha, se parece com a folha inteira, e por último o exemplo da imagem de um floco de neve.

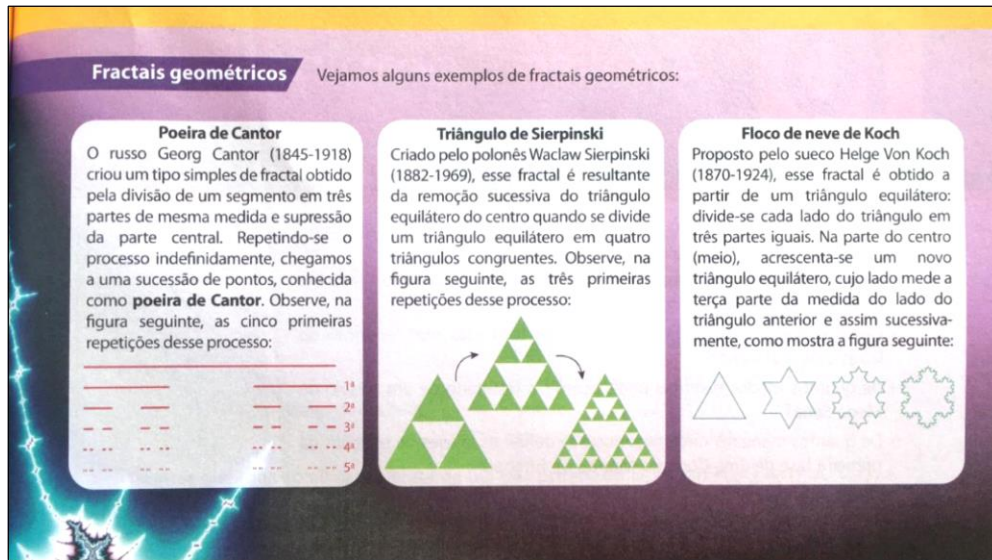
Figura 11: Fractais da natureza



Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 224-225).

Assim, em seguida à abordagem dos fractais na natureza, os autores exploram 3 fractais geométricos desenvolvidos por Georg Cantor, Waclaw Sierpinski e Helge Von Koch, sendo estes respectivamente os fractais conhecidos como a Poeria de Cantor, o Triângulo de Sierpinski e o Floco de neve de Koch. Sobre eles, os autores comentam brevemente a respeito do padrão figural de construção.

Figura 12: Fractais geométricos

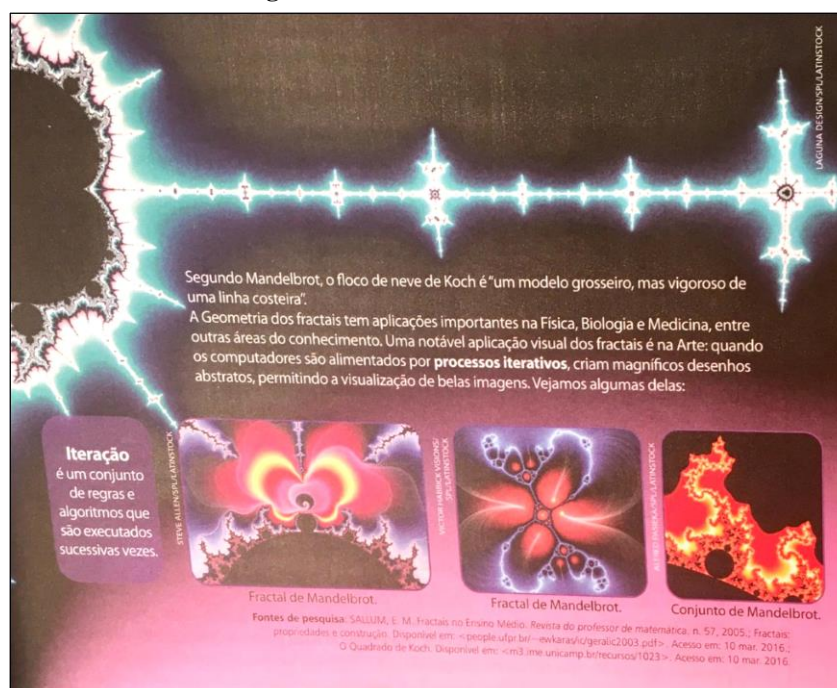


Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 224-225).

Algumas das aplicações são comentadas nessa Parte Curso, exibindo certas áreas do conhecimento que adotam os fractais como um de seus recursos. Dando ênfase à área de Arte, quando os computadores são alimentados por processos iterativos, em que criam magníficos desenhos abstratos, permite, assim, uma visualização de belas imagens. Sobre o termo iteração, os autores fazem um breve comentário a par das curiosidades abordadas, por se tratar de um termo importante proferido dentro da Geometria dos Fractais.

Além destas explorações para findar o contato com a Geometria dos Fractais nesse livro, os autores apresenta algumas ilustrações sobre fractais construídos computacionalmente.

Figura 13: Fractais de Mandelbrot



Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 224-225).

Todas as informações concebidas nessa Parte do livro foram retiradas, segundo os autores, de duas matérias publicadas na Revista do professor de Matemática, com os títulos *Fractais no Ensino Médio* e *O Quadrado de Koch*, acessadas pelos autores de forma online no ano de 2016. Percebemos que, diferente da maioria das informações concedidas nesse livro, essa seção, em especial, não foi produzida partindo somente dos conhecimentos dos autores, mas com um apoio referencial sobre o tema.

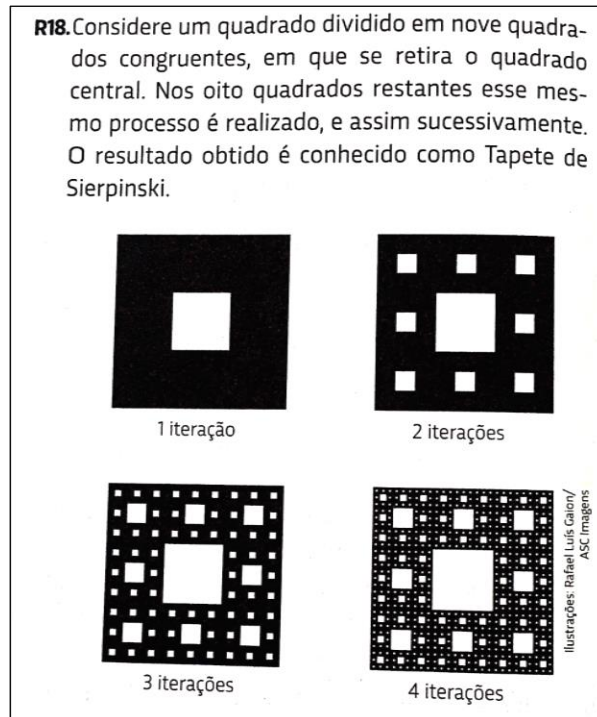
Atividades Resolvidas

Ao analisar o LD1.1, o LD1.2 e o LD1.4, não nos foi possível realizar a OM das Atividades Resolvidas, uma vez que, nestes livros, elas não se fizeram presentes. O mesmo, infelizmente, ocorreu com todos os volumes de livros didáticos analisados, destinados ao ensino do Segundo e Terceiro Anos do Ensino Médio.

No que diz respeito às Atividades Resolvidas que o LD1.3 propõe, encontramos, no capítulo de Sequências e Progressões, na parte destinada ao ensino de progressão geométrica, a seção Atividades Resolvidas, em que há uma Tarefa referente ao Tapete de Sierpinski, contemplando o conteúdo da Geometria dos Fractais.

O enunciado dessa Tarefa exhibe 4 iterações do fractal mencionado, como podemos observar na figura 15.

Figura 14: Atividade Resolvida



Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 198).

Após as ilustrações descritas pelos autores, eles apresentam duas perguntas que envolvem o fractal mencionado. A primeira delas faz menção à soma dos quadrados retirados nas quatro iterações ilustradas no enunciado, e a segunda instiga o aluno a pensar sobre a construção de uma lei de formação relacionada a este fractal em formação.

Apresentamos, na sequência, as perguntas, as resoluções e os quadros que contemplam a OM dessa proposta.

Figura 15: Atividade Resolvida item a

a) Determine a quantidade de quadrados retirados nas quatro primeiras iterações.

Resolução

a) Utilizando o que foi dado, temos a seguinte relação:

Iterações	Quadrados retirados
1	1
2	$8 \cdot 1 = 8$
3	$8 \cdot 8 = 64$
4	$8 \cdot 64 = 512$

Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 198).

Com base na resolução apresentada pelos autores, realizamos a análise praxeológica e exibimos, na sequência, seu quadro.

