

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

**ENTRE O PLANO E O ESPAÇO: AS RELAÇÕES ENTRE FIGURAS
PLANAS E ESPACIAIS EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA OS ANOS FINAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

Renata Camargo dos Passos Barros

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

**ENTRE O PLANO E O ESPAÇO: AS RELAÇÕES ENTRE FIGURAS PLANAS E
ESPACIAIS EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA
PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Renata Camargo dos Passos Barros

Orientadora:
Dra. Regina Maria Pavanello

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, Linguagens e Práticas Formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Maringá
Setembro de 2021

Ficha de identificação da obra elaborada pela Biblioteca
UNESPAR/Campus de Campo Mourão
Bibliotecária Responsável: Liane Cordeiro da Silva CRB 1153/9

B277e Barros, Renata Camargo dos Passos
Entre o plano e o espaço: as relações entre figuras planas e espaciais em uma coleção de livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental. / Renata Camargo dos Passos Barros. -- Campo Mourão - PR, 2021.
99 f. : il.; color.

Orientador(a): Dra. Regina Maria Pavanello
Dissertação (Mestrado) – UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), 2021.
Linha de Pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática.

1. Matemática-Estudo e Ensino. 2. Geometria. 3. Livro Didático. I. Pavanello, Regina Maria. (orient). II. Universidade Estadual do Paraná–Campus Campo Mourão, PR. III. UNESPAR. IV. Título.

Renata Camargo dos Passos Barros

Comissão Examinadora:



Dra. Regina Maria Pavanello – Presidente da Comissão Examinadora
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ



Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ



Dr. Sado Ag Almouloud
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA

Resultado: Aprovada

Maringá,
Setembro de 2021

Dedico o presente trabalho aos meus filhos, Moisés V. O. Barros e Rúbia V. O Barros, aos meus pais, Cicero e Maria Inês, que sempre estiveram ao meu lado e acreditaram que isso um dia seria possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me permitido chegar até aqui. Pela proteção durante todo o período em que foi preciso pegar estrada, por nunca me deixar desistir e sempre perseverar.

Agradeço e dedico esse trabalho aos meus filhos amados, Moisés Viana dos Passos e Rúbia Viana dos Passos, pois são eles os meus maiores apoiadores e razão do meu viver. Compreenderam a ausência e o nervosismo da mãe por um longo período e, mesmo assim, o amor deles não diminuiu em nada por mim. Sempre ao meu lado, me restabelecendo e recarregando minhas forças para que pudesse continuar.

Minha eterna gratidão aos meus amados pais, Cicero Viana dos Passos e Maria Inês Camargo dos Passos, que mesmo de longe sempre torceram e acreditaram em meu potencial. Desde muito menina ainda, foram eles que sempre me incentivaram a estudar e mesmo nas dificuldades, nunca deixaram que nada me faltasse. O amor deles com certeza foi essencial para que eu me tornasse a pessoa que hoje sou. São meus verdadeiros heróis!

E como não citar e agradecer meu esposo também, Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros, que cuidou de tudo para que eu pudesse me dedicar apenas aos estudos. Foi ouvinte, companheiro, leitor, foi meu norte em todos os sentidos. Com sua paciência infinita permaneceu ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná – PRPGEM, por todos os ensinamentos e momentos que, com certeza, estarão para sempre em meu coração.

Em especial à minha orientadora Profa. Dra. Regina Maria Pavanello que, com toda sua paciência e carinho indiscutíveis, caminhou junto a mim, me fazendo parar e respirar muitas vezes... e juntas encontramos nosso ritmo de trabalho. Minha eterna gratidão e admiração pela pessoa e profissional ímpar que é.

Aos professores Prof.a Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira e Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, que aceitaram compor a minha banca. Meu muitíssimo obrigada pelos olhares atenciosos e por todas as contribuições valiosas com a minha pesquisa!

Às melhores amigas que eu poderia sonhar em construir durante essa caminhada, Cássia e Cristiane. A vocês, amigas, minha admiração pelas profissionais dedicadas e incríveis, gratidão por tantos ensinamentos e pelo lindo elo que construímos e levaremos para toda vida.

Agradeço a todos os colegas da primeira turma do PRPGEM, por todos os momentos de troca e aprendizados coletivos.

Não poderia deixar de mencionar e agradecer minha melhor amiga e irmã de alma, Daniela, que escreveu um poema tão especial em minha homenagem que o trago em seguida para que todos que ao lerem meu trabalho também conheçam e admirem o dom e a pureza que emana de seu coração.

*“Quando alguém se
reencontra com seus sonhos,
uma estrela nasce.
E uma porção de Fé
é resgatada.
Quando alguém luta por eles,
o universo devolve em
um sopro de Força, e desperta
os corações desacreditados.
Quando alguém os conquista,
A vida vence!
E celebra a alegria e a honra da vitória.”*

(Daniela)

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar como são apresentadas as relações entre figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais na coleção A Conquista da Matemática (Editora FTD) recomendada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e adotada pela secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED), para ser utilizado em sala de aula nos Anos Finais do Ensino Fundamental, a partir de 2020. A presente pesquisa se caracteriza como pesquisa qualitativa com delineamento documental (Gil, 2002) e a organização dos dados foi norteada por uma adaptação da análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). A organização da análise consistiu-se em três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. Foram analisados os volumes da coleção referentes aos quatro anos finais do Ensino Fundamental, buscando identificar se a transição entre as figuras geométricas bi e tridimensionais se fazem neles presentes e de que modo. Buscamos também nos documentos oficiais – a Base Comum Curricular – BNCC (2018) e os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNS (2008), entender como os conteúdos geométricos estariam distribuídos para os Anos Finais do Ensino Fundamental. A análise dos dados foi realizada à luz do modelo de Van Hiele, e de autores como Crowley (1987), Usiskin (1987), Fainguelernt (2011), Kaleff (1998), buscando em outros autores que contribuem para discussão acerca do ensino e da aprendizagem da Geometria à luz do referido modelo. Nela foi considerada também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1994, 1995, 2012) com o objetivo de analisar as possibilidades proporcionadas pelas figuras utilizadas nos livros para a mobilização das apreensões perceptivas e discursivas pelos alunos dessa etapa da escolarização. As análises revelaram que, embora a Base Comum Curricular – BNCC (2019) aponte a necessidade da retomada dos objetos geométricos bi e tridimensionais no decorrer dos Anos Finais do Ensino Fundamental, as atividades propostas envolvendo conceitos geométricos planos e espaciais são tratadas apenas de forma sucinta nos volumes seis e nove da coleção. Fato que ocasiona uma quebra no desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno, segundo os níveis do modelo de Van Hiele, dado que, de acordo com tal modelo, tal construção e avanço entre os níveis, só ocorre se for propiciada uma constante construção e retomada de saberes. Por outro lado, nas atividades apresentadas os tratamentos discursivos e os figurais nem sempre ocorriam de modo simultâneo e de forma interativa, o que pode também interferir na compreensão – e, portanto – na aprendizagem dos alunos. Concluindo, observou-se, mediante a pesquisa, que nos quatro livros da coleção há poucas oportunidades de os alunos voltarem a examinar as relações entre figuras geométricas planas e espaciais. Se considerarmos, além disso, as pesquisas que apontam que tais figuras nem sempre são apresentadas e trabalhadas com os alunos dos Anos Iniciais, seriam de esperar as dificuldades de alunos do Ensino Médio em relação ao tema, como apontado em pesquisas apresentadas no presente texto.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Van Hiele. Registros de Representações Semiótica. Livro Didático.

ABSTRACT

This research aimed at analyzing how the collection *The Conquest of Mathematics* (FTD Publisher) - recommended by the National Textbook Program (PNLD) and adopted by the State Department of Education of Paraná (SEED) from 2010, presents the relationships between two-dimensional and three-dimensional geometric figures in High School classrooms. It characterizes as qualitative research with documentary design (Gil, 2002) the data organization guided by an adaptation of the content analysis proposed by Bardin (1977). The organization of the analysis consisted of three phases: pre-analysis, material exploration and treatment of results. The analysis of the collection volumes of the four Middle School years were done in order to identify whether the transition between two and three-dimensional geometric figures is present in them and in what way. Analysis of Official documents – such as the Common Curriculum Base - BNCC (2019) and the National Curriculum Parameters - PCNS (2008) – had the intention to understand how the geometric contents distributed through Middle School years. Van Hiele's model and authors such as Crowley (1987), Usiskin (1987), Fainguelernt (2011), Kaleff (1998), contributed to the discussion about teaching and learning of Geometry in the light of the mentioned model. Also considered was the Theory of Semiotic Representation Registers of Raymond Duval (1994, 1995 and 2012) to analyze the possibilities provided by the figures used in the books for the mobilization of perceptual and discursive apprehensions by students of this stage of schooling. The analyses revealed that, although the Common Curricular Base - BNCC (2019) points out the need to resume the two and three-dimensional geometric objects during the Middle School, the proposed activities involving plane and spatial geometric concepts are treated only briefly in volumes six and nine of the collection. This fact causes a break in the development of the student's geometric thinking according to the levels of Van Hiele's model, since according to this model such construction and progress between levels only occurs if with the constant construction and retaking of knowledge. On the other hand, in the activities presented, the discursive and figurative treatments did not always occur simultaneously and interactively, which could interfere in the understanding - and, therefore, in the students' learning. In conclusion, the research enabled to observe that through the four books of the collection there was very little opportunity for students to re-examine the relationships between plane and spatial geometric figures. If we consider, moreover, the research that indicate that such figures are also not always presented and worked with students in Junior High School, one can understand the difficulties presented by High School students in relation to the theme, as they are pointed out in research presented in this text.

