UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: COMUNICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES COM O GEOGEBRA

Andrei Cristiano Maia e Silva

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: COMUNICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES COM O GEOGEBRA

Andrei Cristiano Maia e Silva

Orientadora:
Maria Ivete Basniak

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

União da Vitória/PR
Novembro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586f

Silva, Andrei Cristiano Maia e.

Funções exponenciais e logarítmicas: comunicações e representações com o Geogebra. / Andrei Cristiano Maia e Silva – União da Vitória, 2021.
112 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Ivete Basniak.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória - Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação Matemática. União da Vitória, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática. 2. Ensino exploratório de matemática. 3. Matemática - funções. I. Universidade Estadual do Paraná. Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação Matemática. II. Basniack, Maria Ivete. IV. Título.

CDD: 510.7
CDU: 371.13:51

Catalogação na publicação elaborada por Mauro Cândido dos Santos – CRB 9ª/1416.

Andrei Cristiano Maia e Silva

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: COMUNICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES COM O GEOGEBRA

Comissão Examinadora:

Maria Ivete Basniak – Presidente da Banca
Unespar

Renata Viviane Raffa Rodrigues – Examinador Externo
UFGD

Laís Oliveira

Laís Maria Costa Pires de Oliveira – Examinador Externo
Unespar

Veridiana Resende

Veridiana Resende – Examinador Interno
Unespar

Resultado: Aprovado

União da Vitória/PR
Novembro de 2021

Dedico o presente trabalho a minha esposa Jaqueliny,
e aos meus filhos João e Amanda.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por dar-me a dádiva de poder cursar o mestrado, me abençoando de forma indescritível. Agradeço a Deus por proporcionar-me aprender muitas lições que ficarão para vida toda, me abençoando com a amizade pessoas maravilhosas.

Agradeço e agradeço muito a minha, orientadora, Maria Ivete Basniak, que não mediu esforços para me ajudar e para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço a todas as orientações, a todas as leituras indicadas, às leituras que realizou da minha dissertação, correções que precisou fazer, bem como os conselhos, o apoio e o incentivo para não desistir. Muito obrigado, prof. Maria.

Agradeço a minha esposa Jaqueliny e aos meus filhos, João e Amanda, que sempre me incentivaram e me apoiaram durante esses anos, e foram pacientes durante o tempo que precisei me dedicar aos meus estudos.

Agradeço a todos os professores do Programa pelos momentos de partilha do conhecimento, pois cada disciplina contribuiu imensamente para mim formação. Agradeço de maneira especial ao professor Everton Estevam, que me incentivou e me ajudou junto com minha orientadora em alguns momentos de dificuldades.

Agradeço aos meus colegas do Programa por todos os momentos de parceria e estudos, momentos de muitas alegrias e sonhos, foram momentos maravilhosos.

Agradeço aos meus amigos Aline e Laércio, que me deram um ânimo e incentivo na reta final.

Agradeço minha colega e minha pedagoga Andrea Danielle Muller, que me ajudou com a construção do projeto de pesquisa para ingressar no programa, e pelas diversas horas de partilha do conhecimento que tivemos.

RESUMO

O presente trabalho tem sua gênese nas inquietações de um professor da Educação Básica, e das suas dificuldades na construção do conceito de função exponencial e logarítmica com seus alunos. Essas inquietações levaram o professor a propor esta pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Desta forma, o objetivo geral que norteou a pesquisa foi investigar as formas que os alunos comunicam ideias-base de funções exponenciais e logarítmica em tarefas de natureza exploratória com o GeoGebra. Nesta pesquisa, o levantamento dos dados foi obtido com uma turma do Técnico integrado ao Ensino Médio de uma instituição pública do interior do Estado do Paraná. Com um grupo de seis alunos foram desenvolvidas duas tarefas de natureza exploratória, uma abordando o conceito de função exponencial e outra o conceito de função logarítmica. As tarefas foram desenvolvidas em quatro encontros por meio de videoconferência utilizando o Google Meet. Para a coleta dos dados, foi utilizado o GeoGebra Classroom, em que os alunos puderam utilizar um applet do GeoGebra, além de registrar o desenvolvimento dos alunos na resolução da tarefa. Na primeira tarefa, os alunos tiveram dificuldade no uso do GeoGebra por questões de desconhecimento do software, uma vez que não tinham hábito de utilizá-lo. Após a sistematização da primeira tarefa e a discussão das possibilidades de utilização do GeoGebra, na segunda tarefa, os alunos tiveram maior facilidade em seu uso. Por meio do uso do GeoGebra, os alunos conseguiram fazer representações gráficas e algébricas das funções e algumas comunicações; todavia, nem todas as comunicações foram citadas ou apareceram. Fica em aberto para pesquisas futuras como estas comunicações e representações podem contribuir no aprendizado dos conceitos-base de funções.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Exploratório de Matemática; Funções.

ABSTRACT

This work has its genesis in a Basic Education teacher's concern and his difficulties in Building the concepts of exponential and logarithmic functions with his students. This concern has led the teacher to propose this research to the *Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática* – PRPGEM. Therefore, the general aim which guided the research was investigating the ways that students communicate exponential and logarithmic functions basic ideas in exploratory tasks with GeoGebra. In this research, data survey was carried out with a student group of the integrate technician to the High School of a public institution in the countryside of the State of Paraná. In a group with six students, two exploratory tasks were developed, one of them approaching the exponential function concept, and the other with the logarithmic function concept. Tasks were performed in four meetings through videoconference by Google Meet. For data survey, GeoGebra Classroom was used, in which the students could use the GeoGebra applet, further register the students' development to solve the task. During the first task, students presented difficulties to use the GeoGebra because they have not known it and did not used to it. After the first task systematization and discussion on the usage possibilities with GeoGebra, the second task was easier to the students. Using GeoGebra, students could make graphic and algebraic representations of functions and some communications, but not all of them were mentioned or appear. Further future researches like these communications and representations are open and They might contribute for learning the functions basic concepts.

Keywords: Mathematic Education; Mathematic Exploratory Teaching; Functions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve origem com minhas inquietações[1] enquanto professor da Educação Básica, quando observei que a abordagem utilizada nas minhas aulas era pautada na reprodução das explicações do livro didático e centrada em mim, como transmissor do conhecimento. Minha forma de trabalho era muito próxima da abordagem expositiva ou direta, e pouco estava favorecendo a compreensão dos alunos com relação aos conteúdos, mais especificamente dos conceitos de função exponencial e logarítmica. A princípio, considerava que a dificuldade dos alunos era devido a minha falta de experiência na docência, uma vez que lecionava há apenas cinco anos e, por isso, acreditava que, com o passar do tempo, adquiriria habilidades suficientes para explicar melhor esses conceitos.

Entretanto, passados outros cinco anos, e já com dez anos de experiência como professor de Matemática, embora tenha buscado formações que pudessem auxiliar na carreira profissional e superar essas dificuldades (uma delas, por exemplo, foi o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio – PAPMEM), não observava grandes mudanças na aprendizagem dos alunos. Assim, mesmo realizando tais formações, continuava com dificuldades para ensinar, especialmente os temas supracitados - função exponencial e logarítmica, fato que me inquietava.

O conceito de função no ensino e na aprendizagem de Matemática tem se tornado uma noção fundamental da Matemática, desde a Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) até o Ensino Superior (SANTOS; BARBOSA, 2017). Assim, embora o tema sobre o ensino e a aprendizagem de funções tenha sido muito discutido e estudado no âmbito da Educação Matemática, o que observamos é que

> [...] os fenômenos ligados ao ensino e à aprendizagem das noções relacionadas ao conceito de função apresentam características intrínsecas que contribuem para constituição de um campo fértil para a investigação. De fato, vários aspectos já foram desvelados, porém, ainda existem muitas questões a serem investigadas sobre o tema (PIRES; MERLINE; MAGINA, 2015, p. 9).

Desse modo, o processo de ensino e de aprendizagem de funções ainda pode ser "considerado um desafio do ponto de vista do seu ensino e aprendizagem, em virtude tanto da variabilidade de formas de comunicá-lo, quanto do estabelecimento de relações entre elas" (SANTOS; BARBOSA, 2017, p. 2).

---

[1] A primeira parte do texto desta dissertação foi redigida em primeira pessoa por se tratar da experiência pessoal do pesquisador. Ainda nesta introdução iniciamos o uso do plural para destacar o papel da orientação.

Neste sentido, ao trabalhar com os alunos os conceitos relacionados às funções, observava que eles conseguiam compreender os conceitos de função afim e quadrática, e considerava isso porque já haviam tido algumas noções destes conteúdos no nono ano do Ensino Fundamental. Além disso, eu normalmente abordava estes conceitos associando à Física, como, por exemplo, os movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variados. Porém, ao discutir funções exponenciais e, na sequência, as funções logarítmicas, observava que os alunos apresentavam muita dificuldade na compreensão desses conceitos, principalmente na transposição de suas representações, por exemplo, da representação gráfica para a algébrica e vice-versa. Notei que muitos alunos consideravam que o gráfico da função exponencial e logarítmica, bem como sua representação algébrica, eram conceitos distintos. Entretanto, os alunos conseguiam estabelecer essas associações nas funções do primeiro e segundo grau, compreendendo seu lugar geométrico, bem como a sua representação algébrica e gráfica.

Assim, considero que um dos motivos da dificuldade da aprendizagem dos alunos quanto a funções exponenciais e logarítmicas pode ser a abordagem de ensino que eu usava, quase sempre, senão sempre, iniciando pela definição de função exponencial ou logarítmica, seguida da resolução de exemplos e exercícios. Portanto, uma forma de ensino centrada no professor, pois mesmo quando iniciava a explicação por um problema, como, por exemplo, a clássica questão sobre crescimento de bactérias, não dava tempo para os alunos pensarem sobre o assunto e refletirem sobre quais conceitos matemáticos estavam envolvidos na situação. Acabava resolvendo sozinho o problema e, na sequência, definia a função, seu gráfico e suas propriedades, e partia para resolução de exercícios. Outro motivo que pode ter contribuído para a não aprendizagem dos alunos é o fato de não proporcionar a eles situações em que observassem que uma função pode ser comunicada sob diversas formas, além da definição, apenas. Nesse sentido, Santos e Barbosa (2017) ressaltam que há outras formas de comunicar o conceito de função, não se atendo apenas à sua definição, as quais enunciam ser: função como tabela, como máquina de transformação, como diagrama, como expressão algébrica, como generalização, como gráfico e como definição. Também é possível representar uma função de forma gráfica, numérica, algébrica, geométrica e linguagem natural.

Estas formas de comunicação do conceito de função podem proporcionar diferentes interpretações, tornando mais produtivo o aprendizado, observando o nível de ensino em que o conceito está sendo estudado (SANTOS; BARBOSA, 2017). Portanto, é necessário promover ao aluno outros meios de comunicar o conceito de função além da definição, pois desta forma podemos evitar algumas dificuldades que eles apresentam, como quando necessitam estabelecer conexões entre, por exemplo, uma comunicação gráfica, algébrica ou tabular de uma função.

Além disso, o uso de diferentes registros pode facilitar a compreensão de que uma função não é uma equação, haja vista que, "de acordo com alguns [alunos], função é sinônimo de equação e as funções dadas por mais de uma expressão algébrica não são bem compreendidas" (OLIVEIRA, 1997, p. 2). Esta dificuldade é uma das várias que os alunos apresentam sobre o conceito de função (PIRES; MERLINE; MAGINA, 2015).

No que se refere aos materiais didáticos utilizados ao trabalhar funções em sala de aula, utilizava aqueles que a escola dispunha. Como a instituição que trabalhava era uma escola privada que não adotava uma bibliografia específica, os alunos podiam levar livros de diversas coleções para utilizar. A metodologia utilizada pela escola era baseada em projetos, que partiam de pesquisas sobre o tema da aula, realizadas pelo aluno em seus materiais (livros, computadores). Após esse momento de pesquisa e leitura, o aluno fazia o registro escrito no caderno e o professor fazia a explanação do conceito. Muitas vezes eu considerei que essa era a melhor forma de conduzir o processo de ensino, pois pensava que, agindo dessa forma, descentralizava o professor do papel de transmissor do conhecimento e centrava no aluno *a construção do conhecimento*. Porém, eu utilizava essa abordagem apenas para os alunos registrarem os conceitos em seus cadernos, mas centrava as explicações em mim.

Com relação ao uso de softwares para o ensino de Matemática, conhecia um pouco sobre o GeoGebra. Porém, por não ter conhecimento aprofundado das suas ferramentas, fazia uso dele apenas para construção da representação gráfica das funções exponenciais e logarítmicas, sem me ater inclusive à associação entre a representação algébrica e gráfica, que é saliente no GeoGebra.

Em 2019, quando ingressei no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática - PRPGEM na Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, conheci uma nova perspectiva metodológica de ensino, o Ensino Exploratório de Matemática – EEM. O EEM atraiu minha atenção e desejo em estudar mais a respeito, por privilegiar o papel do aluno como sujeito ativo na construção do seu conhecimento a partir da resolução de tarefas que o desafiem e o motivem a realizar uma reflexão crítica.

Nesse contexto, o papel do professor precisa também ser revisto, exigindo que ele seja um profissional reflexivo (ESTEVAM; CYRINO; OLIVEIRA, 2017), repensando como conduzir uma aula de forma adequada aos novos desafios da atualidade, bem como gerir condições e possibilidades de aprendizagem em que o aluno possa dar significado ao conhecimento que ele constrói em sala de aula.

O professor, ao preparar suas aulas, deve considerar a resolução de tarefas como algo perene, uma vez que, segundo Estevam *et al*. (2019, p. 1), "as estratégias de resolução empregadas em tarefas matemáticas vêm sendo apontadas pela literatura como aspecto importante a ser considerado por professores e pesquisadores”. O fato de uma tarefa poder ser resolvida de várias formas contribui para que haja uma pluralidade de pensamentos durante a aula, não sendo resolvida apenas pelo viés do professor. Partindo deste pensamento, Estevam *et al*. (2019, p. 1) afirmam que “a diversidade de estratégias de resolução, por exemplo, é um dos pressupostos assumidos pelo Ensino Exploratório de Matemática (EEM)”.

O Ensino Exploratório de Matemática (EEM) tem ganhado destaque nas pesquisas acadêmicas (BASNIAK; ESTEVAM, 2019) por se tratar de uma perspectiva que descentraliza o papel do professor na construção do conhecimento. Como afirmam Estevam, Cyrino e Oliveira, (2017), o EEM coloca-se como alternativa ao ensino tradicional, que deixa de ser expositivo e torna-se mais construtivo. Isso se deve ao fato de o aluno assumir o papel de protagonista durante o momento de construção dos conceitos em sala de aula. Este posicionamento coloca o aluno no centro do processo de ensino e de aprendizagem (ESTEVAM *et al.*, 2018).

Assim, revisitando minhas inquietações enquanto professor da Educação Básica há mais de dez anos e motivado a estudar sobre o EEM, o GeoGebra e as diferentes formas de comunicar funções, propomos, nesta dissertação, uma investigação sobre como tarefas de natureza exploratória com o GeoGebra podem contribuir para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, considerando a natureza diversa dessas funções. Desta forma, este trabalho tem como objetivo geral investigar as formas que os alunos comunicam ideias-base de funções exponenciais e logarítmica em tarefas de natureza exploratória com o GeoGebra.

A fim de atingir este objetivo geral, traçamos como objetivos específicos: I) identificar os conceitos-base e as possíveis formas de comunicar uma função exponencial e logarítmica; II) identificar relações entre as representações no GeoGebra de funções exponenciais e logarítmicas com as formas de comunicar os conceitos-base dessas funções; III) analisar relações entre tarefas de natureza exploratória e as diferentes formas de comunicar uma função exponencial e logarítmica no GeoGebra.

No primeiro capítulo, apresentamos o quadro teórico sobre o conceito geral de funções e como foi construída sua definição ao longo dos anos. Posteriormente, discutimos algumas formas de comunicação de funções, tais como: tabela, função como máquina de transformação, função como diagrama, função como expressão algébrica, função como generalização, função como gráfico e função como definição. Na seção 1.1. é apresentada uma revisão sistemática, que foi realizada no Banco de Teses e Dissertações da CAPES. Com esta revisão foram selecionados alguns trabalhos sobre funções exponenciais e logarítmicas, que foram alvo de um estudo buscando levantar o tipo do trabalho (tese ou dissertação), o nível de ensino a que o trabalho se dedicava (Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior), o uso de softwares e a abordagem didática utilizada. A partir desse levantamento, tecemos algumas reflexões sobre os trabalhos. Na seção 1.2., discutimos brevemente o Ensino Exploratório de Matemática.

No segundo capítulo é descrito como foi realizada a pesquisa, caracterizando os participantes e o contexto do seu desenvolvimento. A pesquisa foi realizada com um grupo de seis alunos de uma instituição federal do Paraná. Os alunos cursam o Técnico em Alimentos integrado ao Ensino Médio nessa instituição. Os alunos estão no segundo ano e já tiveram o conteúdo de função exponencial e logarítmica no primeiro ano, na disciplina de Matemática I. Em decorrência da pandemia, o levantamento de dados foi realizado de forma remota, uma vez que a instituição encontra-se trabalhando com seus alunos também de forma remota. Foi utilizado o Google Meet para os encontros síncronos, também para realização da gravação desses encontros para análises posteriores. As tarefas foram disponibilizadas aos alunos utilizando o GeoGebra Classroom, facilitando a respostas dos alunos e interação com o GeoGebra. O uso do Classroom do GeoGebra foi importantíssimo, pois nele ficam registradas as resoluções dos alunos com o GeoGebra e é possível fazer o acompanhamento em tempo real.

No terceiro capítulo é realizada a análise de cada umas tarefas, discutindo as representações utilizadas pelos alunos para a resolução da tarefa, observando quais representações eles conseguem fazer com o uso do GeoGebra e em quais outras eles precisam ou utilizam o lápis e papel. No capítulo quatro são apresentadas as conclusões gerais do trabalho, sobre os resultados obtidos.

1 COMUNICAÇÃO E REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES E SUA RELAÇÃO COM O ENSINO DE MATEMÁTICA

O conceito de função tornou-se uma noção fundamental na Matemática Contemporânea (SANTOS; BARBOSA, 2017). Em alguns cursos superiores, como as Engenharias, Bacharéis em Administração, Contabilidade e Sistemas de Informação, o conhecimento de funções é necessário para que o aluno tenha êxito em seu desenvolvimento e progresso durante o curso, sendo considerado pré-requisito para algumas disciplinas, como Cálculo Diferencial Integral, dentre outras (SANTOS; BARBOSA, 2017). Especialmente no estudo de Cálculo, observa-se que muitas dificuldades dos alunos

> referem-se à concepção que os alunos têm de função, no registro de representação gráfica, na mudança de um registro para outro, no domínio e contradomínio, na construção de uma tabela de valores numéricos, na distinção entre variável dependente e independente, na notação matemática, etc. (OLIVEIRA, 1997, p. 1).

Segundo Maciel e Cardoso (2014, p. 4), na “antiguidade a noção de função aparecia como uma dependência de valores de forma bem intuitiva”; na Idade Média, ligada a representações geométricas; e na Idade Moderna, às expressões analíticas (MACIEL; CARDOSO, 2014). A concepção de função foi sendo aprimorada ao longo dos anos até o século XX (MACIEL; CARDOSO, 2014), quando se chegou à definição mais utilizada para ensiná-la: “uma função é uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B, que a todo elemento de A, associa-se um único elemento de B” (SANTOS; BARBOSA, 2017, p. 35). Porém, até chegar a este ponto, houve diversas construções desse conceito (OLIVEIRA, 1997).

Para chegar à definição de função adotada atualmente, outras ideias foram agregadas, como a de variável dependente, variável independente, continuidade, domínio, contradomínio, dentre outras (MACIEL; CARDOSO, 2014). Maciel e Cardoso (2014) sistematizam a evolução da definição de função ao longo dos séculos XVII a XIX, como segue no Quadro 1.1, na página seguinte.

Quadro 1.1 - Definições de funções ao longo dos séculos

Época	Definição
Século XVII	Qualquer relação entre variáveis.
	Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável.
	Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em uma curva.
	Quantidades formadas usando expressões algébricas e transcendentais de variáveis e constantes.
Século XVIII	Quantidades que dependem de uma variável.
	Função de algumas variáveis, como quantidade, que é composta, de alguma forma, de variáveis e constantes.
	Qualquer expressão útil para calcular.
Século XIX	Correspondência entre variáveis.
	Correspondência entre um conjunto A e os números reais.
	Correspondência entre os conjuntos.

Fonte: Maciel e Cardoso (2014, p. 4).

Assim, não devemos tornar a Matemática e, consequentemente, o conceito de função, "um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual" (BRASIL, 2018, p. 522). Ao contrário, podemos nos inspirar na história da Matemática (OLIVEIRA, 1997), que mostra como o conceito de função foi sendo construído ao longo do tempo,

> esse conceito levou mais de 20 séculos para ser formalizado, desde seus primeiros indícios nas tabelas que aparecem nos escritos matemáticos babilônicos, por volta dos anos 2000 a.C., até o final século XIX, com a definição moderna dada por Riemann – Dirichet (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020, p. 02).

Entretanto, cabe salientar que "um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história" (BRASIL, 2018, p. 522).

Uma dificuldade recorrente que os alunos apresentam está relacionada ao fato de não conseguirem compreender e relacionar a forma gráfica e algébrica da função, como apontam Mendonça e Pires (2018). Para Pires, Merline e Magina (2015, p. 2),

> Na maioria das vezes, os estudantes não conseguem fazer as ligações entre as diferentes representações (gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem inter-relações), tampouco a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem e representam funções, tais como: f(x), x→y, sen (x+t).

Sem as conexões entre as formas de representação desse conceito, a interpretação de tarefas, bem como a comunicação de resultados obtidos em suas resoluções tornam-se simplista. Por isso, é preciso oportunizar ao aluno várias formas de registrar e comunicar tal conceito, afinal:

> o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio (BRASIL, 2018, p. 519).

Referente às formas de representações de uma função, Rezende, Nogueira e Calado, (2020) descrevem que existem cinco formas de representá-las: *gráfica*, *numérica*, *algébrica*, *geométrica e linguagem natural*. Além disso, ao estudar o conceito função, é necessário considerarmos as ideias-base desse conceito: variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020).

O quadro 1.2, a seguir, resume de forma sintética cada uma dessas Ideias-base.

Quadro 1.2 – Ideias-base de funções

Conceito	**Descrição**
Variável	Refere-se a um elemento qualquer de um conjunto, que é geralmente representada por uma letra (p. 07).
Correspondência	É um dos aspectos essenciais na Matemática e uma das primeiras formas de pensamento matemático a se manifestar, como, por exemplo, na comparação da quantidade de objetos de duas coleções (p. 07).
Dependência	Expressa a relação entre grandezas variáveis que irá caracterizar uma função. Numa relação funcional uma das grandezas (variável dependente) é univocamente determinada pela variação de outra (variável independente) (p. 07).
Regularidade	Permite que a repetição e a previsão dos fenômenos sejam estudadas (p. 08).
Generalização	A partir do momento que se estabelece uma regularidade é possível descrever o padrão observado e assim, estabelecer a generalização (p. 09).

Fonte: REZENDE, NOGUEIRA e CALADO (2020).

Além das ideias-base propostas no Quadro 1.2, Campiteli e Campitele (2006) apresentam as ideias de proporcionalidade, continuidade, descontinuidade e relação. Para os autores,

> Na análise da definição de funções, é possível destacar as ideias presentes e pode-se mesmo trabalhar com palavras-chaves que carreiam as ideias referidas. No planejamento das aulas, todavia, nem sempre é possível trabalhar essas ideias separadamente e pode também não ser conveniente fazê-lo (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 33).

Ao trabalhar o conceito de função de acordo com Santos e Barbosa (2017), podemos relacionar diferentes formas de como este conceito pode ser comunicado. Dentre essas possíveis formas de comunicação, no Quadro 1.3, na página seguinte, está descrito como elas podem ser realizadas.

Quadro 1.3 - Funções e sua forma de comunicação

Forma de comunicar o conceito	**Descrição**
Tabela	A comunicação do conceito de função pode ser realizada por intermédio de uma tabela, que organiza os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada e os seus correspondentes dados de saída estejam na mesma coluna ou linha.
Função como máquina de transformação	Como a metáfora de uma máquina de transformação é uma forma de introduzir esse conceito no ensino, por utilizar uma linguagem supostamente mais próxima do cotidiano dos alunos.
Função como diagrama	Comunicação do conceito de função como diagrama de setas caracteriza/define uma relação funcional como uma correspondência entre dois conjuntos não vazios quaisquer (dispostos em diagramas), desde que a todo elemento do conjunto A (denominado de domínio) corresponda (por uma seta) um único elemento do conjunto B (denominado de contradomínio).
Função como expressão algébrica	A comunicação do conceito de função como uma expressão algébrica caracteriza-se por expressar a relação entre as variáveis independentes e dependentes de uma relação funcional (cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais) como uma fórmula ou lei algébrica.
Função como generalização	Comunicar o conceito de função como uma generalização é expressar em linguagem corrente ou usando símbolos algébricos uma afirmação geral que explicita a dependência entre variáveis de uma relação funcional, tomando como base alguns dados dessa relação.
Função como gráfico	A comunicação do conceito de uma função f (cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais) como um gráfico consiste em apresentar no plano cartesiano o subconjunto de pontos (x,y), em que x pertence ao domínio da função f e y é a imagem de x por f, ou seja, y=f(x), sendo geralmente visualizado como uma linha no plano.
Função como definição	Comunicar o conceito de função como uma definição é indicar, em linguagem Matemática precisa, critérios que possibilitem estabelecer se uma determinada relação, comunicada por qualquer uma das formas especificadas anteriormente, é ou não uma relação funcional.

Fonte: Santos e Barbosa (2017, p. 3).

Todavia, por mais que tenhamos algumas formas de comunicar o conceito de função, como as que são apresentados no Quadro 1.3, cada uma dessas comunicações tem certas características próprias, que podem facilitar ou não o ensino.

Quando pensamos na comunicação por meio de *tabela*, podemos observar os conceitos de dependência entre as colunas, neste caso, as variáveis, sendo possível identificar facilmente as variáveis dependentes e independentes, bem como estudar os conjuntos domínio e imagem da função, facilitando sua caracterização. Contudo, como aponta Santos (2017, p. 62),

> a utilização exclusivamente da realização tabular pode acarretar inferências incorretas acerca da relação funcional, tais como, identificação do tipo de função, injetividade ou valor extremo, pois nessas realizações só é possível ter informações sobre alguns dados da relação funcional, o que ocasiona uma visão apenas local (ponto a ponto) da relação funcional sob análise.

A metáfora de uma função sendo uma *máquina de transformação* contribui para a introdução ao conceito de função, propiciando um início do tema sem o rigor da Matemática científica (SANTOS, 2017). Neste sentido, contribui para a característica transformadora que uma função exerce nos valores que *entram*, em relação aos valores que *saem* na função. Assim como na comunicação por tabelas, o uso da máquina de transformação facilita a compreensão dos conjuntos domínio e imagem da função, mas apresenta apenas um panorama local da função (SANTOS, 2017).

Ao pensar a função como um *diagrama*, salientam-se aquelas relações que são “passíveis de serem realizadas por diagramas são aquelas em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas” (SANTOS, 2017, p. 63). Este tipo de comunicação tem as mesmas limitações que as duas anteriores, mas facilita a compreensão dos elementos dos conjuntos domínio, imagem e contradomínio, além de facilitar a identificação de relações que não são funções.

Na comunicação *algébrica*, temos a possibilidade de identificar funções de forma compacta, bem como as diversas famílias de funções que existem (SANTOS, 2017). A comunicação algébrica contribui para a identificação das variáveis dependentes e independentes, mas é necessário ter cuidado quanto ao uso em demasia desta representação. Isto porque

> a predominância de tais realizações no ensino pode acarretar a subordinação de uma relação funcional a uma realização algébrica, impossibilitando o reconhecimento de relações que são funcionais apesar de não serem realizáveis algebricamente. Por exemplo, a relação funcional que associa o nome de um aluno a sua nota em um teste (SANTOS, 2017, p. 65).

Além disso, ao usar apenas a comunicação algébrica, não conseguimos identificar os valores máximos e mínimos de forma simples.

Ao compreender uma função como a *generalização* de padrões, privilegiamos a relação de dependência entre as grandezas, sendo possível associar e identificar a variação entre quantidades.

> Considerando que tais realizações têm o potencial de propiciar o reconhecimento da relação de dependência entre as quantidades/variáveis envolvidas, que posteriormente pode ser incorporada, explicitamente, como uma das noções que compõem o entendimento do conceito de função (SANTOS, 2017, p. 68).

Da mesma forma que a comunicação por meio de tabelas, ao utilizar a máquina de transformação como uma forma de comunicação de uma função, não conseguimos observar valores extremos.

A comunicação *gráfica* de uma função é umas das comunicações que tem o seu uso mais frequente, na qual normalmente o conjunto domínio e imagem são subconjuntos dos números reais, e proporcionam ao aluno uma visualização da função de forma pictórica, facilitando a identificação de famílias de funções, a identificação de variáveis dependentes e independentes, além dos pontos extremos. Cabe ressaltar que "a ênfase nas realizações de função como um gráfico pode dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente" (SANTOS, 2017, p. 67).

Por fim, mas não menos ou mais importante, a comunicação *pela definição* apresenta aos alunos algumas características da matemática científica. Esta representação proporciona ao aluno mais clareza e rigor matemático das funções, "entretanto, não abarcam a amplitude de noções e interpretações que subjazem e dão forma ao conceito de função, instituídos no seu desenvolvimento histórico, os quais transcendem a sua estrutura lógica" (SANTOS, 2017, p. 71). Uma sugestão que Santos (2017) apresenta em seu trabalho é que a comunicação formal da função seja trabalhada concomitantemente com outras.

1.1 A REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES NO GEOGEBRA

Atualmente, temos ciência que o uso de tecnologias tem transformado o ensino da Matemática (AMADO; SANCHEZ, PINTO, 2015) e temos acesso à vários softwares, dentre eles um de geometria dinâmica que é gratuito, chamado GeoGebra. "Compreendem-se por softwares de geometria dinâmica aqueles em que é possível construir e manipular objetos geométricos na tela do computador" (GIROTTO, 2016, p. 32). O GeoGebra "combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (do inglês, Graphical User Interface, ou do português Interface Gráfica do Utilizador)" (SCALDELAI, 2013, p. 13).

Ao fazer uso do GeoGebra, podemos contar com muitos benefícios tais, como "construir e explorar figuras, formular conjeturas e relacionar propriedades que se evidenciam durante o processo de manipulação" (AMADO; SANCHEZ, PINTO, 2015, p. 2). Com esse software é possível associar algumas formas de representação de um mesmo conceito, podendo ser algébrica ou geométrica. O GeoGebra tem essa possibilidade porque seu

> ambiente gráfico dos *softwares* favorece a aprendizagem, possibilitam associar a parte algébrica e a representação gráfica. Permitem compreender os procedimentos de tratamentos e realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros (algébrico, tabular e gráfico) (BASNIAK; SILVA; GAULOVSKI, 2017, p. 11).