Quadro 6: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras ⁵ da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	<p>τ2a: Identificar o padrão figural.</p> <p>τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível.</p> <p>τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal.</p> <p>τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.</p>
TECNOLOGIA	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ2: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Com relação ao item b dessa Tarefa, temos:

Figura 16: Atividade Resolvida item b

b) Escreva a lei de formação de uma função do tipo exponencial que esteja relacionada com a sequência formada pela quantidade de quadrados retirados a cada iteração.

b) Observe que a sequência de valores obtidos no item a, (1, 8, 64, 512), constitui uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = 8$. Assim, para determinar a quantidade de quadrados retirados após n iterações, basta utilizar o termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 8^{n-1} \Rightarrow a_n = 8^{n-1}$$

Portanto, a lei de formação da função do tipo exponencial que está relacionada com essa sequência é $f(x) = 8^{x-1}$.

Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 198).

Observamos que este item solicita, aos alunos, a construção algébrica para a lei de formação desse fractal, a qual contempla a quantidade de quadrados retirados a cada iteração,

⁵ Adotamos a palavra *subfigura* como correspondente a uma parte do todo.

caracterizando-se como função exponencial. Desta forma, apresentamos, na sequência, o quadro que contempla nossa análise.

Quadro 7: Tipo de Tarefa 3

TIPO DE TAREFA	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
TÉCNICA	τ 3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ 3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ 3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	θ 3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 3: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Portanto, no que diz respeito às Atividades Resolvidas do LD1.3, encontramos uma proposta que contemplou dois tipos de tarefas diferentes, que se respaldaram nos conteúdos relacionados às Geometrias e às Funções. Ambas as tarefas encontraram-se em um capítulo dissociado de Geometria, o que poderia ser o mais convencional, visto que a Geometria Fractal é área dentro do grande tema Geometrias. As tarefas encontradas nesse livro exploraram aspectos relacionados à lei de formação do Fractal estudado. Embora elas estejam contidas em uma única Atividade Resolvida, ela apresentou 2 Tipos de Tarefas diferentes, proporcionando uma breve explanação do fractal em questão e de sua articulação com a Matemática; neste contexto, relacionadas especificamente ao conteúdo de Sequências e Progressões.

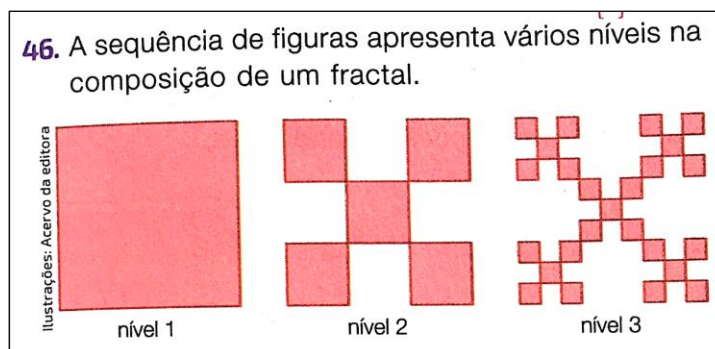
Atividades Propostas

A parte destinada às Atividades Propostas foi encontrada em 3 livros didáticos do Primeiro Ano, dentre os 4 analisados, sendo estes os LD1.1, LD1.2 e LD1.3. O LD1.4 não apresentou Atividades Propostas sobre o conteúdo Geometria dos Fractais.

Com relação aos livros didáticos do Segundo e Terceiro Anos do Ensino Médio, nada podemos declarar, uma vez que essas instituições não abordaram Atividade Proposta a respeito do conteúdo objeto de nosso estudo.

Com relação ao LD1.1, ele apresenta, no capítulo destinado ao ensino de Função Exponencial, uma Tarefa referente à sequência de figuras, apresentando 3 níveis da composição de um fractal, conforme a figura a seguir.

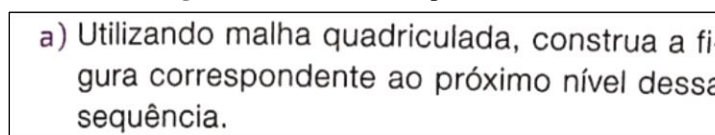
Figura 17: Atividade Proposta 1



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.151).

Por meio do enunciado, os autores propõem três indagações aos alunos, que fazem menção ao pensamento figural e algébrico desse fractal. Sobre o item a, apresentamos a figura 19.

Figura 18: Atividade Proposta 1 item a



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 151).

Ao realizar a OM desta Tarefa, observamos que ela se enquadra no Tipo de Tarefa: Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência. Através das análises realizadas no livro do professor, observamos que a técnica mobilizada nesse momento diz respeito a manipular ostensivos; neste caso, os autores indicam, no enunciado da tarefa, utilizar a malha quadriculada para a construção do nível desejado do respectivo fractal. Assim, construímos o Quadro 8, com relação a essa Tarefa 4.

Quadro 8: Tipo de Tarefa 4

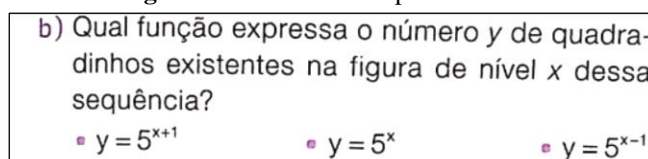
TIPO DE TAREFA	T4: Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência.
TÉCNICA	τ4a: Identificar o padrão figural do fractal. τ4b: Manipular ostensivos – malha quadriculada – buscando pela construção do nível desejado.

TECNOLOGIA	θ4: Compreensão da autossimilaridade do fractal.
TEORIA	Θ4: Geometrias.

Fonte: A Autora.

Com relação à Tarefa item b, que se refere ao conhecimento sobre a lei de formação algébrica do fractal, os autores apresentam três alternativas de resposta ao aluno:

Figura 19: Atividade Proposta 1 item b



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 151).

Desta forma, observamos que a questão norteadora desta Tarefa inquirir o aluno na busca pela generalização algébrica, que indica a quantidade de subfiguras em um determinado nível, e deste modo, corresponde ao Tipo de Tarefa 3. No entanto, o passo a passo para realizar essa Tarefa, assim como as teorias mobilizadas são diferentes dos elencados para o Tipo de Tarefa 3 apresentado anteriormente, e por esse motivo designamos o τ3d* e Θ3*.

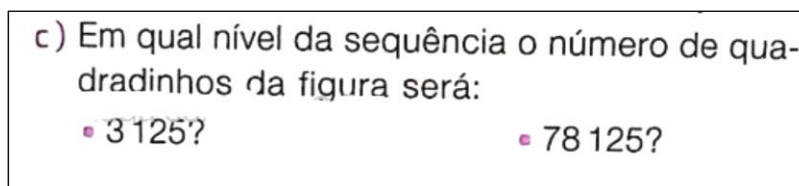
Quadro 9: Tipo de Tarefa 3

TIPO DE TAREFA	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
TÉCNICA	τ3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis τ3d*: Identificar a lei de formação algébrica do fractal. τ3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	θ3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ3*: Geometrias e Números e Álgebra.

Fonte: A Autora.

Para finalizar essa atividade, é sugerida ao aluno a utilização da função, a qual corresponde ao padrão de iteração do fractal disposto anteriormente, usando substituição.

Figura 20: Atividade Proposta 1 item c



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 151).

Podemos observar que esse Tipo de Tarefa tem proximidade ao Tipo de Tarefa 2, apresentado anteriormente, mas a outra Tarefa diz respeito à quantidade de subfiguras da sequência, dependendo do nível desejado, e neste caso, o aluno deve determinar o nível desejado da sequência partindo da quantidade de subfiguras. Assim, construímos nossa OM para o Tipo de Tarefa 2.

Quadro 10: Tipo de Tarefa 2

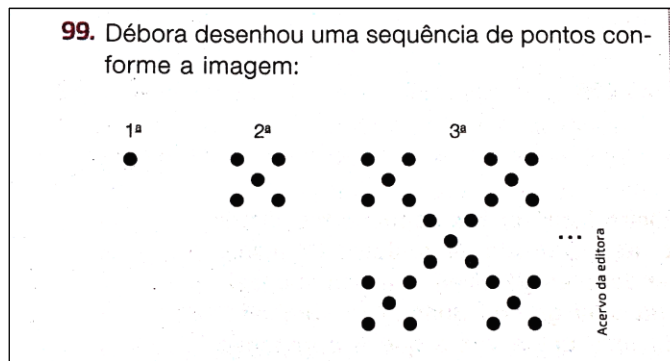
TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	τ 2a: Identificar o padrão figural. τ 2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 2c*: Identificar a lei de formação algébrica. τ 2d*: Substituir o número da quantidade de subfiguras na lei de formação algébrica. τ 2e*: Verificar a partir do resultado a que nível pertence o objeto desejado.
TECNOLOGIA	θ 2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 2*: Geometrias e Números e Álgebra.