Keywords: Geometry teaching. Van Hiele. Textbook.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação	19
Figura 2: Tetraedro Epistemológico e Inter-relações Geométricas	19
Figura 3: Figura geométrica denominada retângulo	21
Figura 4: Desenho/figura	21
Figura 5: Exemplo de registro figural e registro discursivo	51
Figura 6: Exemplo de atividade apresentada no livro do 6º ano	54
Figura 7: Interações cognitivas envolvidas na atividade geométrica	55
Figura 8: Apreensão perceptiva	56
Figura 9: Figuras Geométricas	68
Figura 10: Exemplo de atividade com figuras espaciais	69
Figura 11: Parte teórica do capítulo 3	70
Figura 12: Exemplos de exercícios	71
Figura 13: Exemplos de exercícios	72
Figura 14: Exemplos de exercícios	73
Figura 15: Definindo prismas e pirâmides	74
Figura 16: Planificação de prismas e pirâmides, e tarefas	75
Figura 17: Pense e responda	76
Figura 18: Atividades	77
Figura 19: Atividades 6 e 7	78
Figura 20: Figuras Espaciais	80
Figura 21: Figuras Espaciais (Vistas)	81

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Dissertações e teses que tratam do LD e da Geometria	31
Quadro 2: Periódicos	37
Quadro 3: Nomenclatura de prismas e pirâmides	54
Quadro 4: Unidades analisadas na coleção A Conquista da Matemática	58
Quadro 5: Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC trabalhados no 6º ano ...	59
Quadro 6: Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC para o 7º ano	63
Quadro 7: Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC para o 8º ano	64
Quadro 8: Tópicos de habilidades de Geometria indicados na BNCC para o 9º	65
Quadro 9: Conteúdo de Geometria plana e espacial para o 6º ano	66
Quadro 10: Conteúdo de Geométrico para o 9º ano	67
Quadro 11: Figuras Espaciais	79
Quadro 12: Conteúdos e habilidades para o 6º e 7º ano referentes aos sólidos geométricos ...	82
Quadro 13: Conteúdos e habilidades para o 8º e 9º ano referentes aos sólidos geométricos ...	83

LISTA DE SIGLAS

Anos Finais do Ensino Fundamental - AFEF

Base Nacional Comum - BNCC

Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná - DCEB-PR

Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE

Manual do Professor - MP

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN

Plano Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD

Secretaria de Estado da Educação do Paraná – SEED

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO 1 – A GEOMETRIA E SEU ENSINO	17
1.1 A Geometria no Currículo escolar: Por quê?	17
1.2 Figura, figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais e a relação entre elas	20
1.3 Os alunos e as relações entre as figuras geométricas em sua forma bidimensional e tridimensional	23
1.4 O livro didático como apoio ao ensino da Geometria	25
1.5 Os livros da coleção didática adotada no estado do Paraná e as relações entre as figuras geométricas bi e tridimensionais	27
CAPÍTULO 2 – REVISÃO DA LITERATURA	31
2.1 Revisando teses e dissertações a respeito da análise do livro didático de Matemática; Modelo Van Hiele; Teoria dos Registros de Representações em Semiótica	31
2.2 O que dizem os periódicos a respeito do tema?	37
CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	41
3.1 O pensamento geométrico	41
3.2 O modelo de Van Hiele	41
3.3 Os níveis do modelo de Van Hiele	43
3.4 Propriedades do Modelo de Van Hiele	46
3.5 As etapas de aprendizagem do modelo	48
3.6 A aprendizagem da Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval	50
CAPÍTULO 4 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	57
4.1 Abordagem e objeto de pesquisa	57
CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DA COLEÇÃO: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	61
5.1 Análise geral da coleção em relação a Geometria	62
5.2 Análise individual dos volumes	66
5.2.1 Livro Volume 6	67
5.2.2 Livro volume 9	79
CONCLUSÕES	85
REFERÊNCIAS	91

INTRODUÇÃO

Às vésperas de completar 20 anos de conclusão do curso de licenciatura plena em Matemática, a pesquisadora retomou seus estudos fazendo parte da primeira turma do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - PRPGEM, o que foi a realização de um grande e antigo sonho da época da graduação. Desses quase 20 anos, 15 foram dedicados à docência na educação básica, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental.

A primeira experiência realmente como professora de Matemática foi com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental – AFEF em um colégio particular na cidade de Maringá. Anteriormente a isso, minha experiência tinha sido apenas nos estágios obrigatórios na disciplina de Estágio Supervisionado no último ano da licenciatura.

Com o passar dos anos, além da bagagem adquirida surgiram também algumas inquietações, principalmente no tocante à Geometria. Isso ficava mais evidente a cada ano, com as oportunidades de trabalho que surgiam. O trabalho em diferentes colégios me possibilitou testemunhar o fato de que - tanto na escola pública como na privada, de pequeno ou grande porte - a Geometria era ainda um tópico em que eram grandes as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão e assimilação de conceitos, em especial os relativos a figuras planas e espaciais.

Durante os anos de minha docência ficou evidente que a Geometria ainda é mal compreendida pelos alunos. Para Duval (2011, p. 15), “A aprendizagem da matemática suscita problemas de compreensão que não encontramos nos outros domínios do conhecimento. Nela observamos, em particular, dois tipos de dificuldades, radicalmente diferentes”. Segundo ele, é na matemática que aparecem dificuldades pontuais num curto prazo de tempo que podem estar ou não associadas a um novo assunto, podendo se estender a aparecer em um longo período. Isso porque a Matemática difere das outras áreas do conhecimento, por se fazer necessária a construção e assimilação de conceitos anteriores para prosseguir com um novo. Assim, para o estudo da Geometria, o aluno precisa dominar também outros eixos da Matemática, pois nela nada está desconectado como em outras áreas do conhecimento, como por exemplo em que para se estudar a vegetação da região Norte do Brasil não se faz necessário conhecer o clima da região sul, ou, ainda, quando se estuda plantas não é preciso um pré-conhecimento do corpo humano.

Tal inquietação e preocupação com o Ensino e Aprendizagem da Geometria ganhou uma nova atenção e um outro olhar com o contato com o modelo dos Van Hiele em uma

disciplina do curso de Especialização em Educação Matemática e Ciências, nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e, principalmente, durante a pesquisa desenvolvida como Trabalho de Conclusão de Curso – TCC.

A partir desse trabalho, surgiu o desejo de continuar meus estudos com a Geometria dado que, ao longo dos anos, tenho notado a dificuldade de grande parte dos alunos no estabelecimento de relações entre representações planas e espaciais das figuras geométricas bidimensionais para tridimensionais e vice-versa e tentar compreender o que estaria contribuindo ou, de certa forma inserindo, dificuldades nesse contexto.

Por outro lado, a leitura de textos de alguns autores que utilizavam como referência o trabalho de Raymond Duval em relação ao ensino/aprendizagem da Geometria, me trouxeram novas inquietações, novos questionamentos.

Tais leituras me levaram a indagações em relação às dificuldades relacionadas aos temas geométricos planos e espaciais: “A maneira que os autores abordam e exploram os elementos geométricos planos e espaciais na coleção didática A Conquista da Matemática - adotada pelo governo do Estado do Paraná na rede Estadual de Ensino a partir de 2020 – é capaz de propiciar aos alunos possibilidades de compreensão, tanto na apresentação teórica quanto nas atividades propostas?”; “O Manual do Professor – MP contribui para a ação do professor na condução de estratégias de ensino que favoreçam o relacionamento entre esses conceitos?”.

Tais considerações, por sua vez, me conduziram à necessidade de investigar como está sendo abordado este tema geométrico na referida coleção ao longo dos Anos Finais do Ensino Fundamental (AFEFE) e se essa abordagem leva em consideração o que é recomendado em documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e/os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Nossa pesquisa, conduzida na forma de pesquisa documental, teve como subsídios a leitura das produções dos autores citados e de outros que puderam eventualmente contribuir para melhor avaliarmos a abordagem do tema na referida coleção.

O presente estudo foi estruturado em cinco capítulos. No primeiro, discutimos e tecemos considerações sobre o ensino e aprendizagem da Geometria: Geometria no currículo escolar: por quê? Os alunos e as relações entre figuras geométricas em sua forma bidimensional e tridimensional; O livro didático como apoio ao Ensino de Geometria; Os livros da coleção didática “A Conquista da Matemática” e as relações entre figuras geométricas planas e espaciais.

A seguir, no segundo capítulo, é apresentada a revisão da bibliografia, detalhando as pesquisas que justificaram a escolha e nortearam as análises da pesquisa.

O terceiro capítulo trata-se dos referenciais teóricos que nortearam o trabalho, fornecendo subsídios para tentar responder o problema de pesquisa. Ainda, nesse capítulo, é apresentado o modelo dos Van Hiele sobre os níveis de aprendizagem em Geometria e a noção de registro de representação semiótica, explicando por que optamos por tais modelos.

O quarto capítulo apresenta a metodologia adotada, o objeto de pesquisa, como irá ser realizada a análise dos dados e os descritores para as análises.

No quinto capítulo há as análises que tratam as relações geométricas bi e tridimensionais na coleção A Conquista da Matemática, com a lente do modelo dos Van Hiele buscando também um olhar nos registros de representações semióticas de Duval.

Encerramos com as considerações finais acerca da investigação, suas contribuições, limitações e sugestões para novas pesquisas.

CAPÍTULO 1 - A GEOMETRIA E SEU ENSINO

“A geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para entendê-la e alma para admirá-la”.

Johannes Kepler

1.1 A Geometria no currículo escolar: por quê?

Os documentos oficiais que orientam as práticas curriculares no Brasil apontam sempre os temas geométricos como um dos componentes essenciais ao aprendizado da Matemática. Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) para os AFEF há referência à Geometria e aos seus conceitos geométricos como “[...] parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p.51).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2019), por sua vez, considera a Geometria como a área da Matemática que propicia o estudo das formas geométricas e suas propriedades, bem como pondera que ela “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” e que “estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. (BRASIL, 2019, p. 271).

Mais ainda, ela se torna “[...] um campo muito importante para a descrição e a inter-relação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos alunos” (PASSOS, 2000, p.1).

Lorenzato (1995) já apontava que:

[...] bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p.5).