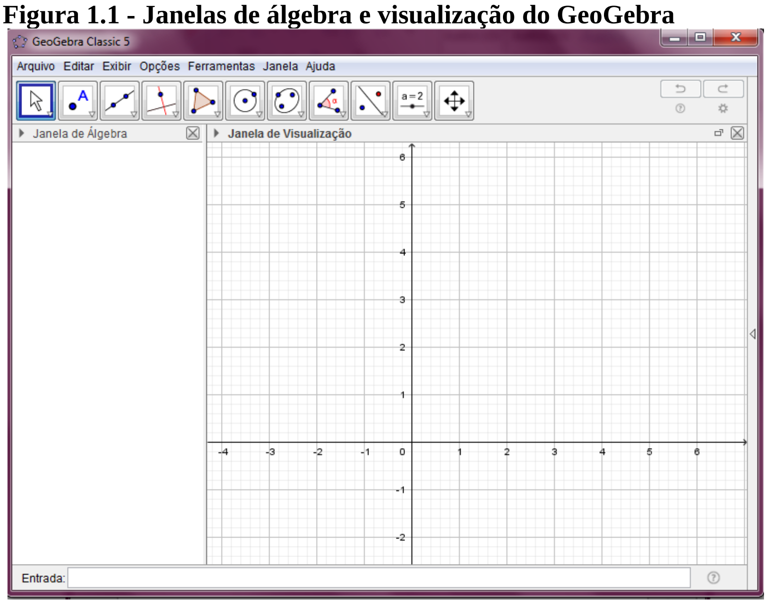
O download do GeoGebra é gratuito e pode ser feito no site www.geogebra.org, ou é possível utilizá-lo de forma online. No último caso é necessário realizar um cadastro (gratuito) no próprio site para salvar os trabalhos desenvolvidos online. Posteriormente, caso o usuário queira, existe a opção de realizar o download dos arquivos construídos. Também há uma terceira opção, que é fazer o uso do GeoGebra em smartphones, bastando acessar a loja de aplicativos (App Store (IOS) ou Play Store (Android)) para fazer seu download.

Quando acessamos o programa no computador, temos acesso à tela inicial do programa, onde aparecem duas janelas iniciais: a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização.* A *Janela de Visualização* "é o lugar onde os objetos geométricos e os gráficos são construídos. A janela de álgebra é o lugar onde se organiza a representação algébrica do que é construído na janela de visualização" (GIROTTO, 2016, p. 32). Para cada janela temos algumas funções específicas,

> Cada uma das janelas do GeoGebra possibilita diferentes representações de conceitos matemáticos ou formas de explorações, por exemplo, na "Janela Gráfica" ou "Janela de Visualização" podem-se realizar construções geométricas usando apenas o mouse e as ferramentas disponíveis na "Barra de Ferramentas" (SCALDELAI, 2013, p. 15).

A figura 1.1, a seguir, apresenta as duas janelas (de *álgebra* e de *visualização*) na versão do GeoGebra classic 5.

Figura 1.1 - Janelas de álgebra e visualização do GeoGebra



Fonte: O autor (2021).

Existem outras duas janelas que estão disponíveis no GeoGebra, que são a *Janela Planilhas* e a *Janela de Cálculo Simbólico - CAS*. A janela planilha assemelha-se aos softwares de planilha, como o Excel, disponível no pacote do Office do Windows, ou o Calc, disponível no Libre Office.

> cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente e ser utilizada como incógnita nas expressões algébricas. Por exemplo, a célula na coluna A e linha 1 é nomeada A1. Nas células, além dos valores numéricos, podem ser inseridos todo tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra (SCALDELAI, 2013, p. 16).

Nessa janela é possível, ainda, manipular os valores para posteriormente fazer análises estatísticas com ferramentas disponíveis no GeoGebra (SCALDELAI, 2013). Essas janelas normalmente não são exibidas ao iniciar o software; para exibi-las, basta clicar na aba *exibir* e selecionar uma delas ou ambas.

Acessando a barra de ferramentas no GeoGebra, temos acesso a vários outros comandos para construção de diferentes conceitos geométricos (SCALDELAI, 2013; GIROTTO, 2016), conforme a necessidade do usuário.

O GeoGebra apresenta facilidades, pois,

> nas construções geométricas feitas com régua e compasso físicos, tudo o que se obtém na folha de papel é um desenho estático. O uso de softwares para fazer construções geométricas permite, ir além em termos de aprendizagem: por meio do dinamismo que a tela do computador permite, o aluno pode validar a veracidade da sua construção, no seu passo a passo, e assim compreender propriedades que são decorrentes de uma construção feita com controle geométrico, ou seja, uma construção realizada com propriedades geométricas (GIROTTO 2016, p. 37).

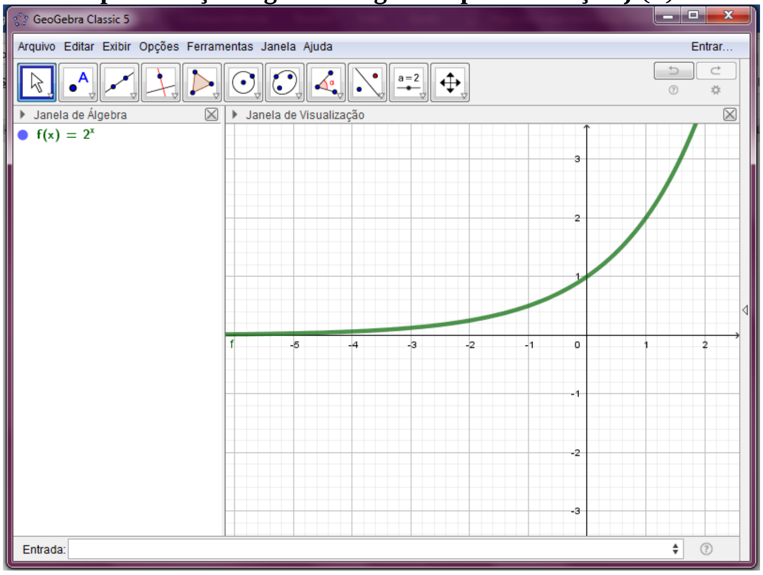
Além disso, tal dinamicidade favorece a construção de tarefas exploratórias, uma vez que o aluno pode colocar, no software, suas ideias, proposições, conjecturas etc. Além disso, permite

> o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos (algébricos, geométricos e aritméticos) simultaneamente e de forma dinâmica, ele possibilita a elaboração de tarefas exploratórias que proporcionam ao aluno pensar e fazer Matemática, de modo a construir e significar ideias matemáticas com certa autonomia, rompendo com o ensino pautado na “transmissão de conhecimento” (SCALDELAI, 2013, p. 16, grifo do autor).

Siqueira (2013) aponta em seu trabalho que o uso do GeoGebra está grandemente relacionado à compreensão das funções e dos seus respectivos gráficos.

Quando digitamos no campo entrada do software GeoGebra a representação na forma algébrica de uma função, por exemplo $f(x) = 2^x$, ao apertarmos a tecla *enter* são exibidas, na tela do programa, duas representações da função, a algébrica na janela de *álgebra*, e a representação gráfica na janela de *visualização*, como vemos na figura 1.2.

Figura 1.2 - Representação algébrica e gráfica para a função $f(x) = 2^x$



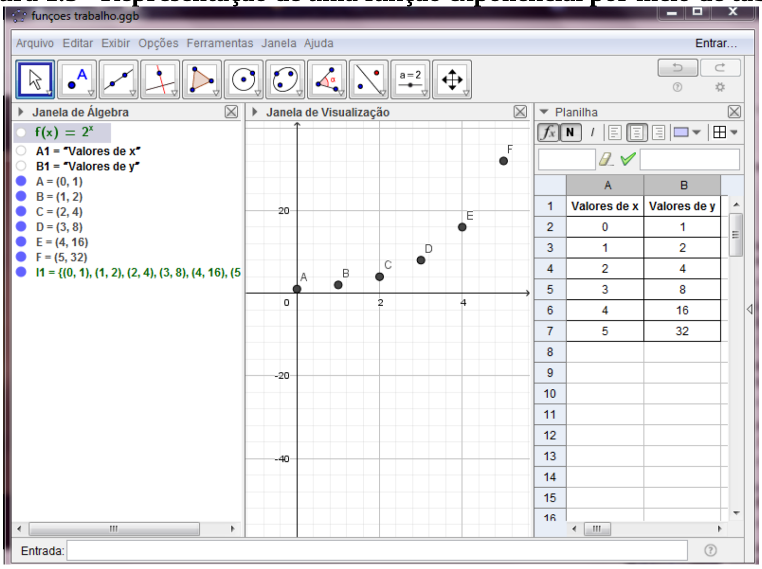
Fonte: O autor, 2021

Para representar uma função logarítmica, podemos seguir o procedimento análogo que foi utilizado para representar a função apresentada na figura 1.2.

Podemos, ainda, representar uma função em tabela, utilizando a janela *planilhas* GeoGebra. Ao invés de pensar na função $f(x) = 2^x$, podemos utilizar um simples exemplo, como: *uma bactéria dobra sua quantidade a cada unidade de tempo, no tempo zero temos uma bactéria, no tempo um temos duas, no tempo dois temos quatro, no tempo três temos oito e assim por diante*. Para descrever esta situação, podemos abrir a *janela planilha*, em que é possível criar e inserir informações descritas em uma tabela. Para exibir os valores inseridos na tabela, selecionamos e clicamos com o botão direito do mouse, escolhendo a opção criar e, em seguida, *criar lista de pontos*; os valores serão exibidos na janela de *visualização*.

Na figura 1.3, na página seguinte, foram adicionados alguns valores da situação descrita anteriormente e, após a sua inserção, criamos uma lista de pontos, que é exibida na janela da *visualização*.

Figura 1.3 - Representação de uma função exponencial por meio de tabela

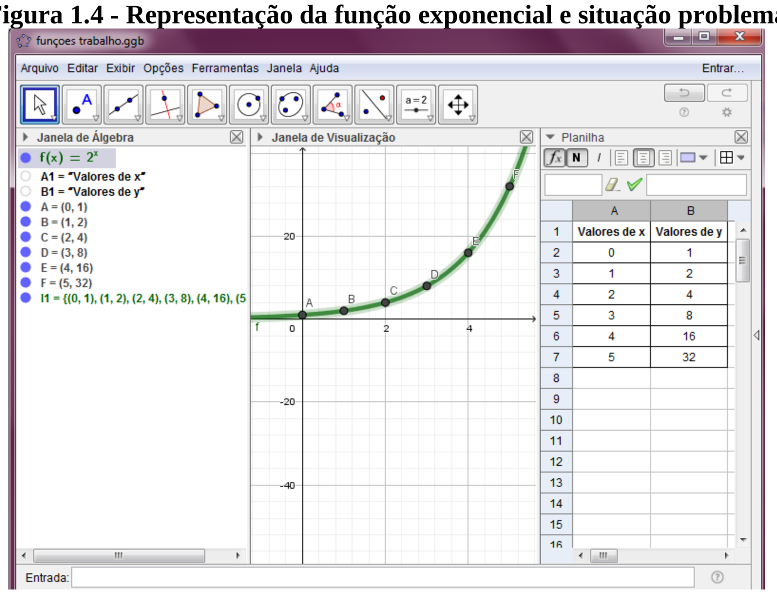


Fonte: O autor (2021).

Com esta forma de exibição dos valores no GeoGebra, conseguimos representar uma função de três formas distintas: a representação algébrica, gráfica e como tabela. Podemos observar que, na figura 1.3, na janela álgebra, a função $f(x) = 2^x$ está inserida, mas não é exibida na *janela de visualização*.

Ao selecionar a função $f(x) = 2^x$, seu gráfico é exibido e vemos que os pontos da lista pertencem ao gráfico da função, conforme a figura 1.4, onde são exibidos tanto o gráfico da função quanto a lista de pontos gerados, mostrando que aquela situação problema pode ser modela para esta função exponencial.

Figura 1.4 - Representação da função exponencial e situação problema



Fonte: O autor (2021).

Entretanto, compreendemos que essas representações podem ser comunicadas de diferentes formas, por exemplo, uma tabela representada na janela planilha pode ser comunicada como *máquina de transformação*, se consideramos que os valores que entram na primeira coluna são transformados em outros valores que aparecem na segunda coluna.

Assim, diante do exposto, observamos que o ensino de funções precisa considerar esse conceito possui ideias-base (variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização) e diferentes representações: gráfica, numérica, algébrica, geométrica e linguagem natural. Estas últimas podem ser comunicadas de diferentes formas: tabular, máquina de transformação, diagramas, expressão algébrica, generalização, gráficos e definição.

Considerando que a questão-problema do presente trabalho está centrada no ensino das funções exponenciais e logarítmicas, mas considerando as características e complexidade específicas das funções, na próxima seção apresentamos uma revisão sistemática realizada sobre o tema, cujo resultado discutimos na seção seguinte.

1.2 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE TESES E DISSERTAÇÕES

A compreensão por parte do aluno sobre a função exponencial é requerida na BNCC, haja vista sua importância para "compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 528). Juntamente a isso, a noção da função exponencial também está relacionada à compreensão da progressão geométrica. De acordo com a BNCC, os alunos do Ensino Médio devem "identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 528).

Mendonça e Pires (2018) descrevem que, nas pesquisas de Santos (2011), Silva (2012) e Oliveira (2015), realizadas acerca do ensino e aprendizagem de funções exponenciais, indica-se "a necessidade de investigar o processo de ensino e aprendizagem de função exponencial, de modo a contribuir com o cenário no qual ela se faz presente no contexto de sala de aula" (MENDONÇA; PIRES, 2018, p. 4). Assim, a fim de conhecer e compreender os temas dos estudos relacionados às funções exponencial e logarítmica realizados até o final do ano de 2021, realizamos um levantamento no Banco de Teses e Dissertações da Capes, com as seguintes palavras-chave: "ensino AND função exponencial AND função logarítmica". Após este levantamento, em posse dados coletados, foi realizada uma revisão sistemática que auxiliou a identificação das tendências que as pesquisas sobre este tema têm tomado. A escolha desta revisão se justifica, pois

> pesquisas do tipo revisão sistemática de literatura consistem em reconhecer e identificar, a partir dos principais resultados de outras investigações, as principais tendências, temáticas e abordagens dominantes e emergentes em uma área. Torna-se ainda um importante método de pesquisa, uma vez que permite identificar lacunas deixadas por outros estudos, evidenciando campos inexplorados e que poderão servir de temática para futuras pesquisas (PAULIN; RIBEIRO, 2019, p.06).

Nesta primeira busca, não foi determinado ano ou intervalo de tempo, e obtivemos 99 resultados com trabalhos que continham as palavras-chave definidas. Destes resultados, após uma leitura inicial dos títulos, resumos e, em alguns casos, uma leitura dos capítulos iniciais dos trabalhos, alguns foram descartados por não possuírem relevância com o objetivo da pesquisa ou não estarem relacionados à Educação Matemática. Dentre eles, podemos citar, como exemplo, o trabalho de Pereira (2003), *Similitudes entre espaços e tempos: educação e trabalho na Baixa Idade Média e Pós-Modernidade*, e de Ricardo (2004), *Metodologia de gerenciamento de Base de Dados para Ensino-aprendizagem de estatística na web*. Desta forma, após a leitura dos títulos e dos resumos dos trabalhos, foram considerados setenta e um (71) trabalhos para análise, sendo três (03) teses e sessenta e oito (68) dissertações dos mais variados programas de pós-graduação em todo o país.

Após esse momento levantamento, sistematizamos as informações coletadas em três quadros, no Quadro 1.4 estão organizados os trabalhos que abordam a função exponencial, no Quadro 1.5 estão relatados os trabalhos que tratam da função logarítmica, e por fim, no Quadro 1.6 estão descritos os trabalhos que tratam de ambas as funções. Em cada um desses quadros estrão descritas as seguintes informações sobre os sessenta e oito (68) trabalhos: i) tipo de trabalho; ii) autor e ano; iii) objetivo; iv) nível de ensino; v) se foi utilizado algum software e, se sim, qual; e vi) abordagem didática. Foram utilizadas algumas siglas para designar os Níveis de Ensino (NE): EF - Ensino Fundamental; EM - Ensino Médio; ES - Ensino Superior. Usamos a sigla ND (não definido) para os trabalhos nos quais não identificamos o nível de ensino ou a abordagem didática utilizada. Para distinguir os programas de pós-graduação entre acadêmicos e profissionais e os trabalhos em teses e dissertações, utilizamos as siglas: AT - para teses de programas acadêmicos; AD - para dissertações de programas acadêmicos; PT - para teses de programas profissionais; e PD - para dissertações de programas profissionais. A organização dos dados está em ordem cronológica, conforme vemos no Quadro 1.4.

Quadro 1.4 - Sistematização dos trabalhos sobre função exponencial

(Continua)

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
AT1	Nascimento (2007)	Investigar a Modelagem Matemática como caminho metodológico para aprendizagem do conhecimento de função afim, quadrática e exponencial.	ES	Modellus	Modelagem Matemática
AD1	Braz (2007)	Investigar o uso de material manipulativo no aprendizado da função exponencial.	EM	Simulador Torre de Hanói	ND
PD2	Souza (2010)	Analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto função exponencial.	EM	Cabri-Géomètri II	Engenharia Didática, Registros de Representação Semiótica
PD3	Brucki (2011)	Analisar os efeitos da Modelagem no ensino.	EM	-	Modelagem Matemática
AT2	Andrade (2012)	Caracterizar a transição para o caso da noção de função exponencial na transição entre o EM e ES.	EM ES	-	Teoria Antropológica do Didático
PD4	Oliveira (2013)	Apresentar uma proposta de atividade educacional para o EM com a função exponencial.	EM	-	Modelagem Matemática
PD5	Arruda (2013)	Apontar as semelhanças, diferenças, e relações existentes entre progressão geométrica, juros compostos e função exponencial.	EM	-	Resolução de Problemas
PD6	Costa (2014)	Propor uma metodologia de aprendizagem dos cálculos presentes nas tabelas do Financiamento Estudantil - FIES, tendo como base a Matemática Financeira.	EM	-	ND
PD7	Lima (2014)	Utilizar o Winplot para auxiliar no entendimento da função exponencial e também das funções trigonométricas.	ND	Winplot	ND
PD8	Fonzar (2014)	Estudar o crescimento e o decaimento exponencial.	EM	GeoGebra	Modelagem Matemática
PD9	Alves (2014)	Entender o significado de potências com expoente natural, inteiro, racional e irracional, bem como as propriedades que fazem dela uma das funções mais importantes da Matemática.	EM	-	ND
AD10	Angelucci (2014)	Propor uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no E.M.	EM	Planilha Eletrônica	Engenharia Didática
PD11	Sena (2014)	Trabalhar a progressão geométrica e a função exponencial de forma integrada.	EM	-	ND
PD12	Santos (2014)	Estabelecer parâmetros de referência em relação a forma como as funções exponenciais são abordadas por esses autores e como os mesmos superam as dificuldades encontradas em uma abordagem a partir de definições e provas algébricas.	EM	GeoGebra	ND
PD13	Pereira (2015)	Apresentar um estudo sobre as funções exponenciais, dando ênfase à função exponencial de base *e*.	ND	-	ND

(Continuação)

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
PD14	Rozanski 2015	Apresentar uma proposta de metodologia do objeto matemático função exponencial, que possibilite o desenvolvimento de habilidades interpretativas e criativas de potencial significado para os alunos, a partir de uma sequência didática estruturada à luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e, dos Registros de Representações Semiótica de Duval.	EM		Situações Didáticas, Registro de Representações Semióticas, Engenharia Didática
PD15	Gadioli (2015)	Propor uma metodologia para que os educadores possam de forma coerente dar significado ao estudo da função exponencial de forma que utilize como ferramenta central na resolução de vários problemas.	EM	-	ND
PD16	Martinez (2015)	Apresentar uma proposta de como ensinar conceitos relacionados à função exponencial através da Resolução de Problemas.	EM	GeoGebra	Resolução de Problemas
PD17	Bonotto (2015)	Analisar uma proposta de ensino de funções exponenciais mediada pela utilização de recursos tecnológicos e de objeto de aprendizagem.	EM	GeoGebra	Investigações Matemáticas
PD18	Oliveira (2015)	Estudar sobre a função exponencial, analisando as principais propriedades desta função e a construção de seu gráfico.	EM	-	ND
AD19	Freitas (2015)	Investigar o comportamento dos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual na Bahia, no sentido de perceber como esses sujeitos mobilizam seus saberes matemáticos e didáticos construídos durante a graduação e durante o processo de experimentação a respeito da função exponencial.	ES	Planilha Eletrônica e GeoGebra	Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas, TAD
PD20	Silva (2015)	Utilizar a Torre de Hanói como uma ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem de função exponencial.	EM	Jogo	Resolução de Problemas
PD21	Santos (2015)	Demonstrar a importância do ensino da Matemática Financeira nos anos finais do ensino básico.	EM	-	Não especifica
AD22	Silva (2015)	Evidenciar os principais aspectos das funções exponenciais para, então, apontar a importância de uma nova e significativa abordagem do estudo delas em que sejam destacadas suas aplicações e interdisciplinaridades.	EM	GeoGebra	Resolução de Problemas
AD23	Maseti (2016)	Investigar como as funções exponenciais são abordadas em livros didáticos de Matemática, oferecidos às escolas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.	EM	GeoGebra	Resolução de Problemas
PD24	Lima (2016)	Apresentar uma proposta diferente e inovadora da abordagem dos conteúdos de funções exponenciais, bem como as funções exponenciais naturais para o E.M.	EM	-	ND
AD25	Sousa (2016)	Mostrar a relação entre função exponencial e progressão geométrica e a importância de se trabalhar de forma integrada esses dois conceitos.	EM	-	ND

(Continuação)

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
PD26	Narcizo (2016)	Investigar se a modelagem Matemática pode contribuir ou colaborar com o ensino aprendizagem de função afim e, principalmente, de função exponencial.	EM	-	Modelagem Matemática
AD27	Mossi (2016)	Investigar a expansão discursiva dos registros de representação semiótica mobilizados por licenciandos em Matemática a partir de atividades envolvendo criptografia ao caracterizar funções afim, quadrática e exponencial.	ES	GeoGebra	Registros de Representação Semiótica
AD28	Coelho (2016)	Trabalhar com construções de calculadoras e quadros em planilhas do GeoGebra, e realizar análises do comportamento gráfico dessas funções através de seus esboços apresentados em sua janela geométrica.	ND	GeoGebra	ND
PD29	Ribeiro (2017)	Subsidiar a prática docente para o ensino das funções mais elementares abordadas no 1º ano do E.M.	EM	GeoGebra	Modelagem Matemática
AD30	Gomes (2017)	Analisar as potencialidades das aplicações e jogos digitais do sistema Android, no ensino de Matemática em duas escolas públicas das cidades de Catingueira-PB e Patos-PB.	EM	Matrix	ND
PD31	Barra (2017)	Apresentar uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e PG.	EM	-	ND
PD32	Maia (2017)	Apresentar uma sequência de atividades para o ensino da função exponencial de forma intuitiva e, posteriormente, apresentar sua definição na tentativa de formalizar as propriedades que serão descobertas pelos alunos.	EM	Planilha Eletrônica	Modelagem Matemática
PD33	Mendonca (2017)	Compreender como a utilização da calculadora, do GeoGebra e a mobilização, a manipulação e a coordenação de representações semióticas durante a atividade interventiva podem auxiliar os alunos do E.M. na aprendizagem de função exponencial.	EM	GeoGebra, calculadora	Registros de Representação Semiótica
PD34	Villani (2017)	Apresentar propostas de atividades para abordar o número de Euler no E.M.	EM	GeoGebra	Modelagem Matemática
PD35	Marchetto (2017)	Verificar como o aluno consegue por si próprio manipular os recursos, tais como gráficos disponibilizados pelo software GeoGebra.	EM	GeoGebra	Registros de Representação Semiótica
PD36	Cruz (2018)	Identificar e analisar as potencialidades da utilização do software GeoGebra através de dispositivos móveis.	EM	GeoGebra	Teoria da Mediação e da aprendizagem Movél
PD37	Santos (2018)	Apresentar uma sequência didática para introduzir o conceito de função exponencial, aplicada com alunos regulares e inclusos.	EM	Multiplano	ND
PD38	Oliveira (2018)	Apresentar uma proposta metodológica para o ensino de função exponencial, resultante da aplicação de uma sequência didática envolvendo função exponencial.	EM		Resolução de Problemas e Engenharia Didática

(Conclusão)

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
PD39	Oliveira (2018)	Apresentar uma contribuição para o ensino aprendizagem das funções exponenciais e matrizes, explorando como ferramenta auxiliar didática as contextualizações encontradas em livros didáticos de Matemática do E.M.	EM	-	ND
PD40	Menezes (2018)	Analisar as potencialidades de uma sequência didática ao ensino de função exponencial na Educação Básica.	EM	GeoGebra	Engenharia Didática
AD41	Queiroz (2018)	Verificar quais foram as alterações e/ou continuidades no tópico equação/função exponencial nos livros analisados no período delimitado entre 1930 e 1980.	EM	-	ND
AD42	Silva (2018)	Analisar situações de ensino de função exponencial, considerando o movimento histórico e lógico da mesma.	EM	GeoGebra	Teoria da Atividade
PD43	Toledo (2018)	Apresentar as análises dos resultados referentes ao ensino da função exponencial com o uso de Resolução de Problemas para alunos do E.M.	EM	GeoGebra	Resolução de Problemas
AD44	Macalos (2019)	Abordar um estudo sobre função exponencial utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.	EM	-	Resolução de Problemas
PD45	Prestes (2019)	Propor uma reflexão sobre a ligação entre educação financeira e a gestão financeira pessoal, tendo a exata consciência do valor do seu tempo trabalhado, a partir de uma prática em sala de aula.	EM	Planilhas e Calculadora Financeira	ND

Fonte: O Autor (2021).

Como podemos observar no Quadro 1.4, encontramos 47 trabalhos sobre a função exponencial. No quadro a seguir. 1.5, sistematizamos os trabalhos que apresentaram como tema de estudos as funções logarítmicas.

Quadro 1.5 - Sistematização dos trabalhos sobre função logarítmica

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
PD1	Roballo (2014)	Mostrar uma poderosa ferramenta Matemática que contribuiu durante aproximadamente, três séculos e meio para simplificar os cálculos aritméticos: os logaritmos.	ND	-	Modelagem Matemática
PD2	Garcia (2014)	Apresentar diferentes formas de definir a função logarítmica natural.	EM		ND
PD3	Neto (2015)	Fazer uma abordagem geométrica estabelecendo uma inter-relação entre a área de uma faixa da hipérbole x.y-1=0 com o logaritmo natural.	ES	-	ND
PD4	Motoki (2016)	Apresentar uma abordagem para solucionar situações-problemas envolvendo os logaritmos, através de um esquema de resolução.	EM	-	ND

Fonte: O Autor, 2021

No quadro 1.6 estão descritos os trabalhos que abordaram tanto a função exponencial quanto a função logarítmica, sendo um total de 21 estudos.

Quadro 1.6 - Sistematização dos trabalhos sobre função exponencial e logarítmica

(Continua)

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
PD1	Berleze (2007)	Analisar as contribuições do Winplot para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de funções reais.	EM	Winplot	Engenharia Didática
AD2	Olgin (2011)	Investigar a possibilidade de implementar uma Engenharia Didática para o desenvolvimento do tema Criptografia, aliado aos conteúdos de Matemática do EM.	EM	-	Engenharia Didática
AT1	Borges (2013)	Descrever e caracterizar os processos de linguagem presentes nos discursos de um grupo de 10 alunos de 1º ano de EM de uma escola estadual da cidade de São Paulo.	EM	-	ND
AD3	Silva (2013)	Avaliar a potencialidade do ensino das funções exponencial e logarítmica por meio de atividades.	EM	-	Engenharia Didática
PD4	Okada (2013)	Apresentar um estudo das funções elementares.	EM	GeoGebra	ND
PD5	Siqueira (2013)	Compreender as manifestações dos alunos ao realizarem atividades de função com o uso de recursos computacionais.	EM	GeoGebra	ND
AD6	Felipe (2013)	Adaptar atividades do Caderno do Aluno – Matemática, parte integrante do material de apoio da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo, volumes 2 e 3.	EM	GeoGebra	ND
PD7	Borges (2014)	Abordar o ensino de logaritmos e das funções exponenciais e logarítmicas por meio de modelos matemáticos.	EM	Planilha Eletrônica	ND
PD8	Ferri (2014)	Estabelecer uma proposta de abordagem e relações entre progressões e funções exponenciais e logarítmicas que permitam apresentar o teorema de caracterização delas.	EM	Planilha Eletrônica e GeoGebra	Modelagem Matemática
PD9	Bezerra (2014)	Proporcionar o ensino e aprendizagem de aplicações de funções exponenciais e logarítmicas por meio de aplicativos elaborados em planilha eletrônica Excel.	ND	Planilha Eletrônica	ND
PD10	Oliveira (2014)	Analisar como os livros didáticos de Matemática do E.M. motivam o estudo das funções exponenciais e logarítmicas.	EM	-	ND
PD11	Ramos (2015)	Abordar os logaritmos de três formas: tradicional, como expoente; estabelecendo uma relação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética e; definindo o logaritmo de *e* de forma natural, como área sob uma hipérbole.	EM	GeoGebra	Resolução de Problemas
AD12	Cruz (2015)	Propomos como metodologia de ensino a abordagem das principais funções reais – afim, quadrática, exponencial, logarítmica – e suas respectivas representações gráficas a partir de situações-problema do cotidiano.	EM	-	ND

(Conclusão)

Tipo	Referência	Objetivo	NE	Software	Abordagem Didática
PD13	Piano (2016)	Compreender as funções exponenciais e logarítmicas de modo que pudesse apresentá-las de maneira diferente da abordagem tradicional.	ND	Excel	ND
PD14	Silva (2016)	Propor que o ensino de funções (propriedades, ideias, definições e caracterizações) seja explanado a partir de problemas/atividades contextualizadas, provando sua aplicabilidade em situações concretas de seu dia a dia.	EM	BROfcce Calc	Resolução de Problemas
PD15	Einhard (2016)	Desenvolver atividades contextualizadas sobre o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas, utilizando para isso os recursos ofertados pelas tecnologias móveis.	EM	MalMateh	ND
PD16	Boff (2017)	Construir, aplicar e avaliar uma unidade de ensino potencialmente significativa em uma turma da disciplina de Pré-Cálculo, de cursos de Engenharia, visando à ocorrência de uma aprendizagem significativa de conceitos relacionados a funções matemáticas.	ES	-	ND
PD17	Cantaruti (2017)	Apresentar uma metodologia que expõe de forma mais abrangente e detalhada a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função, entre outros.	EM ES	-	ND
PD18	Nunes (2017)	Apresentar uma sequência de atividades utilizando a criptografia como instrumento de desenvolvimento no ensino dos conceitos e propriedades das funções e das matrizes, além de desenvolver uma sequência de atividades com libras.	EF	-	ND
PD19	Braz (2019)	Estudar o conceito geral de função, bem como as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.	EM	-	Modelagem Matemática

Fonte: O Autor (2021).

Salientamos que, em alguns trabalhos, não identificamos objetivos de pesquisa, mas apenas objetivos de ensino ou de aprendizagem. Como pode ser observado no Quadro 1.4., em apenas seis (06) trabalhos não foram identificados diretamente o nível de ensino a que a pesquisa se dedicou, enquanto cinco (05) dedicaram-se exclusivamente ao Ensino Superior, e apenas um (01) teve seus estudos dirigidos ao Ensino Fundamental. Os demais trabalhos dedicaram-se a estudar o ensino de funções exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio, o que aponta que há preocupação por parte dos pesquisadores com a produção de pesquisas para auxiliar os professores que atuam nesse nível de ensino.