Fonte: A Autora.

Nas Atividades propostas aos alunos, referentes ao estudo de Progressão Geométrica, encontramos 4 atividades que possuem propriedades fractal; entretanto, 3 delas não citam este termo em seu enunciado, deixando a sua ideia implícita.

A próxima Tarefa corresponde a uma sequência de pontos, em que os autores apresentam 3 de suas iterações, conforme a imagem a seguir

Figura 21: Atividade Proposta 2



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 224).

A partir disso, são propostas ao aluno duas perguntas que norteiam essa sequência, partindo dos fundamentos da progressão geométrica. A primeira delas sugere ao aluno pensar sobre a continuidade dessa sequência, determinando a quantidade de pontos referente à 5ª figura.

Figura 22: Atividade Proposta 2 item a

a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência.

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 224).

Esta Tarefa instiga o aluno a buscar pela escrita da expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal, partindo da identificação do padrão figural, bem como a identificação da progressão geométrica desse fractal. Assim, construímos nosso quadro.

Quadro 11: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	τ 2a: Identificar o padrão figural. τ 2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ 2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	θ 2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 2: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Com relação à pergunta 2 desta Atividade, os autores sugerem, além da identificação do padrão figural já utilizada no item anterior, também a soma dos termos de uma PG. Vejamos:

Figura 23: Atividade Proposta 2 item b

b) Quantos pontos Débora terá desenhado ao concluir a 5ª figura da sequência?

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 224).

No que diz respeito a esta Tarefa, os autores esperam que o aluno utilize as propriedades da progressão geométrica finita, manipulando a soma de seus termos para desenvolver sua resposta. Ainda que esta Tarefa apresente alguma semelhança com a anterior, o que as diferencia é a utilização da soma de todos os termos dessa sequência finita. Logo, temos o seguinte quarteto e o designamos por T2, e a técnica mobilizada nesta Tarefa é diferente da anterior.

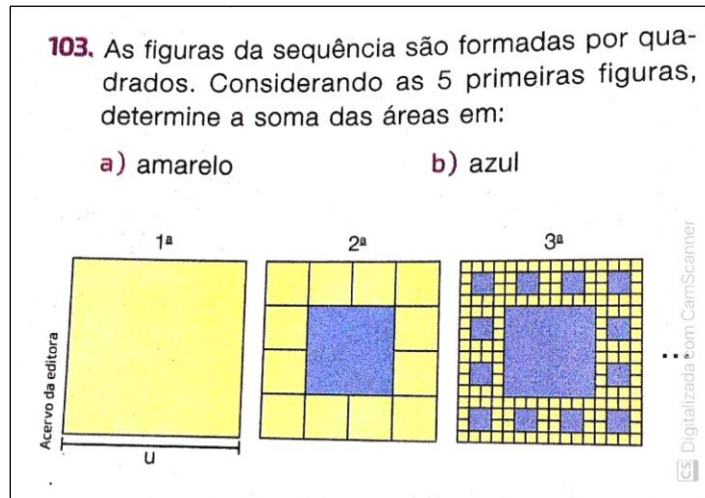
Quadro 12: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	τ 2a: Identificação do padrão figural. τ 2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 2c: Identificação da progressão geométrica do fractal. τ 2d***: Escrever algebricamente a função que corresponde a soma dos termos de uma progressão geométrica e substituir pela etapa desejada.
TECNOLOGIA	θ 2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 2: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

A próxima Tarefa, em sequência ao conteúdo de progressão geométrica do LD 1.1, utiliza, além dos conceitos desse tema, também conhecimentos relacionados a grandezas e medidas. Tal fato foi observado porque, em seu enunciado, os autores exibem as figuras de uma sequência e pedem que o aluno considere, além das 3 figuras apresentadas, mais 2, completando, assim, uma sequência finita de 5 termos. Diante disso, questionam o aluno sobre a área em amarelo e em azul, que são as cores que compõem as iterações desses fractais, como podemos observar através da figura.

Figura 24: Atividade Proposta 3



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 224).

A respeito desta Tarefa, ao analisarmos o LD do professor, verificamos que as técnicas mobilizadas pelos autores sugerem ao aluno, partindo da identificação do padrão figural, bem como da progressão geométrica, escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal e substituir pela etapa desejada. Assim, buscam determinar as áreas das subfiguras e somá-las. Diante disso, apresentamos nosso próximo quadro com o Tipo de Tarefa 1.

Quadro 13: Tipo de Tarefa 1

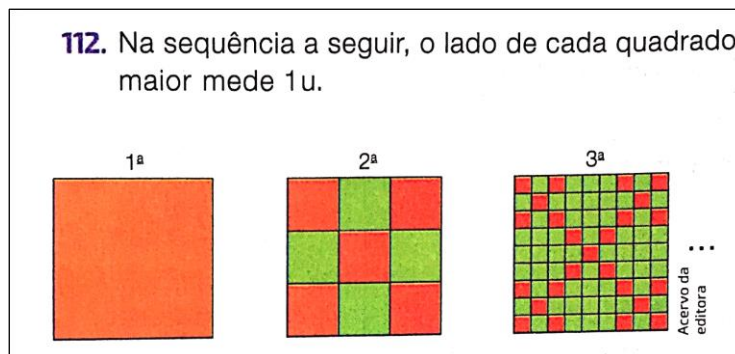
TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	τ_{1a}^* : Identificação do padrão figural do fractal. τ_{1b}^{**} : Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ_{1c}^* : Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. τ_{1d}^* : Substituir pelas etapas desejadas. τ_{1e} : Determinar as áreas das subfiguras desejadas. τ_{1f} : Somar as áreas das subfiguras do fractal.
TECNOLOGIA	θ_5 : Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	θ_5 : Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Dando sequência às atividades correspondentes ao assunto de Progressão Geométrica, a Tarefa explorada em seguida envolve o conteúdo de Geometria dos Fractais, implicitamente,

pois como podemos observar, seu enunciado não faz menção a termos fractais. Essa atividade, assim como a anterior analisada, além de contemplar conhecimentos de progressão geométrica, explora conceitos de área.

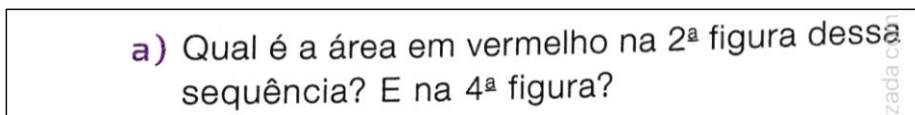
Figura 25: Atividade Proposta 4



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 224).

As 2 questões norteadoras desta atividade envolvem conceitos de área, mas o item *a* explora a área de 2 níveis específicos desse fractal, enquanto o item *b* estuda a área da sequência infinita desse fractal. Ao analisarmos o primeiro item, observamos que ele menciona:

Figura 26: Atividade Proposta 4 item a



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.224).

Concluimos, sobre sua OM, que seu Tipo de Tarefa é semelhante ao T1 anterior, o qual explora a técnica em que o aluno, para determinar a área do objeto fractal correspondente ao nível solicitado, é solicitado, primeiramente, identificar o padrão figural e a relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis, para, após, escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal mencionado, e em seguida, substituir, na função, o nível solicitado nesta Tarefa para, assim, ter propriedades de suas áreas e somá-las, conforme o solicitado.

Quadro 14: Tipo de Tarefa 1

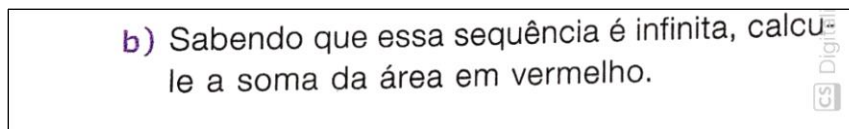
TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	τ_{1a}^* : Identificação do padrão figural do fractal.

	$\tau 1b^{**}$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. $\tau 1c^{*}$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. $\tau 1d^{*}$: Substituir pelas etapas desejadas. $\tau 1e$: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. $\tau 1f$: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

A respeito do item b temos:

Figura 27: Atividade Proposta 4 item b



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 224).

Percebemos que, por se tratar de uma sequência infinita, o aluno não poderá utilizar as técnicas semelhantes à OM mencionada anteriormente. Para buscar pela resposta deste item, ele deverá usar o conhecimento de limite. Sendo assim, nosso Quadro 13 corresponde ao Tipo de Tarefa 1, ampliando sua técnica.