Para Pires, Curi e Campos (2000), a Geometria (do ensino básico) nada mais é que o estudo dos objetos e do espaço ao nosso redor. O espaço é apresentado ao ser humano de maneira tão natural e prática que a criança adquire suas primeiras noções espaciais por meio dos sentidos e dos movimentos. Esse espaço percebido pela criança, como colocam as autoras, com o tempo passará de espaço perceptivo para representativo, iniciando um progresso por meio do qual “o estudante desenvolve funções psíquicas específicas que lhe permitem compreender, descrever e representar de forma organizada o espaço em que vive” (LOCATELLI, 2015, p.75).

Kobayashi (2001, p. 17) salienta que “Estudar o espaço geométrico é estudar a história da geometria, é retomar às mais simples observações advindas da capacidade dos seres humanos de reconhecer configurações físicas e espaciais, comparar formas e tamanhos”.

Identificamos também que em todo ambiente, seja o do nosso lar, o escolar, o do trabalho, o público, em todos, podemos identificar algo que nos remete à Geometria. Assim,

Em nosso ambiente, estamos cercados por objetos, formas, desenhos e transformações. As propriedades geométricas estão cada vez mais acessíveis e presentes na vida cotidiana, cultural e técnica de nossos dias. Desde a mais tenra infância, se tem o contato diretamente com as formas dos objetos, sejam eles brinquedos ou utensílios cotidianos e familiares. Gradualmente, tomamos posse do espaço, nos orientamos, analisamos formas e procuramos relações espaciais de situação, função ou simplesmente contemplação. Assim, dessa maneira, o conhecimento direto de nosso ambiente espacial é adquirido. Esse conhecimento do espaço ambiental que é apropriado diretamente, primeiro sem raciocínio lógico, é o que constitui intuição geométrica. O primeiro convite para geometria é feito, por tanto, por meio da intuição. (CATALÁ, FLAMARICH, AYMEMMI, 1992, p.14) (tradução nossa)¹.

Fainguelernt (1999, p. 20), ao mesmo tempo aponta que talvez a Geometria seja “[...] a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade”. Salienta que, no contexto escolar, “[...] se apoia no extensivo processo de formalização realizado durante esses dois últimos 2.000 anos, em níveis cada vez de maior rigor, abstração e generalização, e sem fazer conexão entre a Geometria intuitiva e a formalização”. A descreve ainda como uma “[...] ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos” (*ibid.*, p.20).

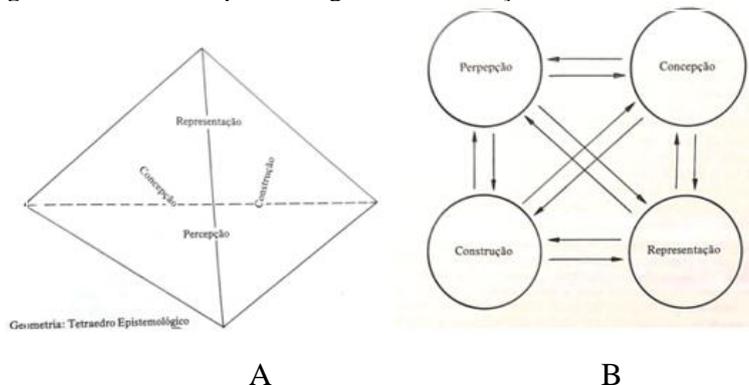
¹ En nuestro entorno ambiental estamos rodeados de objetos, formas, diseños y transformaciones. Las propiedades geométricas son cada vez más accesibles y presentes en la vida cotidiana, cultural y técnica de nuestros días. Desde la más temprana infancia se experimenta directamente con las formas de objetos, ya sean juguetes o utensilios cotidianos y familiares. Paulatinamente vamos tomando posesión del espacio, orientándonos, analizando formas y buscando relaciones espaciales de situación, de función o simplemente de contemplación. Así, de esta manera, se va adquiriendo conocimiento directo de nuestro entorno espacial. Este conocimiento del espacio ambiental que se apropria directamente, primero sin razonamiento lógico, es lo que constituye *la intuición geométrica*. La primera invitación a la Geometría se realiza, así, por medio de la intuición.

A autora acredita ser importante direcionar o aluno “[...] a construir uma ligação entre os diferentes espaços dimensionais em que se vai trabalhar a Geometria, partindo do espaço tridimensional, em que o aluno recebe mais estímulos trabalhando com figuras espaciais, possibilitando percorrer o caminho de ida e de volta” (FAINGUELERNT, 1999, p. 22), conforme ilustra a figura 1.

Figura 1: Representação
 Espaço → Plano → Reta → Ponto
 Fonte: FAINGUELERNT, 1999, p.22

Machado (1990) caracteriza o conhecimento geométrico por meio de quatro aspectos: a percepção, a construção, a representação e a concepção. Estes aspectos são ilustrados pelo autor como faces de um tetraedro representado pela figura 2 – A, logo a seguir, em que todas se articulam mutuamente, configurando a estrutura representada pela figura 2 – B, que representa a maneira pelo qual pode-se aprender o significado e as funções do ensino da Geometria.

Figura 2: Tetraedro Epistemológico e Inter-relações Geométricas



Fonte: (MACHADO, 2001, p.143)

Tais aspectos, segundo o autor, não se sucedem linearmente e nem periodicamente, pois estão todos conectados e fica a cargo do professor propiciar tarefas que permitam ao aluno transitar do objeto (figura¹ tridimensional) para sua representação plana, realizando construções e instituindo concepções, favorecendo a passagem da experiência para organização. O que, de certo modo, corrobora com a teoria do ensino e aprendizado em Geometria dos Van Hiele, para quem, segundo Villiers (2010), um dos obstáculos para o ensino de Geometria estava no

¹ Nesse texto consideraremos “figura” como sendo a representação de um conceito ou uma definição de algum elemento geométrico.

currículo tradicional que não condizia com o nível de maturidade dos alunos, sendo, muitas vezes, expostos a um nível superior ao que eles estavam prontos para acompanhar.

É importante assinalar que, para a BNCC (BRASIL, 2018), a unidade temática Geometria possibilita a integração com outras áreas do conhecimento como Geografia, Artes, Física, Ciências e Educação Física, ampliando conceitos e métodos essenciais para solucionar problemas do cotidiano.

1.2 Figura, figuras bi e tridimensionais e a relação entre elas

A palavra “figura”, dependendo do contexto, pode assumir um significado diferente daquele empregado nos estudos em Geometria. É comum observarmos o uso do termo figura quando se quer indicar a representação de algum objeto ou imagem, seja em livros, revistas, jornais, folders ou até mesmo em um quadro. A busca na literatura por um conceito, nos revelou alguns termos utilizados para definir seu emprego no estudo da Matemática e em especial no tratamento de elementos geométricos.

Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação, fez grandes contribuições para área de Educação Matemática. “Duval foi um pesquisador francês do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática – IREM de Estrasburgo, França, no período de 1970 a 1995. Atualmente, é professor emérito em Ciências da Educação da *Université du Littoral Côte d’Opale* [...]” (FREITAS, REZENDE, 2013, p. 10).

Duval (2012a) define uma figura como sendo:

Uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto e contínuo. As zonas caracterizam-se pela sua forma, quer dizer, pelo seu contorno: um traço ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo. (DUVAL, 2012a, p. 121).

Já para Kaleff (2012), a palavra “figura” e as expressões “figura matemática” são bem propícias quando exploradas em situações matemáticas. Para a autora,

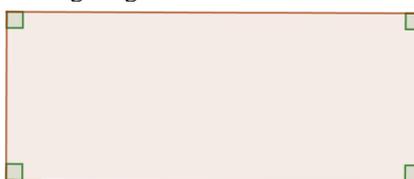
O termo figura designa qualquer organização de elementos gráficos que emerge de um fundo uniforme por meio da presença de pontos, traços ou elementos de uma superfície (sombreados ou coloridos), representando uma unidade (ou congregação de elementos) de informação. Uma figura pode ser apresentada em um meio gráfico convencional (papel) ou especial (tela de vídeo, tecelagem, pintura, murais e outros). Por sua vez, uma figura é considerada uma figura matemática quando preenche exigências específicas relativas a duas maneiras de ser representada: por um lado, em uma forma de proposições expressas em linguagem natural ou simbólica formal, representando suas propriedades matemáticas características. (KALEFF, 2008, p.16).

A pesquisadora salienta que, em se tratando da figura geométrica euclidiana, essa pode ser caracterizada por “[...] uma figura composta por traços obtidos por meio de ferramentas de desenho (régua, esquadro, compasso, curvas francesas etc.), ou outras mais atuais, como as advindas do uso do computador (por exemplo, por meio de softwares da geometria dinâmica)” (*ibid.*). A figura também pode estar acompanhada de um discurso expresso na linguagem natural que elucida proposições e evidencia suas propriedades geométricas. Assim, haverá sempre um elo entre o desenho e o objeto abstrato da Matemática. Esse elo é constituído pelo conjunto das propriedades que descrevam o que seja uma figura em Matemática.

Segundo Kaleff (2008), uma figura matemática sempre estará acompanhada de uma legenda, mesmo que esteja subentendida. Portanto, na Matemática não há figura sem legenda, embora essa, por vezes, esteja implícita.

Observando o desenho de um retângulo, este só pode ser considerado como o de uma figura geométrica euclidiana se, de fato, seus atributos geométricos estiverem, de alguma maneira, sendo considerados, pois, um desenho pode ser um esquema de traços sem ter relação com a Matemática. Ao considerarmos, por exemplo, isso é um retângulo (figura 3), levaremos em conta que a figura desenhada possui as características de ter dois lados paralelos e congruentes dois a dois e quatro ângulos retos.

Figura 3: Figura geométrica denominada retângulo



Fonte: A autora (2021)

Desse modo, o simples desenho do que seria a representação de uma figura retangular (figura 4), por mais semelhanças que esse apresente com a figura geométrica retângulo, não possibilita identificarmos se essas características estão presentes em seus traços.