Dos seis (06) trabalhos que não descrevem o nível de ensino que foi alvo da investigação, dois (02) deles, os de Freitas (2015) e Mossi (2016), analisam a formação inicial de professores de Matemática. Andrade (2012) pesquisa as expectativas da transição do aluno do Ensino Médio para o Ensino Superior, no que diz respeito à aprendizagem da função exponencial e, para analisar essa transição, o autor utiliza a Teoria Antropológica do Didático como aporte teórico.

Identificamos que, entre todos os trabalhos analisados, apenas o estudo de Santos (2018) dedicou-se à temática de materiais adaptados a pessoas com necessidades específicas.

Fazendo uma leitura mais aprofundada quanto à natureza das atividades/exercícios/tarefas propostas, identificamos a intenção de buscar aplicações em atividades da vida real, da função exponencial e logarítmica. Dentre essas aplicações, as que tiveram maior recorrência foram as realizadas na área da Biologia, com situações-problema descrevendo o crescimento populacional de bactérias. Outros autores buscaram relacionar as atividades propostas com a Matemática Comercial e Financeira, fazendo a relação da função exponencial com a modalidade de juros compostos e, na área da Química, com situações-problema envolvendo o decaimento exponencial. Observamos, portanto, a preocupação por parte de alguns autores em trazer exercícios aplicados a situações cotidianas. Entretanto, a forma de condução desses exercícios quase sempre era seguida da definição, enunciação e demonstração de propriedades e teoremas das funções exponenciais.

Identificamos, ao ler as atividades propostas, que a maioria dos exercícios e problemas tinham natureza fechada[2], e muitos consistiam apenas na reprodução de algoritmos.

Com relação à abordagem didático-metodológica, nem todos os trabalhos apontam ou deixam claro qual foi utilizada, mas verificamos que as mais recorrentes foram a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas.

Quadro 1.7 - Abordagens didático-metodológica descritas nos trabalhos

Abordagem Didática Metodológica	**Quantidade de trabalhos**
Investigações Matemáticas	1
Modelagem Matemática	11
Resolução de problemas	10

Fonte: O autor, 2020

Como podemos observar no Quadro 1.7, nenhum trabalho utilizou o Ensino Exploratório de Matemática, e apenas um (01) se ateve às Investigações Matemáticas.

Quanto ao uso de softwares, a maioria cita explicitamente o GeoGebra (Quadro 1.8), mas identificamos esse uso recorrente a partir do ano de 2013. Anteriormente, os softwares mencionados foram o *Modellus, Winplot* e o *Cabri-Géomètre*.

[2] Uma tarefa é fechada quando descreve exatamente o que precisa ser feito, são aquelas que exigem baixa demanda cognitiva dos alunos para serem solucionadas, pois precisam somente seguir um algoritmo para resolvê-las (PONTE, 2005).

Quadro 1.8 - Softwares utilizados

Software utilizado	Quantidade de trabalhos
GeoGebra	22
Planilhas	9
Calculadoras	2
Cabri-Géomètri	1
Winplot	2
Modellus	1
MalMateh	1
Matrix	1

Fonte: O Autor (2020).

Embora o GeoGebra tenha sido citado por vinte e dois autores, identificamos, ao ler os trabalhos, que seu uso se restringe basicamente à representação gráfica das funções exponenciais e logarítmicas. Apenas um (01) trabalho (COELHO, 2016) utilizou o GeoGebra para representar as funções exponenciais, usando, além da janela *gráfica,* também a janela *Planilhas,* para obter outra forma de representação das funções exponenciais, por meio de tabelas.

A partir deste levantamento, observa-se que há uma preocupação por parte dos pesquisadores em estudar essas funções, tanto no seu ensino quanto na sua aprendizagem. Observa-se que a maioria dos trabalhos abordam a função exponencial (quarenta e sete (47) trabalhos), ou abordam tanto a função exponencial quanto a função logarítmica, neste caso, vinte (20) que tratam de ambas as funções. Os trabalhos que abordam apenas a função logarítmica totalizaram apenas quatro (4), mostrando que há campo ainda a ser explorado.

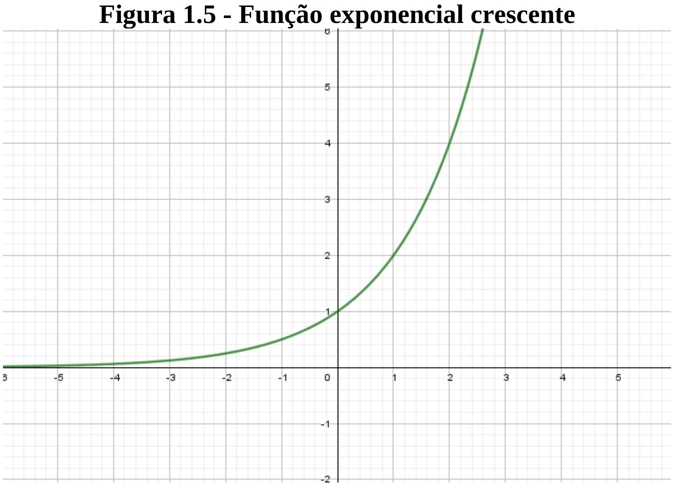
1.3 A FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

A função exponencial pode ser definida matematicamente da seguinte forma: dados $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a; a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número a^x, assim, $f(x) = a^x$.

O valor de a, que chamamos de base da função, irá determinar quando a função será crescente ou decrescente. Quando $a > 1$ (a maior que um), classificamos a função como crescente, e caso o valor de a esteja entre zero e um ($0 < a < 1$), classificamos a função como decrescente.

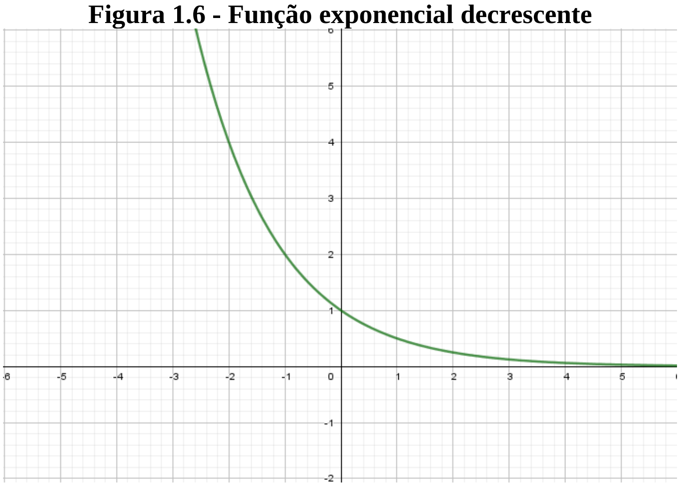
Os gráficos das figuras 1.5 e 1.6 representam as funções exponencias crescente e decrescente, respectivamente.

Figura 1.5 - Função exponencial crescente



Fonte: O autor (2021).

Figura 1.6 - Função exponencial decrescente



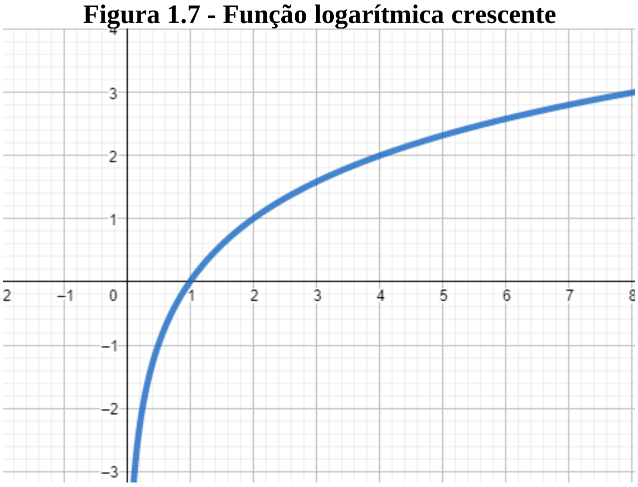
Fonte: O autor (2021).

A função exponencial tem por domínio o conjunto dos números reais - $\mathbb{R}$, e contradomínio, o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}^{+}$.

A função logarítmica é uma função que utiliza o conceito de logaritmo, que pode ser definido como: chama-se de logaritmo de b na base a o expoente x, de modo que $a^x = b$, isto é, $\log_a b = x$. Assim, a função exponencial pode ser definida como $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_a x$. A função logarítmica, assim como a exponencial, pode ser crescente e decrescente. Para que a função seja crescente, o valor a precisa ser maior que um $(a > 1)$, e será decrescente quando o valor de a estiver entre zero e um $(0 < a < 1)$.

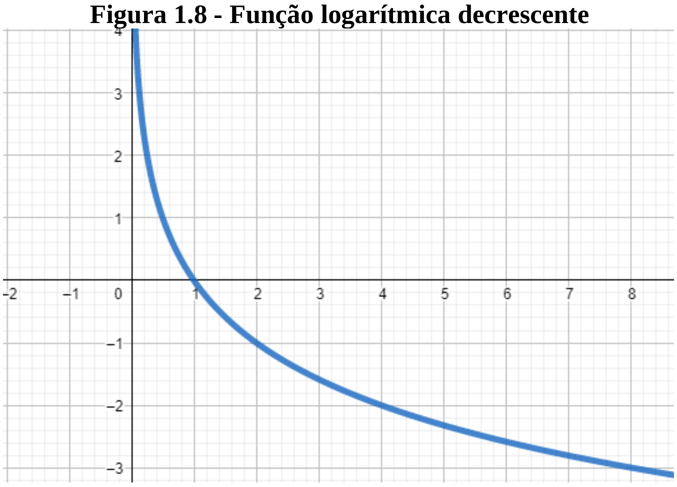
As figuras 1.7 e 1.8 representam graficamente as funções logarítmicas crescentes e decrescente, respectivamente.

Figura 1.7 - Função logarítmica crescente



Fonte: O autor (2021).

Figura 1.8 - Função logarítmica decrescente



Fonte: O autor (2021).

A função logarítmica tem como conjunto domínio o conjunto dos números reais positivos, isto é, $\mathbb{R}_+^*$, quando sua imagem é todo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Para uma compreensão da função logarítmica, é necessário o entendimento do conceito logaritmo. Para Alves (2014), o logaritmo surge da necessidade de resolver equações do tipo $5^x = 7$. Entretanto, a história nos mostra que

> a propriedade do logaritmo de transformar (reduzir) multiplicação em soma, divisão em subtração e potência em multiplicação, em uma época em que não havia calculadora científica, foi a maior motivação para seu uso e disseminação na navegação, no comércio e na Astronomia. Sendo John Napier e Jost Bürgi os inventores do logaritmo trabalhando de forma independente (ALVES, 2014, p.24).

Caraça (1951, p. 25), acerca dos logaritmos, descreve que a “operação só é possível a é uma potência de base b, por exemplo é possível $\log_7 49$, visto que $49 = 7^2$, mas não $\log_8 20$; o caso mais geral é o da impossibilidade”. As propriedades que muitas vezes são ensinadas e utilizadas nos cálculos dos logaritmos são classificadas por Caraça (1951, p. 25) em dois grupos:

Primeiro Grupo
1º - unicidade: $a = a'$, $b = b' \rightarrow \log_b a = \log_{b'} a'$
2º - monotônica: $a > a' \rightarrow \log_b a > \log_b a'$
3º - ....: $\log_a a = 1$
Segundo Grupo
4º - ....: $\log_b(a \times c) = \log_b a + \log_b c$
5º - ....: $\log_b(a \div c) = \log_b a - \log_b c$
6º - ....: $\log_b a^n = n \times \log_b a$.

Essas propriedades são utilizadas quando estamos operando com logaritmos e, por vezes, podem figurar funções logarítmicas em seus processos de cálculo.

Sabemos que uma função f é inversa de uma função g quando fazemos a composição delas, isto é, $f\big(g(x)\big) = x$; em outras palavras, resulta na função identidade. Desta forma, podemos afirmar que a função exponencial é a inversa da função logarítmica, uma vez que, por exemplo, dadas $g(x) = 2^x$ e $f(x) = \log_2 x$, ao calcularmos $f(g(x))$, obtermos $f(2^x) = \log_2 2^x$; pelas propriedades 6º e 3º, temos que $f(2^x) = x.\log_2 2$, e assim, $f(2^x) = x.1$, que resulta em $f\big(g(x)\big) = x$. Desta forma, podemos observar que as funções exponenciais logarítmicas são uma inversa da outra.

Nota-se, porém, que mesmo sendo uma inversa da outra, a natureza das funções exponenciais e logarítmicas são diferentes, uma vez que a incógnita, na função exponencial, encontra-se no expoente da função, enquanto na outra função, a variável é o argumento de um logaritmo. Esta diferença na natureza de cada uma delas, por vezes, torna difícil a compreensão do fato que uma é inversa da outra, mesmo elas sendo trabalhadas uma na sequência da outra na maioria dos currículos, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Superior.

1.4 O ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Na revisão de teses e dissertações realizada não identificamos, em nenhum dos trabalhos selecionados, o uso do Ensino Exploratório da Matemática – EEM. No EEM, professor e alunos são agentes da construção do conhecimento, uma vez que o EEM se baseia em um formato dialógico (BASNIAK; ESTEVAM, 2019), que requer diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno. Portanto, o EEM não deixa o processo de aprendizagem somente a cargo do aluno enquanto o professor cruza os seus braços.

> O ensino exploratório da Matemática não advoga que os alunos descobrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes. Muito menos advoga que isso acontece enquanto o professor espera tranquilamente sentado pelos rasgos iluminados e criativos dos seus alunos — não que estes não os tenham quando lhes é dada oportunidade (CANAVARRO, 2011, p. 11).

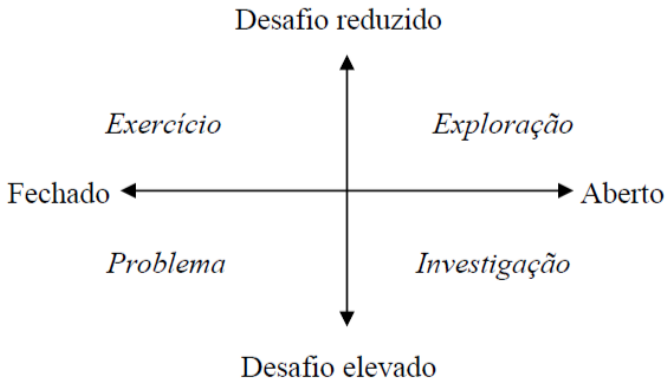
A interação dos alunos com seus colegas e com seu professor é fundamental, pois é nessa partilha de significados, conceitos e suposições que ocorrem a comunicação e a colaboração (BASNIAK; ESTEVAM, 2019). O professor, ao preparar sua aula, deve "considerar o ensino como um processo em que os alunos interagem entre si e com o professor, no intuito de construir e compartilhar significado" (BASNIAK; ESTEVAM, 2019, p. 3). O professor, ao comunicar-se com seus alunos, não atesta se a resposta está correta ou não, por mais que nos primeiros momentos os alunos busquem esta validação no professor. O papel do professor é de instigar seus alunos para que eles verifiquem se estão seguindo um caminho matemático válido.

No EEM, o conceito de tarefa "é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos" (PONTE *et al.*, 2015, p. 01). O EEM pressupõe que uma tarefa deva ser elaborada de forma que seja significativa ao aluno e possa suscitar o uso de experiências anteriores (ESTEVAM; CYRINO; OLIVEIRA, 2015). Isto porque,

> O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas, como a resolução de problemas (ESTEVAM; *et al.*, 2018, p. 6).

Portanto, ao se construir uma tarefa, deve-se examinar o grau de dificuldade que ela apresenta, que pode variar entre reduzido e elevado (PONTE, 2005). Segundo Ponte *et al*. (2015), uma tarefa pode assumir uma estrutura aberta ou fechada: "uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido em uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, e no que é pedido, ou em ambas as coisas" (PONTE *et al.*, 2015, p. 7). Ponte (2005) apresenta uma figura (Figura 1.9) que sintetiza as características que uma tarefa pode assumir.

Figura 1.9 - Relação entre os diversos tipos de tarefas



Fonte: Ponte (2005, p. 8).

Ponte (2005, p. 2) aponta que "existem muitos tipos de tarefa matemática [...] os problemas, os exercícios, as investigações, os projectos e as tarefas de modelação". No Quadro 1.9, sintetizamos alguns desses tipos de tarefas citadas, de acordo com alguns apontamentos que Ponte (2005) faz sobre problemas, exercícios, investigações e tarefas de modelação.

Quadro 1.9 - Tipos de tarefas

Tipos de tarefas	Descrição
Exercícios	I) "A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema" (p. 04). II) "Os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos" (p. 04).
Problemas	I) "O professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes possam se sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta" (p. 03). II) "É de notar que um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou a nem lhe pegar). Se o problema for demasiado acessível, não será então um problema, mas sim um exercício" (p. 03).
Investigações	"Os argumentos principais utilizados para justificar a importância das investigações são análogos aos usados para justificar a importância dos problemas, acrescentando se ainda que as investigações, mais do que os problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação activa desde a primeira fase do processo – a formulação das questões a resolver" (p. 07).
Tarefas de modelação	"As chamadas tarefas de modelação são, no fundo, tarefas que se apresentam num contexto de realidade" (p. 10).
Projectos (ou tarefas de longa duração)	"Tem um papel insubstituível no desenvolvimento de diversos objectivos curriculares e devem ser, por isso, contemplados pelo menos na planificação anual do trabalho do professor" (p. 18).

Fonte: Ponte (2005).

Nesse sentindo, no que se referente às tarefas, Ponte *et al*. (2015, p. 2) assinalam que

> é necessária a diversificação porque cada tipo de tarefa desempenha um papel específico na aprendizagem. As tarefas fechadas (como exercícios e problemas) são importantes para o desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada, ao passo que as tarefas abertas (explorações e investigações) ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando as matematicamente.

Além disso, o professor, ao preparar sua aula, deve levar em consideração que as proposições de tarefas devem favorecer o sucesso do aluno e sua autoconfiança, pois

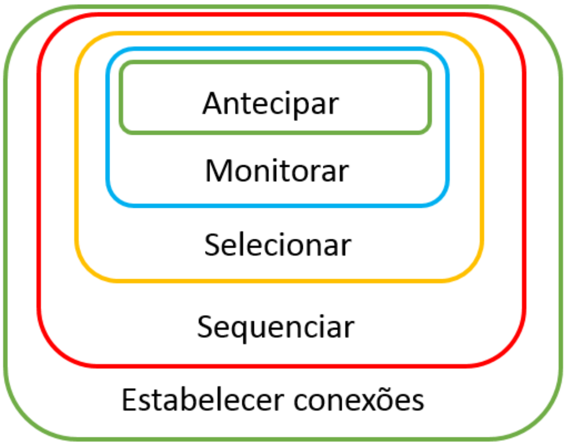
> as tarefas com um grau de desafio mais reduzido exercícios e explorações) favorecem o sucesso dos alunos e promovem a sua autoconfiança enquanto as tarefas mais desafiantes (problemas e investigações) proporcionam experiências matemáticas mais profundas (PONTE *et al.*, 2015, p. 2).

Porém, ao selecionar uma tarefa, é preciso atenção à forma como ela será desenvolvida (PONTE, 2005). Isto porque, ao se construir uma tarefa no EEM, deve-se primar por problemas que tenham relevância para o aluno (ESTEVAM; CYRINO; OLIVEIRA, 2015), fornecendo meios para que ele possa desenvolvê-la dando preferência ao raciocínio indutivo (ESTEVAM *et al.*, 2018).

Quando o professor concebe uma tarefa nessa perspectiva, ele precisa estar preparado para escolher tarefas valiosas, com potencial para promover a aprendizagem e o aprofundamento da exploração matemática. Assim, o professor precisa gerir o tempo sem desperdício, controlar seus comentários durante o desenvolvimento da tarefa, evitar dar uma orientação ou caminho certo sobre a resolução da tarefa, e resistir à validação das questões, porque muito alunos estão acostumados a desenvolver suas atividades baseadas na validação dos professores (CANAVARRO, 2011).

Para auxiliar na construção, bem como no desenvolvimento de aula a partir de uma tarefa desafiadora, Stein *et al.* (2008) sugerem um conjunto com cinco práticas, que além de orientar o trabalho do professor na sala de aula, servem como modelo para facilitar as discussões. Canavarro (2011) descreve a orquestração dessas cinco práticas, que são: i) antecipar; ii) monitorar; iii) selecionar; iv) sequenciar; e v) estabelecer conexões. Na figura da página seguinte há um esquema que resume as cinco práticas.

Quadro 1.10 - Orquestração das cincos práticas



Fonte: Stein (2008, p. 10, tradução nossa).

Em cada uma dessas práticas, o professor tem papel distinto, que implicará em algumas ações. Na antecipação, o professor dedicará um tempo antes da realização do desenvolvimento da tarefa com os alunos para prever as estratégias de resolução da tarefa a serem empregadas pelos alunos por meio de um quadro de antecipação, que fará parte do plano de aula. É preciso que, nesse momento, o professor se esforce para visualizar como os alunos podem vir a abordar a tarefa (STEIN *et al*., 2008). Assim, a antecipação "corresponde essencialmente a uma previsão por parte do professor de como os seus alunos irão abordar as tarefas que lhes coloca com vista a relacionar aquilo que eles poderão fazer com o propósito matemático da aula" (CANAVARRO 2011, p. 3). Ao antecipar, o professor deve dar prioridade à resolução da tarefa de maneiras mais diversas possíveis, prevendo os possíveis caminhos que o aluno possa utilizar para chegar à resposta (CANAVARRO, 2011; STEIN *et al*., 2008). Ao antecipar, o professor precisa:

> Prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa; Elencar uma diversidade de estratégias, correctas e incorrectas, que os alunos poderão usar, com diferentes graus de sofisticação; Relacionar essas estratégias com os conceitos, representações, ou procedimentos que quer que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam (CANAVARRO 2011, p. 3).

Portanto, a ação de antecipar descreve as expectativas que o professor tem sobre como os alunos irão abordar matematicamente o que ele está propondo (STEIN *et al*., 2008). Na escolha da tarefa, o professor deve aproveitar ao máximo o potencial da tarefa, porque "ao antecipar, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos" (CANAVARRO 2011, p. 3).

Cyrino e Oliveira (2016) propõem que o desenvolvimento da aula seja realizado em quatro fases: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens. Na introdução da tarefa, para que os alunos a realizem, o professor precisa garantir que todos os estudantes compreendam o que é solicitado, pois isto auxiliará no desenvolvimento adequado da tarefa por eles. Assim,

> O professor tem de garantir a apropriação da tarefa pelos alunos e promover sua adesão, de modo que a sua atividade matemática venha a se desenvolver, tendo ainda de organizar a turma, fornecendo os recursos necessários para a realização da tarefa (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 7).

Compreendida a tarefa, passa-se ao seu *desenvolvimento*, quando a prática do professor deverá estar voltada a *monitorar* sua resolução, movimentando-se pela sala e buscando observar as estratégias que os alunos estão construindo para resolvê-la. É neste momento que,

> Ao monitorizar, para além de verificar se os alunos estão a trabalhar na tarefa, o professor dedica-se a: observar e ouvir os alunos ou grupos; avaliar a validade matemática das suas ideias e resoluções; interpretar e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; ajudar os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante para o propósito matemático da aula (CANAVARRO, 2011, p. 3).

Portanto, ao monitorar, o professor deve circular pela sala, buscando atender às solicitações dos seus alunos, mas sem dar respostas de forma pronta e direta, e sim questionando se o caminho que estão seguindo é apropriado para a execução correta da tarefa e se é um caminho matemático válido. Quando o professor monitora a tarefa, ele "consegue aperceber-se da realidade das ideias matemáticas surgidas na turma e decidir mais fundamentadamente em que aspectos se deve focar e o que precisa aprofundar na discussão com toda a turma" (CANAVARRO, 2011, p. 3).

Na fase do desenvolvimento da tarefa, o professor precisa dar atenção à qualidade de interação entre os alunos, a fim de que construam caminhos adequados ao que a tarefa solicita (CYRINO; OLIVEIRA, 2016). Stein *et al.* (2008) apontam que os professores que se dedicam com esforço no momento da antecipação sentem-se mais preparados para essa fase da monitoração.

O monitoramento auxiliará o professor a selecionar algumas tarefas (CANAVARRO, 2011) para que sejam discutidas em conjunto com a turma, quando os alunos devem apresentar as resoluções, explicando as estratégias de resolução. Para facilitar esse processo de seleção durante a prática da monitoração, o professor pode fazer anotações de como os alunos estão desenvolvendo as tarefas em seus grupos (STEIN *et al.*, 2008).

A terceira prática é a seleção das resoluções obtidas pelos grupos/alunos em relação à tarefa, a qual está relacionada à terceira fase da aula, que é a *apresentação e discussão da tarefa*. Para selecionar as resoluções da tarefa na fase de discussão, o professor deve priorizar aquelas que tiveram encaminhamentos que sejam interessantes para os demais alunos e estejam alinhadas aos propósitos da aula, “de modo a escolher e sequenciar as resoluções a serem apresentadas em grande grupo, de acordo com critérios que podem ser antecipadamente definidos” (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 7).

Salienta-se que não há necessidade de escolher apenas as resoluções que foram resolvidas de forma correta, podem-se escolher algumas em que os erros foram recorrentes, a fim de discutir as dúvidas dos alunos e compreender como construíram a resposta da tarefa. Dessa forma, é possível discutir o que está equivocado no caminho seguido pelos alunos (STEIN *et al.*, 2008).

As resoluções dos alunos são sequenciadas pelo professor para serem apresentadas para a turma, o que está relacionado à quarta prática. A forma de seleção e sequenciamento varia de acordo com os objetivos que o professor tem para a aula ou deseja alcançar com a tarefa. Por isso, é importante que ele tenha claro esses objetivos ao iniciar a aula,

> ao tomar decisões ponderadas acerca da ordem pela qual se dá a apresentação e partilha dos trabalhos dos alunos, o professor pode maximizar as hipóteses de a discussão e síntese e serem matematicamente bem-sucedidas (CANAVARRO, 2011, p. 5).

Outra forma de pensar o sequenciamento é iniciar com uma estratégia que tenha sido recorrente na resolução da tarefa (STEIN *et al.*, 2008). Para facilitar e otimizar o tempo, fotografar as resoluções das tarefas (para serem projetadas) poupa tempo para a quinta e última prática, em que são estabelecidas as conexões matemáticas entre as diferentes respostas.

A prática de estabelecer conexões (CANAVARRO, 2011) está relacionado à fase da aula de apresentação ou discussão da tarefa (CYRINO; OLIVEIRA, 2016), que ocorre em conjunto com a turma, quando as tarefas selecionadas são apresentadas. Nesse momento, o professor precisa,

> criar e manter um ambiente apropriado à apresentação e discussão das ideias matemáticas dos alunos, o que envolve paralelamente a promoção e a gestão da sua participação, fazendo-os ouvir e intervir de forma adequada e produtiva para o desenvolvimento do discurso matemático (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 8).

Deve-se ter cuidado para que esse momento não seja apenas de simples apresentações. É preciso que sejam observados os objetivos iniciais da aula, posto que

> É importante sublinhar que o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento coletivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos (CANAVARRO, 2011, p. 6).

É preciso primar pela qualidade matemática das apresentações que os alunos fazem durante esse momento, porque elas auxiliam no cumprimento dos objetivos definidos no início da tarefa, "contribuindo para aumentar a sua compreensão matemática" (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 8). O professor deve criar um ambiente em que seja possível que o aluno analise, compare e confronte as resoluções expostas por seu grupo e seus colegas, de forma que permita avaliar se os conceitos matemáticos estão sendo empregados de maneira correta.

> O professor convida os alunos a analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta-análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras (CANAVARRO, 2011, p. 6).

Stein *et al.* (2008), destacam que não há uma maneira específica ou estanque de fazer as conexões, pois elas serão direcionadas de acordo com os objetivos propostos na tarefa. O encerramento da aula ocorre quando o professor faz a *sistematização* das aprendizagens (CYRINO; OLIVEIRA, 2016). Nesse momento, o professor assume o papel central no desencadeamento da aula, sintetizando e formalizando os conceitos que emergiram ao longo da resolução da tarefa. Assim, "essa é uma fase fundamental para que a atividade de construção do conhecimento dê lugar à compreensão das ideias matemáticas" (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 8).

Conceber uma aula na perspectiva do EEM coloca sobre o professor um papel exigente e importante na promoção de situações que favoreçam a aprendizagem dos alunos (CYRINO; OLIVEIRA, 2016).

Além dessa compreensão das oportunidades de aprendizagem que alguns tipos de tarefas podem oferecer, tendo em conta que o conceito de função exponencial e logarítmica pode ser desenvolvido de diversas formas, como é citado no início deste capítulo, as tarefas elaboradas para o desenvolvimento desta pesquisa buscaram contemplar características que possam torná-las mais relevantes e desafiadoras aos alunos, bem como lhes possibilitar a realização de mais de uma forma de representação dessas funções, fazendo uso do GeoGebra e tendo em vista a adoção da Perspectiva do EEM.

2 CONTEXTO E METODOLOGIA

A presente pesquisa teve seu desenvolvimento em meio a um cenário pandêmico. Vivemos a primeira pandemia do século XXI, que afetou significativamente a forma de ensinar. Passamos a trabalhar com nossos alunos no modelo que foi chamado de remoto, fazendo uso de computadores, celulares, tablets, Ambientes Virtuais de Aprendizagem – AVA, além de plataformas e programas para videoconferência. Os atores da escola (professores, pedagogos e demais colaboradores) viram-se trabalhando na escola fora da escola, em suas casas. Os alunos, da mesma forma, sem poder ir à escola, passaram a estudar nos cômodos de suas residências da melhor forma que foi possível.

Em meio a esse cenário, foram construídos os aspectos teóricos presentes na pesquisa, além da coleta de dados, que foram obtidos de forma distanciada, isto é, de modo remoto. Esta pesquisa tem como característica principal a participação do pesquisador durante o processo de coleta e análise de dados. Não foram considerados aspectos quantitativos com tratamentos estatísticos, ou outros recursos testes de hipóteses que possuem características quantitativas, mas aspectos qualitativos.

Desta forma, a presente pesquisa assume papel qualitativo no tratamento e coleta de dados, em que “há duas características que permitem tal diversidade: o pesquisador é o instrumento de pesquisa e o delineamento metodológico é emergente” (OLIVEIRA; ORTIGÃ, 2018, p. 35).

A escolha por tal concepção metodológica se deve ao fato de que, durante a coleta dos dados, “o pesquisador pode recorrer às suas próprias experiências e à intuição, bem como toma várias decisões à medida que produz os dados” (OLIVEIRA; ORTIGÃ, 2018, p. 35).

Para a realização desta pesquisa, foram elaboradas duas tarefas de natureza exploratória, que estão disponíveis nos apêndices A e C deste trabalho, seguidas dos respectivos planos de aula (Apêndices B e C). A primeira tarefa, intitulada *O Coronavírus e a sua propagação,* está relacionada ao conteúdo de função exponencial; e a segunda tarefa, *O Coronavírus e contágio*, ao conteúdo de função logarítmica. As tarefas foram construídas pelo autor e discutidas com o Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística - GEPTEMatE. O auxílio deste grupo de pesquisa foi de grande importância para a construção das tarefas, pois se dedicaram em respondê-las e tecer comentários que garantiram às tarefas aspectos exploratórios e matemáticos, desde o início da construção até a sua conclusão e desenvolvimento com os alunos, os quais caracterizamos a seguir.