Quadro 15: Tipo de Tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	$\tau 1a^{*}$: Identificação do padrão figural do fractal. $\tau 1b^{**}$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. $\tau 1c^{*}$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. $\tau 1d^{**}$: Aplicar limite.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

O primeiro contato com o termo fractal aparece na primeira atividade explorada desse livro; após, encontramos 3 Tarefas que se apropriam dos conceitos fractais, mas não mencionam

ser objetos fractais. Portanto, somente na última atividade ocorre uma breve explicação sobre o termo Fractal, que ocorre em seu enunciado.

Figura 28: Atividade Proposta 5

129. (Enem-MEC) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 229).

Em seguida, os autores fazem menção à exploração do triângulo de Sierpinski, comentando sobre os procedimentos de sua construção, e apresentando 3 figuras compatíveis com os 3 primeiros níveis deste fractal. Como podemos observar:

Figura 29: Atividade Proposta 5 - parte 2

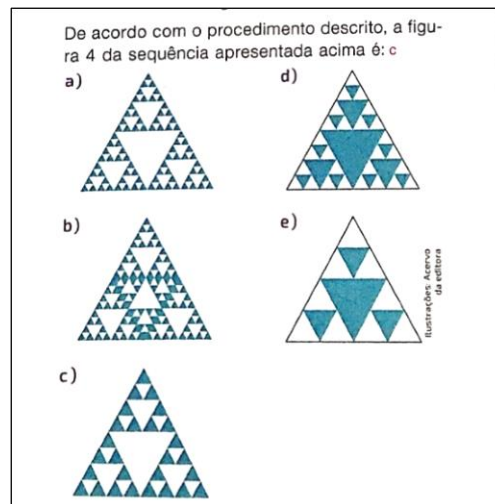
O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 229).

Posteriormente os autores propõem, embasados no triângulo de Sierpinski, a Tarefa em que o aluno busque determinar qual figura pertence ao nível 4 deste fractal. São disponibilizadas 5 alternativas, vejamos:

Figura 30: Atividade Proposta 5 - alternativas



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 229).

Ao analisar esta Tarefa, determinamos a OM com o Tipo de Tarefa 4, em que a técnica mobilizada para a realização da Tarefa, perante nossa observação do desenvolvimento da resolução presente no livro do professor, refere-se a manipular ostensivos, neste caso o papel, buscando pela construção do nível desejado.

Quadro 16: Tipo de Tarefa 4

TIPO DE TAREFA	T4: Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência.
TÉCNICA	τ 4a: Identificar o padrão figural do fractal. τ 4b: Manipular ostensivos – malha quadriculada – buscando pela construção do nível desejado.
TECNOLOGIA	θ 4: Compreensão da autossimilaridade do fractal.
TEORIA	Θ 4: Geometrias.

Fonte: A Autora.

Isto posto, observamos que o LD1.1 contemplou 5 atividades que envolveram o conteúdo da Geometria dos Fractais, havendo uma variação de 7 Tipos de Tarefas identificadas nessas atividades, todas encontradas na parte destinada ao ensino de Progressão Geométrica. Por mais que os fractais, nesta instituição, tenham sido explorados por intermédio de outro conteúdo de matemática, acreditamos que os autores explicitaram, de forma sucinta, os conhecimentos dessa teoria ao aluno, sendo todos os contatos por meio de atividades, não dedicando um momento exclusivo para a exploração da teoria.

O fractal Triângulo de Sierpinski foi utilizado na Atividade Proposta 5 do LD1.1, também na Atividade Proposta do LD1.2, a qual exploraremos na sequência.

Ao analisarmos o LD 1.2, identificamos a presença de apenas uma atividade que contemplasse o conteúdo da Geometria dos Fractais, em toda a obra. Essa atividade apresenta-se ao final dos capítulos, em uma seção destinada a questões voltadas aos vestibulares das regiões brasileiras e ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Inicialmente, a atividade retrata alguns recortes de uma matéria retirada da Revista do *Professor de Matemática*, publicada em 2005 pela Sociedade Brasileira de Matemática, com o tema *Fractais no Ensino Médio*. Em seu enunciado, o autor exibe uma breve introdução dos aspectos gerais de um fractal, usando como exemplo o Triângulo de Sierpinski, explorando sua construção.

Logo após comentar sobre a construção desse fractal, são apresentadas três figuras ilustrando o Triângulo de Sierpinski, como podemos observar na figura 32.

Figura 31: Atividade Proposta 6


Pensando no Enem

1. Leia o texto a seguir e observe as ilustrações.

“[...] Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

[...] Começando com um triângulo retângulo de catetos de comprimento L e dividindo seus lados ao meio, obtemos quatro triângulos congruentes que são semelhantes ao original, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$.

Retirando o interior do triângulo central e repetindo sucessivamente o processo nos triângulos restantes, obtemos como limite um fractal chamado triângulo de Sierpinski.”



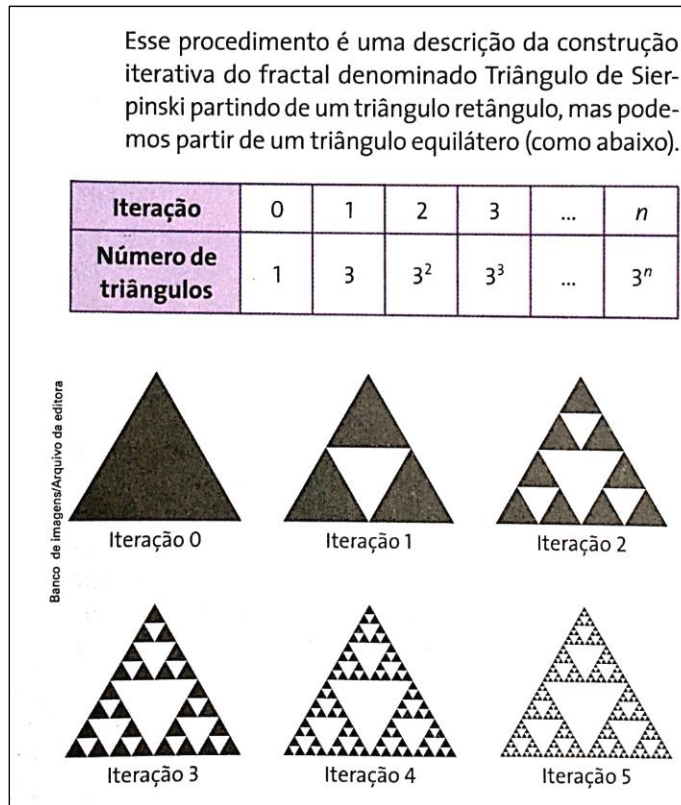
Banco de Imagens/ Arquivo da editora

Fonte: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Fractais no Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática, n. 57. 2º quadrimestre de 2005. p. 1-8.

Fonte: Dante (2016, p. 261).

Dando continuidade a esta atividade, o autor apresenta, em forma de tabela, as iterações desse fractal e quantos triângulos equivaleram a cada nível, exibindo, assim, a função que expressa o total de triângulos a cada nova etapa. Posteriormente, ilustra algumas iterações do Triângulo de Sierpinski.

Figura 32: Atividade Proposta 6 - parte 2



Fonte: Dante (2016, p. 261).

A Tarefa que engloba os fatos apresentados anteriormente é estruturada em 5 alternativas, solicitando ao aluno que aponte apenas a alternativa correta. As opções envolvem conhecimentos sobre a complexidade infinita e a dimensão fractal, assim como a sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração, e a área de cada triângulo. Vejamos a figura 34.

Figura 33: Atividade Proposta 6 - Tarefas

- A afirmação correta é:
- a) O número de triângulos cresce linearmente a cada iteração.
 - b) A sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$.
 - c) A sequência formada pelas áreas de cada triângulo, a cada iteração, é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$.
 - d) A sequência formada pelo número de triângulos a cada iteração é uma progressão aritmética de razão 3.
 - e) A área de cada triângulo tende a infinito.

Fonte: Dante (2016, p. 261).

Analisando somente as atividades e o conjunto em que elas se apresentam, não é possível pensar em suas OM, pois elas não se encontram em um conteúdo específico, mas apenas ao final dos capítulos, em um conjunto de atividades diversificadas sobre vestibular e ENEM. Porém, ao analisar as respostas presentes no livro do professor, foi possível realizar a OM dessas Tarefas.