Figura 4: Desenho/figura qualquer



Fonte: A autora (2021)

Para Fischbein (1993), o termo “figura” é enigmático e pode revelar uma variedade de significados. Para o autor,

Normalmente, uma figura possui uma determinada estrutura, uma forma ou “Gestalt”¹. As figuras geométricas correspondem a esta descrição, mas algumas especificações devem ser adicionadas: (a) uma figura geométrica é uma imagem mental, cujas propriedades são completamente controladas por uma definição; (b) um desenho não é a própria figura geométrica, mas uma representação gráfica ou concreta dela; (c) a imagem mental de uma figura geométrica é, normalmente, a representação do modelo materializado dela. A própria figura geométrica é apenas a ideia correspondente que é a entidade figural abstrata, idealizada, purificada, estritamente determinada por sua definição. (FISCHBEIN, 1993, p.149, tradução nossa²).

De acordo com Duval (2012a), uma figura geométrica é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva, pois é necessário ver a figura geométrica a partir do que é falado e não apenas por meio das formas que se destacam ou das propriedades que ela possa evidenciar. Isso será discutido com mais propriedade no capítulo três (3), em que abordamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Nessa pesquisa trataremos “figura” e “figura geométrica” de acordo com Fischbein (1993). Assim, trataremos uma figura geométrica plana, também conhecida como figura geométrica bidimensional, como uma figura que possa ser representada em duas dimensões, ou seja, é possível observar tanto a largura quanto o comprimento da figura. Quanto à figura geométrica espacial que conhecemos também por figura geométrica tridimensional, ela será toda figura na qual seja possível identificar três dimensões: altura, comprimento e largura.

Quanto às relações entre as figuras bi e tridimensionais, consideraremos o tratamento da passagem do bidimensional para o tridimensional e do tri para o bi, principalmente quando se tratar de uma figura tridimensional e a partir dela deseje-se identificar por meio de sua planificação, quais figuras geométricas bidimensionais a compõe.

¹ A gestalt, também conhecida como gestaltismo, teoria da forma, psicologia da gestalt, psicologia da boa forma e leis da gestalt, é uma doutrina que defende que para se compreender as partes é preciso, antes, compreender o todo (<https://pt.wikipedia.org/wiki/Gestalt>).

² Usually, a figure possesses a certain structure, a shape or “Gestalt”. Geometrical figures correspond to this description, but some specifications have to be added: (a) a geometrical figure is a mental image, the properties of which are completely controlled by a definition; (b) a drawing is not the geometrical figure itself, but a graphical or a concrete, material embodiment of it; (c) the mental image of geometrical figure is, usually, the representation of the materialized model of it. The geometrical figure itself is Only the corresponding idea that abstract, idealized, purified figural entity strictly determined by its definition.

1.3 Os alunos e as relações entre as figuras geométricas em sua forma bidimensional e tridimensional

Dentre os temas geométricos abordados nos AFEF, um item que se apresenta como uma dificuldade entre alunos e professores é o das representações das figuras geométricas apresentadas em sua forma bi ou tridimensional.

Embora formas bi e tridimensionais, como apontam Bardini, Amaral-Schio, Mazzi (2019), estão presentes em alguns livros didáticos já para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental de maneira bem natural, o que se observa é que muitos alunos chegam nos AFEF sem reconhecer as diferenças entre a representação geométrica de um triângulo e a de uma pirâmide.

Aliás, Araújo (1994) já apontava ser extremamente fácil encontrar alunos em toda a Educação Básica e até mesmo professores que confundiam “o cubo com o quadrado; não identificam propriedades comuns ao quadrado e ao losango, ou quadrado e ao retângulo; mudam o conceito que têm de determinadas figuras geométricas, [...]” (ARAÚJO, 1994, p. 13), quando estas aparecem representadas em posição que diverge daquelas que habitualmente são apresentadas em livros didáticos. Sobre as dificuldades dos alunos (e professores) dos AFEF relacionadas às representações de figuras geométricas bi e tridimensionais, uma breve consulta ao Google nos proporcionou verificar como elas são comumente observadas por diferentes pesquisadores.

Essas dificuldades em estabelecer relações entre o bi e o tridimensional são apontadas, por exemplo, nos trabalhos de Silva e Santos (2018), Costa, Bermejo e Moraes (2009), Oliveira, Lopez e Cardoso (2016), Liao, Almeida e Motta (2021), Settimy e Bairral (2020).

Silva e Santos (2018) investigaram tarefas de Geometria que envolviam representações bidimensionais de construções com Policubos em alunos do 6º ano retiradas de provas de avaliação externa. Constataram que alguns alunos entre 11 e 12 anos ainda apresentam dificuldades em relacionar representações bidimensionais a partir de sólidos que as representam, como também na visualização das partes ocultas dos objetos que as compõem, porque ainda não conseguem realizar uma estruturação espacial correta de sua construção. Identificaram também a necessidade de se ter tarefas que possibilitem mais a construção e manipulação de representações mentais de objetos tridimensionais e a percepção de um objeto a partir de diferentes vistas.

Costa, Bermejo e Moraes (2009) identificaram dificuldades entre alunos do Ensino Médio, inclusive entre professores quanto à visualização e representação geométrica, linguagem, uso de fórmulas e a relação com os sólidos.

Oliveira, Lopez e Cardoso (2016) propuseram um minicurso destinado a professores de todos os níveis e alunos da Graduação em Licenciatura em Matemática, como também para o público em geral. Isso possibilitou momentos de estudos e reflexões sobre a importância da transição do plano bidimensional ao tridimensional, em que exploraram conceitos espaciais dos sólidos platônicos, partindo do bidimensional (conhecimento de triângulos) para o tridimensional facilitando assim a compreensão e a diferenciação do plano e do espaço.

Liao, Almeida e Motta (2021) trabalharam com acadêmicos do curso de Pedagogia a utilização de um aplicativo, o qual possibilita a visualização de objetos tridimensionais a partir de suas planificações. Constataram, assim, em suas análises que há dificuldades significativas por parte dos futuros professores de matemática dos anos iniciais, sobretudo em reconhecer e diferenciar objetos planos e espaciais.

Settimy e Bairral (2020) investigaram como poderia ser o aprendizado de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental em idades entre 11 e 14 anos, com atividades de Geometria Espacial, com diversos recursos como papel e lápis, planificações articuladas, sólidos em acrílico. Identificando, ao final, a necessidade da implementação de mais atividades com foco na visualização e na representação dos objetos trabalhados.

Lopes, Cardoso, Oliveira e Schubert (2016) desenvolveram atividades com alunos de um 5º ano, os quais apresentavam dificuldades nas relações entre formas uni, bi e tridimensionais, conforme apontou a professora responsável pela turma. Tais tarefas foram pensadas com o objetivo de despertar o interesse nos alunos pela Geometria e para que identificassem as formas bi e tridimensionais tanto dos objetos apresentados a eles quanto a partir de suas planificações. Para que os alunos percebessem mais facilmente como as formas tridimensionais estão inseridas em seu cotidiano, foram desenvolvidas tarefas também com o *software SketchUp*, permitindo a eles a criação de formas tri a partir de formas bidimensionais. Ao final do trabalho, puderam perceber que os alunos obtiveram um melhor entendimento dos conhecimentos abordados em sala de aula e como a Geometria se encontra presente e faz parte de sua rotina.

A pesquisa realizada por Vasconcellos (2008) apontou que, embora os alunos tenham vivenciado situações relacionadas às figuras bi e tridimensionais nos quatro anos do Ensino

Fundamental¹, ainda assim ao final da 4ª série, muitas crianças demonstravam dificuldade na identificação das figuras apresentadas de forma tridimensional. A pesquisadora identificou que os alunos “[...] continuavam a confundir seus nomes, chamando, por exemplo, o cubo de quadrado, o paralelepípedo de retângulo, bem como não reconhecendo as mesmas figuras em diferentes posições” (VASCONCELLOS, 2008, p.78). No final de sua pesquisa inferiu também a falta de compreensão dos conceitos geométricos por parte dos professores entrevistados, o que pode contribuir significativamente para a falta de conhecimento demonstrada pelos alunos na realização das tarefas propostas em sua pesquisa.

Dada esta dificuldade, inclusive dos professores, em relação aos conteúdos de geometria, o ensino realizado por eles e a aprendizagem dos alunos ficam ainda mais dependentes de como tais temas são abordados no livro didático e nas informações dadas aos mestres no manual a eles destinado.

1.4 O Livro Didático como apoio ao Ensino da Geometria

O livro didático é apontado como um dos mais importantes instrumentos de apoio ao professor para o desenvolvimento das atividades em sala de aula, conforme apontam pesquisas da área, tais como Lajolo (1996); Bastos (2004); Costa e Allevato (2010); Silva e Siqueira (2016); Cury (2019); Macêdo, Brandão e Nunes (2019).

De acordo com Costa e Allevato (2010), o livro didático possibilita ao professor um aprimoramento a respeito do conteúdo e, para os alunos, ele é uma rica fonte de informações, dessa forma, deveria despertar o gosto e o interesse pela leitura, contribuindo no avanço de seus estudos.

Kluppel e Brandt (2014, p. 113) consideram “[...] que os livros didáticos nas salas de aulas das escolas brasileiras cumprem importante função no processo educativo, devido à pluralidade de interpretações e usos, além das informações acerca do processo de ensino e sua influência na organização do currículo [...]”.

Como lembra Lajolo (1996), em nossa sociedade, os livros didáticos e não didáticos são essenciais, tanto para elaboração quanto para a transmissão e sistematização de saberes, cuja responsabilidade de disseminação é da escola. Quanto ao livro didático, a autora ressalta que ele desempenha/exerce um considerável papel na escola brasileira, motivo pelo qual é

¹ Na época o Ensino Fundamental era de quatro anos.

necessário que esteja inserido em políticas educacionais que contribuam para proporcionar o direito a uma boa educação para todas as crianças. Ressalta ainda a real importância da participação do professor no processo de sua escolha, pois é ele (o professor) que irá utilizá-lo juntamente com seus alunos e transformá-lo em um instrumento de aprendizagem.

Lopes (2007) salienta que, mais do que tudo

O livro didático é tido como um padrão curricular desejável, mesmo quando se considera a possibilidade de que ele seja modificado de alguma forma. A defesa de sua distribuição às escolas é primordialmente vista como a forma mais efetiva de apresentar uma proposta curricular aos professores e alunos e não apenas mais uma produção cultural dentre outras (LOPES, 2007, p.212).