2.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA E A COLETA DOS DADOS EMPÍRICOS

Para compor o grupo de alunos que realizariam as tarefas, convidamos alunos do segundo ano do curso do curso Técnico em Alimentos integrado ao Ensino Médio de uma instituição federal de ensino do interior do estado do Paraná, na qual o pesquisador atua como docente, para participarem de quatro encontros ao longo do mês de setembro de 2021. Essa instituição de ensino seleciona seus alunos anualmente por meio de processo seletivo. Para esse curso técnico, são selecionados 40 alunos por meio de uma prova, considerando as políticas de cotas definidas pela instituição. Os alunos são provenientes de instituições públicas e privadas, e a maioria mora na mesma cidade da instituição ou em cidades vizinhas, em um raio de cerca de cinquenta quilômetros (50 km) de distância.

A turma da qual foram convidados os alunos conta com 32 estudantes regularmente matriculados. O convite foi realizado para toda a turma, em duas oportunidades, ao findar das aulas. Dentre os alunos da turma, seis aceitaram o convite, dois dos quais dos quais são de fora do município da instituição.

O pesquisador também é professor desses alunos, que tiveram dois componentes curriculares de Matemática no primeiro ano do Ensino Médio, um denominado de Matemática I, e o outro, Matemática Aplicada. O componente curricular Matemática I abordou o conceito de funções, desde função do primeiro grau, segundo grau, exponencial e logarítmica. O componente curricular Matemática I foi ministrado por outro professor para a turma. Já o componente Matemática Aplicada foi ministrado pelo autor da pesquisa, mas não foi estudado o conteúdo funções. Assim, consideramos que os alunos tiveram acesso aos conceitos abordados nessa tarefa, mas desconhecemos quais representações ou comunicações para as funções foram abordadas.

Desde março de 2020 até novembro de 2021, as atividades de ensino ocorreram de forma remota, uma vez que, devido à pandemia do Coronavírus, a instituição teve as aulas presenciais suspensas. Desta forma, os alunos da turma tiveram cerca de um mês de aulas presenciais desde que ingressaram no Ensino Médio na referida instituição de ensino, quando foram adotadas as aulas na forma remota. No momento do desenvolvimento das tarefas, os alunos tinham encontros síncronos de todos os componentes curriculares durante a semana, sendo o tempo médio destes encontros de vinte e cinco por cento da carga horária semanal, adequados ao planejamento de cada professor. O professor/pesquisador realizava aulas síncronas de uma hora toda semana com a turma. Para essas aulas síncronas, utilizava o Google Meet e disponibilizava posteriormente a gravação das aulas para os alunos, na Plataforma

Moodle, adotada pela instituição como ambiente virtual de aprendizagem assíncrona, onde eram disponibilizados os materiais utilizados pelos professores, gravações das aulas, atividades de avaliação, etc. A maioria dos alunos acessava os materiais no Moodle, também participava dos encontros síncronos utilizando computador ou notebook. Alguns, porém, faziam uso do smartphone para o acesso. Em média, os encontros síncronos contavam com vinte e cinco alunos participando. O professor não colocava a abertura das câmeras como condição para realização das aulas, e nenhum dos alunos deixava a câmera aberta.

A qualidade da conexão que os alunos tinham nem sempre era boa, pois, por algumas vezes, eles relatavam instabilidade durante a aula síncrona. Uma das alunas que morava na zona rural, por vezes, não pode acessar a aula devido à qualidade do sinal na sua residência. Em algumas ocasiões houve pedidos (poucos) para entrega de avaliação tardia, em decorrência de problemas de conexão. Quando isso acontecia, o professor concedia o prazo de um ou dois dias.

Os alunos tiveram dificuldade para se habituarem à nova modalidade de ensino proposta, uma vez que o aluno e o professor não estavam no mesmo local. Além disso, muitos não possuíam um local apropriado para estudar, haja vista muitas casas não terem cômodo específico para estudos.

A instituição disponibilizou celulares para os alunos que tinham dificuldades de acesso às atividades remotas. Na turma que foram desenvolvidas as tarefas, não havia alunos sem acesso à internet que necessitassem de atividades impressas por parte dos professores. A seção pedagógica fazia um levantamento e acompanhamento dos alunos com dificuldades e, assim, comunicava aos professores para que fornecessem material de apoio extra ou encontros síncronos a mais.

Neste contexto, todas as intervenções desta pesquisa foram realizadas pelo Google Meet, em encontros de aproximadamente uma hora, nos meses de agosto e setembro de 2021, nas segundas feiras, das 10 às 11 horas. Cada tarefa foi desenvolvida em dois encontros (Quadro 2.1, na página seguinte): no primeiro foi encontro realizada a introdução e desenvolvimento da tarefa; no segundo encontro, a discussão e sistematização das aprendizagens (CYRINO; OLIVEIRA, 2016).

Quadro 2.1 - Cronograma das aulas

Dia	Tema	Fases do EEM
30/08	Função Exponencial	Introdução da tarefa; Desenvolvimento da tarefa
06/09	Função Exponencial	Discussão da tarefa; Sistematização de aprendizagens
13/09	Função Logarítmica	Introdução da tarefa; Desenvolvimento da tarefa
20/09	Função Logarítmica	Discussão da tarefa; Sistematização de aprendizagens

Fonte: O autor (2021).

Todos os encontros foram gravados pelo professor/pesquisador para posterior análise. Essas gravações foram utilizadas para analisar como ocorreu o desenvolvimento das tarefas pelos alunos. Além dos dados analisados das gravações, foram consideras as imagens das resoluções enviadas pelos alunos via WhatsApp. Nos encontros de 30 de agosto e 13 de setembro (introdução e desenvolvimento da tarefa), foi utilizado o recurso do GeoGebra Classroom para a resolução da tarefa, com as salas (sala 01, Tarefa 01 – O coronavírus e sua propagação: https://www.geogebra.org/classroom/aqzzjmqb, e sala 02, Tarefa 02 - o Coronavírus e seu contágio: https://www.geogebra.org/classroom/kxunbwxh). Os alunos acessavam a tarefa e o applet do GeoGebra, uma vez que este recurso permite que seja disponibilizada a tarefa escrita com cada item, aceitando as respostas dos alunos conforme solicitado, sendo possível utilizar o applet necessário para sua resolução.

Assim, o professor conseguiu, por meio do Classroom do GeoGebra, acompanhar a resolução da tarefa pelos alunos em tempo real. Para isso, os alunos acessavam a sala por meio do link que o professor disponibilizava ou por meio do site o GeoGebra, clicando na opção Classroom e inserindo o código informado pelo professor.

No GeoGebra Classroom, uma vez acessada a sala de aula, o aluno pode iniciar a resolução da tarefa e o programa salva automaticamente todo o processo realizado, de forma que, quando a tarefa é finalizada, o professor pode interromper a sala de aula (GeoGebra), e possui acesso a tudo o que foi realizado pelos alunos.

Entretanto, como até o momento da intervenção ainda não existia o campo específico para inserção de imagens no GeoGebra Classroom, foi solicitado que os alunos enviassem as fotos das resoluções e anotações escritas para o pesquisador via aplicativo de mensagens WhatsApp. Embora as tarefas tenham sido desenvolvidas em pequenos grupos (com três alunos), como não estavam presencialmente no mesmo local, todos os enviaram suas anotações realizadas durante a resolução da tarefa, também tivemos acesso às resoluções individuais no GeoGebra Classroom, visto que o applet não permite ação colaborativa. Assim, ficaram registradas as ações de cada aluno separadamente, o que nos permitiu identificar as diferentes representações e formas de comunicar as funções utilizadas por cada um dos alunos, embora as tarefas tenham sido realizadas em grupo.

Para a resolução das tarefas, os alunos foram organizados em dois grupos no primeiro encontro, os quais foram mantidos durante toda a pesquisa. A fim de manter a identidade dos alunos em sigilo e garantir a confidencialidade dos dados, identificaremos os alunos do Grupo 1 – representado por G1 - pelos nomes fictícios: Leandro, Giovana, Ygor; e os alunos do Grupo 2 – representado por G2 – como Janaina, Rebeca e Andreia. Os links do Google Meet da sala principal dos referidos grupos estão descritos no Quadro 2.2.

Quadro 2.2 - Cronograma com os grupos e links

Sala/Grupo	**Link**
Sala geral	https://meet.google.com/wak-nvoh-xjs
Grupo 01 Leandro, Giovana, Ygor	https://meet.google.com/kmq-qbww-icq
Grupo 02 Janaina, Rebeca e Andreia	https://meet.google.com/qof-byhj-kxg

Fonte: O autor (2021).

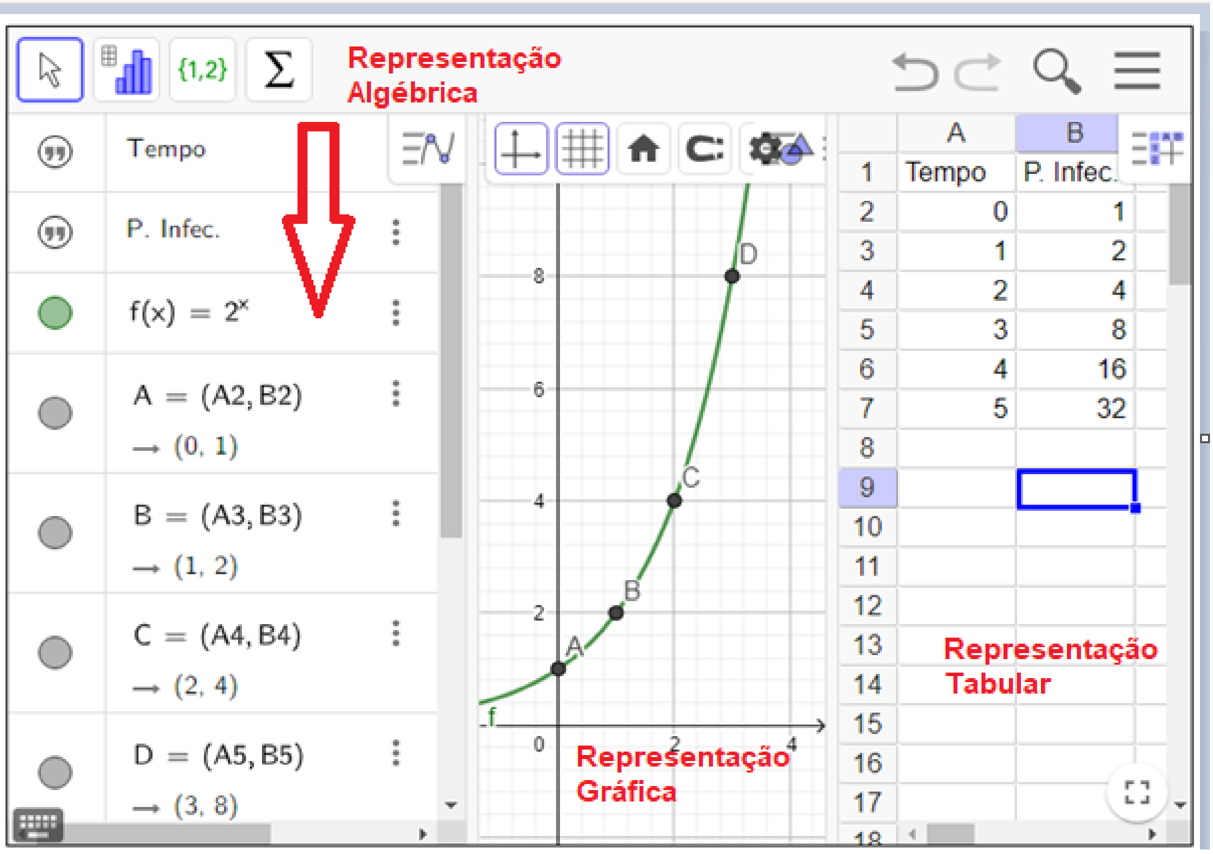
Os alunos, uma vez iniciada a resolução da tarefa, combinavam entre si quem compartilharia a tela para o seu desenvolvimento. Com o compartilhamento da tela ficava mais fácil o acompanhamento da tarefa.

2.2 DA ANÁLISE DOS DADOS

Buscamos, a partir do desenvolvimento das duas tarefas pelos alunos, identificar as representações registradas quanto à função exponencial e logarítmica utilizada por eles. Dentre as formas de comunicar as funções que os alunos poderiam utilizar, destacamos as seguintes: tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrica, generalização, gráfica, e definição da função exponencial.

Ao utilizar o GeoGebra, os alunos podem representar a função por meio de uma tabela na janela *planilha*, de forma algébrica, inserindo a função no campo de *entrada* do software, e assim, sendo descrita a sua comunicação na *janela de álgebra* e, por consequência, o gráfico que é exibido na *janela de visualização*, uma vez que a função é inserida. Estas três representações possíveis são mostradas na Figura 2.1, em que se exibem as três janelas do GeoGebra.

Figura 2.1 - Janelas do GeoGebra da tarefa o Coronavírus e sua propagação



Fonte: O autor (2021).

A partir dessas representações que podem ser construídas no GeoGebra, também analisando as fotos dos registros dos alunos em seus cadernos e as transcrições de suas discussões e apresentação da tarefa, analisamos como eles comunicam suas compreensões de função exponencial e logarítmica a partir da resolução das duas tarefas.

As análises foram organizadas por grupos, iniciando pelo grupo um e depois seguindo com o grupo dois, para facilitar a visualização e análise das mudanças na forma de resolução das tarefas. As análises iniciam pela tarefa um.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após o desenvolvimento das tarefas que foram realizadas de forma remota, analisamos os registros dos alunos, tanto no GeoGebra Classroom quanto os registros escritos que foram enviados no formato de imagem via WhatsApp, além das gravações das interações realizadas no Google Meet de forma online.

Os resultados a seguir estão organizados por grupos, iniciando pelo grupo um, representado por G1; em seguida, o grupo dois, representado por G2. As análises iniciam pela primeira tarefa e logo em seguida é apresentada a análise da segunda tarefa realizada por cada grupo.

3.1 GRUPO 1

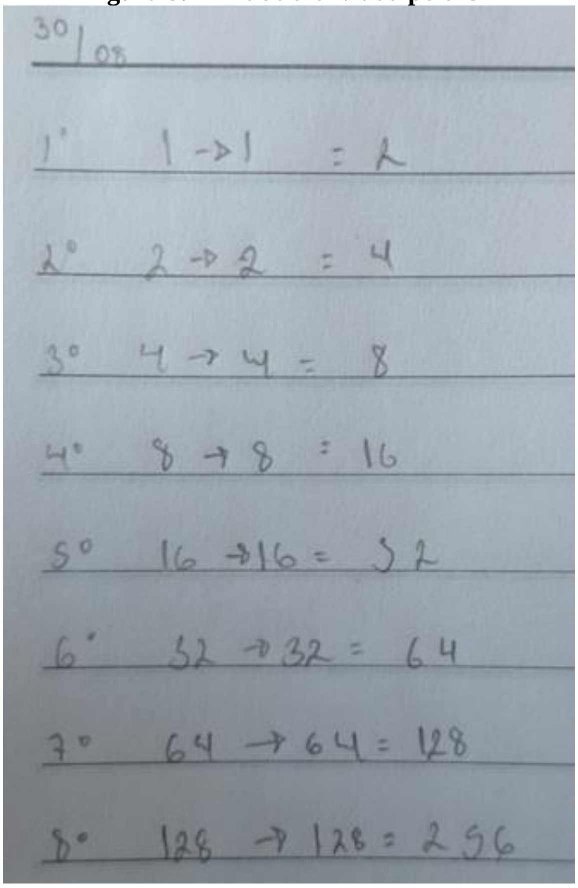
3.1.1 Tarefa 1: O Coronavírus e a sua *propagação*

Após a resolução da Tarefa 1: *O coronavírus e sua propagação,* que foi realizada no primeiro encontro, o professor/pesquisador iniciou o segundo encontro questionando os alunos sobre suas impressões iniciais da tarefa. Imediatamente o aluno Leandro respondeu que "*foi meio complicadinha, faltou tempo, faltou, deu na medida mais ou menos".* Como eles não haviam ainda trabalhado na perspectiva do EEM, tiveram dificuldades tanto na gestão do tempo quanto com a interação entre os membros do grupo. Isso, inicialmente devido a ser o primeiro contato com o EEM. A aluna Giovana comentou que, apesar de ter dificuldades no componente curricular de Matemática, gostou da dinâmica da aula e de trabalhar em grupos.

O grupo G1, nessa primeira tarefa, praticamente não utilizou o GeoGebra, por desconhecimento do software, realizando os registros majoritariamente no papel, dedicando-se apenas em responder os itens no GeoGebra Classroom. A aluna Giovana ficou como redatora do grupo, enquanto os demais colegas faziam apontamentos sobre cada item, discutindo as possíveis respostas.

Antes de compartilhar via WhatsApp as anotações escritas realizadas na resolução da tarefa, Ygor avisou ao grupo que enviaria a *tabela* que havia construído em seu caderno, a qual podemos observar na figura 3.1.

Figura 3.1 – Tabela enviada pelo G1


30/08

1° 1 -> 1 = 2

2° 2 -> 2 = 4

3° 4 -> 4 = 8

4° 8 -> 8 = 16

5° 16 -> 16 = 32

6° 32 -> 32 = 64

7° 64 -> 64 = 128

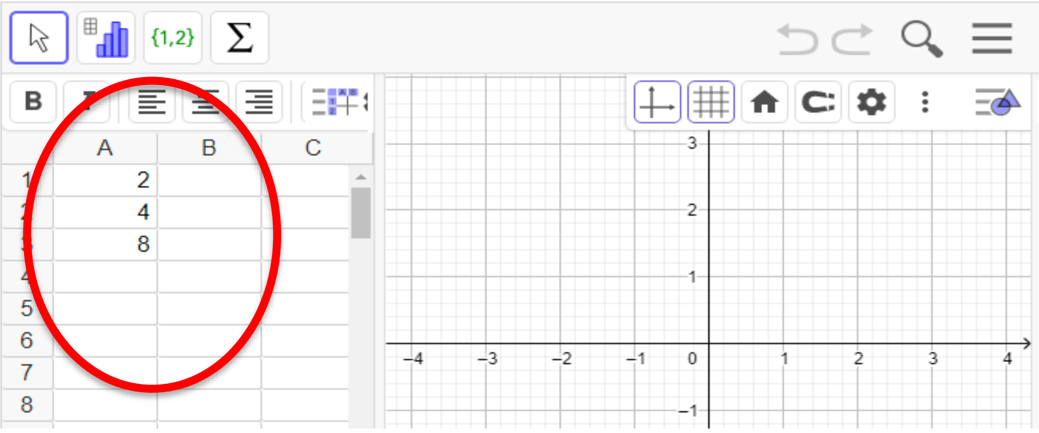
8° 128 -> 128 = 256

Fonte: O autor (2021).

Todavia, durante a apresentação da resolução da tarefa, Ygor não a comunicou como uma tabela. Ele apresentou seu raciocínio explicando: "*Ali tem que a pessoa passa de uma pessoa para outra pessoa, na primeira semana tem um total de duas pessoas, e assim vai indo*" (Ygor, ao apresentar a resolução da tarefa 1). Portanto, embora Ygor tenha comunicado ao grupo que enviaria a tabela que ele construiu, a comunicação que ele utilizou, observando sua explicação, pode não ter características de uma tabela, pois ele não identificou os dados por colunas. Ao observar a forma como o aluno comunicou os dados do contágio e como ele relatou, podemos notar que ele utiliza elementos de uma máquina de transformação, em que a cada linha é gerado um novo valor, utilizando uma linguagem mais próxima do seu cotidiano (SANTOS; BARBOSA, 2017).

O grupo nomeou essa representação como tabela, associando as variáveis, quantidade de pessoas e tempo. Isto pode ter se dado devido a esses alunos terem tido aula sobre tabelas de frequência no conteúdo de estatística algumas semanas antes, e assim, buscaram realizar associações entre os conteúdos recém estudados, chamando as representações da Figura 3.1 de *tabel*a. O aluno Leandro, do grupo G1, iniciou a construção da tabela no applet, mas não a concluiu, como podemos observar na Figura 3.2.

Figura 3.2 - Representação tabular Leandro G1

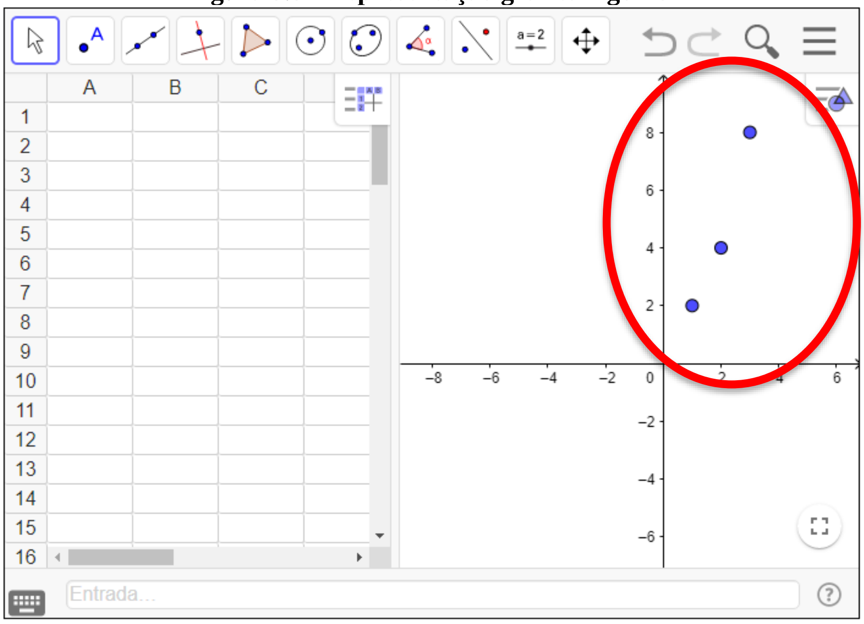


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Ao iniciar a construção da tabela, Leandro relatou apenas que colocou os dados do tempo, variável independente, não colocando os valores da quantidade das pessoas infectadas, variável dependente. Isto indica que, se os dados representados no seu caderno fossem os de uma tabela, ele apenas teria que inseri-los no GeoGebra.

Ygor relatou que *representou* a função graficamente no GeoGebra, marcando os pontos no plano cartesiano na *janela de visualização,* de acordo com a sua construção na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Representação gráfica Ygor G1



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Esta representação no GeoGebra, realizada pelo grupo, mostra que, apesar de não identificarem, na representação no papel, qual é a variável dependente (números pessoas infectadas) e a variável independente (tempo), ao marcar os pontos no plano cartesiano, eles obedecem a relação nos eixos "x" (variável independente) e "y" (variável dependente).

No item c (conforme a Figura 3.4), a tarefa solicitava dos alunos que construíssem uma relação matemática que descrevesse a quantidade de pessoas infectadas ao longo de cada semana. O grupo G1 conseguiu construir essa relação matemática de forma correta, como pode ser lido na resposta ao item C, na Figura 3.4.

Figura 3.4 - Comunicação algébrica G1

c) Como podemos estabelecer uma relação matemática que relacione o tempo decorrido "x" e a quantidade de pessoas infectadas "f(x)".

Com função exponencial, sempre aumentando (quanto mais dias, mais pessoas infectadas), como usado na questão b) f(x) = 2^x

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Durante a resolução da tarefa, Ygor questionou o professor se poderia utilizar a *fórmula* que eles tinham construído no item b (Figura 3.5) da tarefa, em que o grupo construiu uma expressão matemática que descrevia a situação, apenas não tinham utilizado a notação que havia sido solicitada.

Esta comunicação apareceu de forma indireta, com ambos os grupos tentando explicar como seria o contágio para justificar a quantidade de pessoas infectadas ao longo de trinta semanas no item b da tarefa. A Figura 3.5 mostra a descrição realizada pelo grupo G1, que respondeu à questão de forma correta. Os alunos descrevem que chegaram ao resultado elevando o número a trinta.

Figura 3.5 - Comunicação por generalização G1

b) Se a taxa de transmissão for mantida, como podemos determinar a quantidade de pessoas infectadas que teremos após 30 semanas?

Colocando a relação de semana com o total de infectados a cada semana no gráfico, observou-se uma regra com a potência de dois. (1º semana: 2^1 = 2; 2º semana: 2^2 = 4; 3º semana: 2^3 = 8, e assim por diante) Assim, na 30º semana ficará 2^30 = 1.073.741.824 infectados.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Identificamos, portanto, que os alunos do G1 conseguiram comunicar e representar corretamente de forma algébrica a função exponencial, pois calcularam a quantidade de pessoas infectadas utilizando a expressão criadas por eles. Todavia, o grupo não conseguiu realizar a representação gráfica e tabular no GeoGebra, o que pode ter ocorrido por falta de conhecimento do programa, além da falta de experiência do professor em monitorar tarefas de natureza exploratória, uma vez que não incentivou os alunos no seu uso durante a resolução. Discutimos o uso deste applet feito por esse grupo na resolução da tarefa 2.

3.1.2 Tarefa 2: O Coronavírus e o seu contágio

A segunda tarefa foi desenvolvida na semana seguinte à conclusão da primeira tarefa. Esta segunda tarefa foi chamada de *O coronavírus e o seu contágio*. Após a resolução e discussão da tarefa 01, o pesquisador/professor, na sistematização da tarefa, abordou com os alunos as diversas possibilidades de comunicar uma função, e as formas de representá-las no GeoGebra (gráfica, tabular e algébrica), discutindo as formas de comunicar a função que não eram possíveis de ser representadas no software (diagramas, máquina de transformação, generalização, definição).

A partir disso, com o desenvolvimento da tarefa 02, foi dada maior ênfase ao uso do GeoGebra e suas ferramentas. A tarefa 02 é composta por três itens, que podem ser observados na Figura 3.6 e no apêndice 2.

Figura 3.6 – Tarefa 02

a) Construa no GeoGebra diferentes representações que relacionem a quantidade de pessoas infectadas com o passar do tempo.

Digite sua resposta aqui...

b) Quais outras representações possíveis para expressar essa relação que não é possível fazer no GeoGebra?

Digite sua resposta aqui...

c) Que observações podemos estabelecer entre as representações da relação matemática obtida no item "a e b" e as relações obtidas na tarefa 01? Explique.

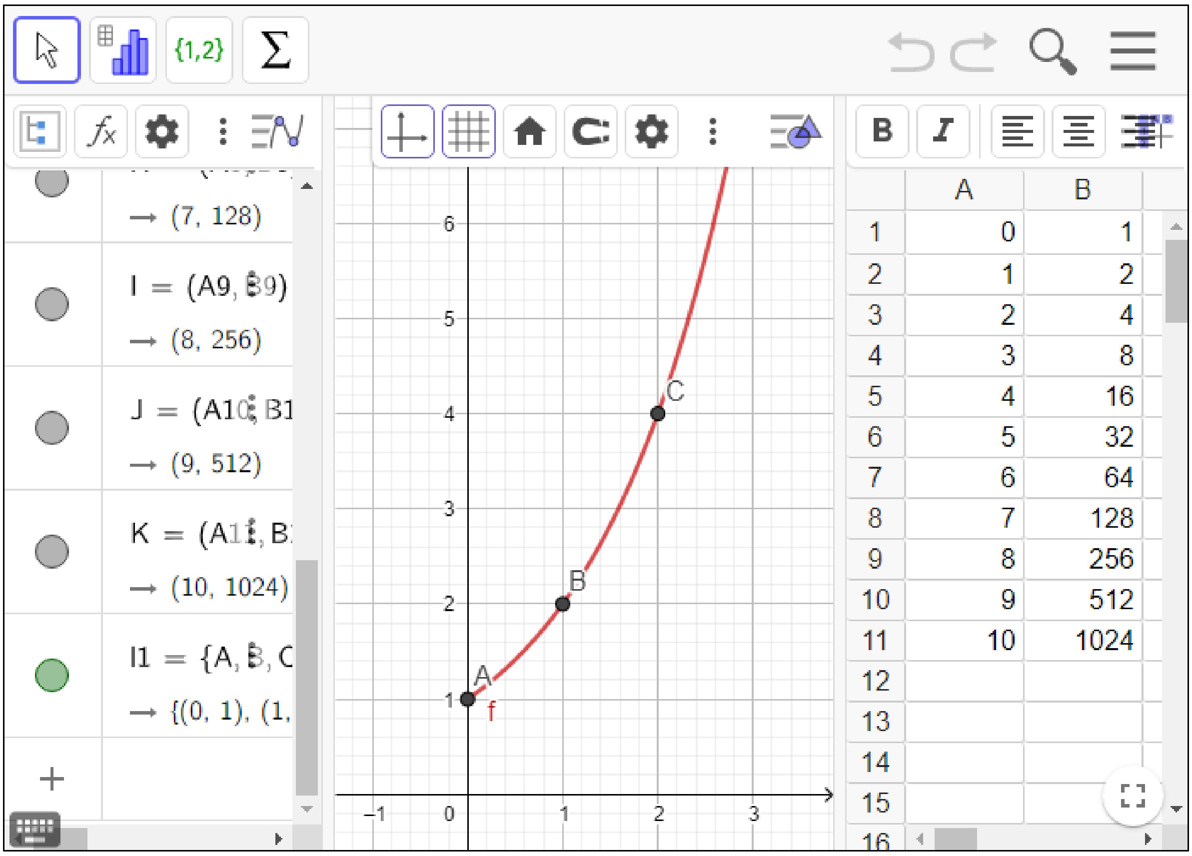
Digite sua resposta aqui...

Fonte: O autor (2021).

No primeiro encontro do desenvolvimento da tarefa 02, a aluna Giovana teve um imprevisto e não conseguiu participar, trabalhando nessa etapa apenas os alunos Leandro e Ygor.

Nessa tarefa, ao final, o grupo G1 conseguiu utilizar o GeoGebra para respondê-la, mas acabou associando incorretamente as variáveis dependentes e independentes, como vemos na Figura 3.7, na página seguinte. O grupo apenas esqueceu de identificar as colunas na tabela.