Com relação às conclusões de cada item, temos:

Figura 34: Respostas Atividade Proposta 6

Pensando no Enem

1. Analisando as alternativas:

a) O número de triângulos cresce **exponencialmente** a cada iteração. (F)

b) A sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$. (V)

c) A sequência formada pelas áreas de cada triângulo a cada iteração é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$. (F)

d) A sequência formada pelo número de triângulos, a cada iteração, é uma **progressão geométrica** de razão 3. (F)

e) A área de cada triângulo tende a **zero**. (F)

Iteração	0	1	2	3	...	n
Número de triângulos	1	3	3^2	3^3	...	3^n
Área de cada triângulo	A	$\frac{1}{4}A$	$(\frac{1}{4})^2 A$	$(\frac{1}{4})^3 A$...	$(\frac{1}{4})^n A$
Área total	A	$\frac{3}{4}A$	$(\frac{3}{4})^2 A$	$(\frac{3}{4})^3 A$...	$(\frac{3}{4})^n A$

Resposta: alternativa b.

Fonte: Dante, (2016, p. 306).

Observamos que, a cada item, o Tipo de Tarefa pode variar. Assim, para resolver essa Tarefa, o aluno mobilizará mais do que uma técnica.

Com relação à alternativa a, o Tipo de Tarefa que identificamos faz menção a *Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal*. Assim, nossa OM para esta Tarefa é referente ao T3.

Quadro 17: Tipo de Tarefa 3

TIPO DE TAREFA	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
TÉCNICA	τ3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível.

	$\tau 3c$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. $\tau 3d$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	$\theta 3$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 3$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Os itens *b* e *c* utilizam conhecimentos sobre as áreas totais e pertencentes a cada iteração. Ambos mobilizam o Tipo de Tarefa 1, mas o que os diferencia é que, no momento da construção algébrica da função que corresponde ao padrão de iteração do fractal, uma irá se referir à área total, ao passo que a seguinte tangerá a área de cada triângulo.

Sobre o quadro da OM dos itens *b* e *c*, apresentamos:

Quadro 18: Tipo de Tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	$\tau 1a^*$: Identificação do padrão figural do fractal. $\tau 1b^{**}$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. $\tau 1c^*$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. $\tau 1d^*$: Substituir pelas etapas desejadas. $\tau 1e$: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. $\tau 1f$: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Ao investigar a Tarefa do item *d*, identificamos que ela solicita ao aluno pensar sobre a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal. Logo, constituímos nossa OM referente ao Tipo de Tarefa 2 do seguinte modo.

Quadro 19: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	$\tau 2a$: Identificar o padrão figural.

	$\tau 2b$: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. $\tau 2c$: Identificar a progressão geométrica do fractal. $\tau 2d$: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	$\theta 2$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 2$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Para findarmos as OM desta atividade, compreendemos que o autor sugere ao aluno escrever a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal para determinar se o item é verdadeiro ou falso. Logo, traçando essa função, ele poderá indicar se a área de cada triângulo tende ao infinito ou não. Assim, nossa OM deste item pertence à T1.

Quadro 20: Tipo de Tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	$\tau 1a^*$: Identificar o padrão figural do fractal. $\tau 1b^{**}$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. $\tau 1c^*$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. $\tau 1d^*$: Substituir pelas etapas desejadas. $\tau 1e$: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. $\tau 1f$: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Diante do desenvolvimento desses itens, o aluno chegará à afirmação desta atividade apontando a alternativa correta. Ressaltamos que estas Tarefas englobaram, em uma única atividade, 3 organizações matemáticas diferentes, explorando diferentes técnicas, e conhecimentos fractais de Geometrias e Funções.




Assim constatamos, durante a leitura do LD1.2, apenas 1 atividade que explorou os conhecimentos fractais, sendo apresentada na seção destinada a questões de vestibulares e ENEM, contemplada ao final dos capítulos dessa instituição. Por se tratar de 1 atividade, identificamos a variação de 3 Tipos de Tarefas presentes, o que nos ofereceu subsídios para

considerar escasso o contato e a exploração da teoria em questão, uma vez que as seções destinadas a vestibulares podem não ser exploradas durante as aulas, eximindo os alunos do contato com a Geometria dos Fractais nessa instituição.

O LD1.3 propõe o primeiro contato com a Geometria dos Fractais em uma Atividade Proposta presente no capítulo 8 do livro, referente ao ensino de *Sequências e Progressões*. O enunciado da Tarefa apresenta brevemente aspectos gerais da Geometria dos Fractais, como o significado do termo fractais, seu precursor e alguns avanços desta teoria, e aponta exemplos naturais e computacionais de objetos fractais. Traz uma figura de um exemplo computacional, e logo em seguida apresenta o Triângulo de Sierpinski e seu criador, expondo, na sequência, três iterações deste objeto fractal. Logo após são sugeridas duas Tarefas relacionadas ao fractal apresentado, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 35: Atividade Proposta 7

Outro matemático com grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal foi o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que tornou conhecido o Triângulo de Sierpinski no início do século XX, uma das formas elementares da geometria fractal. Observe.

			...
1^1	2^2	3^3	...
$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$...

Baseando-se nas informações acima, resolva:

a) Quantos triângulos pretos terá a 4ª figura?

b) Qual das sentenças a seguir pode expressar a quantidade de triângulos pretos da figura, que ocupam a n-ésima posição?

- $a_n = 3n$
- $a_n = n^3$
- $a_n = 3^{n-1}$
- $a_n = 3 + n$

Fonte: Chavente e Prestes (2016, p. 175).

Em relação ao item *a*, o quadro a seguir contempla sua OM.

Quadro 21: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	<p>τ2a: Identificar o padrão figural.</p> <p>τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível.</p> <p>τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal.</p> <p>τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.</p>
TECNOLOGIA	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ2: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

O quadro apresentado em seguida trata da OM referente ao item *b* da Tarefa supracitada.

Quadro 22: Tipo de Tarefa 3

TIPO DE TAREFA	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
TÉCNICA	τ 3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ 3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ 3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	θ 3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 3: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Podemos observar que o item *a* solicita ao aluno que ele descubra quantas subfiguras pertencem a um nível específico, neste caso, o nível 4. Já o item *b* desta atividade pede que o discente desenvolva um raciocínio que envolva generalização, buscando pela função que corresponde ao padrão de iteração do fractal desejado.

Este primeiro exemplo mostra como a Geometria dos Fractais pode ser trabalhada não somente com fim em si mesma, mas como um meio de trabalhar outros conteúdos matemáticos, podendo estar relacionada e imbricada a outras teorias.

Seguindo esta ideia de relação entre a Geometria dos Fractais com outros conteúdos matemáticos, apresentamos, ainda nas Atividades Propostas, na parte destinada ao estudo de progressão geométrica, uma sugestão dos autores para uma Tarefa que, implicitamente, recorre ao conteúdo de Geometria dos Fractais, e foi proposta em um concurso vestibular. Esta Tarefa considera um padrão de construção figural apresentado em 3 etapas, e descreve, em seu enunciado, como essas figuras foram construídas.

A pergunta que a norteia diz respeito à área da figura na etapa 5, conforme a seguir.

Figura 36: Atividade Proposta 8

45. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior.

Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é:

a) $\frac{125}{729}$ d) $\frac{625}{2187}$
 b) $\frac{125}{2187}$ e) $\frac{625}{6561}$
 c) $\frac{625}{729}$

Fonte: Chavente e Prestes (2016, p. 192).

Esta Tarefa consistiu em determinar a área restante na etapa 5, ao retirar quadradinhos sequencialmente, a depender da etapa da figura. Assim, estabelecemos a OM a seguir.

Quadro 23: Tipo de Tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
TÉCNICA	$\tau 1a^*$: Identificar o padrão figural do fractal. $\tau 1b^{**}$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. $\tau 1c^*$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. $\tau 1d^*$: Substituir pelas etapas desejadas. $\tau 1e$: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. $\tau 1f$: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
TECNOLOGIA	$\theta 1$: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	$\Theta 1$: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Presente ainda no conteúdo de progressão geométrica, os autores sugerem, novamente de forma implícita, a Geometria dos Fractais em uma de suas atividades. A Tarefa referida faz menção a uma sequência finita de figuras formadas por pontos, e apresenta a ilustração de 3 etapas em seu enunciado. Apresentamos, a seguir, a ilustração da Tarefa e sua OM detalhada.

Figura 37: Atividade Proposta 9

57. Observe a sequência de figuras formadas por pontos.

figura I figura II figura III

Sabendo que essa sequência tem cinco figuras, responda.

a) A figura V é formada por quantos pontos?
b) Ao todo, quantos pontos têm as cinco figuras juntas?

Fonte: Chavente e Prestes (2016, p. 199).

Ao realizar a Organização Matemática desta Tarefa, percebemos que o item a se enquadra no Tipo de Tarefa 2.