No entanto, como assinala Oliveira (2007), fazer um bom uso do livro didático, compreendê-lo e bem utilizá-lo envolve aspectos como: tratamento de conteúdos pré-estabelecidos e suas descrições, teoria e escolha de uma metodologia que a atenda satisfatoriamente e um bom manual de orientações ao professor.

Por outro lado, o livro didático, por si só, não garante a aprendizagem dos alunos, mesmo porque ele pode apresentar incorreções. Daí a importância da escolha de um livro didático que não apresente incorreções para que o professor possa não só utilizá-lo em sua prática letiva como obtendo nele informações que possam auxiliá-lo verdadeiramente em sua tarefa pedagógica.

Foi pensando na necessidade de haver bons livros à escolha do professor que foi criado, em 1985, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que, sob a responsabilidade do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), passou a ter a responsabilidade de distribuir, a todas as escolas públicas brasileiras, obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, com exceção da Educação Infantil.

Considerando a necessidade de que o material que venha a ser adotado apresente um texto de qualidade e uma temática relevante quanto aos conteúdos abordados, teve início, em 1996, um processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos no PNLD e o primeiro Guia de Livros Didáticos destinados inicialmente apenas para as séries iniciais do ensino fundamental. Em 1997, o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) passa a ter o controle absoluto pela política de execução do PNLD, o programa é ampliado e o Ministério da Educação passa a adquirir livros didáticos para todos os alunos de escolas públicas do ensino fundamental.

Nos anos seguintes, com base alicerçada no padrão curricular do momento, o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos no PNLD é estendido a toda Educação Básica, E, a partir da avaliação e, com base nela, são editados os Guias de Livros Didáticos de cada área do ensino, que serão distribuídos às redes públicas de educação, as quais encaminham para servir de base para as escolhas dos professores de cada uma de suas escolas.

Em relação à Geometria, de acordo com o guia do PNLD (2020, p. 23) os livros de Matemática aprovados e analisados devem “[...] desenvolver o pensamento geométrico por meio do estudo de posição e deslocamento no espaço e de formas e relações entre figuras planas e espaciais, da investigação de propriedades, da elaboração de conjecturas e da produção de argumentos geométricos convincentes”. Isso porque em Geometria é possível “[...] desenvolver no aluno a percepção de figuras geométricas em objetos e construções, bem como a observação do mundo real e suas relações com os objetos matemáticos” (*ibid.*, p.101).

O Guia também menciona que a unidade temática Geometria é abordada em todas as obras por ele analisadas em uma articulação com as outras unidades. “Percebe-se, nessa unidade temática, um trabalho diferenciado, que não está centrado na fragmentação do conteúdo, e sim na perspectiva da história da Matemática, cujas principais ideias são: construção, representação e interdependência” (BRASIL, 2019, p. 95).

Também ressalta que atividades que explorem a planificação podem favorecer o aprendizado e a compreensão de conceitos geométricos planos e espaciais pelos alunos. Ainda que, ao tratar de entes geométricos, nesta perspectiva, acaba possibilitando ao professor explorar no ambiente escolar da criança uma identificação de objetos bi e tridimensionais que fazem parte do seu meio, além de possibilitar o desenvolvimento do pensamento geométrico no aluno.

1.5 Os Livros da Coleção Didática adotada no Estado do Paraná e as relações entre as figuras geométricas Bi e Tridimensionais

Dentre as obras analisadas e aprovadas pelo PNLD, para o ano de 2020, está a coleção A Conquista da Matemática que, de acordo com a Secretaria de Estado da Educação do Paraná¹ (SEED), foi a escolhida a partir das respostas de professores e alunos a uma consulta pública realizada sobre material didático realizada em abril de 2019, que contou com a participação de

¹ <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=2785>

mais de 22 mil estudantes e de mais de 9 mil professores. A coleção seria utilizada pela rede em todos os anos da AFEF no ano letivo de 2020.

Segundo a SEED, estas são algumas características apontadas por professores e alunos da rede estadual de educação para essa escolha:

- Organização de conteúdos próxima ao do Referencial Curricular do Paraná;
- Comentários e sugestões relacionadas a estratégias exequíveis e possíveis de serem aplicadas em sala de aula;
- Possibilidade de adaptação aos textos e conteúdos referentes a assuntos do contexto local;
- Sugestões de novas intervenções pedagógicas e revisões das estratégias de ensino caso se observe que não houve domínio do conteúdo;
- Sugestões de diferentes metodologias para o trabalho com estudantes com dificuldades de aprendizado, com deficiência e altas habilidades;
- Sugestões para gestão de sala de aula, como sugestão de tempo de duração de cada atividade, possibilidades para organização da sala de aula, etc.;
- Comentários, sugestões e respostas das atividades em destaque para facilitar a visualização.

Como a coleção aqui analisada pertence ao Catálogo do PNLD 2020, a obra já passou por uma criteriosa avaliação pelo Ministério da Educação (MEC), o que nos permite inferir que seja isenta de erros de conceitos, de digitação, contenha exercícios mal elaborados ou não apresente informações básicas.

É importante observar, no entanto, que a trajetória da Geometria nos livros didáticos merece um olhar mais atencioso. Conforme aponta Amaral-Schio (2018, p. 128): “Em meados das décadas de 80 e 90, esse conteúdo constava no final dos livros, de modo que se os professores não cumprissem todo o conteúdo do livro, os alunos ficavam prejudicados, pois não era estudado”.

Há alguns anos, porém, se tem observado que os tópicos de Geometria se mostram presentes ao longo do livro como apontaram Kluppel e Brandt (2012); Godoy (2016). Embora, como apontem Kluppel e Brandt (2012), se observe que alguns livros trazem “[...] definições de polígonos, figuras planas e triângulos somente na forma escrita e não ilustram essas definições, além de trazerem exercícios sem informações relevantes para os alunos”.

Em relação ao livro didático, alguns autores tecem considerações quanto às funções da relação do livro didático com o aluno e o professor. Gerard e Roegiers (1998, *apud* COSTA e ALLEVATO, 2010, p. 73), por exemplo, expõem algumas delas:

- Com relação ao aluno, as funções mais importantes, segundo os autores, são: - o favorecimento da aquisição de conhecimento socialmente relevante; - o desenvolvimento das competências cognitivas, que contribuem para a autonomia dos

alunos; - a consolidação, ampliação, aprofundamento e integração dos conhecimentos adquiridos; - o auxílio na avaliação da aprendizagem; e – a formação social e cultural dos alunos, além de desenvolver a capacidade de convivência e exercício da cidadania. Com relação aos professores, as funções mais importantes são: - o auxílio no preparo e planejamento de suas aulas; - o desenvolvimento da aquisição dos conhecimentos; - o favorecimento da formação didático pedagógica; - o auxílio na avaliação da aprendizagem dos alunos.

As dificuldades já apontadas na seção 1.2, de professores e alunos dos AFEF em relação às figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, nos levam a considerar a necessidade de um olhar mais acurado sobre como esse tema é tratado na coleção em foco ao longo dos AFEF.

Essas dificuldades nos fazem refletir sobre o ensino e aprendizagem da Geometria em toda Educação Básica. Os professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, por sua vez, trazem consigo dúvidas e defasagens principalmente no tocante à Geometria, pois a maior queixa entre eles diz respeito ao currículo (em sua formação acadêmica que privilegia outros eixos da Matemática, deixando a Geometria a segundo plano), ou à ausência de situações em que vivenciassem a transição entre figuras geométricas bi para tridimensionais e vice-versa em suas práticas escolares. Assim, posta essa “dificuldade” com os temas geométricos, estes, por sua vez, acabam sendo negligenciados e, estabelecer relações entre as figuras geométricas passa a ficar aquém de suas habilidades.

Ao olharmos para os AFEF e Ensino Médio, a situação não é assim tão diferente. Embora nessa etapa haja professores licenciados em Matemática, quando se trata de trabalhar com o plano e o espaço e estabelecer relações entre as figuras geométricas, o seu ensino acaba também comprometido. Isso porque grande parte dos professores de Matemática abordam e ensinam figuras geométricas planas e espaciais de maneira desconexa, ou seja, não realizam a transição do espaço para o plano, em outras palavras, não ensinam Geometria partindo do espaço para o plano como evidenciam os documentos oficiais – PCN (1998) e BNCC (2018) e pesquisadores como Fainguelernt (1999).

Ao realizarmos a revisão da literatura quanto ao que dizem as pesquisas sobre as dificuldades de alunos ao estabelecerem relações entre as figuras geométricas em sua forma bidimensional e tridimensional, identificamos que tais “dificuldades” são reais e fazem parte do cotidiano em toda Educação Básica e que estão presentes inclusive entre os professores que ensinam Geometria, sejam eles do AIEF ou AFEF.

Esse levantamento além de justificar a presente pesquisa, também contribuiu para que incluíssemos em nosso referencial teórico os documentos – PCN (BRASIL, 1998) e a BNCC

(BRASIL, 2018) que são norteadores do currículo nacional e da elaboração de materiais didáticos e que, segundo o PNLB (2020), devem estar em conformidade com o que estabelece e orientam tais documentos.

Assim, essa pesquisa busca identificar de que maneira as relações entre as figuras geométricas planas e espaciais estão sendo exploradas na coleção de livros didáticos “A Conquista da Matemática” pelos autores da obra.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA

2.1. Revisando Teses e Dissertações a Respeito da Análise do Livro Didático de Matemática; Modelo de Van Hiele; Teoria dos Registros de Representações em Semiótica

Na busca por trabalhos que abordassem questões relacionadas às relações entre representações bi e tridimensionais de figuras geométricas, realizamos uma busca no repositório de teses e dissertações da CAPES, bem como em revistas da área da Educação Matemática, nos quais encontramos trabalhos que enfatizam diferentes aspectos ligados a um ensino que valorize a compreensão dessas relações. Realizamos a leitura dos resumos e objetivos para identificar aqueles trabalhos que teriam relevância e poderiam contribuir para elucidação das dificuldades já consideradas nas seções anteriores.