Figura 3.7 - Construção no GeoGebra do G1 referente a resolução da Tarefa 2



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

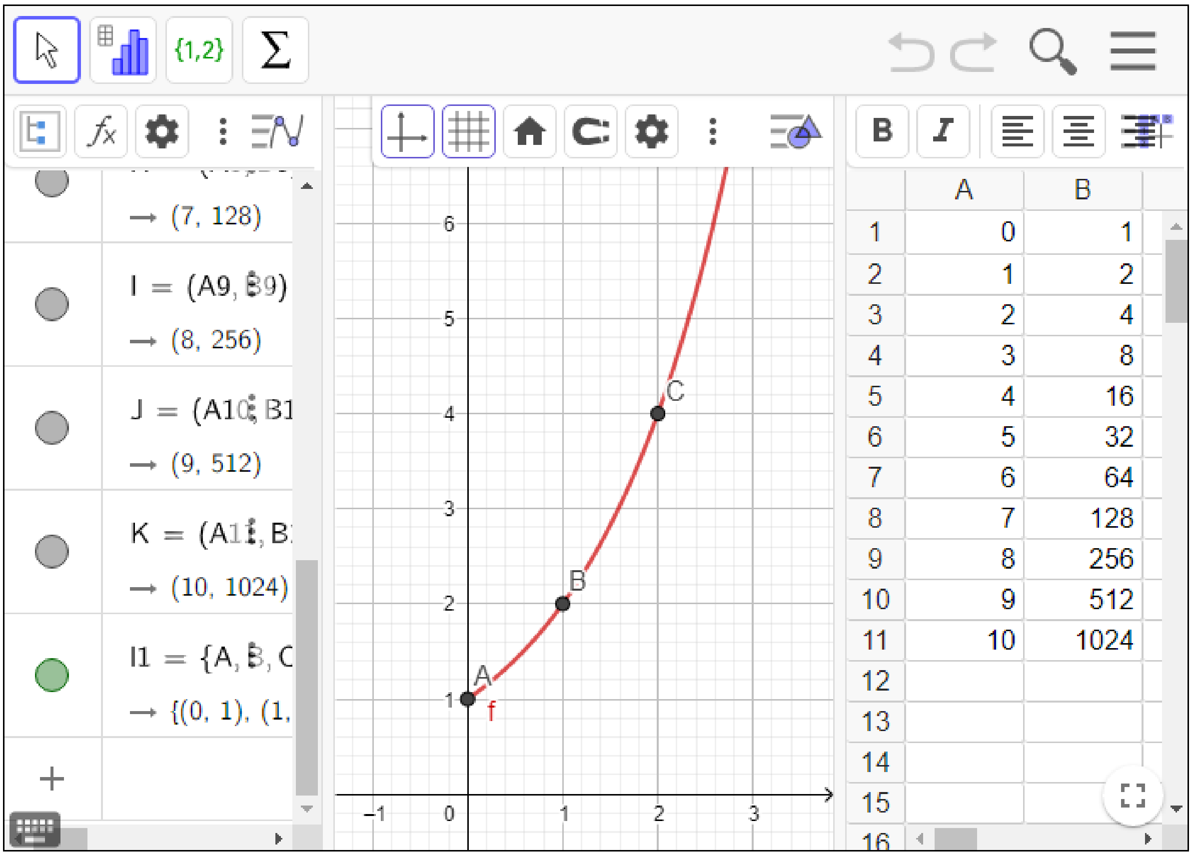
Apesar de terem construído a representação tabular dos dados, o grupo teve algumas dificuldades, entre elas, com relação a exibir os dados da *Planilha* na *Janela de Visualização*, pois não lembravam qual comando deveriam utilizar para exibir os valores na referida janela, precisando pedir ajudar para o professor/pesquisador.

A primeira planilha que o grupo G1 construiu estava equivocada, e Leandro observou que "*Os pontos estão diferentes da linha*". Com este apontamento, Leandro quis dizer que os valores construídos na tabela não são pertencentes ao gráfico da função, pois erraram um valor no início da sua construção: eles iniciaram a tabela considerando o tempo uma semana, e as pessoas infectadas também no mesmo período (1,1). O pesquisador/professor sugeriu que eles conferissem os valores da tabela em busca de algum possível erro. Depois, eles observam que a tabela estava escrita de forma errada e a corrigiram; dessa forma, os valores da tabela *ficaram sobre o gráfico*.

O grupo G1 fez primeiramente a comunicação algébrica da função via campo de *entrada* do GeoGebra. Sem muitas dificuldades, digitaram o argumento da função e, consequentemente, já obtiveram a comunicação gráfica da função na *Janela de Visualização*. O aluno Ygor comenta:

- Ygor: *Acho que dá para colocar a função lá* [Campo de Entrada] *que o professor mostrou na primeira aula.*
- Leandro: *Da linha?*
- Ygor: *Aham.*

Figura 3.8 - Representação tabular G1



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Quando Leandro se refere à linha, reporta-se ao gráfico gerado pelo GeoGebra, que é uma linha, confundindo com as representações gráficas de estatística em que há possibilidade de utilizar os gráficos de linhas que foram estudadas anteriormente. A comunicação do conceito de uma função f (cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais) como um gráfico consiste em apresentar, no plano cartesiano, o subconjunto de pontos (x, y), em que x pertence ao domínio da função f, e y é a imagem de x por f; ou seja, $y = f(x)$, sendo geralmente visualizada como uma linha no plano. Um ponto interessante de ressaltar é que o grupo G1, ao inserir a função, observou que o gráfico *tinha valores negativos*, como podemos observar no diálogo estabelecido entre eles:

- Ygor: *Vamos ter que descobrir como tirar esta parte aqui* [mostra os valores negativos do domínio da função].
- Leandro: *É.*
- Ygor: *Que daí não tem gente negativa* [comentando o fato de não haver uma quantidade negativa de pessoas infectadas].
- Leandro: *Tem que fazer para começar a partir do zero.*

O grupo tinha ciência de que não era possível que a função se apresentasse *com valores negativos*, e questionou o pesquisador/professor como faria para *tirar* esses valores negativos, isto é, restringindo o domínio. O pesquisador/professor mostrou qual comando restringia o domínio e, assim, conseguiram construir a função da forma como desejavam.

Todavia, não se atentaram ao fato de que o item *a* da tarefa pedia que eles analisassem de forma contrária as variáveis desta tarefa, em relação à tarefa 01, e considerassem que era uma função exponencial que modelava a situação. Esse fato foi discutido na sistematização da tarefa com o professor/pesquisador.

A comunicação algébrica da tarefa foi realizada pelos alunos, mas de forma equivocada, pois ao lerem a tarefa, não se atentaram a qual era a variável dependente e independente da situação. Desta forma, consideraram que a variável dependente era o número de casos, e a variável independente era o tempo. Portanto, mostraram uma relação invertida, do modo como a tarefa pediu. Assim, concluíram que se tratava de uma função exponencial, como na Figura 3.8.

O G1 comentou que era possível construir os diagramas durante o desenvolvimento da tarefa, e responderam no GeoGebra Classroom ao item *b*. Quanto às outras representações possíveis, escreveram ser possíveis por pictograma e porcentagem da população local (Figura 3.9), e enviaram o desenho que construíram (Figura 3.10, na página seguinte), que se refere à representação pictórica, podendo ser entendida também como uma árvore de possibilidades.

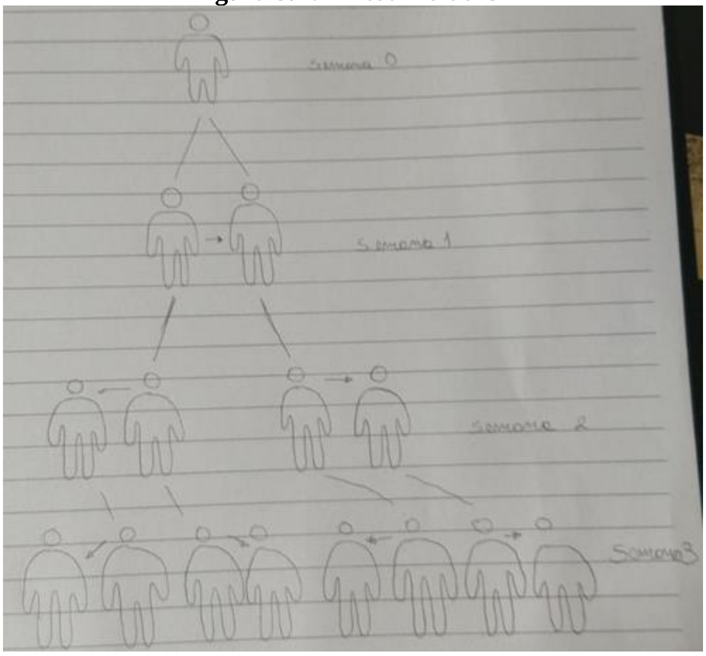
Figura 3.9 - Respostas ao item b do G1

b) Quais outras representações possíveis para expressar essa relação que não é possível fazer no GeoGebra?

Pictograma e porcentagem da população do local.

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Figura 3.10 - Desenho do G2



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Na apresentação da tarefa, o pesquisador questionou o grupo a razão de não terem enviado a imagem contendo os diagramas, uma vez que eles mencionaram durante a resolução da tarefa, e o grupo relatou que apenas citaram a possibilidade de construírem naquele momento da resolução, mas que esqueceram de fazer.

Observamos que o grupo 1 apresentou evolução no uso dos recursos do GeoGebra, ao considerarmos seu uso para as comunicações e representações das funções, pois na segunda tarefa, conseguiram representar a função utilizando representação algébrica, gráfica e tabular no GeoGebra. Além disso, observaram a restrição do domínio na função que eles construíram.

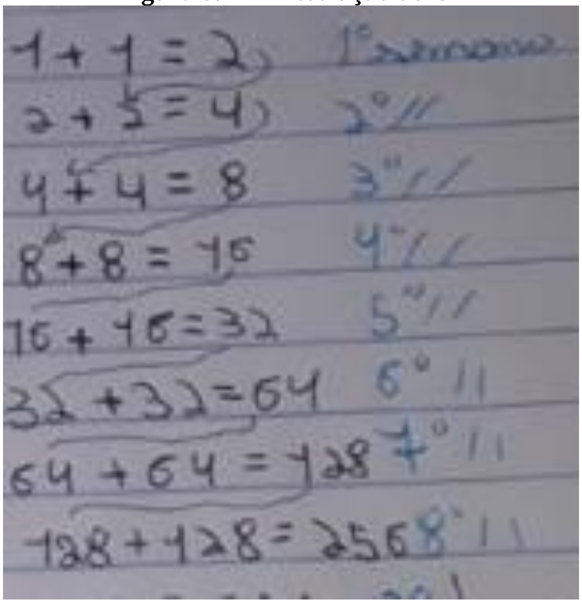
A seguir, prosseguimos com as análises das tarefas um e dois do segundo grupo.

3.2 GRUPO 2

3.2.1 Tarefa 1: O Coronavírus e a sua propagação

O G2, durante a realização da tarefa, utilizou alguns recursos a mais do GeoGebra, em relação ao G1, mas algumas representações que poderiam ser realizadas no applet foram realizadas com papel e caneta, como podemos observar na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Resolução do G2



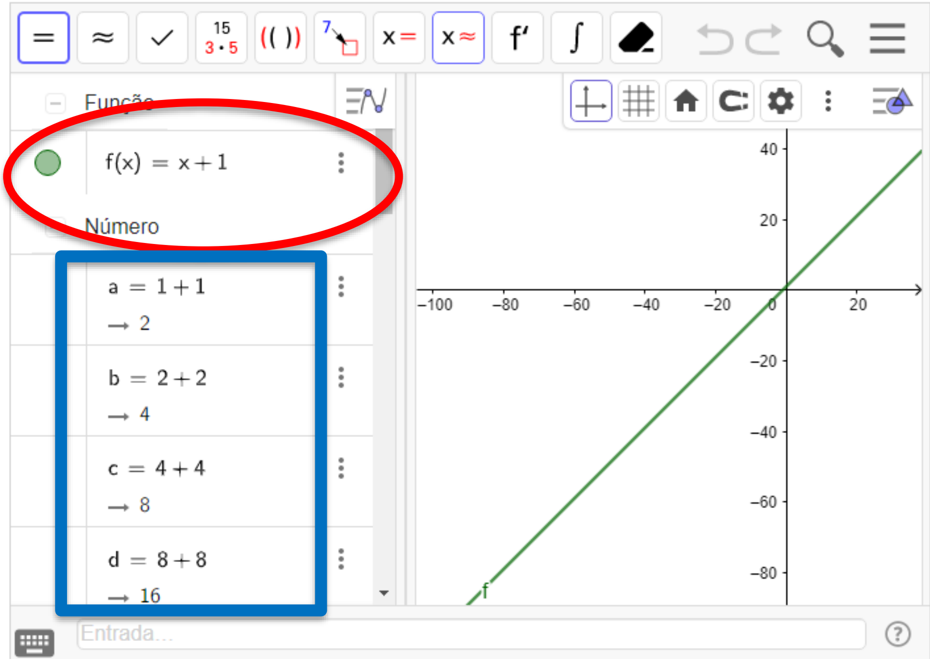
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

De modo semelhante ao aluno Ygor, do grupo G1, a aluna Janaina referiu-se à sua representação como uma tabela no momento da realização da tarefa, pois as informações nela contidas estão organizadas em linhas, com aparentes colunas, até com a identificação de uma coluna que ela chamou de *semanas*. Entretanto, ao questionar o grupo sobre como foi construída a representação, a aluna Rebeca respondeu, pois Janaina perdeu a conexão com a internet por alguns instantes: *A gente começou fazendo as contas com uns desenhinhos, aí, depois que a gente foi escrever a conta por extenso.*

No que se refere à representação tabular da função, identificamos que os alunos compreendem a relação funcional por meio da tabela, mas não conseguiram fazer uso tabela que está disponível no GeoGebra, possivelmente por falta de conhecimento sobre o significado de uma tabela, também pela falta de conhecimento do recurso planilhas do software.

A aluna Janaina, do grupo G2, tentou representar a função que descrevia o contágio no campo de *entrada* do GeoGebra, mas utilizou uma função afim para descrever a situação. Durante a sistematização da tarefa, ela explicou que, ao ler a tarefa, havia entendido que uma pessoa iria infectar outra a cada semana, e como era uma pessoa infectada por semana, seriam oito pessoas ao todo. Porém, durante a resolução da tarefa, discutindo com os colegas do outro grupo sobre como poderiam ter respondido a questão, compreenderam que cada pessoa infectada continua transmitindo a outras pessoas. Um ponto interessante levantado por Rebeca durante a apresentação da tarefa é que, segundo ela, *A gente só contou como se a pessoa que infectasse também* [foi infectada], *ela infectava uma pessoa por semana também, mas na verdade pode ser mais também* [mais de uma pessoa infectada ao longo da semana]. O pensamento inicial que o grupo teve sobre a quantidade das pessoas infectadas por semana poderia justificar o motivo da escolha da função afim para a sua resposta, conforme assinalamos na Figura 3.12.

Figura 3.12 - Comunicação gráfica Janaina G2

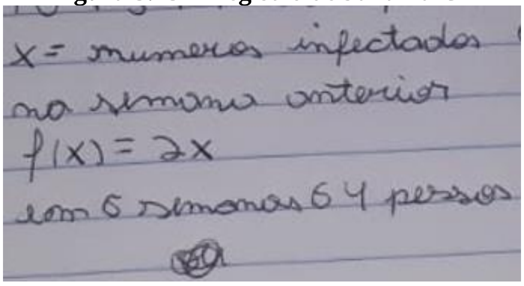


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Além disso, podemos ver, na *Janela de Álgebra* na Figura 3.12 (marcação em azul), que a aluna utilizou o campo de entrada para fazer os cálculos de cada uma das linhas da tabela. Tal recurso foi utilizado apenas por esse grupo.

Observamos, assim, que as formas de expressar graficamente a função no GeoGebra foram diferentes. Enquanto o G1 plotou os pontos diretamente na *Janela de Visualização*, o G2 utilizou o campo *entrada* e, assim, a representação gráfica foi uma consequência da representação algébrica no software. O G2 não registrou reposta para o item *c* no *Classroom* do GeoGebra. Apenas a aluna Janaina (na figura 3.12), ao fazer uso do campo de *entrada* do software, inseriu uma função afim para responder. Ela apresentou, em suas anotações, uma tentativa de escrever outra relação algébrica diferente da digitada, também equivocada na representação da relação, pois em vez de escrever a relação como $f(x) = 2^x$, ela escreveu "$f(x) = 2x$ (Figura 3.13). Embora a representação esteja errada, o fato de ela dizer que em seis semanas 64 pessoas foram infectadas, mostra que ela compreendeu que a relação é exponencial.

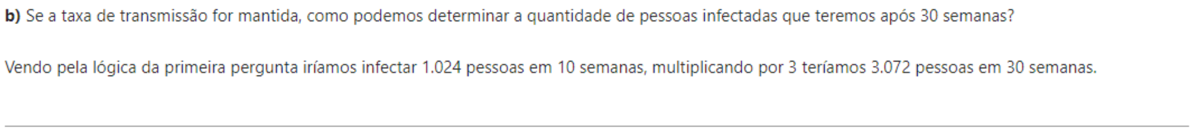
Figura 3.13 – Registro de Janaina G2



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Portanto, o G2 apresentou duas respostas para este item: a de Janaína e aquela registrada no Classroom por Rebeca, em que há um equívoco, pois ela inicia a relação de forma correta até a décima semana, mas quando chega na décima semana, ela acaba multiplicando a quantidade de pessoas contaminadas na décima semana por três.

Figura 3.14 – Resposta ao item b) no Classroom de Rebeca - G2



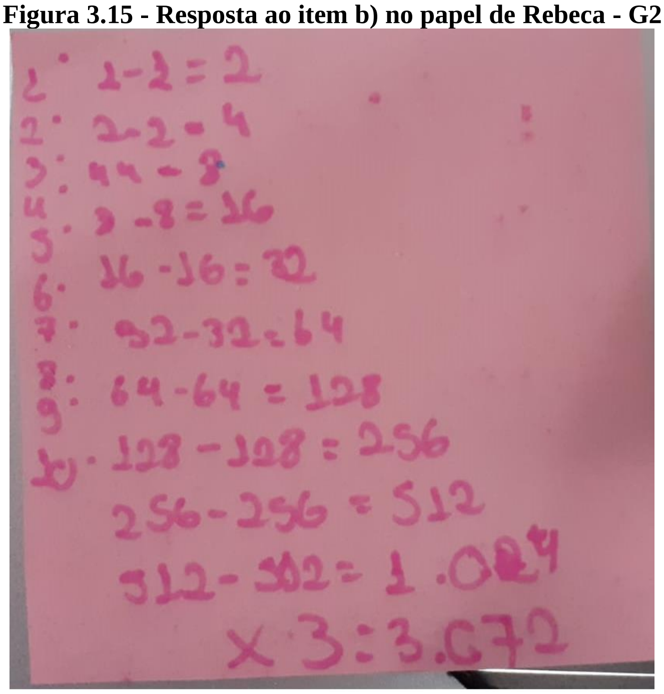
b) Se a taxa de transmissão for mantida, como podemos determinar a quantidade de pessoas infectadas que teremos após 30 semanas?

Vendo pela lógica da primeira pergunta iríamos infectar 1.024 pessoas em 10 semanas, multiplicando por 3 teríamos 3.072 pessoas em 30 semanas.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Podemos confirmar o raciocínio empregado pela aluna em suas anotações no papel (Figura 3.15).

Figura 3.15 - Resposta ao item b) no papel de Rebeca - G2

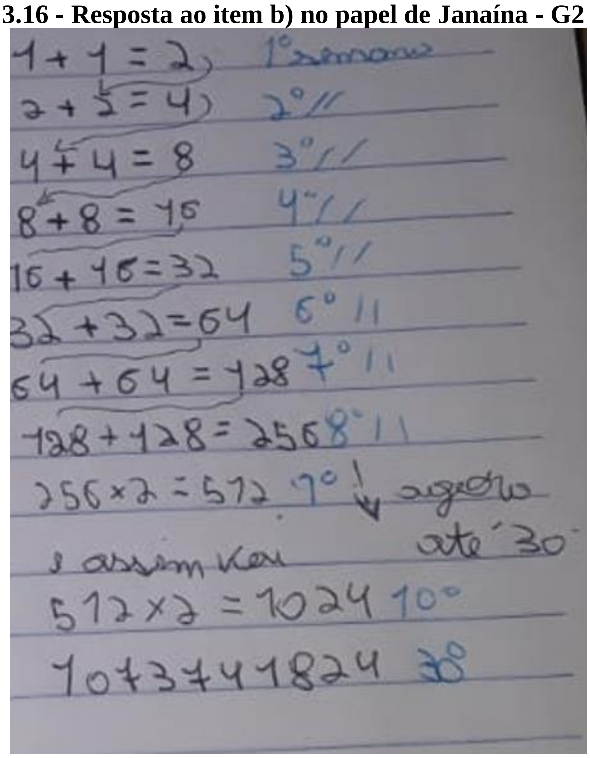


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O pesquisador/professor questionou os demais alunos sobre o raciocínio da estudante Rebeca, se era válido ou não. Leandro comentou que não, porque: *Eu, na minha ideia, acho* *que multiplicar por três depois da décima semana não está certo, porque é, daí, um valor fixo por semana e não aumenta mais*. O pesquisador/professor questionou, então, Rebeca, quanto a como ela tinha chegado à conclusão daquele valor, e a aluna explicou que: *Eu e a Janaína demos resultados diferentes, mas eu continuei a lógica do começo de oito semanas e fui até dez. Aí, como era trinta semanas, eu só multipliquei por três*.

A aluna Janaína comentou, durante a apresentação, que pensou de outra forma, e enviou a imagem da sua resposta (Figura 3.16).

Figura 3.16 - Resposta ao item b) no papel de Janaína - G2



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

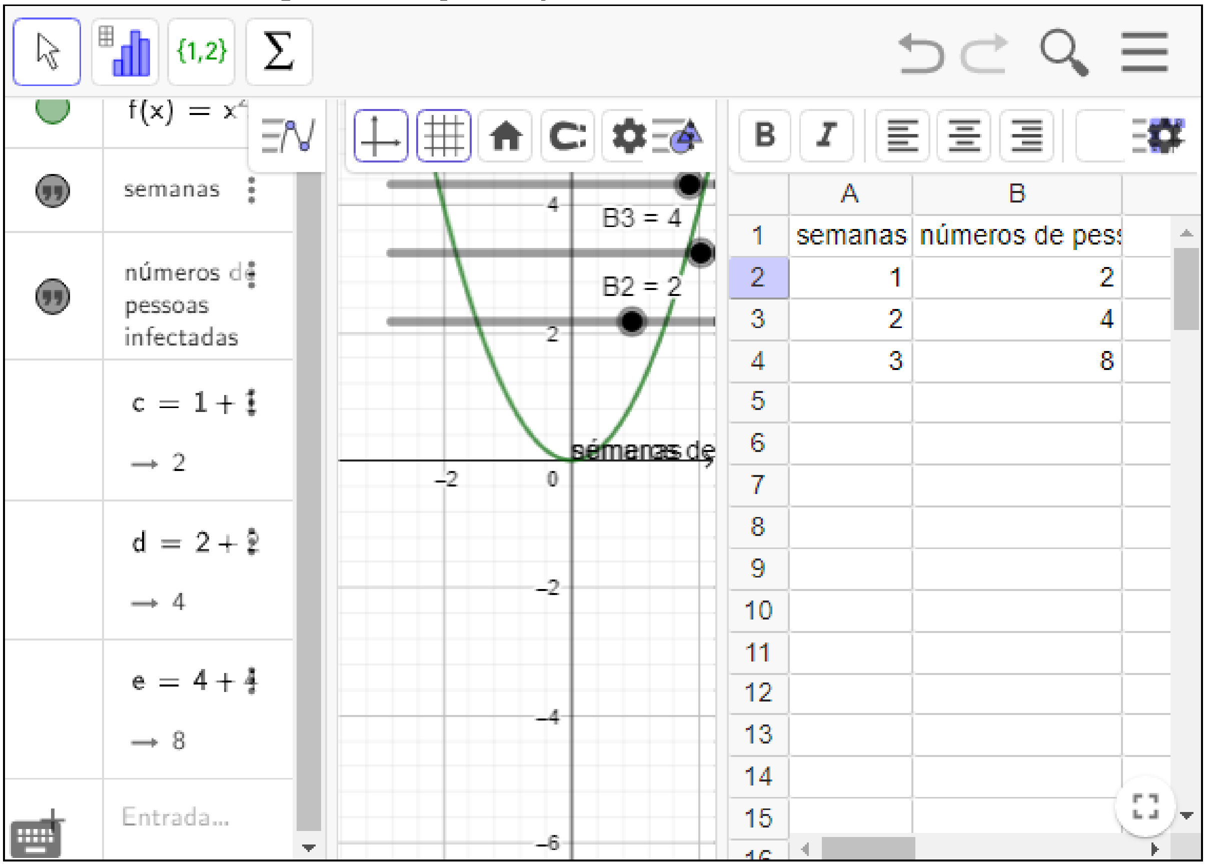
Janaína, quando questionada sobre o que havia pensado diferente de Rebeca, informa que: *Quando eu cheguei em* [no décimo valor] *continuei fazendo a mesma lógica, em vez de multiplicar por três*.

Identificamos, no diálogo dos alunos, que algumas vezes eles utilizam a palavra *lógica* para descrever o comportamento da função. Portanto, eles expressam “em linguagem corrente ou usando símbolos algébricos uma afirmação geral que explicita a dependência entre variáveis de uma relação funcional, tomando como base alguns dados dessa relação” (SANTOS; BARBOSA, 2017, p. 3).

3.2.2 Tarefa 2 - O Coronavírus e o seu contágio

O grupo G2 iniciou a construção da tabela no GeoGebra com a aluna Juliana questionando: *Como faz para aparecer as bolinhas?* Ela estava se referindo a exibir os valores da tabela na *Janela de Visualização*, como pode ser observado na Figura 3.17

Figura 3.17 - Representações no GeoGebra do G2 da tarefa 2

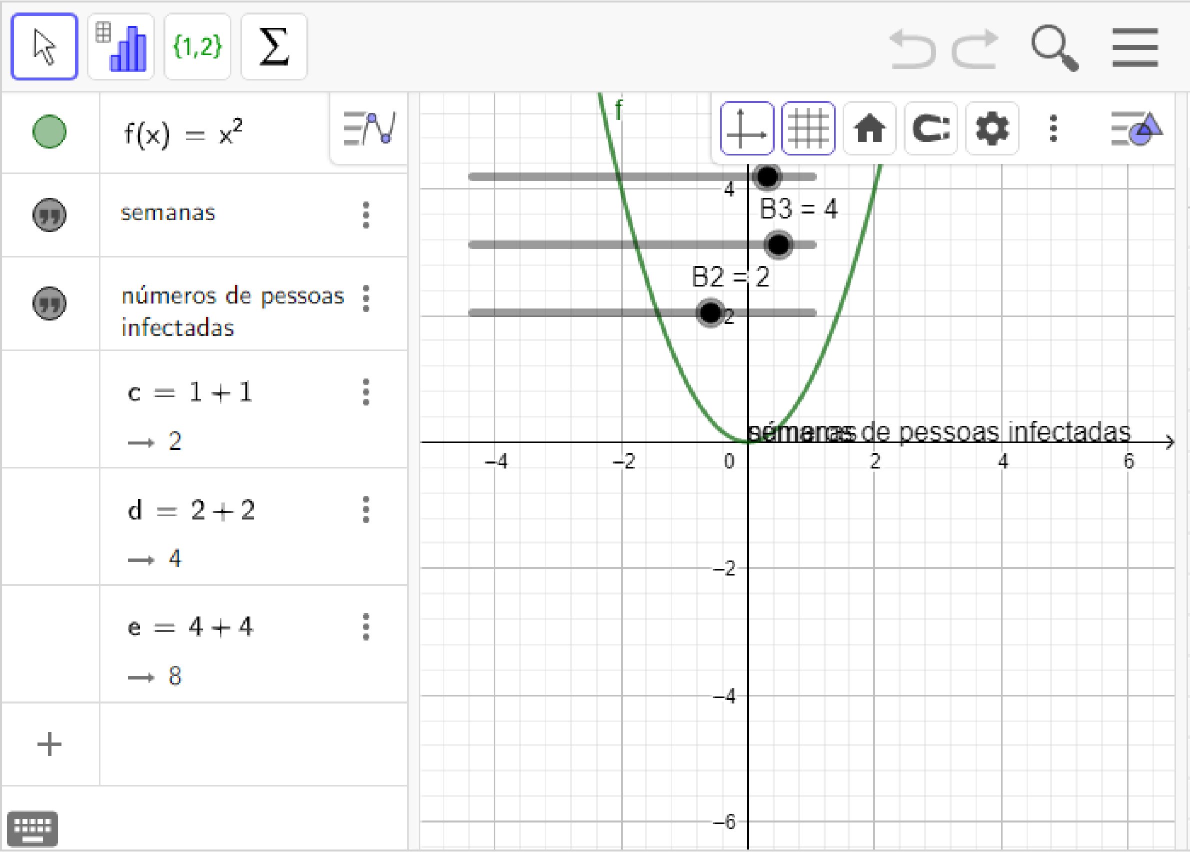


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Podemos observar, na Figura 3.17, que o grupo indicou o que cada coluna representa, e assim como o G1, inverteram a variável dependente (tempo) com a variável independente (pessoas infectadas). Utilizaram a *Janela de Entrada* para calcular o número de pessoas infectadas, fazendo o cálculo das somas, utilizando o mesmo raciocínio que havia sido feito na tarefa anterior.

O G2, para obter a representação gráfica da função nessa tarefa, assim como na tarefa 1, utilizou novamente o *campo entrada* no GeoGebra. Assim como o G1, concluíram a relação matemática equivocada, e nesse caso, uma relação matemática que nem expressava a quantidade de pessoas infectadas, pois assumiram que a relação matemática era uma função quadrática, como vemos na figura 3.18, na página seguinte.

Figura 3.18 - Comunicação gráfica G2

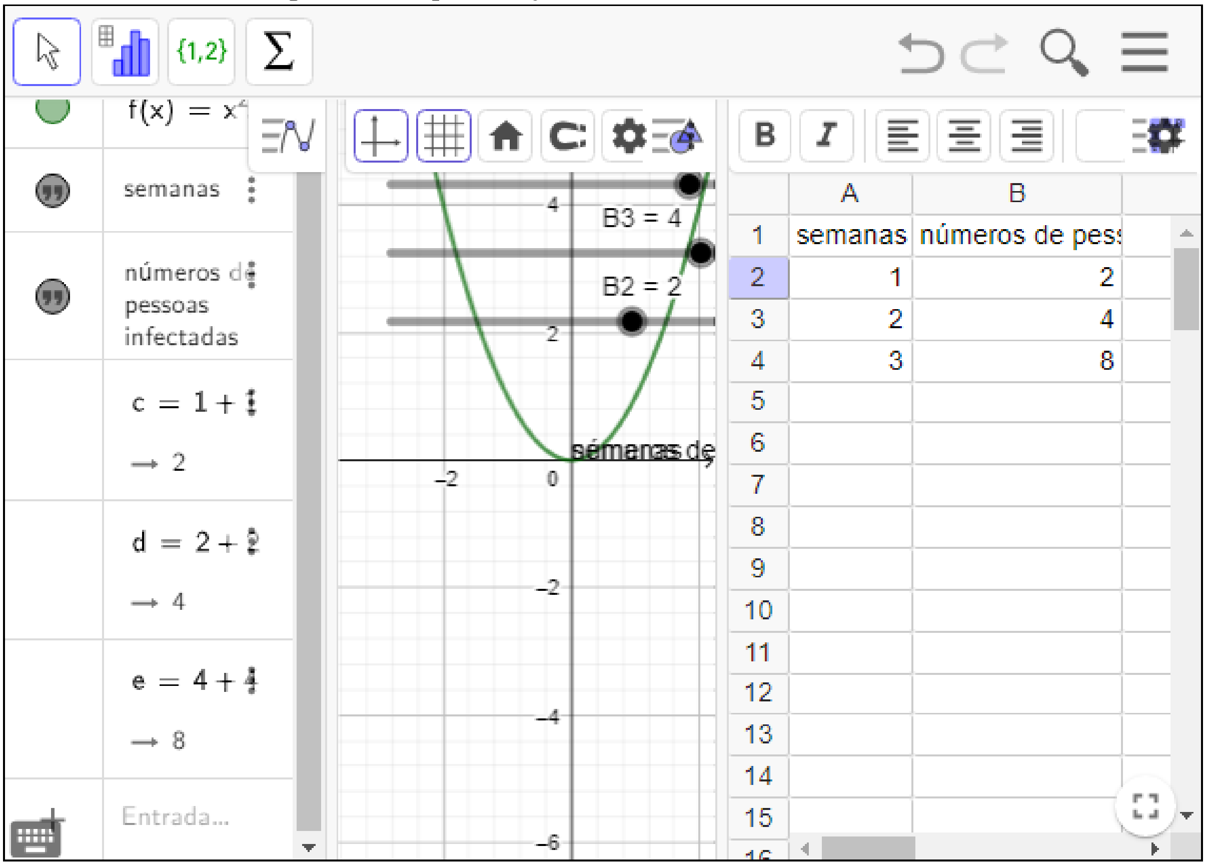


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Rebeca lê a questão e comenta: *Ali está falando diferentes comunicações, será que não de mais de um jeito?* Quando Janaina, ouvindo a indagação responde: *Eu vou fazer, deixar no gráfico e uma planilha ali do lado.*

Veremos adiante que o grupo fez a inserção das informações na planilha das três primeiras linhas, agora já sabendo, dada a sistematização da Tarefa 1, da sua possibilidade de utilização. Um ponto interessante que o grupo inicia por um, e não por zero, a contagem.