Quadro 24: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	τ 2a: Identificar o padrão figural. τ 2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ 2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
TECNOLOGIA	θ 2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 2: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Com relação ao item *b* desta Tarefa, o autor do LD1.3 almeja que o estudante utilize a soma dos termos de uma progressão geométrica finita para responder à pergunta. Embora esse Tipo de Tarefa seja muito semelhante ao anterior, ele traz diferenças, uma vez que solicita a soma das subfiguras até o nível 5. Logo, temos:

Quadro 25: Tipo de Tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
TÉCNICA	τ 2a: Identificar o padrão figural. τ 2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ 2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ 2d**: Escrever algebricamente a função que corresponde a soma dos termos de uma progressão geométrica e substituir pela etapa desejada.
TECNOLOGIA	θ 2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
TEORIA	Θ 2: Geometrias e Funções.

Fonte: A Autora.

Dentre as 7 Tarefas propostas no LD1.3 que envolveram o conteúdo Geometria dos Fractais, observamos a presença de 4 Tipos de Tarefas distintos. Evidenciamos que todas as Tarefas analisadas se apresentam na seção destinada ao ensino de progressão geométrica; sendo assim, as teorias mobilizadas, em todos os Tipos de Tarefas, condizem ao ensino de Geometrias e Funções. Tão somente a Parte Curso está deslocada do capítulo de Sequências e Progressões; entretanto, o exemplo citado sobre perímetro e comprimento da curva de Koch faz menção ao ensino de PG.

Embora o LD1.3 tenha apresentado a Parte Curso sobre a Geometria dos Fractais, enquanto o LD1.1 e LD1.2 não contemplaram este componente, acreditamos que a instituição LD1.3, de forma geral, poderia ter abrangido maiores informações sobre esta teoria, oportunizando melhores conhecimentos e explorações fractais ao aluno.

Isto posto, destacamos que as explorações sobre o ensino da Geometria dos Fractais nesta instituição apresentam-se não através do seu próprio conteúdo, mas por intermédio e objetivo de exploração de outro conteúdo matemático.

De modo geral, constatamos a presença unicamente das Atividades Propostas no LD1.1 e no LD1.2, ao passo que o LD1.3 apresentou, além das Atividades Propostas, a Parte Curso e Atividades Resolvidas, referentes ao estudo da Geometria dos Fractais.

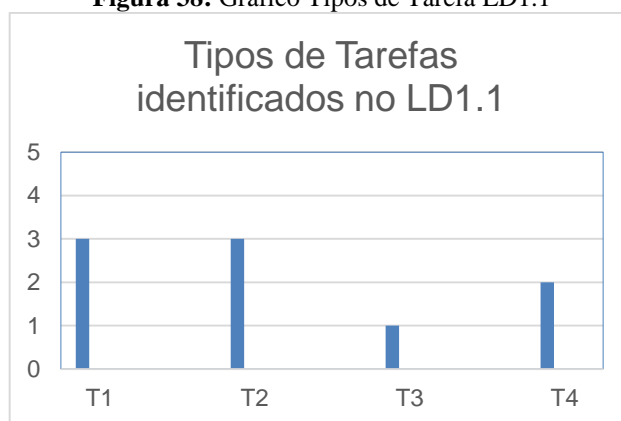
4.2 Síntese dos dados produzidos nos livros didáticos

Nos livros didáticos analisados, buscamos identificar as praxeologias propostas para o estudo da Geometria dos Fractais. Como descrevemos anteriormente, nesses livros não havia capítulos específicos para o estudo do tema em questão, o que de antemão esperávamos encontrar, mesmo que se fizesse presente de forma sucinta. Com as leituras realizadas para o entendimento de fractais, observamos que algumas palavras, imagens e conceitos estão fortemente relacionados a esse tema, como é o caso de sequência, etapas, níveis, iterações, dentre outras, em contextos envolvendo padrões. Assim, ao procurar por essas características, figurais e escritas, ao longo dos livros, encontramos atividades que envolvessem o conteúdo de Geometria dos Fractais.

O LD1.1, volume da coleção mais adotada pelas escolas das 5 maiores cidades do Paraná, apresentou o primeiro encontro com o tema Fractais por meio de uma primeira tarefa inclusa no campo de atividades do conteúdo de progressão geométrica (PG). Em meio a esse capítulo, destinado ao estudo de PG, classificamos 5 atividades que envolveram conceitos relacionados ao estudo do conteúdo Geometria dos Fractais.

Dentre as atividades identificadas, ao analisarmos as Tarefas do LD1.1, observamos a variação de 4 Tipos de Tarefas diferentes. Com essas informações, elaboramos um gráfico, por meio do qual podemos observar os Tipos de Tarefas detectados nesse livro, e quantas vezes eles foram contemplados pelas Tarefas, com a finalidade de compararmos a frequência destes nesta instituição.

Figura 38: Gráfico Tipos de Tarefa LD1.1



Fonte: A Autora (2020).

Observamos que o T1 (Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal) e o T2 (Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa) foram os Tipos de Tarefa mais explorado nesse livro, seguidos

dos Tipos de Tarefa T3 (Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal) e T4 (Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência), os quais foram modelados, respectivamente, por uma e duas Tarefas.

Na organização praxeológica dessa obra, concluímos que todos os contatos com a Geometria dos Fractais estão articulados com o conteúdo de progressão geométrica. O primeiro contato com a praxeologia ocorre através de uma atividade sobre a sequência de um objeto fractal, logo após seguimos 3 atividades, nesta mesma seção, que envolvem essa mesma ideia de sequência, mas o termo *fractal* não é mencionado. Fechamos o diálogo com essa praxeologia presente no LD1.1 abarcando uma questão proveniente do ENEM, elucidando alguns aspectos gerais e breves sobre o termo fractal, indagando sobre a construção de níveis do Triângulo de Sierpinski. Vale ressaltar que conhecimentos, como significado do termo fractal, propriedades sobre sua construção, história e descoberta da Geometria dos Fractais foram explorados na última atividade analisada sobre esse tema.

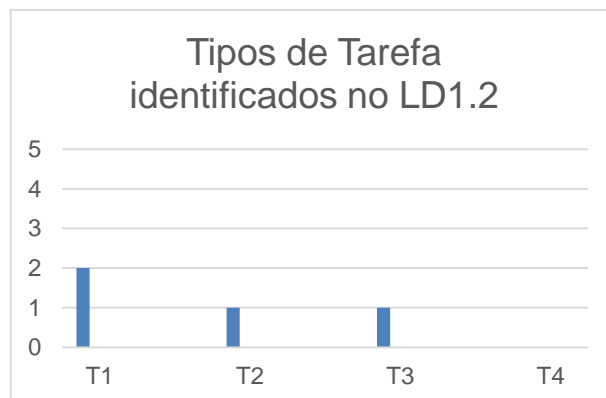
Analisando o LD1.2 foi possível modelar 3 Tipos de Tarefas distintos; porém, todos foram mobilizados por meio de uma única atividade explorada no livro do Primeiro Ano, que contemplava aspectos relacionados ao ensino da Geometria dos Fractais.

A Tarefa investigada não está atribuída ao decorrer de algum capítulo, sendo articulada diretamente a algum conteúdo matemático. Ela se faz presente ao final da instituição livro didático, na seção destinada a explorações de questões retiradas de vestibulares e até mesmo do ENEM, ao qual essa Tarefa se apresenta.

O primeiro e único contato com a praxeologia investigada nesta instituição aborda trechos de uma reportagem retirada de uma revista matemática, que menciona aspectos gerais sobre a teoria dos fractais, fazendo uma sucinta apresentação desse tema. Dando sequência à atividade, ela é explorada mediante a construção do Triângulo de Sierpinski.

Diante disso, construímos um gráfico, a fim de observarmos os Tipos de Tarefas modelados nessa instituição.

Figura 39: Gráfico Tipos de Tarefa LD1.2



Fonte: A Autora (2020).

Observamos que o T1 (Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal) foi o Tipo de Tarefa mais explorado no LD1.2, contemplado 2 vezes na Tarefa analisada.

O LD1.3 apresenta o primeiro contato com a praxeologia investigada por meio de uma atividade contida na página 175, inclusa no conteúdo destinado ao ensino de progressão geométrica. Inicialmente, o enunciado da atividade apresenta uma breve definição do significado de fractais, explorando suas principais características, assim como aspectos históricos e de aplicação dessa geometria não-euclidiana, antes de introduzir, ao aluno, a Tarefa sobre o Triângulo de Sierpinski.

O LD1.3 explora 4 atividades que envolvem os conhecimentos da Geometria dos Fractais, além da atividade mencionada anteriormente, a qual estuda o Triângulo de Sierpinski. Outro fractal investigado nas Tarefas é o Tapete de Sierpinski. As outras duas atividades tratam implicitamente sobre aspectos fractais.