A revisão da literatura foi realizada mediante o levantamento de pesquisas existentes a respeito da análise do LD de Matemática (principalmente os destinados aos AFEF), também das que abordam a Geometria, em especial relações entre figuras geométricas planas e espaciais, conforme apresenta o Quadro 1.

Quadro 1 - Dissertações e teses que tratam do LD e da Geometria

Título	Programa	Autor	Trabalho/ Ano
1 - O Ensino de área de Figuras Planas nos Livros Didáticos na Transição dos Anos Iniciais para os Anos Finais do Ensino Fundamental	Programa de Pós-Graduação em Mestrado em Educação Matemática – Universidade Anhanguera de São Paulo (UASP)	Danila Brígida Santana Imafuku	Dissertação/ 2019
2 - Reflexões sobre o Ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval	Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)	Gabriela Teixeira Kluppel	Dissertação/ 2012
3 - Explorando Propriedades Geométricas a partir de Dobraduras em Ambiente de Geometria Dinâmica	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	Priscila Ferreira Silveira	Dissertação/ 2020
4 - A Construção do Conceito de Quadriláteros Notáveis no 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieleiana	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)	André Pereira da Costa	Dissertação/ 2016

5 - O Movimento de Significações no Ensino e na Aprendizagem de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade São Francisco (USF)	Iris Aparecida Custódio	Dissertação/ 2016
6 - Análise de Livros Didáticos de Matemática: função exponencial	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – (PUC)	Cristina Masetti	Dissertação/ 2016
7 - Uso(s) do Livros Didático por Professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental de Escolas da Rede Estadual de Aracaju/SE	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Federal de Sergipe (UFS)	Franckline Juliana Alves de Jesus	Dissertação/ 2017
8 - Uma análise de Livros Didáticos de Matemática da Coleção “EJA – Mundo do Trabalho”	Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Bauru (UNESP)	Danilo Oires de Azevedo	Dissertação/ 2017
9 - Trilhos Matemáticos como Contexto para o Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial com Estudantes do Terceiro Ano do Ensino Médio	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Centro Franciscano de Santa Maria (CUF)	Tatiele Tamara Gehrke	Dissertação/ 2017
10 - Geometria Espacial no Ensino Médio: uma abordagem concreta	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)	Gilberto Beserra da Silva Filho	Dissertação/ 2015
11 - Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um olhar sobre o livro didático e a provinha Brasil	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Centro Franciscano de Santa Maria (CUF)	Janaína Vasconcelos	Dissertação/ 2016
12 - A Construção de um Modelo de Níveis de Desenvolvimento de Pensamento Geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)	André Pereira da Costa	Tese/2019
13 - O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio	Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC)	Karine Pértile	Dissertação/ 2011
14 - Resignificando Conceitos de Geometria Plana a partir do Estudo de Sólidos Geométricos	Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC)	Mariângela de Castro e Oliveira	Dissertação/ 2015
15 - O Uso do Livro Didático de Matemática por Professores do Ensino Fundamental	Programa de Mestrado em Educação – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)	Esmeralda Maria Queiroz de Oliveira	Dissertação/ 2007

16 - Geometria no 5º ano: uma análise dos livros didáticos	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Estadual de Campinas – (UNICAMP)	Laís Cristina Bardini	Dissertação/ 2015
--	--	-----------------------	-------------------

Fonte: Banco de Teses e Dissertações da CAPES (2021).

Kluppel (2012) analisou livros didáticos de Matemática com o objetivo de explicitar as especificidades da Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, no tocante à Geometria, e desvelar em que medida essas especificidades são contempladas nos livros didáticos analisados. A autora salienta que “A Geometria exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas, em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio” (2012, p.37). A Geometria necessita de “[...] registros figurais para designar as figuras e suas propriedades e registros em língua natural para enunciar definições, teoremas, hipóteses” (*ibid.*, 2012, p. 37).

Imafuku (2019) analisou dois livros didáticos, indicados pelo PNLD nos anos de 2016, 2017 e 2019, para os Anos Finais do Ensino Fundamental com o objetivo de investigar como é desenvolvido o ensino de áreas de figuras planas no decorrer do ciclo, tentando identificar a condução da abordagem desse conceito mediante alguns recursos.

Já Silveira (2020) buscou analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico e da argumentação a partir da exploração de situações geométricas com dobraduras de papel em alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Essa pesquisa, de cunho qualitativo, buscou compreender como se dá a aprendizagem de propriedades que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica. Os resultados apontam um avanço no pensamento geométrico dos alunos, que, inicialmente, classificavam figuras geométricas pela sua aparência física e após, pelas características e propriedades geométricas. Esse avanço foi proporcionado pelas atividades que primavam pela exploração, manipulação, identificação de conjecturas e argumentação. A realização de tarefas dessa pesquisa também foi feita mediante o uso do *software* GeoGebra.

Costa (2016) analisou os efeitos da aplicação de uma sequência didática voltada para construção do conceito de quadriláteros notáveis com alunos do sexto ano em Recife. O estudo, uma replicação da pesquisa de Câmara dos Santos (2001), foi realizado com uso do *software* GeoGebra. E fundamentado pelo modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (1957). A análise identificou um avanço significativo por parte dos alunos nos dois primeiros níveis do modelo. Os que não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo

nível, progrediram, porém, significativamente dentro do próprio nível, enquanto houve quem trabalhasse nos dois níveis ao mesmo tempo. Essas diferenças nos resultados foram tomadas como indícios de que podem existir faixas de transição que permitem aos alunos explorar formas bi e tridimensionais estabelecendo relações entre elas.

Custódio (2016) busca caracterizar a cultura de sala de aula para o ensino de Geometria e identificar suas contribuições, além de analisar o movimento de elaboração conceitual em Geometria dos alunos, também as estratégias potencializadoras dessa elaboração. Para isso, desenvolveu dez tarefas que exploram conceitos bi e tridimensionais. Buscou identificar como alunos do 3º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental desenvolvem a construção do pensamento geométrico a partir de situações/tarefas que promovam a transição de conceitos bi e tridimensionais.

Tais tarefas e resultados podem auxiliar em nossas análises das tarefas propostas pelos autores, contribuindo com exemplos de situações que permitem aos alunos explorar formas bi e tridimensionais estabelecendo relações entre elas.

Masetti (2016) investigou como as funções exponenciais são abordadas em três livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLN de 2015 e como é proposta a construção, sistematização e consolidação de conhecimentos nesses manuais. A pesquisa de Masetti (2016) também procurou pontuar a relevância do conhecimento matemático e como tem sido feita sua abordagem pelo currículo prescrito. A metodologia empregada foi a qualitativa e contou com uso da técnica documental e o emprego de tabela/grade com categorias de análise e de descritores como instrumento de coleta de dados. A partir das análises, Masetti (2016) conclui que os livros por ela analisados apresentam diferentes tarefas, fornecem ao professor a oportunidade de oferecer situações de aprendizagem diferenciadas, mas em número considerado como reduzido. Identificou também a ausência de situações para o ensino de demonstrações no tocante à potência e à aprendizagem de função exponencial. Masetti (2016) orientou-nos em como conduzir uma revisão de literatura, além de contribuir para formular algumas questões norteadoras. Apesar do tema da pesquisa ser “funções exponenciais”, o estudo do texto de Masetti (2016) também contribuiu para estruturar a revisão bibliográfica desta pesquisa e orienta em como analisar um material didático.

O trabalho desenvolvido por Jesus (2017), com vinte e três professores dos AFEF de Aracajú/SE, procurou investigar se e como os professores de Matemática fazem uso do LD na preparação de suas aulas e em sua ação de ensinar e aprender. Tal pesquisa pode nos orientar na questão da importância do LD para nortear as aulas dos professores de Matemática.

Azevedo (2017) analisou parte da coleção de livros didáticos de Matemática (6º ao 9º ano), vinculada ao Programa EJA – Mundo do Trabalho – e distribuída pela secretaria do Estado da Educação de São Paulo. Esse trabalho pode nos orientar nas tarefas descritas no tocante à transição de objetos bi para tridimensionais e vice-versa.

A pesquisa, desenvolvida por Gehrke (2017), buscou compreender como uma sequência de tarefas desenvolvidas no ambiente escolar, partindo de atividades com figuras planas, pode contribuir para os processos de ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos em estudantes do terceiro ano do Ensino Médio em Paraíso do Sul/ RS. A pesquisa, assim como a nossa, utilizou o modelo de Van Hiele como referencial teórico e nos permite realizar comparações com as tarefas propostas pela coleção sob nossa análise.

O trabalho de Silva Filho (2015) explora o campo da Geometria, com objetivo de investigar como uma sequência de tarefas pode contribuir para o avanço de níveis segundo o modelo de Van Hiele partindo de objetos concretos do dia a dia e materiais manipuláveis, estabelecendo relações com conceitos de propriedades de sólidos geométricos. As tarefas partem de situações que exploram objetos tridimensionais mais comuns no cotidiano do aluno e propiciam a investigação de objetos planos pertencentes a elas. Assim, a pesquisa apresenta atividades que podem também estar presentes nos livros didáticos favorecendo a transição entre os objetos bi para tridimensionais e vice-versa.

Vasconcelos (2016) realizou uma investigação em três LD de Matemática no tocante à Geometria, destinados ao 2º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, também na Provinha Brasil. Em seus resultados, observou que em apenas um dos LD aprovados pelo PNLD se explora figuras geométricas e linhas, localização e vistas; os outros dois livros abordam tópicos geométricos, regiões planas e seus contornos. Já na Provinha Brasil, referente à Geometria, foram identificadas questões que abordavam: figuras planas, sólidos geométricos e vistas. O autor identificou haver coerência entre os documentos oficiais, conteúdo apresentado nos materiais analisados que permite e dá suporte ao aluno para responder as questões propostas pela prova em questão.