Figura 3.19 Representações no GeoGebra do G2 da tarefa 2

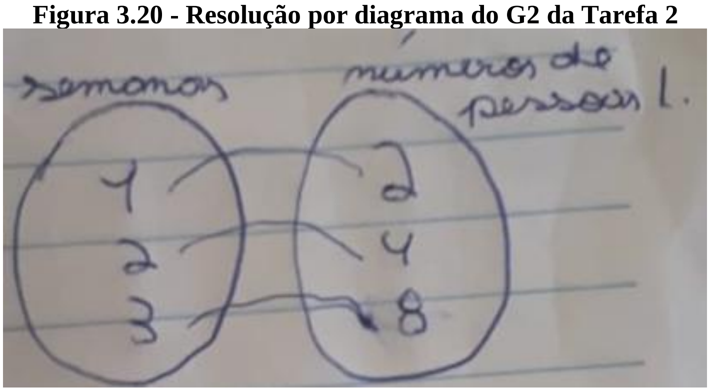


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Observamos, na Figura 3.19, que eles inseriram três controles deslizantes, mas sem utilidade. Quem os inseriu foi Janaína que, quando questionada sobre a razão de inserir aqueles controles, respondeu que os inseriu sem querer e esqueceu retirá-los.

Os dois grupos (G1 e G2) citam, algumas vezes, a possibilidade de comunicar a função por meio de diagramas, mas apenas G2 apresentou diagramas na resolução, como podemos ver na Figura 3.20, que foi enviada ao pesquisador/professor.

Figura 3.20 - Resolução por diagrama do G2 da Tarefa 2



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Verificamos que, no diagrama, eles também invertem as variáveis dependentes e independentes. G2, além de enviar a imagem (Figura 3.20), também expressou em sua resposta ao item *b*, sobre quais representações poderiam ser utilizadas, a possibilidade do diagrama e tabela.

Figura 3.21 - Resposta do G2 ao item b

b) Quais outras representações possíveis para expressar essa relação que não é possível fazer no GeoGebra?

Podemos, também, representar em um diagrama ou por uma tabela.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Antes de os grupos iniciarem a apresentação da tarefa, o professor/pesquisador questionou os alunos (Giovana, Janaina, Rebeca e Ygor, os demais não estavam presentes porque tinham outra atividade da instituição) sobre suas opiniões sobre a segunda tarefa. Rebeca iniciou, comentando: *Eu acho que foi mais fácil que a primeira, prof.* Neste ponto, o professor/pesquisador questiona a aluna sobre o que, na visão dela, havia sido mais fácil que a primeira tarefa.

- Rebeca: *Eu acho que foi mais fácil de entender as perguntas, e também o gráfico, foi mais fácil de fazer, depois que a gente já tinha tentado da primeira vez.*

- Ygor: *Estava mais fácil porque não tinha cálculos* [comenta no chat].

- Julia: *Estava mais fácil, ficou mais organizado* [também no chat].

Iniciando as apresentações do seu grupo, Ygor explicou sobre a tabela construída, que se referia a *Uma tabela com a semana na primeira coluna, e na segunda, o total de infectados.*

O professor/pesquisador questionou se ele havia considerado mais fácil construir a tabela no GeoGebra, uma vez que eles não a construíram na primeira tarefa, e ele respondeu afirmativamente. Como Ygor não explica o que cada coluna significa na tabela, o professor/pesquisador questionou os demais alunos sobre qual informação seria importante constar na tabela (Figura 3.8), e Rebeca responde: *acho que só colocar o título, tipo do que era cada coisa ali, em vez do A e do B.*

O grupo que essa aluna integrou (G2) identificou cada uma das colunas da tabela que construiu (Figura 3.19). Janaína completou explicando: *Eu coloquei no gráfico as semanas e o número de pessoas infectadas a cada semana.*

Quando G1 apresentou o gráfico construído, o professor/pesquisador pediu que Ygor explicasse como o construíram, e o aluno explicou: *Coloca a função no GeoGebra* [referindo-se a inserir o argumento da função no campo *Entrada* do software].

Nesse momento, o professor pediu para ele explique aos demais colegas como o gráfico *apareceu* no GeoGebra, e o aluno explica: *Apareceu indo infinito, indo infinito negativo até o infinito positivo* [referindo-se ao domínio da função].

O professor/pesquisador pediu para que o aluno relatasse aos colegas sobre uma dúvida que tiveram durante a resolução, quando foi chamado porque consideravam que havia algo *que estava estranh*o [palavras do grupo na resolução da tarefa] no gráfico construído. O aluno explicou que observaram *que não ia ter semanas negativa para colocar, daí tem que ficar a partir do zero.*

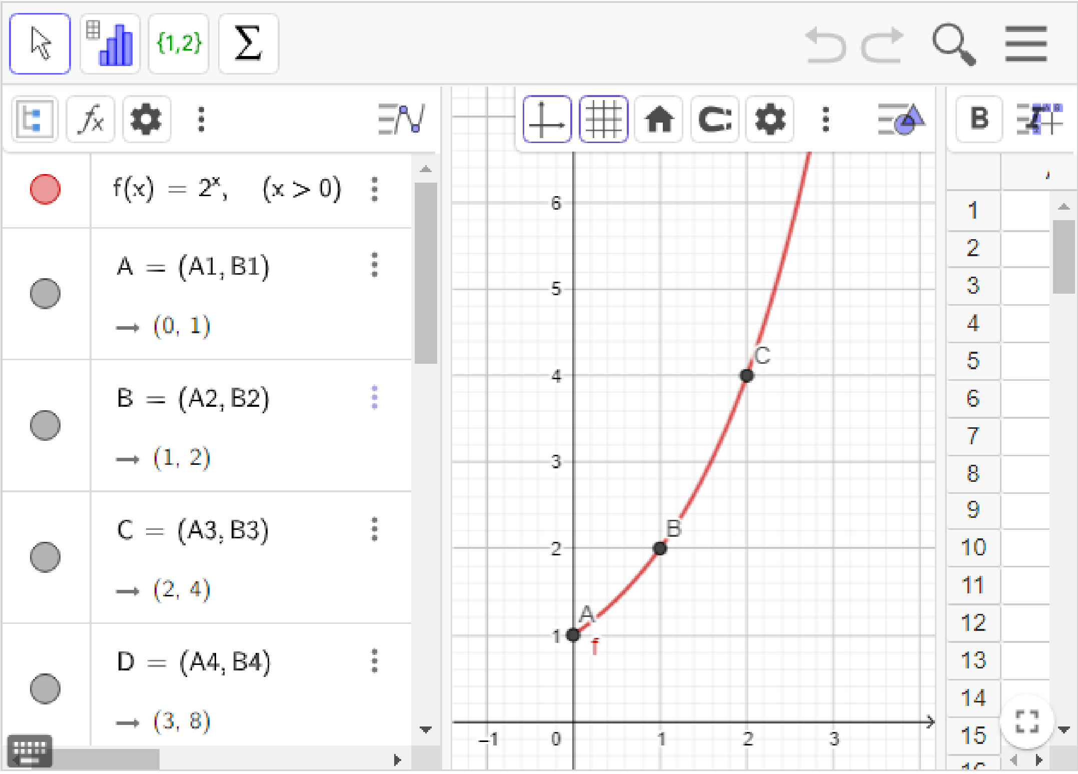
Então, o professor comentou sobre o comando no GeoGebra para restringir o domínio de uma função. Logo após esta explicação, questionou qual é o tipo de representação que Ygor estava mostrando, quando a aluna Janaina respondeu: *Gráficos* [referindo-se à representação gráfica].

Questionado o G2 sobre como eles construíram a representação gráfica (Figura 3.18), Janaina respondeu: *Eu coloquei a função lá* [referindo-se ao campo *Entrada*], *e quando eu fui colocar as bolinhas, elas não paravam de se mexer, aí não deu muito certo*.

Como a representação gráfica exibida pelo grupo G2 não era correspondente à tarefa, o professor/pesquisador perguntou aos grupos sobre qual função aquele gráfico representava, e Janaina respondeu: *afim, sei lá.* Rebeca disse não lembrar, e Ygor afirmou que era uma parábola.

Ao apresentar a relação matemática construída pelo G1, o professor/pesquisador questionou os alunos do G2, buscando saber qual é o argumento de uma função na *Janela de Álgebra* da resolução do G1 (Figura 3.22, na página seguinte).

Figura 3.22 - Representações G1



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

E Janaina respondeu: *A bolinha vermelha.*

Então, o professor/pesquisador questionou sobre o porquê ela achar isso, e a aluna respondeu: *Porque tem f x igual a dois elevados a x.*

Como os alunos não conseguiram uma representação da função logarítmica, na sistematização de aprendizagem o professor/pesquisador trouxe, inicialmente, esses questionamentos sobre as diferenças entre uma e outra tarefas, principalmente em relação às variáveis. Foi construída, inicialmente, a representação tabular da função no software, perguntado aos alunos quais seriam as informações que deveriam constar no título, em cada coluna, com base nos dados da letra *a* da tarefa, definindo com os alunos a variável que seria dependente e a que seria independente. Após a construção dos valores da tabela, os valores foram exibidos na *Janela de Visualização* do GeoGebra. Desta forma, os alunos puderam concluir que a representação não era a mesma que a tarefa anterior. Os alunos comentaram que os pontos no gráfico estavam invertidos em relação aos pontos obtidos na primeira tarefa.

A partir disso, o professor/pesquisador definiu a função logarítmica como uma função que é inversa da função exponencial. Assim, relembrou os alunos sobre o que é uma função inversa, uma vez que eles estudaram no primeiro ano. Para uma compreensão inicial, a tarefa dois pode ser útil, mas o conceito de função logarítmica precisa ser trabalhado com mais tempo.

4.CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo *investigar as formas que os alunos comunicam os conceitos-base de funções exponenciais e logarítmicas em tarefas de natureza exploratória com o GeoGebra*. Para atingi-lo, foram analisadas as resoluções dos alunos com o GeoGebra Classroom, imagens enviadas e a gravação dos encontros.

A não utilização do GeoGebra nas resoluções apresentadas pelos alunos para a primeira tarefa revela seu desconhecimento do programa, principalmente por parte do grupo G1, pois acabou utilizando poucos recursos do software, sendo utilizado apenas a representação gráfica por um de seus integrantes. O grupo indicou que a construção feita por eles com papel e lápis era uma tabela, mas não utilizaram a *janela planilha* para reproduzir a tabela do papel no GeoGebra. Durante a apresentação da tarefa, com alguns questionamentos do professor/pesquisador, eles concordaram que não se travada de uma tabela, uma vez que não havia colunas específicas para cada uma das variáveis, nem a descrição do que significavam essas colunas. Outro ponto de reflexão, ao analisar a tarefa desenvolvida com os alunos, foi que, por não ter experiência com o EEM, o professor/pesquisador não acompanhou diretamente os alunos durante todo o momento em que eles estavam resolvendo a tarefa. Por vezes, ausentou-se da videoconferência, aguardando que os alunos o chamassem para tirar eventuais dúvidas. Quando estava encerrando o tempo que havia sido destinado ao desenvolvimento da tarefa (cerca de cinquenta minutos), entrou na videoconferência e permaneceu com os alunos, mas não os incentivou a utilizar o GeoGebra para resolver a tarefa, ou para verificarem os resultados. Desta forma, faltou a realização de questionamentos aos alunos sobre o uso do software.

O grupo G2 fez uso do software para representar as funções, utilizando a *Janela de Visualização*, com a inserção de uma função via *campo de entrada*. Isto gera automaticamente duas representações para a função, a representação algébrica e a representação gráfica da função. A função inserida não era a relação que descrevia a situação de forma correta, mas mostrou que os alunos tinham conhecimento dessa opção de representação (gráfica) de uma função no software. Os alunos que compõem esse grupo fazem parte de um projeto de estudos sobre o GeoGebra, e em encontros anteriores, havia sido trabalhado o *Campo de Entrada* como meio de representação gráfica de uma função, dada sua representação algébrica. O grupo comunicou a representação da função que fizeram no papel como uma tabela, mas não utilizaram a *janela planilha,* também por desconhecerem essa opção. Na representação feita no papel, assim como o G1, não identificou as colunas da tabela.

De forma geral, os alunos tiveram, incialmente, dificuldades em trabalhar em grupo na resolução da tarefa, o que pode se dever ao fato de que a turma desses alunos teve apenas um mês de aula na forma presencial, passando, depois, para o ensino remoto na instituição. Nesta forma de ensino (remoto), os trabalhos em grupos e discussões ficam prejudicadas, dado que a interação entre os alunos é dificultada, o que pode também ter prejudicado o desenvolvimento do trabalho, pois o EEM trabalha na perspectiva da interação com e entre os alunos. Outro ponto que inicialmente gerou dificuldade na comunicação e compartilhamento de ideias foi o fato de ser a primeira vez que os alunos tiveram uma aula em que a construção do conhecimento não estava centrada no professor de matemática, uma vez que, no EEM, o aluno tem papel de protagonista na construção dos conceitos que está estudando.

Em relação aos conceitos-base de função exponencial, identificamos que os alunos conseguiram compreender a *regularidade, dependência e correspondência*. Ao explicarem a representação feita por eles no papel, denominada *tabela*, explicitaram e mantiveram a regularidade dos valores. A noção de dependência apareceu na quantidade de pessoas infectadas, que foi corretamente construída a partir do tempo decorrido, expresso no diálogo do aluno Leandro ao comentar a resolução de sua colega Rebeca, quando ela acaba não seguindo seu raciocínio na apresentação da sua tarefa, ao multiplicar por três o valor de mil e vinte e quatro. O G1 demonstrou a compreensão do conceito-base de *generalização*, ao construir a relação matemática correta da tarefa. O G2 não conseguiu compreender observando a relação matemática que eles propuseram. Não conseguimos identificar se o conceito de *variáveis* foi completamente compreendido, uma vez que, nos registros, não ficou evidente nem descrito o que eles assumiram como variáveis dependentes e independentes.

Com relação à segunda tarefa, houve mudanças na proposição e forma de sua condução. Foi realizado o acompanhamento de todo o desenvolvimento da tarefa, estando o professor/pesquisador presente durante toda a videoconferência, fazendo questionamentos, instigando-os a rever os procedimentos adotados nas resoluções e a utilizar o GeoGebra para a resolução das questões.

No desenvolvimento da segunda tarefa, os dois grupos tiveram mais facilidade na utilização do GeoGebra e dos seus recursos para representar as funções, comparado ao desenvolvimento da primeira tarefa. Ambos os grupos apresentaram resoluções envolvendo o software, embora, em certos momentos, com algumas dificuldades de manipulação dos objetos, pois no aplet do GeoGebra Classroom, a tela fica em tamanho menor do que no programa em si, o que, de certa forma, dificulta um pouco a manipulação.

Além disso, os alunos conseguiram trabalhar de forma produtiva sob a perspectiva do EEM, fazendo questionamentos tanto entre si, isto é, no próprio grupo, quanto interagindo com o professor, não buscando somente a validação de suas ideias.

Entretanto, os alunos não conseguiram se desprender dos conceitos da função exponencial trabalhados na tarefa um, e não interpretaram como esperado a questão que invertia a relação entre o tempo e o número de pessoas infectadas. Mesmo com questionamentos do pesquisador, os dois grupos trataram como uma função exponencial, e não logarítmica. Isso pode ter ocorrido porque eles se basearam no encontro anterior, em que foram discutidos os conceitos da função exponencial com suas propriedades, formas de comunicação e representação. Além disso, pode ser um passo muito largo partir da função exponencial em uma aula e trabalhar, em seguida, a função logarítmica, haja vista todos os conceitos-base necessários, além das ideias-base para o ensino de cada uma dessas funções.

Esta questão foi discutida no segundo encontro da segunda tarefa, quando o professor/pesquisador conduziu a apresentação da tarefa, fazendo questionamentos sobre a questão da forma como eles resolveram tarefa e o que ela propunha. O professor/pesquisador colocou aos alunos que havia uma diferença na forma como eram interpretadas. Na primeira tarefa, o tempo decorrido era a variável independente, e o número de casos era a variável dependente. Na tarefa dois havia uma inversão em relação às variáveis; nesta tarefa, o tempo passava a ser considerado uma variável dependente do número de casos, que viria a ser a variável independente.

Analisando a *inversão* das variáveis na resolução da tarefa dois, concluímos que os alunos conseguiram construir o conceito de base sobre *variável*, pois mesmo que de forma *invertida*, compreenderam que uma variável dependia da outra. Eles também demostraram a compreensão dos conceitos de *generalização, regularidade*, pois conseguiram apresentar construções de tabelas, e na sistematização.

Para embasar este trabalho de pesquisa, consideramos as possíveis formas de comunicação de uma função de maneira geral, seja exponencial, logarítmica, do primeiro ou segundo grau. Dentre as possíveis comunicações, citamos: *tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrica, generalização, gráfica e definição*. Essas formas de comunicação contribuem para a melhor compreensão de alguns conceitos-base das funções, como *variável, regularidade*, *generalização* e *correspondência*, os quais não devemos confundir com as representações de uma função, que são as representações *gráfica, numérica, algébrica, geométrica e linguagem natural*.

Durante o desenvolvimento da primeira tarefa, os alunos a resolveram privilegiando lápis e papel. Isso se justifica porque são os recursos que estão habituados para estudar a Matemática, ficando, desta forma, a necessidade de fazer mais uso de softwares como o GeoGebra. Após o desenvolvimento da primeira tarefa e com a explicação das possíveis comunicações de uma função, bem como as possíveis representações no GeoGebra, observamos que os alunos utilizaram o GeoGebra para representar as funções. Embora o G2 não tenha conseguido definir a relação matemática correta, eles compreenderam como utilizar o GeoGebra para construir a representação gráfica no software.

Identificamos que o G1 também compreendeu como fazer a representação gráfica no GeoGebra, pois na primeira tarefa eles construíram o gráfico da função inserindo manualmente os pontos na *Janela de Visualização*, e na segunda tarefa, o grupo conseguiu fazer a construção da representação via campo *de Entrada* do programa.

As tarefas de natureza exploratória proporcionaram aos alunos meios e formas de construir, juntamente com o GeoGebra e lápis e papel, comunicações que, muitas vezes, exercícios fechados não permitem. Por ter essa característica aberta, foi possível observar comunicações, como diagramas, máquinas de transformação e generalização utilizando o lápis e papel; e com o GeoGebra, as representações tabular, gráfica e algébrica. Ainda, no caso do G2, utilizando a *Janela de Álgebra*, desenvolveu generalização nesta janela, fazendo o cálculo de pessoas infectadas à medida que o tempo passava.

O desenvolvimento deste trabalho foi importante para mim, tanto na área profissional como pessoal. Sempre tive o sonho de ter um mestrado, de dar prosseguimento a minha formação inicial de forma mais aprofundada e consistente, o que certamente obtive participando deste programa de pós-graduação. As disciplinas que pude cursar foram importantes para mim, pois pude aprender um pouco mais sobre algumas abordagens didáticas do ensino da matemática. Com algumas delas eu tive contato em minha graduação e pude relembrar (Resolução de Problemas, Modelagem, por exemplo); outras, tive a grande satisfação de ser apresentado, como por exemplo, o Ensino Exploratório de Matemática – EEM.

Neste programa, pude refletir sobre o que é a tecnologia e como ela pode ser vista, além dos seus equipamentos e como pensar o consciente e proveitoso para o ensino da Matemática. Através das disciplinas que cursei, pude repensar meu papel enquanto professor de Matemática e o que tenho feito em minhas aulas.

Com o desenvolvimento deste trabalho, pude encontrar respostas para minhas inquietações acerca do ensino de funções, em especial exponencial e logarítmica. Acerca das inquietações sobre a maneira a serem abordados os conceitos dessas funções, sem ser na forma do ensino direto, pude compreender o uso do GeoGebra além de *um simples gráfico*. Somado ao aprendizado acerca da abordagem metodológica que o trabalho me proporcionou, pude compreender alguns aspectos ligados a funções que nunca havida parado pensar, ou estudar, mesmo, como aspectos como as formas de representações que uma função pode ser representada, os conceitos-base que são necessários à sua compreensão. Além disso, o fato de que o conceito de função se desenvolveu ao longo da história, de forma gradual, até chegarmos à forma como temos atualmente, me fez rever o modo como tratava esse conceito, refletindo sobre o percurso histórico que esse conceito percorreu.

Creio que o que eu aprendi com o desenvolvimento deste trabalho será muito útil, não somente com as funções exponenciais e logarítmicas, que motivaram o trabalho, mas também com funções de primeiro e segundo grau, que são aquelas que temos o seu ensino presente na Ensino Médio. Além disso, vou poder contribuir com meus colegas da área da Matemática na instituição em que eu trabalho, uma vez que muito colegas meus demonstram interesse nos resultados desta pesquisa, por se tratar do único trabalho na área de Educação Matemática do nosso grupo.

O desenvolvimento de tarefas exploratórias propiciou aos alunos meio e formas mais ágeis de construir suas comunicações e representações das funções. O uso do GeoGebra Classroom mostrou-se muito importante, também para a coleta de informações do desenvolvimento desta pesquisa, e servirá como mais uma ferramenta para o ensino de Matemática.

Ao desenvolver esta pesquisa, obtivemos algumas comunicações por parte dos alunos, bem como algumas representações. Contudo, ainda fica para alguns estudos futuros, verificar como essas comunicações e representações podem favorecer aprendizado dos conceitos-base de funções.

REFERÊNCIAS

ALVESZ, C, S. **As Funções Exponencial e Logarítmica: uma abordagem para o professor do Ensino Básico**. Orientador: Flávio França Cruz. 2014. 63 folhas. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte - CE, 2014

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.

ANDRADE, S. N. **Expectativas institucionais relacionadas à transição entre o ensino médio e ensino superior para o caso da noção de função exponencial**. 2012. Tese de Doutorado. Thèse de Doctorat, Universidade Bandeirante de São Paulo, UNIBAN.

ANGELUCCI, M. **Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 2014

ARUDA, A, G. **Ensino de Juros Compostos, Progressão Geométrica e Função Exponencial**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG, 2013.

BARRA, R, S, C. **Uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2017.

BASNIAK, M. I.; SILVA, S. C. R.; GAULOVSKI, J. M. Tecnologias Digitais e Ensino da Matemática no Brasil: Uma Revisão da Literatura de 2010-2017. **Revista Tecnologias na Educação,** v./n. 23, ano 9, dez. 2017

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais do Ensino Exploratório de Matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, p. 738-747, 2019.

BEZERRA, V, F, T. **O ensino das funções exponenciais e logarítmicas com a utilização da planilha Excel na forma de aplicativo**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho - RO, 2014.

BERLEZE, C, S. **Uma sequência de ensino usando o programa Winplot: em busca de uma aprendizagem autônoma do aluno**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria - RS, 2007.

BOFF, B, C. **Matemática para engenharia: unidade de ensino pontencialmente significativas para superar lacunas em Matemática básica**. Dissertação (Mestrado) –

Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul - RS, 2017.

BONOTO, A, K. **Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Profisssionalizante em Ensino de Física, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria - RS, 2015.

BORGES, U, S. **Curso de logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG, 2014.

BORGES, W, A. **Processos de linguagem na aprendizagem matemática de um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio**. Tese (Doutorado) – Programa de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo - SP, 2013.

BRAZ, J, C. **Funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba - MG, 2019.

BRAZ, R, A, F. **Uma proposta de utilização de material manipulativo no aprendizado da função exponencial.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural do Pernambuco, Recife - PE, 2007

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília, 2018.

CAMPITELI, Heliana Cioccia; CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CANAVARRO, A. P. **Ensino exploratório-investigativo da Matemática:** práticas e desafios. Educação e Matemática, n. 115, p.11-17, nov./dez., 2011.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, 1951.

CANTARUTI, A, C, R. **Ensino de funções no primeiro ano do Ensino Médio: uma abordagem com ênfase no comportamento das funções e sua repercussão no ensino superior na disciplina de cálculo I**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal São João Del Rei, São João Del-Rei - MG, 2017.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes - RJ, 2016.

COSTA, R. D. **Uma Abordagem da Matemática Financeira no Ensino Médio para Explicitar as Metodologias do Fundo de Financiamento Estudantil - FIES**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte - CE, 2014.

CRUZ, A, M. **Potencialidades da utilização do software GeoGebra para o desenvolvimento do conteúdo de funções exponenciais através do smarthphone**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Outro Preto, Ouro Preto - MG, 2018.

CRUZ, P, H, C, A. **Funções no 1º ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2015.

CYRINO, M.C.C.T.; OLIVEIRA, H. MN. In: CYRINO, M.C.C.T. (Org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**: elaboração e perspectivas. 1ed.Londrina: EDUEL - Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2016, v. 1, p. 19-32.

EINHARDT, I, F, B. **Aplicações das funções exponenciais e logarítmicas usando o aplicativo MalMath**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande - RS, 2016.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I; PAULEK, C. M; SCALDELAI, D. FELIPE, N. A. Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da Lei dos Senos mediada pelo software GeoGebra. **Revista Acta Scientiae**, v. 20, p. 342-358, 2018

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Análise de vídeos de aula na promoção de reflexões sobre o ensino exploratório de Estatística em uma comunidade de professores. **Quadrante** (Lisboa), v. XXVI, p. 145-169, 2017.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. **Medidas de Tendência Central e o Ensino Exploratório de Estatística.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, p. 166-191, 2015.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M.I; PAULEK, C. M; SCALDELAI, D.; FELIPE, N. A. Estratégias e Procedimentos Emergentes na Resolução de Questões de Análise Combinatória e o Ensino Exploratório de Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 12, p. 221, 2019.

FELIPE, P. **A proposta curricular do estado de São Paulo e o software GeoGebra: uma análise de atividades sobre funções exponencial e logarítmica à luz dos três mundos da matemática**Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo - SP, 2013.

FERRI, O, E, S. **Progressões e funções**: da variação e caracterização das funções do tipo exponencial do tipo exponencial e logarítmica às técnicas de ajuste de curvas no uso de Modelagem Matemática. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Curitiba - PR, 2014.

FREITAS, R. L. **A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura**: um estudo da função exponencial. Dissertação – Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo - SP, 2015.

FONZAR, G, M, B. **Crescimento e Decaimento Exponencial**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas - TO, 2014.

GADIOLI, A, O. **Função exponencial: caracterização e aplicações**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, 2015.

GARCIA, E, G. **Diferentes maneiras de definir a função logarítmica natural.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto - SP, 2014.

GIROTO, N. **O Desenvolvimento de hábitos de pensamentos**: um estudo de caso a partir de construções geométricas no GeoGebra. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2016

GOMES, L. A. F. **Aplicativos do sistema operacional android na aprendizagem de Matemática: aplicativos e jogos digitais.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande - PB, 2017.

LIMA, M. C. M. **Função exponencial natural e^x e número e:** uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, 2016.

LIMA, J. M. **Uma Proposta para o Ensino das Funções Exponencial, Seno e Cosseno com o Auxílio do software Winplot**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Tocantins, Palmas - TO, 2014.

MACALÓS, L. V. **Ensino de função exponencial com a metodologia de resolução de problemas: relato de uma prática**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville - SC, 2019.

MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. L. A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 1348-1367, 2014.

MAIA, L, F, M, Q. **Modelação Matemática na sala de aula**: o conceito de função exponencial numa seqência de atividades para o 1º ano do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 2017.

MARCHETO, R. **O suo de software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas e sua relação com funções afins e exponenciais.** Dissertação (Mestrado) –

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2017.

MARTINEZ, D, A. **Função exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto - SP, 2015.

MASETI, C. **Análise de livros didáticos de Matemática**: função exponencial. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2016.

MENDONÇA, M. S.; PIRES, R. F. **A Study on the Exponential Function Learning in the computing environment** (Um Estudo sobre a Aprendizagem de Função Exponencial no Ambiente Computacional). Brazilian Journal of Computers in Education (Revista Brasileira de Informática na Educação - RBIE), 26(2), 01-28, 2018.

MENESES, J. A. F. **Ensino da função exponencial por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade do Estado do Pará, Belém - PA, 2018.

MOSSI, S, V. **Análise discursiva das representações semióticas mobilizadas por licenciandos em Matemática no ensino e na aprendizagem de funções.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria - RS, 2016.

MOTOKI, M, E. **Aplicações da função logarítmica em sala de aula no Ensino Médio:** uma propagação de solução de problemas pela transposição para a linguagem matemática. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente - SP, 2016.

NARCISO, R. N. V. **Investigando a Modelagem Matemática no ensino de funções afins e exponenciais.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Catalão - GO, 2016.

NASCIMENTO, R. A. **Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções**. Tese (Doutorado) – Centro de Educação Doutorado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2007.

NETO, J. C. **Área, logaritmo e exponencial**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus - AM, 2015.

NUNES, B. L. **Aplicações de criptografia no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, 2017.

OKADA, S. **Explorando gráficos das funções elementares por meio do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Santa Cruz, Ilhéus - BA, 2013.

OLGIN, C. A. **Currículo no Ensino Médio**: uma experiencia com o tema criptografia. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas - RS, 2011.

OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃ, M. I. R. (Org.). **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em Educação Matemática**. 1. ed. Brasília: SBEM, 2018. v. 13. 320p.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função:** uma abordagem no processo de ensino-aprendizagem. Dissertação de Mestrado, PUC, SP, 1997.

OLIVEIRA, M. A. P. **Sequência didática para o ensino de função exponencial**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade do Estado do Pará, Belém - PA, 2018.

OLIVEIRA, N. M. **Exponencial, matrizes: uma reflexão para o ensino**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni - MG, 2018.

OLIVEIRA, R. H. **Um estudo sobre a função exponencial**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2015.

OLIVEIRA, M, N, A. **Análise da contextualização na função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande - PB, 2014.

OLIVEIRA, A. J. S. **O Ensino e a Aprendizagem de Função Exponencial em um Ambiente de Modelagem Matemática**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2013

OLIVEIRA, R. H. **Um estudo sobre a função exponencial**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/132123/000853553.pdf?sequence=1. Acesso em: 22 out. 2021.

PAULIN, J. V.; RIBEIRO J. A**.** Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, 2019.

PEREIRA, C. R. D. **Similitudes entre espaços e tempos**: educação e trabalho na Baixa Idade Média e Pós-Modernidade. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2003.