Quanto ao Tipos de Tarefas modelados nessa instituição, temos:

Figura 40: Gráfico Tipos de Tarefa LD1.3



Fonte: A Autora (2020).

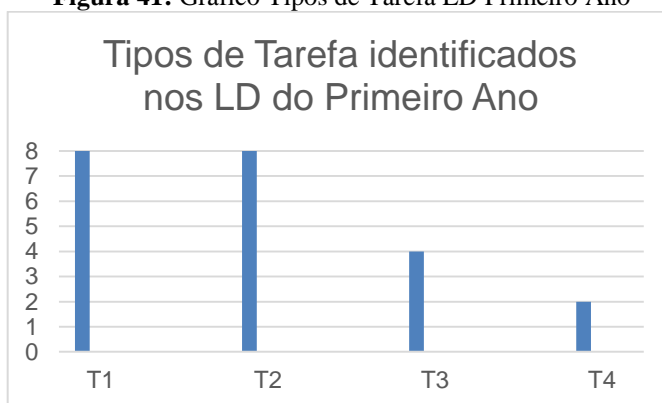
Identificamos que o T2 (Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa) se faz presente em 4 Tarefas, sendo o Tipo de Tarefa mais identificado nessa obra. O T1 (Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal) foi identificado em 3 Tarefas, e o T3 (Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal) foi identificado em duas Tarefas.

Com relação ao LD 1.4, nada podemos concluir com relação a sua organização matemática, uma vez que essa instituição não abordou conteúdo relacionado à Geometria dos Fractais.

Dentre os livros analisados, apenas o LD1.3 oportuniza, ao aluno, acesso à Parte Curso sobre o tema fractais. Essa organização se faz presente após o capítulo 10, destinado ao estudo de Trigonometria, último capítulo dessa instituição. Nesse momento, o aluno tem seu primeiro contato, nessa obra, com o conteúdo da Geometria dos Fractais, a qual é apresentada sucintamente, em 2 páginas, retratando aspectos gerais da teoria explorando o fractal Floco de neve de Koch.

Para observar os Tipos de Tarefa mais frequentes identificados nos 3 livros didáticos analisados, construímos um único gráfico, reunindo os 3 gráficos apresentados anteriormente.

Figura 41: Gráfico Tipos de Tarefa LD Primeiro Ano



Fonte: A Autora (2020).

Dessa forma, verificamos que o T1 (Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal) e o T2 (Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa) foram os Tipos de Tarefa mais caracterizados em nossas análises presentes junto aos livros do Primeiro Ano. O T3 (Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal), por sua vez,

foi modelado em 4 Tarefas durante nossa investigação, enquanto o T4 (Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência) esteve presente em 2 Tarefas.

Com relação à análise dos livros didáticos do Segundo Ano, destacamos que apenas o LD 2.4 contemplou alguma exploração sobre o conteúdo Geometria dos Fractais, que se fez presente na Parte Curso, dando subsídios para analisarmos a sua organização didática. Contudo, o livro não trouxe respaldo de atividades ou investigações para identificar sua organização matemática.

Diante da OD dessa instituição, salientamos que ela se faz presente, de forma bem sucinta, trazendo explorações históricas de como nasceu a necessidade de estudar e entender a Geometria dos Fractais. Apresenta, também, a história, de forma breve, do pai dos fractais, Mandelbrot, comentando sobre características fractais e fazendo nexos a fractais da natureza e alguns geométricos.

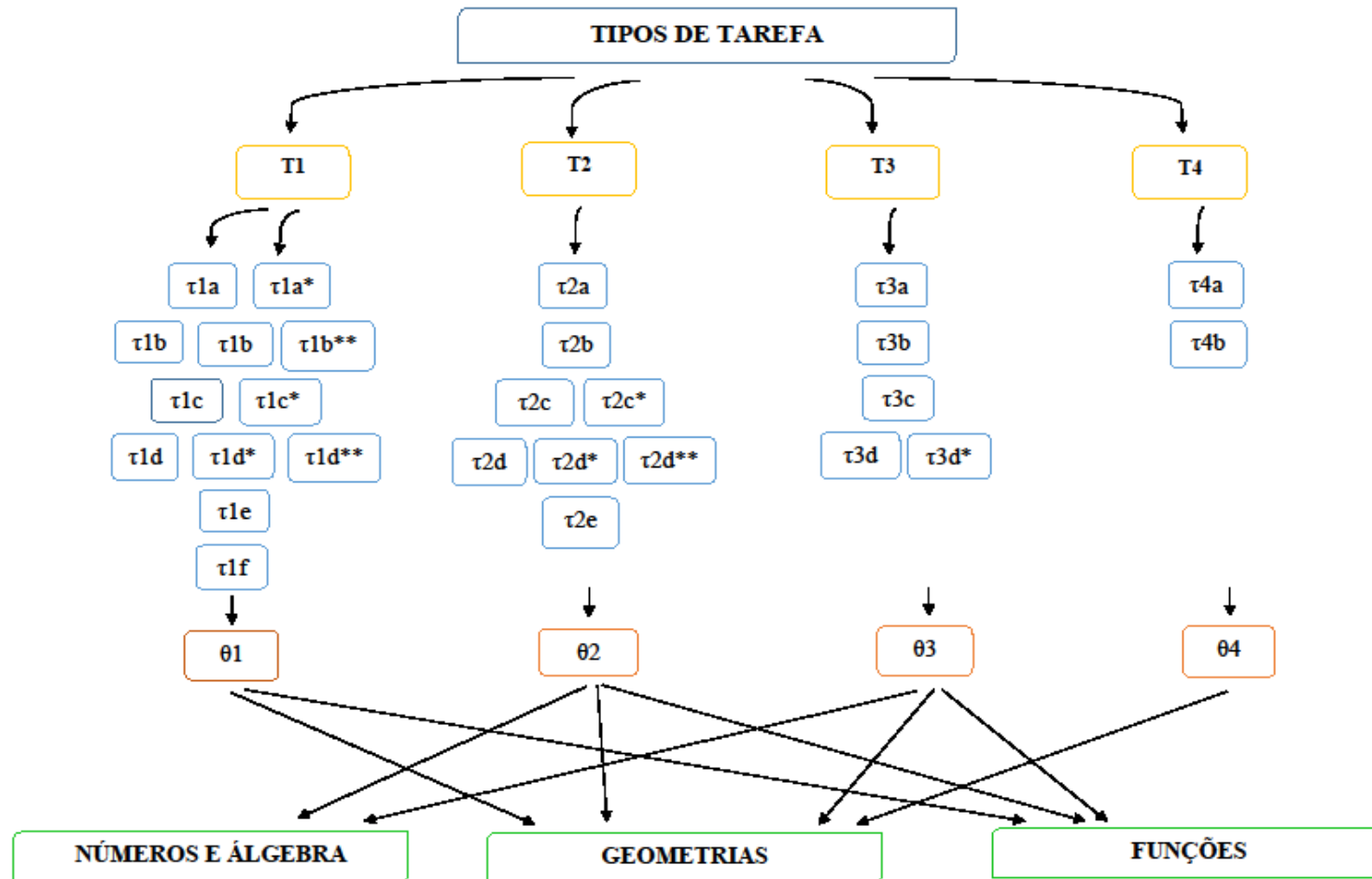
Porém, uma curiosidade notada mediante essa análise é que a Parte Curso dessa geometria está situada, no livro, em uma seção intitulada *Aplicações*, logo após o capítulo destinado ao ensino de *Corpos Redondos*. Contudo, os temas não se relacionam no caso apresentado, assemelhando-se a uma abordagem *forçada* do conteúdo de Geometria dos Fractais, pois, na sequência, também não é feito um nexo com o conteúdo, dando a entender como algo solto na instituição.

Assim sendo, com relação aos livros do Segundo Ano, os LD 2.1, LD 2.2 e LD 2.3, nada podemos concluir com relação a sua organização matemática, pois esses volumes não abordaram, em nenhum momento, o conteúdo Geometria dos Fractais.

Com menção aos livros do Terceiro Ano, nada podemos definir também, pois eles não apresentaram abordagem do conteúdo Geometria dos Fractais, nem com um fim nele mesmo, como por intermédio de outro conteúdo matemático.

Com referência aos Tipos de Tarefa, suas Técnicas, Tecnologias e Teorias identificadas nas Tarefas analisadas dos livros do Primeiro Ano, apresentaremos, a seguir, um esquema esboçando as variações dos quartetos praxeológicos.

Figura 42: Síntese das praxeologias encontradas



Fonte: A Autora (2020).

Assim, é possível observar que a teoria dos fractais se apresenta com maior frequência mediante o domínio de Geometrias, seguido do assunto de Funções e Números, e Álgebra, respectivamente.