Entre as pesquisas apresentadas no Quadro 2.1, a que mais se aproxima do trabalho aqui apresentado é a de Pértile (2011). A pesquisadora tenta compreender como a abordagem usada pelos autores de três coleções poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico em alunos no decorrer do Ensino Médio. A fundamentação dessa pesquisa abordou o histórico do livro didático no Brasil, a implementação do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e o modelo de Van Hiele. Pértile (2011) analisou três das coleções de livros distribuídas

pelo PNLD em 2009, pautando-se em dimensões de análises formuladas com base no modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. A pesquisa de Pértile (2011) assim como a apresentada neste texto tem caráter qualitativo e consiste na análise de livros didáticos. Porém, difere em aspectos quanto ao nível de ensino e propostas referentes a Geometria. Enquanto nossa pesquisa busca compreender as relações entre ente figuras bi e tridimensionais, a de Pértile, é voltada para uma análise de livros didáticos para o Ensino Médio e na elaboração e interpretação de metatextos. Tal trabalho contribui significativamente para a pesquisa em andamento, pois é uma referência na análise de livros didáticos com o olhar do modelo dos Van Hiele. E pode nos orientar na elaboração dos critérios para análise dos exercícios apresentados pelos autores na coleção.

A pesquisa de Oliveira (2012), Resignificando Conceitos de Geometria Plana a partir do Estudo de Sólidos Geométricos, contribui com a presente pesquisa, pois elucida as razões pelas quais a relação ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos, na 2ª série do Ensino Médio, quase sempre se dá de maneira pouco produtiva. Em sua pesquisa desenvolveu tarefas que exploram conceitos bidimensionais e tridimensionais em alunos das 2ª e 3ª séries do Ensino Médio sob a luz dos Van Hiele. Assim, tal pesquisa pode apontar aspectos importantes em nossas análises.

Oliveira (2007) em sua pesquisa buscou identificar entre professoras do 2º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, se a crença de que os professores que dominam ou não, determinado conteúdo, contribui para que estes se distanciem ou se aproximem das orientações apontadas no Manual do Professor, o que influenciaria assim, a forma de utilização deste. Essa pesquisa auxiliará na seção – Capítulo 3 que tratará do livro didático de Matemática.

Dentre as pesquisas apresentadas no Quadro 2.1, a de Bardini (2015) nos chama atenção por analisar três livros didáticos destinados ao 5º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (AIEF). A pesquisadora teceu quatro categorias para analisar como a Geometria estava inserida nos livros. Entre essas categorias: a nomenclatura, identificação e composição de figuras geométricas e, relações entre figuras bidimensionais e tridimensionais. Os resultados revelam que, apesar dos documentos oficiais afirmarem ser imprescindível que no ensino das figuras geométricas, haja o envolvimento de suas propriedades e características, o foco nos livros ainda encontra-se na nomeação e identificação delas; também que nos livros analisados as relações entre as figuras bi e tridimensionais quase nunca apareciam.

As pesquisas de Kluppel (2012) e Imafuku (2019), que também examinam a abordagem de temas geométricos em livros didáticos, contribuíram para a presente pesquisa pelo seu embasamento teórico quanto à Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval.

Os trabalhos de Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) que destacam diferentes apreensões para uma possível interpretação de objetos geométricos e de enunciados em Geometria: a apreensão perceptiva (de modo imediato e automático no qual ocorre o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são compreendidas em uma dada figura); a apreensão operatória (focada nas possíveis modificações de uma figura inicial e nas suas possíveis reestruturações destas modificações: óticas, posicionais ou mereológicas); a apreensão discursiva (referente ao enunciado) e a apreensão sequencial (requerida em tarefas de construção ou em tarefas descritivas, cujo objetivo é a concepção de uma dada figura) foram imprescindíveis para a fundamentação teórica dessa pesquisa.

No ensino da Geometria, os tratamentos diferem daqueles utilizados em matemática. Ela requer tratamentos específicos para que não haja a caracterização heurística das figuras como acessórios, afirma Duval (2004). No capítulo 3, seção 3.6, será discutida e abordada como será considerada a TRRS na presente pesquisa.

2.2 O Que Dizem os Periódicos a Respeito do Tema?

Além da busca no repositório de teses e dissertações da Capes, buscamos também trabalhos que tratam dos temas afeitos a nosso trabalho em publicações e periódicos bem classificados e eventos importantes da área da Educação Matemática nos últimos dez anos: (Quadro 2).

Quadro 2: Periódicos

Periódicos	Quantidade de trabalhos identificados na seleção final
EMP: Educação Matemática Pesquisa	2
EMV: Educação Matemática em Revista	1
Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana	1
REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática	3
RPEM: Revista Paranaense de Educação Matemática	1
<i>ZETETIKÉ (Online)</i>	2
EMSF: Educação Matemática sem Fronteiras/Chapecó	1

VIDYA – Revista Eletrônica	1
EMD – Educação Matemática em Debate	3
RBE – Revista Brasileira de Educação	1
Em aberto	1
Olhar de Professor	1

Fonte: O autor (2021).

Dentre as pesquisas apontadas no Quadro 2, apresentaremos a seguir as que mais se aproximam de nosso objeto de pesquisa:

A pesquisa de Bardini, Amaral-Schio e Mazzi (2019), intitulada Aspectos do cotidiano e a Geometria nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, publicada na EMSF, apresenta aspectos relevantes ao nosso trabalho, pois aborda, entre outros, o tema geométrico de nosso trabalho, as relações entre figuras bidimensionais e tridimensionais – explorou a relação existente entre as figuras bi e tridimensionais com o cotidiano do aluno.

A pesquisa realizada por Costa e Santos (2020) publicada na EMD aponta uma análise quanto ao pensamento geométrico em estudantes da licenciatura em Matemática em uma Universidade em Pernambuco sob a luz de Duval (1995) e Van Hiele (1957). As tarefas aplicadas revelaram que metade dos sujeitos participantes atuavam na apreensão perceptiva de figuras geométricas (DUVAL, 1995) e no primeiro nível de Van Hiele (1957), caracterizados pela identificação das figuras geométricas em um plano ou por meio da aparência física. Tais resultados contribuirão com nossas análises elucidando aspectos a serem considerados tanto na parte teórica quanto nos exercícios propostos no livro didático.

O artigo publicado na EMR – RS, por Moura, Krindges e Wielewski (2020), com o título “As Vantagens do Modelo de Van Hiele no Ensino de Geometria”, evidenciou as vantagens da utilização de tal modelo por outros pesquisadores e apontou sua eficácia em suas considerações. O artigo contribui com a presente pesquisa apontando trabalhos da área que podem compor nosso referencial teórico e elucidar na classificação das atividades do livro A Conquista da Matemática que está sob análise.

As pesquisas de Vianna e Silva (2020) – REVEMAT e Braga e Dornelles (2011) – EMP buscaram analisar como se desenvolve a construção do pensamento geométrico em alunos de um 8º ano e 9º ano respectivamente. Ambas as pesquisas tiveram como fundamentação teórica a teoria de Van Hiele. A primeira desenvolveu as tarefas utilizando o *software* GeoGebra e a segunda contou com um questionário subdividido em quatro partes: formas e propriedades, transformação, localização e visualização. Esses resultados contribuirão no momento de

classificação das atividades em análise do LD quanto aos níveis de Van Hiele em nossa pesquisa.

O mesmo pode ser dito em relação à pesquisa “Uma análise em livros didáticos de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental acerca da proposta do ensino de polígonos sob a ótica da teoria de Van Hiele”, de Pachêco, Pachêco e Silva (2017), que além de analisar livros didáticos também teve como foco a Geometria, neste caso os “polígonos”.

Santos e Amâncio (2021) desenvolveram uma sequência de atividades, fundamentadas no modelo de Van Hiele, para o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do sexto ano do ensino fundamental de uma escola pública de Belo Horizonte. Tais tarefas foram desenvolvidas de maneira que levassem os alunos à exploração de objetos e desenhos que representavam figuras geométricas tridimensionais e realizassem seus registros por escrito, oralmente, com e para colegas de turma, como também para o professor. Essas tarefas possibilitaram aos alunos tanto a identificação das formas bidimensionais nos objetos geométricos tridimensionais, como também a compreensão das partes das formas tridimensionais, permitindo ao final da pesquisa que os autores observassem um avanço significativo entre os níveis do modelo considerado.

Arcego, Kiefer e Mariani (2021) analisaram atividades de duas coleções de livros didáticos referentes à área de círculo ao longo do Ensino Fundamental. Para isso, consideraram a Teoria das Representações Semióticas, tentando investigar se tais atividades propostas nas coleções permitiam mobilizar apreensões figurais – perceptiva, sequencial, discursiva e operatória. Ao final da pesquisa, apontaram que a maioria das atividades permitia mobilizar a apreensão perceptiva e que em menos de 1% das atividades a apreensão discursiva se fazia presente.

Villiers (2010) realiza uma retrospectiva de trabalhos que mobilizam o modelo de Van Hiele nos último 30 anos. Este artigo contribui na fundamentação teórica dessa pesquisa, pois o autor destaca e ilustra aspectos fundamentais sobre as implicações teóricas para a preparação e condução de tarefas em Geometria, ao mesmo tempo em que aponta aspectos relevantes do modelo em questão investigado por outros autores.

Para tentarmos identificar como estão apresentados os registros discursivos e não discursivos presentes na coleção A conquista da Matemática, buscamos nas pesquisas de Kluppel (2012) e Imafuku (2019) tais embasamentos teóricos, pois encontram-se pautadas na Teoria de Representações Semióticas de Raymund Duval (1994, 1995, 2003, 2004 e 2012).

Kluppel (2012) analisou a apresentação da Geometria em livros didáticos de Matemática a partir da Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval, buscando desvelar em que medida os contributos dessa teoria são neles contemplados. Essa pesquisa contribuiu para nossa pesquisa não só por ter também como objetivo a análise da Geometria apresentada em livros didáticos de Matemática, como também por alcançá-lo sob a ótica da referida teoria.