PEREIRA, H. E. A f**unção exponencial natural e aplicações**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte - CE, 2015.

PIANO, C. **Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Pato Branco - PR, 2016.

PIRES, R. F.; MERLINE, V.; MAGINA, S. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. **Educação Matemática em Revista**, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

PONTE, J. P. et al. Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

PRESTES, L. A. S. **Matemática na gestão financeira pessoal**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande - RS, 2019.

QUEIROS, R. T. U. **Equação/função exponencial em livros didáticos no Brasil (1930 - 1980)**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, 2018.

RAMOS, S, S, A. **Logaritmos**: uma abordagem didática. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2015.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função afim na educação básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 13, n. 2, p. 25-50, 2020.

RIBEIRO, E. S. **Modelagem com funções elementares no Ensino Médio**: uma proposta interdisciplinar aliando prática e teoria. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, 2017.

RICARDO, V. W. **Metodologia de Gerenciamento de Base de Dados para Ensino-Aprendizagem de Estatística na Web**. Mestrado em Ciências da Computação Instituição de Ensino: Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2004.

ROBALLO, M. S. **Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade DE Brasília, Brasília - DF, 2014.

ROZANSKI, E. F. **Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da Teoria das Situações Didáticas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Pato Branco - PR, 2015.

SANTOS, J. **Introdução ao conceito de função exponencial**: um olhar para a educação inclusiva. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Curitiba - PR, 2018.

SANTOS, G. L. D. **Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função**. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, 2017.

SANTOS, R. O. **O ensino da Matemática Financeira no nível Médio e sua importância para a educação financeira do aluno**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal da Bahia, Salvador - BA, 2015.

SANTOS, G, N. **Funções exponenciais**: uma proposta para professores do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2014.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017.

SCALDELAI. D. O Software Geogebra. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. (Org). **O Geogebra e a Matemática da Educação Básica**. Curitiba: Ithala, 2013. p. 13 – 23.

SENA, A. S. **Progressão geométrica integrada a função exponencial**: uma abordagem ao Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2014.

SILVA, R. S. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica**. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/49422. Acesso em: 20 out. 2021.

SILVA, A. L. **O ensino de funções exponenciais para além das aparências**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2018.

SILVA, R. F. **Função exponencial e logarítmica**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente - SP, 2016.

SILVA, C. A. **A Torre de Hanói como ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2015.

SILVA, R. J. A. **Contexto e aplicações das funções exponenciais no Ensino Médio**: uma abordagem interdisciplinar. Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes - RJ, 2015.

SIQUEIRA, D. M. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2013.

SOUZA, I. R. S. **Relação entre função exponencial e progressão geométrica.** Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estdual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes - RJ, 2016.

SOUZA, C, V. **A função exponencial no caderno do professor de 2008 da Secretaria do Estado de São Paulo**: análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2010.

STEIN, M.; ENGLE, R.; SMITH, M.; HUGHES, E. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, 10(4), 313–340, 2008.

TOLEDO, L. A. **Ensino da função exponencial**: análise de resultados. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto - SP, 2018.

VERGNAUD, G. **La teoría de los campos conceptuales.** Recherches em Didáctique des Mathématiques, 10(2), 133-170, 1990.

RIBEIRO, E. S. **Modelagem com funções elementares no Ensino Médio**: uma proposta interdisciplinar aliando prática e teoria. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, 2017.

VILANI, N. N. R. **O número de Euler no Ensino Médio**: propostas de abordagens com aplicações. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto - SP, 2017.

APÊNDICE A - PLANO DE AULA 01

O coronavírus e sua propagação

1. Identificação

Nome: Andrei Cristiano Maia e Silva.

Local:

Data:

Duração: 120 minutos (2 aulas de 60 minutos)

Unidade Temática: Funções

Objetos de conhecimento: Funções Exponenciais

Conteúdo: Funções Exponenciais

Ano de Escolaridade:

Link tarefa: **https://www.geogebra.org/m/nf3mfd2r**

2. Objetivos

1. Utilizar as diferentes representações tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrica, generalização, gráfica, e definição da função exponencial
2. Compreender o crescimento exponencial do contágio de um vírus.
3. Relacionar as representações gráficas, tabular, algébrica e por diagramas da função exponencial.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Tablets/computadores, software GeoGebra, apresentação de slides, link do Google Meet para encontro síncrono, notebook.

4. Desenvolvimento da Aula

Este plano de ensino será utilizado com um grupo de alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio.

O desenvolvimento da aula será pautado na perspectiva metodológica do Ensino Exploratório da Matemática. Esta perspectiva tira do professor o papel de transmissor do conhecimento, o papel de centralidade da aula, assim confere ao aluno um papel participativo e protagonista na construção do conhecimento.

No EEM, professor e alunos são agentes da construção do conhecimento, uma vez que o EEM se baseia em um formato dialógico (ESTEVAM; BASNIAK, 2019), que requer diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno. Portanto, o EEM não deixa somente a cargo do aluno o processo de aprendizagem enquanto o professor cruza os seus braços. Segundo Basniak e Estevam (2019), o EEM admite quatro dimensões fundamentais: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração.

Nesta perspectiva, uma aula pautada no EEM admite quatro fases,

i) apresentação da tarefa,

ii) realização da tarefa,

iii) discussão da tarefa

iv) a sistematização das aprendizagens.

A seguir é feito um breve relato sobre cada uma das fases e como ocorrerá o desenvolvimento da tarefa com os alunos.

Para a resolução da tarefa os alunos trabalharão de forma coletiva, isto é, divididos em grupos, porém de forma remota. Dois grupos que serão compostos por três alunos. O tempo destinado para as duas primeiras fases (apresentação da tarefa e desenvolvimento da tarefa) será de 60 (sessenta) minutos. Para as outras duas fases (discussão da tarefa e sistematização de aprendizagens), serão destinados outros 60 (sessenta) minutos em outro dia.

A tarefa será disponibilizada em uma sala criada no site do GeoGebra, da qual o professor informará o código da turma e o link do GeoGebra Classroom (o link será gerado na hora) para os alunos durante a introdução da tarefa. Para o desenvolvimento da tarefa o professor irá criar quatro salas no Google Meet. Uma sala para as instruções gerais e de como será desenvolvida a tarefa. Nesta sala será iniciada a aula e apresentada a tarefa. Nas outras três salas, os alunos resolverão a tarefa. Cada grupo terá uma sala conforme a tabela a seguir:

Sala/Grupo	**Link**
Sala geral	https://meet.google.com/wak-nvoh-xjs
Grupo 01 Gabriely, Leonardo e Yuri	https://meet.google.com/kmq-qbww-icq
Grupo 02 Julia, Rafa e Ana	https://meet.google.com/qof-byhj-kxg
Grupo 03 se precisar	https://meet.google.com/dnx-zrpb-hyk

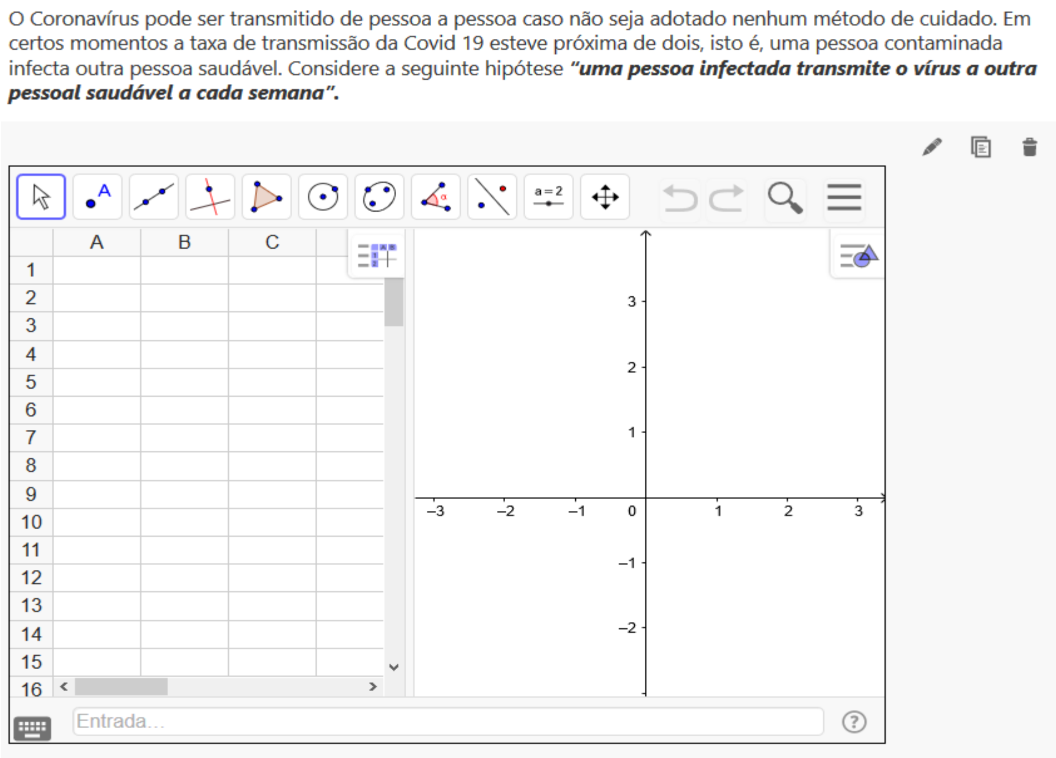
4.1. Introdução da Tarefa

A tarefa sobre função exponencial será apresentada aos alunos na sala geral do Google Meet, utilizando o notebook e compartilhando tela para a apresentação de slide, com algumas instruções para os alunos e para a sistematização. Como os alunos utilizarão o GeoGebra para resolver a tarefa, o professor fará uma breve apresentação do software aos alunos, explicando que será utilizado o GeoGebra Classroom para o desenvolvimento da tarefa.

O uso do download do GeoGebra se justifica pois, é gratuito e pode ser feito no site www.geogebra.org, ou é possível utilizá-lo de forma online. No último caso é necessário realizar um cadastro (gratuito) no próprio site para salvar os trabalhos desenvolvidos online. Posteriormente, caso o usuário queira, há a opção de realizar o download dos arquivos construídos. Há também uma terceira opção que é fazer o uso do GeoGebra em smartphones, basta acessar a loja de aplicativos (App Store (IOS) ou Play Store (Android)) para fazer o seu download.

No GeoGebra temos a possibilidade de visualizar até três janelas simultaneamente. Estas janelas são: *janela de álgebra*, *janela de visualização e planilhas*. Como podemos ver na figura 1 abaixo.

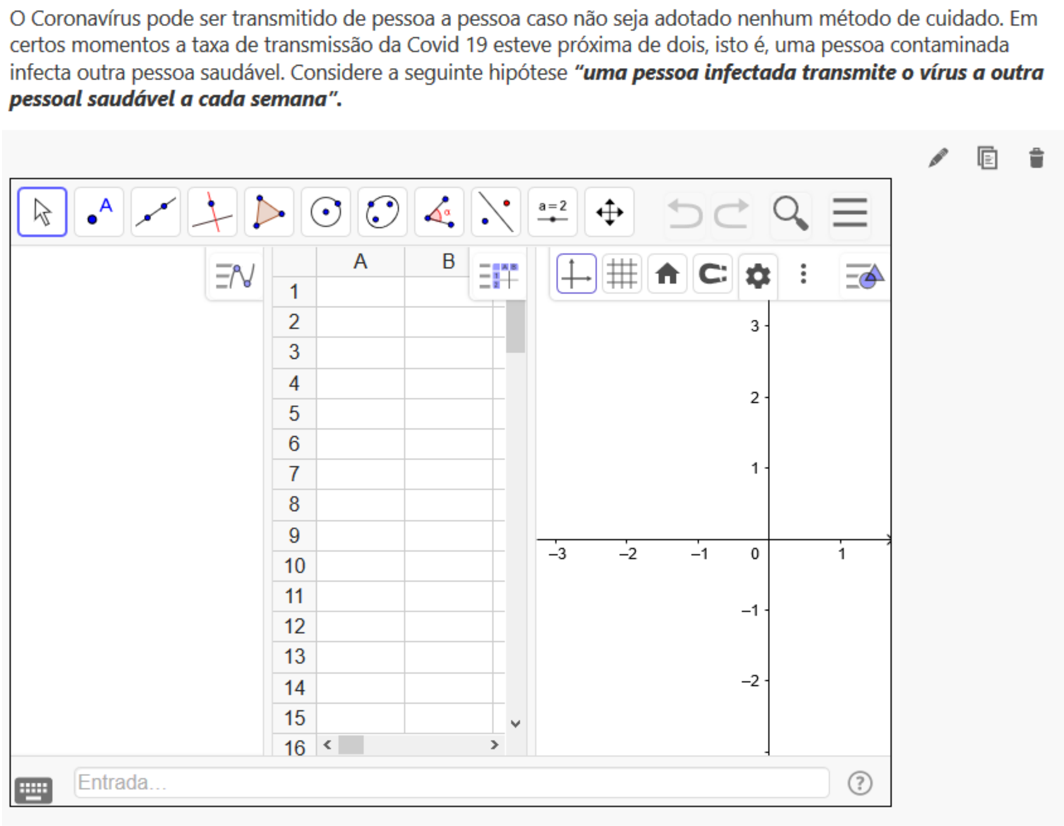
Figura 1: Tarefa Corona Vírus



Fonte: O autor, 2021

No Classroom do GeoGebra é possível deixar habilitada a janela de visualização e a planilha, para exibir a janela de álgebra é preciso clicar na opção abaixo das três "barrinhas" no canto superior direito, e ir na opção com "três pontinhos" para habilitar esta janela. Na figura 2 vemos as três janelas sendo exibidas.

Figura 2: Representação de uma função

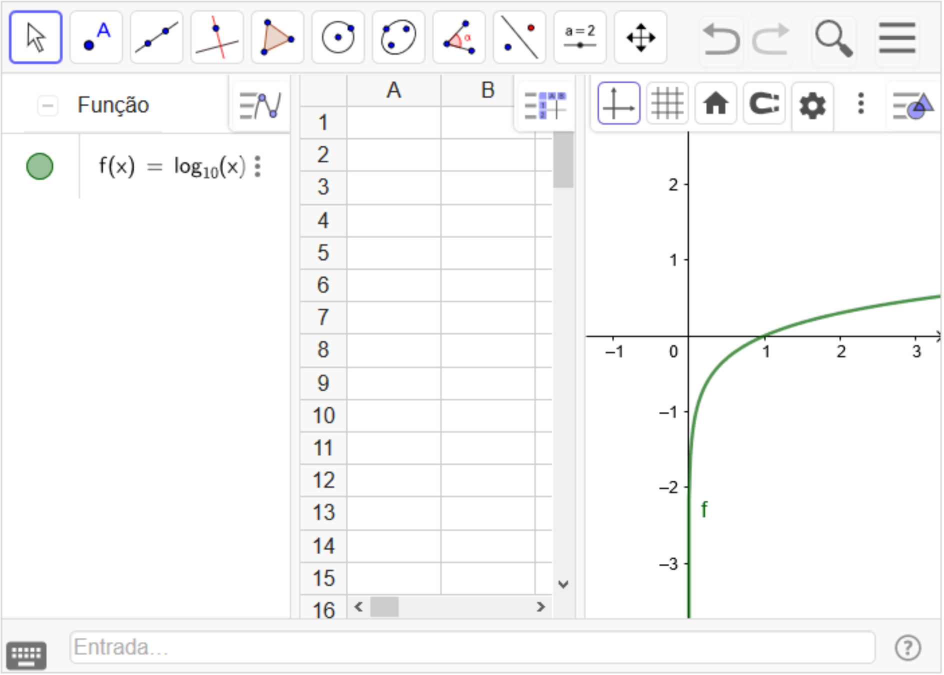


Fonte: O autor, 2021

Para fazermos inserção de uma função basta digitar o seu argumento no campo *entrada* e apertar a tecla "enter" que assim é exibida na tela do programa duas formas de representarmos a função, a algébrica na janela de álgebra e a representação geométrica na janela de visualização, como vemos na figura 3. Após digitar o argumento da função no campo entrada aparece na janela de álgebra sua representação algébrica.

Figura 3: Representação de uma função

O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outra pessoa saudável. Considere a seguinte hipótese ***"uma pessoa infectada transmite o vírus a outra pessoal saudável a cada semana"*.**



Fonte: O autor, 2021

O professor deve disponibilizar link e o código da turma do GeoGebra Classroom para que os alunos tenham acesso a sala com as questões. Como o desenvolvimento da tarefa será realizado de forma remota, o professor explicará como a atividade será realizada nos grupos. O professor mostrará o cronograma com tempo das para a realização da atividade.

Tarefa Parte I	**Duração**
Apresentação da atividade	15
Desenvolvimento da atividade	40
Fechamento da parte I da tarefa	5
Tarefa Parte II	**Duração**
Retomada da tarefa	10
Apresentação da tarefa	25
Sistematização da tarefa	25

O professor fará a leitura da tarefa por completo, item por item, indagando se os alunos compreenderam o que se pede ou se precisam de algum esclarecimento sobre o que está sendo solicitado em cada item da tarefa, se há termos que eles desconhecem e precisam de esclarecimentos. O professor orientará aos alunos que a tarefa será desenvolvida em quatro fases distintas e que ele não validará suas resoluções no momento de realização da tarefa, mas que eles podem/devem chamar o professor para conversar sobre o desenvolvimento da tarefa sempre que necessitarem. O professor lembrará os alunos que não estará a todo momento nos grupos, visitando-os de instante em instante. Caso haja alguma dúvida e o professor não esteja presente na sala, os alunos podem chamá-lo no WhatsApp.

O professor orientará os alunos para que a partir do uso do GeoGebra e das suas reflexões façam anotações sobre todos os encaminhamentos utilizados durante o processo de resolução da tarefa em seus cadernos. Finalizada a tarefa, um aluno do grupo enviará ao professor o desenvolvimento da tarefa realizada pelo grupo.

O professor ao apresentar a tarefa deve mostrar ao aluno que é possível exibir a *janela de álgebra*, que vem oculta. Além disso, precisa mostrar ao aluno como fazer para inserir uma imagem no final da tarefa via o link do Google Formulário. Frisar a importância do envio do desenvolvimento da tarefa realizado pelo grupo.

Para a resolução da tarefa os alunos utilizarão um aplet único que será disponibilizado na tarefa no GeoGebra Classroom. O professor deve lembrar que é importante o diálogo entre os integrantes do grupo e que a aula será gravada.

4.2. Realização da Tarefa

Para orientar o trabalho do professor nesta fase do Ensino Exploratório de Matemática, foram desenvolvidos quadros de referência para cada questão da tarefa, buscando prever as possíveis ações do aluno no decurso da realização da tarefa. Estes quadros, que seguem abaixo, servirão de apoio ao trabalho do professor nesta fase, uma vez que o papel do professor não é de validador das ações dos alunos, mas sim de instigador, não respondendo ao aluno se o seu raciocínio está correto ou não, e sim questionando sobre a validade do seu raciocínio. A seguir temos a tarefa com a sua resolução.

Tarefa 01 – Função Exponencial e sua propagação

01) O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve

próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outras duas pessoas saudáveis. Considere a seguinte hipótese: "uma ***pessoa infectada transmite o vírus a outras duas pessoas saudáveis a cada semana".*** Utilizando o GeoGebra responda os itens a seguir

a) A partir da hipótese acima, como podemos representar a quantidade de pessoas infectadas ao longo de oito semanas?

b) Se a taxa de transmissão for mantida, como podemos determinar a quantidade de pessoas infectadas que teremos após 30 semanas?

c) Como podemos estabelecer uma relação matemática que relacione o tempo decorrido "x" e a quantidade de pessoas infectadas "$f(x)$".

d) Represente os valores do contágio pelo vírus se a taxa de transmissão fosse de um para meio ao longo de seis semanas?

e) Os dados podem ser representados por quais outras formas? (Pode resolver no caderno e enviar uma imagem com as formas que utilizou para representar os dados)

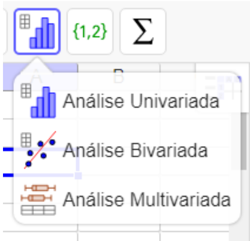
Envio das resoluções

Após a resolução dos itens da tarefa você deve fazer o envio das fotos da resolução para o professor no WhatsApp.

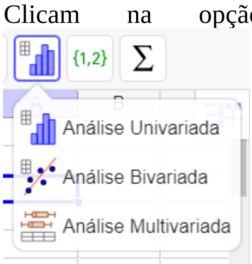
Abaixo temos os quadros de antecipação com os possíveis encaminhamentos que os alunos terão ao responder a tarefa.

a) A partir da hipótese acima, utilizando o GeoGebra como podemos representar a quantidade de pessoas infectadas ao longo de oito semanas?

Ações do aluno	Ações do professor
Fazem cálculos no papel	Orientar os alunos a utilizar o GeoGebra
A janela do GeoGebra não abre ou não carrega	Solicitar para atualizar a página
Digitam algum comando errado ou clicam em um botão de forma indesejada.	Solicitar para utilizar o botão refazer
Fazem uma tabela com menos de oito entradas	Solicitar que verifiquem o que a tarefa está solicitando.
Respondem corretamente utilizando tabela	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Respondem corretamente digitando a função	Solicitar para os alunos verificarem como a notação foi feita, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.

Não identificam as colunas (ou linhas) na tabela	Questionar o que cada coluna (ou linha) representa na tabela
 Clicam na opção 2 da tabela (aparece algumas opções ao lado da janela de visualização)	Mostrar a opção "três pontos" em que é possível fechar a janela.
Clicam na lupa	Mostrar a opção de voltar
Aumentam muito o zoom na janela de visualização	Orientar para que cliquem no botão de desfazer

b) Se a taxa de transmissão for mantida, como podemos determinar a quantidade de pessoas infectadas que teremos após 30 semanas? (Pode resolver no caderno e inserir uma imagem com as formas que utilizou para representar os dados)

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não conseguem adicionar a imagem na tarefa	Cita o procedimento de adicionar imagem
A janela do GeoGebra não abre ou não carrega	Solicitar para atualizar a página
Digitar algum comando errado ou clicar em um botão de forma indesejada.	Solicitar para utilizar o botão refazer
Fazem uma tabela com menos de 30 entradas	Solicitar que verifiquem o que a atividade está solicitando.
Fazem cálculos no papel	Orientar os alunos a tentar utilizar o GeoGebra. Perguntar se há outra forma de representação.
Clicam na opção 2 da tabela  (aparece algumas opções ao lado da janela de visualização)	Mostra que a opção "três pontos" em que é possível fechar.
Clicam na lupa	Mostrar a opção de voltar
Dão muito zoom na janela de visualização	Clicar no botão de desfazer

c) Como podemos estabelecer uma relação matemática que relacione a quantidade de pessoas infectadas $f(x)$ e o tempo decorrido x

Ações do aluno	Ações do professor
Não entendem a notação f(x)	Questionar sobre o que vem ser esta notação e a qual conceito ela está relacionada.
Invertem a variável dependente “f(x) - quantidade de pessoas infectadas” com a variável independente “x tempo decorrido em semanas”	Solicitar que observem atentamente o que o item está solicitando.
Estabelecem uma relação matemática do tipo f(x)=2x	Sugerir que “façam testes” para verificar se atende à quantidade de pessoas por semana ao longo do tempo, segundo os valores encontrados nos itens a e b.
Utilizam outras letras para representar o tempo, por exemplo a letra “t” sem descrever o que ela significa.	Solicitar que observe atentamente ao que item está pedindo.
Fazem representação correta	Perguntar se há outra forma de representação.

d) Represente os valores do contágio pelo vírus se a taxa de transmissão fosse de um para meio ao longo de seis semanas?

Ações do aluno	Ações do professor
Não conseguem iniciar a resolução da questão	Solicitar que façam a leitura mais uma vez da questão e verifiquem como foi desenvolvido as anteriores
Apresentam uma representação algébrica correta (f(x)=(½)^x	Questionar se não existe ou forma de representação além da escolhida
Fazem uma tabela iniciando com uma pessoa apenas	Questiona se isso é possível.
Constroem uma representação algébrica do tipo polinomial	Questiona se com esta representação é possível “estimar os valores do contágio”
Supõem uma quantidade inicial de pessoas infectadas para estimar a quantidade de pessoas infectadas	Questionar por que fizeram isso e recomendar que anotem.
Utilizam variáveis, mas não identificam o que elas representam	Questionar o que significa cada uma das variáveis e pedir para registrem

e) Quais outras formas os dados podem ser representados? (Pode resolver no caderno e inserir uma imagem com as formas que utilizou para representar os dados)

Ações do aluno	Ações do professor
Não conseguem iniciar	Solicitar que observem como foram representados os dados nos itens anteriores e tentar fazer outra forma para representar, que pode ser, por exemplo, algébrica ou com algum desenho.

Não conseguem adicionar a imagem na tarefa	Cita o procedimento de adicionar imagem
A janela do GeoGebra não abre ou não carrega	Solicitar para atualizar a página
Fazem diagrama sem relacionar os elementos dos conjuntos	Solicitar que façam a relação entre os elementos dos conjuntos
Utilizam a metáfora de máquina de transformação	Verificar se os valores de entrada e saída são correspondentes, caso não seja pedir para verificar.
Utilizam a definição da função exponencial	Observar se a definição está colocada de forma correta, caso não esteja indagar os alunos se o que eles definiram corresponde ao que é apresentado na tarefa.
Fazem apenas uma representação	Perguntar se há outra forma de representação.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Nesta fase o professor precisará organizar como os alunos farão a apresentação das resoluções que obtiveram no processo de resolução da tarefa. O professor coordena as apresentações das resoluções dos alunos neste momento. Como esta fase não será no mesmo dia, o professor terá um tempo para elaborar um roteiro de apresentações, baseado na forma como os alunos desenvolveram a tarefa, serão utilizados alguns critérios para a seleção destas tarefas, critérios tais como: raciocínio diferenciado, erros que foram recorrentes, entre outros.

4.4 Sistematização das aprendizagens

Nesta última fase com as discussões encerradas, o professor inicia a fase da sistematização das tarefas estabelecendo conexões com cada uma das fases desenvolvidas, considerando sempre os objetivos da tarefa, nesta fase os alunos devem fazer suas respectivas anotações sobre a construção coletiva dos conceitos da tarefa em seus cadernos.

Com o item “a” da tarefa era possível ser respondido utilizando uma tabela, que poderia ser construída na janela planilha e assim chegar a conclusão de que na oitava semana teríamos 256 pessoas infectadas.

	A	B
1	Semanas	Pessoas infectadas
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	8
6	4	16
7	5	32
8	6	64
9	7	128
10	8	256
11		
12		
13		
14		

Outra opção de resposta para o item seria o uso da expressão da função exponencial $f(x) = 2^x$, basta substituir na função para obter a mesma resposta, porém ela é solicitada no item “c”. É necessário deixar claro aos alunos quais são as variáveis dependentes e independentes. Neste caso a variável “quantidade de pessoas infectadas” é uma variável dependente da variável “semana”. Que no item “c” são chamados “f(x)” e “x”, respectivamente. Deve-se tomar nota que o conjunto das semanas é chamado de conjunto domínio e o conjunto que representa a quantidade de pessoas é chamado conjunto imagem desta função.

No item “b” como é solicitado a quantidade de pessoas infectadas passadas 30 semanas, deve-se enfatizar que a construção de uma tabela com esta quantidade de entrada pode se tornar inviável ou trabalhosa, pois leva um certo tempo para a sua construção. Por isso é necessário pensar em uma outra forma de obter este valor, que pode ser através de uma representação algébrica para esta situação. Neste item a quantidade de pessoas infectadas em 30 semanas é 1.073.741.824.

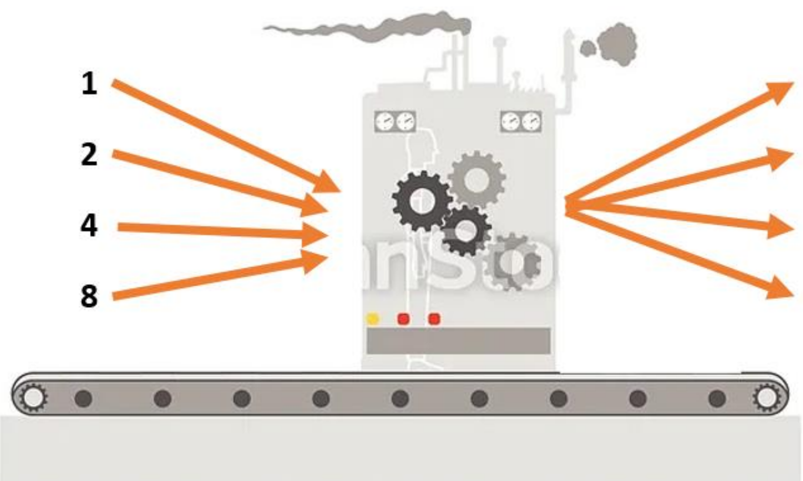
Para resolução do item “c” chamar a atenção do aluno que os dados da tabela obtidos estão relacionados a expressão $f(x) = 2^x$, que vem a ser uma função exponencial. Nesta função a variável fica em seu expoente, por isso o nome. Na função exponencial o “dois (2)” é chamado de base da função, representamos aqui pela letra “a”. Quando o valor da base está entre $0 < a < 1$a função é classificada como decrescente e quando $a > 1$ é classificada como crescente, o que é o caso da função obtida. No caso da função $f(x) = 2^x$, quanto mais semanas se passam, maior é a quantidade de pessoas infectadas, por isso muitas vezes é utilizado a expressão “crescimento exponencial” nas falas dos noticiários ou nas falas dos especialistas.

No item “d” teremos uma função do *f(x)=(½)^x* esta função é função é do tipo decrescente uma vez que a base é menor que um ($0<a<1$). Este tipo de situação é o desejável para que cesse o crescimento do vírus.

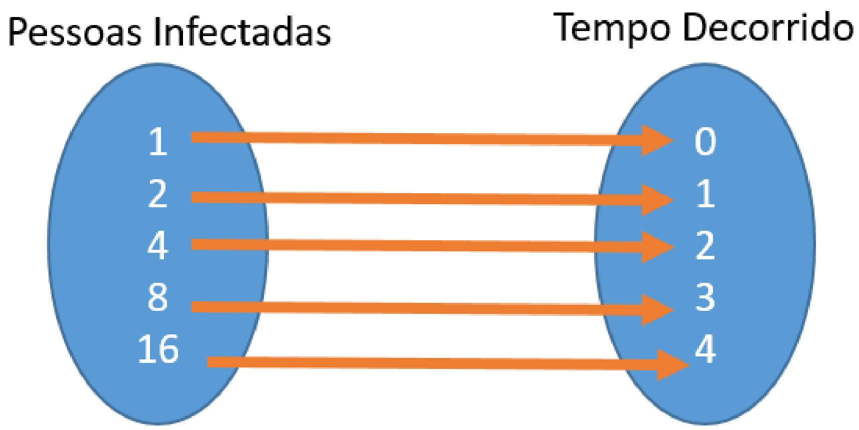
Outro ponto importante em relação aos itens “c” e “d” é que ele poder entendido de uma forma simples como a taxa de transmissão do vírus.