A relação ao conteúdo de Geometria dos Fractais presente nos livros didáticos oferecidos a alunos e professores, ele foi encontrado manifestado como um conteúdo desenvolvido e explorado por intermédio de outros conteúdos matemáticos, e não partindo de seu próprio estudo. Embora a expectativa inicial desta pesquisa tenha sido a de investigar o conteúdo Geometria dos Fractais de modo que tal assunto estivesse isolado dos demais e que houvesse Parte Curso, Atividades Resolvidas e Atividades Propostas, detalhando aspectos históricos, geométricos e exploratórios, destacamos as indicações das DCE quanto à apresentação de conhecimentos geométricos:

Na Educação Básica, a Educação Matemática valoriza os conhecimentos geométricos, que não devem ser rigidamente separados da aritmética e da álgebra. Interliga-se com a aritmética e com a álgebra “porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela geometria, que realiza a tradução para o aprendiz” (LORENZATO, 1995, p. 07) (PARANÁ, 2008, p. 57, grifos originais).

Seguida a esta declaração, é proveniente das DCE (PARANÁ, 2008, p.192) o entendimento similar à valorização de “definições, as abordagens de enunciados e as demonstrações de seus resultados”, que são apontadas como inerentes ao conhecimento geométrico.

Na sequência, apresentamos as considerações finais de nossa investigação, em que buscamos destacar os principais aspectos identificados a respeito da proposta de ensino do conteúdo Geometria dos Fractais ao longo das coleções analisadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de responder nossa questão de pesquisa: *O conteúdo Geometria dos Fractais pode ser encontrado nas coleções de livros didáticos adotados para o Ensino Médio no estado do Paraná? Se sim, quais são as propostas de ensino para este conteúdo?*, voltamos para as coleções mais adotadas nas 5 maiores cidades em termos de habitantes do Estado do Paraná. As análises realizadas sobre essas coleções revelam aspectos significativos sobre o ensino proposto. Apresentamos, neste momento, algumas das características observadas sobre o conteúdo Geometria dos Fractais.

Primeiramente, ressaltamos que a Teoria Antropológica do Didático, utilizada nesta pesquisa como teoria e como metodologia, foi evidentemente fundamental para a construção e compreensão da proposta de ensino em discussão. As noções de organizações matemáticas e das organizações didáticas deram subsídios para compreender nossos objetos de pesquisa, que se resumem em identificar e conhecer as metodologias utilizadas sobre a teoria fractal presentes nas instituições LD, também elencar os Quartetos Praxeológicos e momentos didáticos para esse assunto.

Em virtude do custo das análises, este estudo foi limitado por uma pequena amostra de livros didáticos, fazendo com que ficássemos atentas a generalizações indevidas, mas elas não nos impedem de estudar os comportamentos das instâncias do setor Geometria dos Fractais nessas instituições.

Com base nas análises realizadas, afirmamos que há indícios que a razão de ser da Geometria dos Fractais frente a essas instituições dizem respeito a uma teoria desenvolvida como mediadora na abordagem de outros conteúdos matemáticos. O fato em que identificamos que essa geometria se apresenta como um meio e não um fim nela mesma possibilita concluirmos que ela ocupa lugar de ferramenta nessas instituições.

Embora a Base Nacional Comum Curricular - BNCC não indique o estudo do conteúdo de geometrias não-euclidianas no contexto da Educação Básica, com nossa pesquisa foi possível observar que outras unidades temáticas, tais como álgebra, funções e números são abordadas durante as propostas. Sendo assim, há possibilidade de trabalhar habilidades indicadas na BNCC com propostas embasadas na Geometria dos Fractais. Vale ressaltar que as DCE (PARANÁ, 2008), conforme exposto anteriormente, recomenda a abordagem da Geometria dos Fractais em sala de aula, assim como os PCN (BRASIL, 1998) indicavam, durante a elaboração das Diretrizes do Estado do Paraná.

Frente ao que as DCE (PARANÁ, 2008) apontam, observamos que os documentos oficiais e as abordagens presentes na instituição livro didático investigada conversam, de tal modo que, ao tomar conhecimento das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná com relação ao que elas indicam para o ensino de Geometria dos Fractais, encontramos uma valorização à vista da articulação dos conhecimentos geométricos com outros conteúdos matemáticos, como citadas a aritmética e a álgebra.

Da mesma forma, as Diretrizes Curriculares do Paraná priorizam, para o ensino dessa geometria, a abordagem de definições, enunciados e demonstrações dos resultados, os quais são apontados como inerentes ao conhecimento geométrico. Neste sentido, as abordagens desses aspectos são apresentadas de forma sucinta nos livros didáticos analisados em que encontramos tal assunto.

As Tarefas identificadas nos livros que abordam conhecimentos do conteúdo Geometria dos Fractais, em sua maioria, foram localizadas em meio ao capítulo destinado ao ensino de Progressão Geométrica. Vale ressaltar que as Tarefas investigadas se enquadram no quesito atividades do contexto escolar, de aplicações de conceitos matemáticos diretamente, não se fazendo presentes nenhuma Tarefa do contexto extraescolar.

No nível de conteúdo encontrado sobre a Geometria dos Fractais, podemos apontar que ele está presente de forma escassa; porém, ao pensar em sua presença perante organizações praxeológicas, algumas instituições abordam e dialogam com os requisitos sugeridos pelos documentos oficiais, neste caso as DCE, mas de forma sucinta.

Os Tipos de Tarefa encontrados apresentam, assim como sugerido nas DCE (PARANÁ, 2008, p.172), explorações dos fractais, como o floco de neve e a curva de Koch, e triângulo e tapete de Sierpinski. Também, valorização as “definições, as abordagens de enunciados e as demonstrações de seus resultados”, como sugerido nas Diretrizes.

Perante as considerações feitas, algumas indagações surgem: os professores encontrarão subsídios suficientes para ensinarem a Geometria dos Fractais, com base nas suas características, apoiando-se somente no livro didático? Conseguirão superar a insegurança de trabalhar esse conteúdo se não tiverem conhecimentos *a priori* sobre ele?

Certamente estas questões trazem muitas discussões, e acreditamos que algumas mudanças podem ocorrer. Uma delas pode estar relacionada aos professores recém-formados, que poderão ter estudado, em suas grades curriculares, assuntos referentes às geometrias não-euclidianas, possibilitando uma compreensão para a abordagem em sala de aula. Com relação aos professores atuantes há certo tempo, é necessário resgatar o contexto histórico, matemático e filosófico dessa Geometria, por meio da formação continuada da sua prática, a fim de que

mudanças possam ocorrer, uma vez que somente o livro didático não fornece material suficiente para abordar esse conteúdo em sala de aula.

Acreditamos que a leitura deste trabalho, que foi proveniente de muitas inquietações, possa suscitar algumas dúvidas aos leitores, e resultar em questões norteadoras para futuras pesquisas. Como exemplo, podemos elencar: de que forma o conteúdo Geometria dos Fractais se faz presente na prática dos professores em sala de aula? Quais materiais de apoio o professor utiliza para abordar esse assunto além do livro didático?

Esperamos que esta pesquisa possa contribuir com estudos e investigações relacionados ao conteúdo Geometria dos Fractais, também na visibilidade da organização praxeológica para a aprendizagem deste tema.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2ª ed. São Paulo: Thomson, 2004.

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Campinas, 2017.

BITTAR, M; FREITAS, J. L. M.; PAIS, L. C. Técnicas e tecnologias com as operações aritméticas nos anos iniciais do ensino fundamental. In: SMOLE, Katia Stocco, e MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). **A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental**. Porto Alegre: Penso, 2013, p. 7 – 48.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas: Um estudo histórico-pedagógico**. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado**. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. v.19, n.1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: Acesso em: 4 abr. 2020.

CHEVALLARD, Y. L'Analyse de Des pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique, 1999.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Tradução: Maria José Figueiredo. 1992, p. 115 – 152.

FRISON, M. D.; et al. Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. In: Encontro Nacional De Pesquisas Em Educação E Ciências (Enpec), 7, 2009, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2009.

GASCÓN, J. La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. **Educación Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11-35, 2003.

GONÇALVES, K. R. **A Teoria Antropológica do Didático como Ferramenta para o Estudo de Transposições Didáticas**: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2016.

KASPARY, D. R. A.; BITTAR, M. **Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2008. Ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

PICCOLI, L. A. P. **A construção de conceitos em matemática**: uma proposta usando tecnologia de informação. 2006. Disponível em <https://meriva.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2977/1/000383787-Texto%2BCompleto-0.pdf>. Acesso em: 15 de abril de 2019.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. In: SAIZ, Irma; PARRA, Cecilia (Org). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução: Juan Acuna Lorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.