No último item “e” podemos representar a função exponencial de outras formas, através de um diagrama, onde os elementos são dispostos em diagramas e fazemos setas ligando os elementos do conjunto semana, com os elementos do conjunto quantidade de pessoas infectadas, através de setas. Podemos pensar também em uma representação como uma máquina de transformação onde “os valores que entram são transformados em outros”. No caso entra o valor 8 (oitava semana) na máquina e sai o valor 256 (quantidade de pessoas infectadas na oitava semana). Podemos pensar também esta situação como uma generalização no caso em que a função pode ser obtida multiplicando por dois o elemento anterior para saber o seu próximo elemento. E por fim, mas não menos importante esta função pode ser pensada através de sua definição. Podendo ser definida seguinte forma: “$f: R \to R_+{}^*$em que $f(x) = 2^x$. O domínio desta função é o conjunto dos números reais, e o contradomínio é o conjunto dos números reais positivos não nulos. Sendo assim uma função pode ser representada de diversas formas.

Dentre as possibilidades de representação para uma função citadas podemos associar que tabela apresentada na janela planilha pode ser considerada ainda como “uma máquina de transformação”, pois os valores que estão presentes na coluna x são transformados em valores da coluna y.



A representação por diagrama, por ser construída na forma de desenho, não será realizada através do GeoGebra, nem as demais (definição e generalização).



5. Avaliação

A avaliação ocorrerá ao longo do processo da aplicação da tarefa. A participação e comprometimento dos alunos será considerado, bem como os registros que eles deverão fazer com suas conclusões tanto no caderno quanto no GeoGebra.

APÊNDICE B - TAREFA 01

Instituição: Instituto Federal do Paraná – Campus Palmas.

Professor: Andrei Cristiano Maia e Silva

Disciplina: Matemática

Turma: Técnico em Alimentos integrado ao Ensino Médio

O coronavírus e sua propagação

01) O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outras duas pessoas saudáveis. Considere a seguinte hipótese: "uma ***pessoa infectada transmite o vírus a outras duas pessoas saudáveis a cada semana".*** Utilizando o GeoGebra responda os itens a seguir

a) A partir da hipótese acima, como podemos representar a quantidade de pessoas infectadas ao longo de oito semanas?

b) Se a taxa de transmissão for mantida, como podemos determinar a quantidade de pessoas infectadas que teremos após 30 semanas?

c) Como podemos estabelecer uma relação matemática que relacione o tempo decorrido "x" e a quantidade de pessoas infectadas "$f(x)$".

d) Represente os valores do contágio pelo vírus se a taxa de transmissão fosse de um para meio ao longo de seis semanas?

e) Os dados podem ser representados por quais outras formas? (Pode resolver no caderno e enviar uma imagem com as formas que utilizou para representar os dados)

Envio das resoluções

Após a resolução dos itens da tarefa você deve fazer o envio das fotos da resolução para o professor no WhatsApp.

APÊNDICE C - PLANO DE AULA 02

O Coronavírus e seu contágio

1. Identificação

Nome: Andrei Cristiano Maia e Silva.

Local: https://meet.google.com/wak-nvoh-xjs

Data: 13/09/2021

Duração: 120 minutos (2 aulas de 60 minutos)

Unidade Temática: Funções

Objetos de conhecimento: Funções Logarítmica

Conteúdo: Funções Logarítmica

Ano de Escolaridade: 2º ano

Link tarefa: **https://www.geogebra.org/m/gntfp5sj**

Classroom: **https://www.geogebra.org/classroom/kxunbwxh**

2. Objetivos

1. Utilizar as diferentes representações tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrica, generalização, gráfica, e definição da função logarítmica
2. Compreender o crescimento logarítmico do contágio de um vírus.
3. Relacionar as representações gráficas, tabular, algébrica e por diagramas da função logarítmica.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Tablets/computadores, software GeoGebra, apresentação de slides, link do Google Meet para encontro síncrono, notebook.

4. Desenvolvimento da Aula

Este plano de ensino será utilizado com um grupo de alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio.

O desenvolvimento da aula será pautado na perspectiva metodológica do Ensino Exploratório da Matemática. Esta perspectiva tira do professor o papel de transmissor do conhecimento, o papel de centralidade da aula, assim confere ao aluno um papel participativo e protagonista na construção do conhecimento.

No EEM, professor e alunos são agentes da construção do conhecimento, uma vez que o EEM se baseia em um formato dialógico (ESTEVAM; BASNIAK, 2019), que requer diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno. Portanto, o EEM não deixa somente a cargo do aluno o processo de aprendizagem enquanto o professor cruza os seus braços. Segundo Basniak e Estevam (2019), o EEM admite quatro dimensões fundamentais: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração.

Nesta perspectiva, uma aula pautada no EEM admite quatro fases:

i) apresentação da tarefa,

ii) realização da tarefa,

iii) discussão da tarefa

iv) a sistematização das aprendizagens.

A seguir é feito um breve relato sobre cada uma das fases e como ocorrerá o desenvolvimento da tarefa com os alunos.

Para a resolução da tarefa os alunos trabalharão de forma coletiva, isto é, divididos em grupos, porém de forma remota. Dois grupos que serão compostos por três alunos. O tempo destinado para as duas primeiras fases (apresentação da tarefa e desenvolvimento da tarefa) será de 60 (sessenta) minutos. Para as outras duas fases (discussão da tarefa e sistematização de aprendizagens), serão destinados outros 60 (sessenta) minutos em outro dia.

A tarefa será disponibilizada em uma sala criada no site do GeoGebra, da qual o professor informará o código da turma e o link do GeoGebra Classroom (o link será gerado na hora) para os alunos durante a introdução da tarefa. Para o desenvolvimento da tarefa o professor irá criar quatro salas no Google Meet. Uma sala para as instruções gerais e de como será desenvolvida a tarefa. Nesta sala será iniciada a aula e apresentada a tarefa. Nas outras três salas, os alunos resolverão a tarefa. Cada grupo terá uma sala conforme a tabela a seguir:

Sala/Grupo	**Link**
Sala geral	https://meet.google.com/wak-nvoh-xjs
Grupo 01 Gabriely, Leonardo e Yuri	https://meet.google.com/kmq-qbww-icq

Grupo 02 Rafaela, Julia e Ana	https://meet.google.com/qof-byhj-kxg
Grupo 03 Reserva caso entre mais alunos	https://meet.google.com/dnx-zrpb-hyk

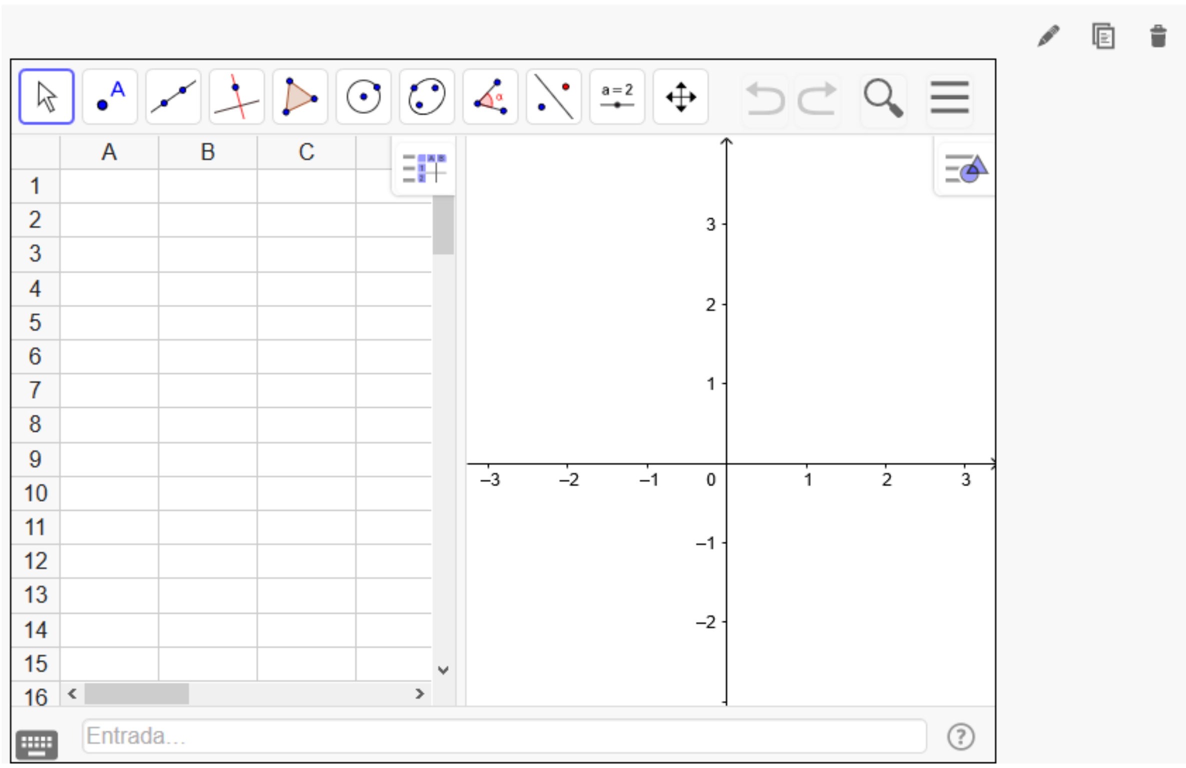
4.1. Introdução da Tarefa

A tarefa sobre função logarítmica será apresentada aos alunos na sala geral do Google Meet, utilizando o notebook e compartilhando tela para a apresentação de slide, com algumas instruções para os alunos e para a sistematização. Como os alunos utilizarão o GeoGebra para resolver a tarefa, o professor fará uma breve revisão sobre o software aos alunos, explicando que será utilizado o GeoGebra Classroom para o desenvolvimento da tarefa, como foi feito nos encontros passados.

No GeoGebra temos a possibilidade de visualizar até três janelas simultaneamente. Estas janelas são: *janela de álgebra*, *janela de visualização e planilhas*. Como podemos ver na figura 1 abaixo.

Figura 1: Tarefa Corona Vírus

O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outra pessoa saudável. Considere a seguinte hipótese ***"uma pessoa infectada transmite o vírus a outra pessoal saudável a cada semana".***

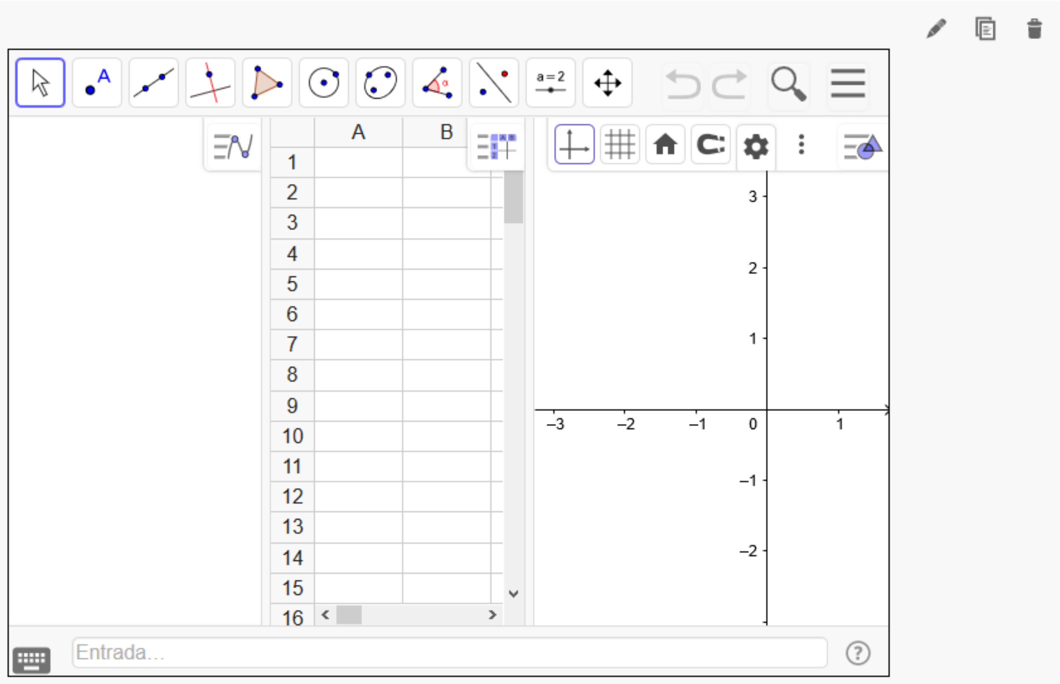


Fonte: O autor, 2021

No Classroom do GeoGebra é possível deixar habilitada a janela de visualização e a planilha, para exibir a janela de álgebra é preciso clicar na opção abaixo dos três “barrinhas” no canto superior direito, e ir na opção com “três pontinhos” para habilitar esta janela. Na figura 2 vemos as três janelas sendo exibidas.

Figura 2: Representação de uma função

O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outra pessoa saudável. Considere a seguinte hipótese ***“uma pessoa infectada transmite o vírus a outra pessoal saudável a cada semana”.***

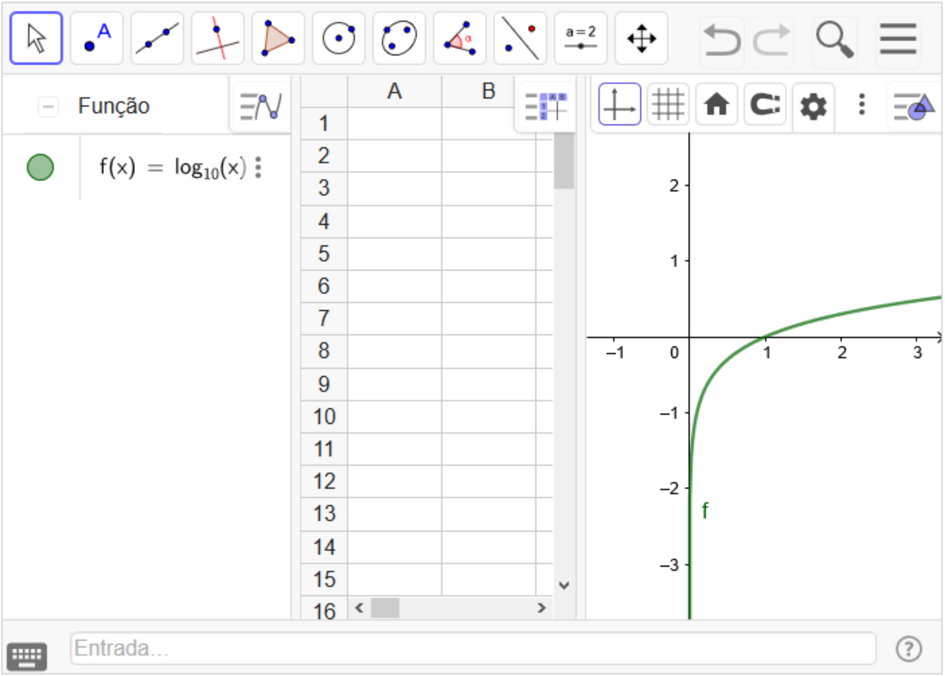


Fonte: O autor, 2021

Para fazermos inserção de uma função basta digitar o seu argumento no campo *entrada* e apertar a tecla “enter” que assim é exibida na tela do programa duas formas de representarmos a função, a algébrica na janela de álgebra e a representação geométrica na janela de visualização, como vemos na figura 3. Após digitar o argumento da função no campo entrada aparece na janela de álgebra sua representação algébrica.

Figura 3: Representação de uma função

O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outra pessoa saudável. Considere a seguinte hipótese ***"uma pessoa infectada transmite o vírus a outra pessoal saudável a cada semana".***



Fonte: O autor, 2021

O professor deve disponibilizar link e o código da turma do GeoGebra Classroom para que os alunos tenham acesso a sala com as questões. Como o desenvolvimento da tarefa será realizado de forma remota, o professor explicará como a atividade será realizada nos grupos. O professor mostrará o cronograma com tempo das para a realização da atividade.

Tarefa Parte I	**Duração**
Apresentação da atividade	15
Desenvolvimento da atividade	40
Fechamento da parte I da tarefa	5
Tarefa Parte II	**Duração**
Retomada da tarefa	10
Apresentação da tarefa	25
Sistematização da tarefa	25

O professor fará a leitura da tarefa por completo, item por item, indagando se os alunos compreenderam o que se pede ou se precisam de algum esclarecimento sobre o que está sendo solicitado em cada item da tarefa, se há termos que eles desconhecem e precisam de esclarecimentos. O professor orientará aos alunos que a tarefa será desenvolvida em quatro fases distintas e que ele não validará suas resoluções no momento de realização da tarefa, mas que eles podem/devem chamar o professor para conversar sobre o desenvolvimento da tarefa sempre que necessitarem. O professor lembrará os alunos que não estará a todo momento nos grupos, visitando-os de instante em instante. Caso haja alguma dúvida e o professor não esteja presente na sala, os alunos podem chamá-lo no WhatsApp.

O professor orientará os alunos para que a partir do uso do GeoGebra e das suas reflexões façam anotações sobre todos os encaminhamentos utilizados durante o processo de resolução da tarefa em seus cadernos. Finalizada a tarefa, um aluno do grupo enviará ao professor o desenvolvimento da tarefa realizada pelo grupo.

O professor ao apresentar a tarefa deve mostrar ao aluno que é possível exibir a *janela de álgebra*, que vem oculta. Além disso, precisa mostrar ao aluno como fazer para inserir uma imagem no final da tarefa via o link do Google Formulário. Frisar a importância do envio do desenvolvimento da tarefa realizado pelo grupo.

Para a resolução da tarefa os alunos utilizarão um aplet único que será disponibilizado na tarefa no GeoGebra Classroom. O professor deve lembrar que é importante o diálogo entre os integrantes do grupo e que a aula será gravada.

4.2. Realização da Tarefa

Para orientar o trabalho do professor nesta fase do Ensino Exploratório de Matemática, foram desenvolvidos quadros de referência para cada questão da tarefa, buscando prever as possíveis ações do aluno no decurso da realização da tarefa. Estes quadros, que seguem abaixo, servirão de apoio ao trabalho do professor nesta fase, uma vez que o papel do professor não é de validador das ações dos alunos, mas sim de instigador, não respondendo ao aluno se o seu raciocínio está correto ou não, e sim questionando sobre a validade do seu raciocínio. A seguir temos a tarefa com a sua resolução.

Tarefa 02 – O coronavírus e o seu contágio

01) O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outras duas pessoas saudáveis. Considere a seguinte hipótese: "uma *pessoa infectada transmite o vírus a outras duas pessoas saudáveis a cada semana”.*

a) Construa no GeoGebra diferentes representações que relacionem a quantidade de pessoas infectadas com o passar do tempo.

b) Quais outras representações possíveis para expressar essa relação que não é possível fazer no GeoGebra?

c) Que observações podemos estabelecer entre as representações da relação matemática obtida no item “a e b” e as relações obtidas na tarefa 01? Explique**.**

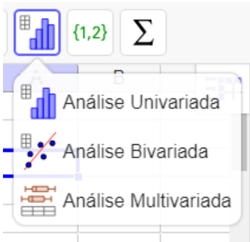
Envio das resoluções

Após a resolução dos itens da tarefa você deve fazer o envio das fotos da resolução para o professor no WhatsApp.

Abaixo temos os quadros de antecipação com os possíveis encaminhamentos que os alunos terão ao responder a tarefa.

a) Construa no GeoGebra diferentes representações que relacionem a quantidade de pessoas infectadas com o passar do tempo.

Ações do aluno	Ações do professor
Fazem as representações utilizando lápis e papel.	Orientar os alunos a utilizar o GeoGebra naquelas que forem possíveis.
A janela do GeoGebra não abre ou não carrega	Solicitar para atualizar a página
Digitam algum comando errado ou clicam em um botão de forma indesejada.	Solicitar para utilizar o botão refazer
Marcam ponto a ponto na janela de visualização	Questiona se há outra possibilidade de representação, pede para relatar no caderno como fizeram
Digitam no campo entrada a função f(x)=2^x	Solicitar para verificar a hipótese dada, e se esta função a atende.
Respondem corretamente utilizando a função f(x)=log2 x	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Respondem corretamente utilizando tabela	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.

Respondem corretamente digitando a função	Solicitar para os alunos verificarem como a notação foi feita, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Não identificam as colunas (ou linhas) na tabela	Questionar o que cada coluna (ou linha) representa na tabela
 Clicam na opção 2 da tabela (aparece algumas opções ao lado da janela de visualização)	Mostrar a opção “três pontos” em que é possível fechar a janela.
Clicam na lupa	Mostrar a opção de voltar
Aumentam muito o zoom na janela de visualização	Orientar para que cliquem no botão de desfazer

b) Quais outras representações possíveis para expressar essa relação que não é possível fazer no GeoGebra?

Ações do aluno	**Ações do professor**
Fazem utilizam a definição de forma errada.	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Fazem apenas máquina de transformação	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Fazem apenas diagramas	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Fazem utilizam a definição de forma errada.	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Fazem apenas máquina de transformação	Solicitar para os alunos verificarem como ficou, se a relação está correta, questiona como fizeram, como pensaram, pede para que relatem isso na folha. Perguntar se há outra forma de representação.
Respondem corretamente utilizando tabela	Solicitar para verifiquem a possibilidade de fazer no GeoGebra caso não tenham feito.

c) Que observações podemos estabelecer entre as representações da relação matemática obtida no item “a e b” e as relações obtidas na tarefa 01? Explique**.**

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não lembram da função da tarefa 01	Questiona e solicita que olhem as anotações realizadas da tarefa 01
Acham que é a mesma relação	Solicitar que observem atentamente as variáveis dependentes e independentes nas duas tarefas.
Não conseguem estabelecer a relação da tarefa 02	Instruir para que revejam os itens anteriores novamente.
Falam que deu a invertido	Solicitar que justifiquem como chegaram a essa conclusão, que elementos os fizeram concluir isso.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

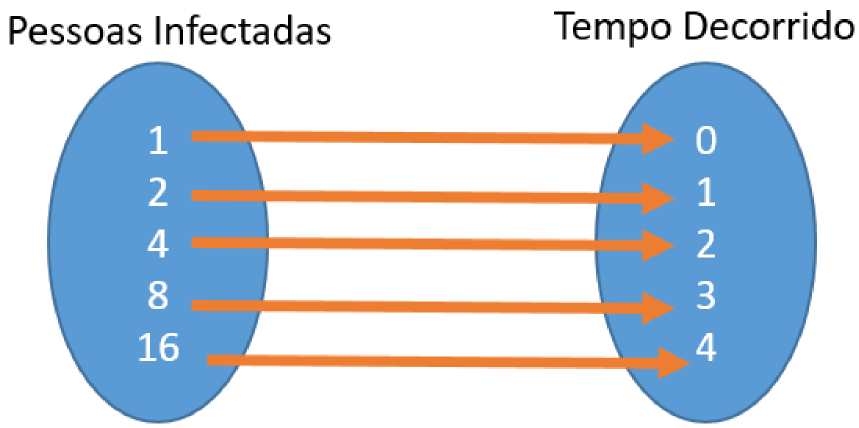
Nesta fase o professor precisará organizar como os alunos farão a apresentação das resoluções que obtiveram no processo de resolução da tarefa. O professor coordena as apresentações das resoluções dos alunos neste momento. Como esta fase não será no mesmo dia, o professor terá um tempo para elaborar um roteiro de apresentações, baseado na forma como os alunos desenvolveram a tarefa, serão utilizados alguns critérios para a seleção destas tarefas, critérios tais como: raciocínio diferenciado, erros que foram recorrentes, entre outros.

4.4 Sistematização das aprendizagens

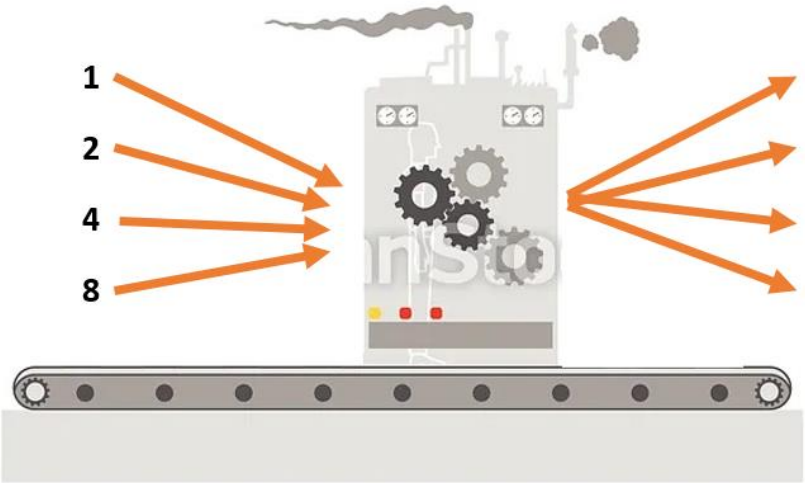
Nesta última fase com as discussões encerradas, o professor inicia a fase da sistematização das tarefas estabelecendo conexões com cada uma das fases desenvolvidas, considerando sempre os objetivos da tarefa, nesta fase os alunos devem fazer suas respectivas anotações sobre a construção coletiva dos conceitos da tarefa em seus cadernos.

Como os alunos já tiveram um contato com o as diferentes formas de representação de uma função (tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrica, generalização, gráfica e definição) espera-se que utilizem algumas delas para representar os valores da função na letra “a”.

Diagramas:



Máquina de transformação:

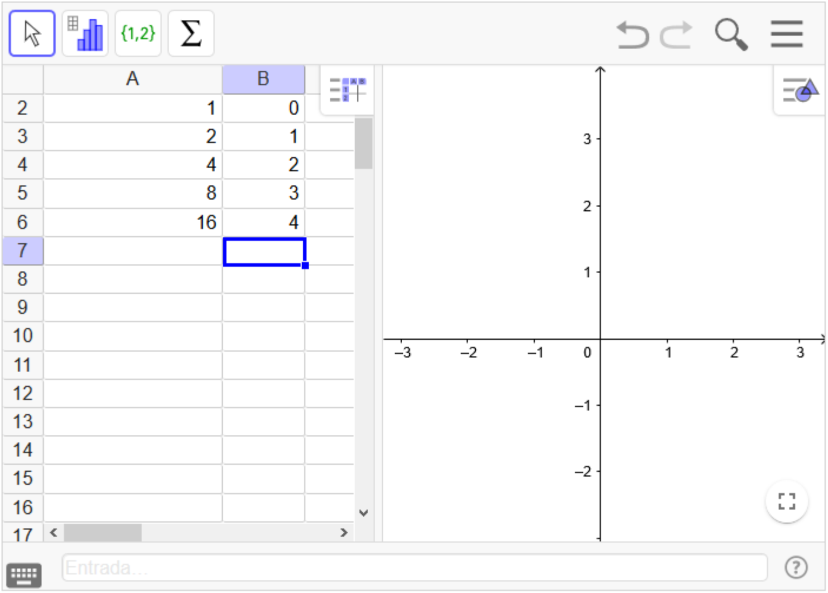


Generalização

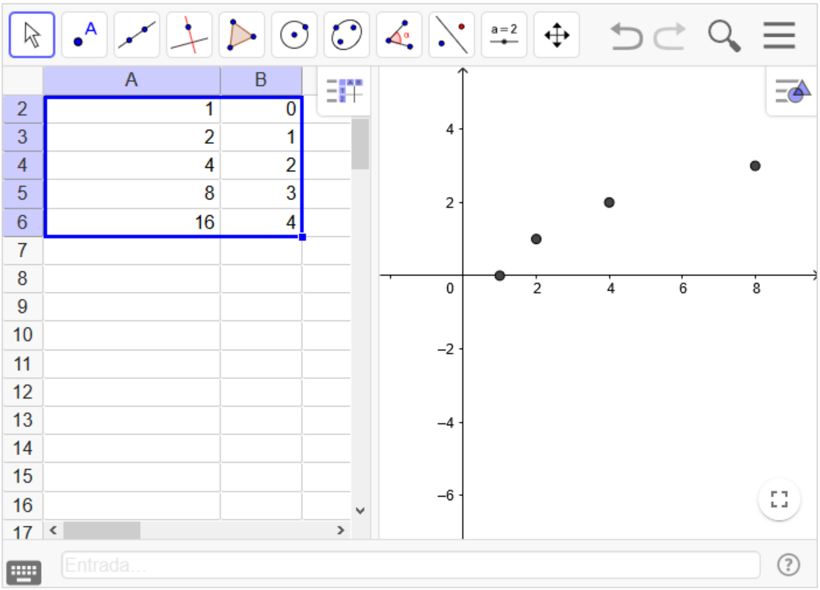
Na generalização os alunos descrevem o que está acontecendo dessa forma eles poderiam dizer que: "temos uma pessoa infectada na semana inicial (zero), duas pessoas na infectadas na primeira semana, 4 pessoas infectadas na segundo semana, 8 pessoas infectadas na terceira semana e assim por diante…"

Observação: Estas três primeiras representações os alunos não conseguem fazer diretamente no GeoGebra. Será necessário o envio do registro escrito.

Tabular



Gráfica



Observação: Lembrar os alunos que com a tabela construída é possível inserir os pontos no gráfico diretamente com a ferramenta *lista de pontos*, sem precisar inserir ponto a ponto.

Algébrica

A representação algébrica dessa função é pode ser a mais complexa de todas, pois os alunos precisaram utilizar o conceito de logaritmo na sua construção. Para determinação desta função vamos utilizar o conceito de função inversa de modo que fog(x)=Ix, isto é, f(x) composta com g(x) é igual a identidade. Assim vamos determinar a função inversa de f(x)=2^x, como veremos abaixo, para determinar a inversa de vamos reescrevê-la.

Seja f(x)=2^x, para determinar a inversa de f vamos reescrever ela da seguinte forma y=2^x. Após isso, vamos inverter as variáveis dependentes e independentes, x=2^y e partir disso vamos isolar y.

$$x = 2^y$$

$$\log x = \log 2^y$$

$$\log x = y.\log 2$$

$$\frac{\log x}{\log 2} = y$$

$$\log_2 x = y$$

$$y = \log_2 x$$

Definição

Uma função logarítmica pode ser dada pela seguinte lei de formação f(x) = logax. Neste caso "a" é a base positiva (a > 0) e sempre diferente de 1. Nessa função, o logaritmo de base "a", está ligado a determinado valor de b, cujo expoente igual a x, que é a potência da base. Assim temos:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

5. Avaliação

A avaliação ocorrerá ao longo do processo da aplicação da tarefa. A participação e comprometimento dos alunos será considerado, bem como os registros que eles deverão fazer com suas conclusões tanto no caderno quanto no GeoGebra.

APÊNDICE 4 - TAREFA O CORONAVÍRUS E O SEU CONTÁGIO

Instituição: Instituto Federal do Paraná – Campus Palmas.

Professor: Andrei Cristiano Maia e Silva

Disciplina: Matemática

Turma: Técnico em Alimentos integrado ao Ensino Médio

O coronavírus e o seu contágio

01) O Coronavírus pode ser transmitido de pessoa a pessoa caso não seja adotado nenhum método de cuidado. Em certos momentos a taxa de transmissão da Covid 19 esteve próxima de dois, isto é, uma pessoa contaminada infecta outras duas pessoas saudáveis. Considere a seguinte hipótese: "uma *pessoa infectada transmite o vírus a outras duas pessoas saudáveis a cada semana".*

a) Construa no GeoGebra diferentes representações que relacionem a quantidade de pessoas infectadas com o passar do tempo.

b) Quais outras representações possíveis para expressar essa relação que não é possível fazer no GeoGebra?

c) Que observações podemos estabelecer entre as representações da relação matemática obtida no item "a e b" e as relações obtidas na tarefa 01? Explique**.**

Envio das resoluções

Após a resolução dos itens da tarefa você deve fazer o envio das fotos da resolução para o professor no WhatsApp.