A pesquisa de Imafuku (2019) também analisou livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD (no caso dela, de dois autores indicados pelo PNLD de 2016 para Anos Iniciais do Ensino Fundamental; de 2017 e 2019 para os Anos Finais do Ensino Fundamental) com o objetivo de investigar como é desenvolvido o ensino de áreas de figuras planas no decorrer do ciclo. Essa análise foi feita à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Em relação ainda a nossa busca por textos da área da Educação Matemática, o de Almouloud *et al.* (2004) contribuiu para o trabalho em diversos pontos, o primeiro é o de apontar aspectos que tratam do ensino e da aprendizagem de Geometria, tanto relacionados com os alunos quanto com os professores. Contribuiu também, no capítulo 3, por ressaltar a importância da visualização da figura geométrica para sua exploração pelo aluno.

O levantamento realizado na revisão de literatura nos permite inferir que há poucas pesquisas que tratam da aprendizagem de figuras geométricas bi e tridimensionais nos AFEF, o que nos revela a importância da presente pesquisa.

No próximo capítulo, apresentaremos o embasamento teórico dessa pesquisa.

CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos o referencial teórico em que nos baseamos para a análise dos dados obtidos em nossa análise dos livros didáticos da coleção indicada no PNLD (2020). Na qual nós nos apoiamos no modelo Van Hiele da aprendizagem da Geometria, bem como no modelo de funcionamento cognitivo do pensamento apresentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

3.1 O Pensamento Geométrico

Embora vários trabalhos no campo da Educação Matemática considerem importante promover o desenvolvimento do pensamento geométrico nos alunos da Escola Básica, observa-se não existir, entre seus autores, um mesmo significado sobre o que significa tal expressão (Pereira da Costa, 2020). Uma discordância que, para Almeida (2016), resulta não só do próprio desenvolvimento da Geometria como das diferentes formas de considerar o pensamento em geral. Por outro lado, as entidades geométricas (formas) são estudadas a partir de suas representações, o que introduz uma certa ambiguidade para o aprendiz.

Nesta pesquisa, para avaliar as atividades propostas nos livros da coleção A Conquista da Matemática relacionadas às relações entre figuras bi e tridimensionais, nos baseamos em dois trabalhos cujos autores investigaram o desenvolvimento do pensamento em geometria. O mais antigo, o realizado pelo casal van Hiele (Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof), se constitui em uma teoria cognitiva que avalia as habilidades dos alunos em geometria a partir de cinco níveis de compreensão que descrevem as características de tal processo de pensamento (Kaleff *et al.*, 1994).

Por outro lado, consideramos também a Teoria das Representações Semióticas, de Raymond Duval (2002, 2003) que, partindo de um ponto de vista cognitivo, aponta para o fato de a aprendizagem da Geometria não estar ligada a uma atividade cognitiva única, mas envolver um processamento cognitivo autônomo, com características específicas.

3.2 O Modelo de Van Hiele

Os professores holandeses Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, preocupados com o baixo desempenho de seus alunos no estudo da Geometria investigaram o

desenvolvimento do pensamento geométrico, concluindo que os problemas e tarefas apresentados aos alunos requerem frequentemente vocabulário, conceitos ou conhecimento de propriedades que estão além do nível de pensamento da criança. Além disso, é comum, em uma sala de aula, não só que as crianças pensem em diferentes níveis, diferindo também do professor e do livro didático. Por outro lado, os pesquisadores percebiam também que o crescimento cronológico das idades não produzia automaticamente um crescimento nos níveis de pensamento.

O modelo de Van Hiele explica situações que surgem em uma aula de Geometria, como os alunos reconhecerem um quadrado, mas não serem capazes de descrevê-lo; de não perceber que um quadrado é também um retângulo; de ficarem desmotivados por terem que provar algo que já sabem ser verdadeiro, enfim, comportamentos que, segundo Crowley (1987), refletem o nível de maturidade geométrica em que estão.

Para os Van Hiele, a falha do currículo de geometria tradicional devia-se, segundo Villiers (2010), ao fato de que este “[...] era apresentado em um nível mais alto do que os alunos [compreendiam], ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender” (VILLIERS, 2010, p. 401).

Essas considerações revelavam a fragilidade nos processos de ensino e aprendizagem, pois caso o aluno se encontrasse em um nível de raciocínio e estudasse conteúdos mais avançados poderia ocorrer a não compreensão desses conteúdos e o fracasso na compreensão dos conceitos geométricos. Vista sob esta ótica, a adoção do modelo de Van Hiele poderia contribuir significativamente para a superação das dificuldades do aluno no processo de aprendizagem, uma vez que as tarefas que lhe fossem atribuídas teriam de ser pensadas de acordo com o nível no qual ele se encontrasse.

Apesar de tal modelo ser hierárquico e obedecer a uma sequência, como se estivesse reforçando a aprendizagem da Geometria das partes para o todo, ele aponta as lacunas de aprendizagem que o aluno apresenta, possibilitando que o professor organize sua prática pedagógica para favorecer essa aprendizagem e estabelecer estratégias metodológicas que favoreçam a resolução de problemas e a interdisciplinaridade numa visão não linear.

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele tem sido utilizado para facilitar a compreensão de conteúdos em Geometria. Seu uso, como aporte teórico, permite investigar também as dificuldades em ensinar e em aprender geometria, ao mesmo tempo em que propõe um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicar caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro.

Na próxima seção apresentaremos e detalharemos como é esse modelo.

3.3 Os Níveis do Modelo Van Hiele

O modelo de Van Hiele apresenta uma organização com cinco níveis de aprendizagem caracterizados como:

Nível 1: básico (ou reconhecimento)¹;

Nível 2: análise;

Nível 3: abstração (ou síntese, ou dedução informal);

Nível 4: dedução formal;

Nível 5: rigor.

Nível 1: básico (ou reconhecimento)

A literatura também chama esse nível de “visualização/reconhecimento”. Neste estágio inicial, os alunos se atêm, basicamente, a considerações visuais. As figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global, podendo ser chamadas de triângulo, quadrado etc., mas os alunos não conseguem explicitar as propriedades que as identificam, embora possam aprender o vocabulário geométrico, identificar formas específicas, reproduzir uma figura dada etc.

Nesse nível 1, os indivíduos adquirem uma concepção de espaço em sua volta, reconhecem as figuras apenas pela sua aparência. Segundo Fainguelernt (1999, p. 53), “Visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais”.

Considerada dessa forma, a visualização é um processo cognitivo complexo e de caráter individual, no qual a experiência tem grande importância; ou seja, o que uma pessoa observa pode não ser visto, ou percebido, por outra (ALMEIDA, KALEFF, 2016, p. 4).

Neste nível, “[...] os alunos reconhecem as figuras ou os objetos por sua aparência global, identificando triângulos, quadrados, círculos, esferas, cubos, cilindros etc., sem serem capazes ainda de descrevê-los através de propriedades características” (Machado, 2001, p. 52).

Para Crowley²(1987, p. 6, tradução nossa)³ “Está implícito nos escritos de Van Hiele a noção de que às crianças deve ser apresentada uma ampla variedade de experiências geométricas” sendo significativo para alunos dos anos iniciais terem contato com experiências

¹ Kaleff *et al.* (1994) identificam esses níveis como 0, 1, 2, 3 e 4.

² Crowley, Mary. L. É uma pesquisadora, comentadora e divulgadora da teoria desenvolvida pelo casal Van Hiele.

³ Implicit in the van Hieles' writing is the notion that children should be presented with a wide variety of geometric experiences.

exploratórias de nível básico por meio de recortes, dobraduras, gravetos, canudos, mosaicos, tangrams e quebra-cabeças geométricos.

Segundo Usiskin (1982, p. 4, tradução nossa)¹, neste nível “os alunos podem aprender nomes de figuras e reconhecer uma forma como um todo. Quadrados e retângulos possuem aparências diferentes”.

A seguir, transcrevemos sugestões de atividades para o nível básico/reconhecimento em que, de acordo com Crowley (1987), o professor deve priorizar, por exemplo: dobrar e construir formas geométricas; identificar uma forma ou uma relação geométrica em um desenho simples; criar formas em papel quadriculado, desenhando figuras; descrever formas e construções geométricas verbalmente usando linguagem padrão e fora do padrão, entre outras. Esta é, por exemplo, a posição adotada nos PCNS², que (implicitamente) adotam a caracterização do nível 1 (básico/reconhecimento) do modelo de Van Hiele no tratamento inicial da Geometria.

Nível 2: análise

Neste nível os alunos já conseguem raciocinar sobre conceitos geométricos, embora o façam por meio de uma análise informal de suas partes e atributos. Já conseguem distinguir características das figuras e a perceber propriedades que serão usadas para distinguirem classes e formas. No entanto, segundo Crowley (1987, p. 2, tradução nossa)³, “[...] as relações entre propriedades, ainda não podem ser explicadas pelos alunos_ nesse nível, as inter-relações entre os números ainda não são vistas e definições ainda não são entendidas”.

É neste nível que, segundo Crowley (1987, p. 8), “[...] a forma recua e as propriedades das figuras emergem”. Portanto é importante que o professor oportunize aos alunos atividades que lhes permitam: dobrar, cortar, modelar e lado a lado, a fim de identificar propriedades de figuras e outras relações geométricas; descrever uma classe de figuras por suas propriedades, sem usar uma imagem; comparar as formas de acordo com suas propriedades e caracterização; classificar e organizar formas por atributos únicos; identificar e desenhar uma figura a partir de uma descrição oral ou escrita de suas propriedades; identificar uma forma a partir de pistas visuais revelando gradualmente uma forma; identificar propriedades que podem ser usadas para

¹ The student can learn names of figures and recognizes a shape as a whole. Squares and rectangles seem to be different.

² Segundo os PCN, “[...] o pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades” (BRASIL, 1999, p.82).

³ Relationships between properties, however, cannot yet be explained by students at this level, interrelationships between figures are still not seen, and definitions are not yet understood.

caracterizar ou contrastar diferentes classes de figuras; explorar a relação entre diagonais e figuras juntando duas tiras de papelão; descobrir propriedades de classes desconhecidas de objetos. Ainda, a partir de exemplos de trapézios e não exemplos, determinar as propriedades dos trapézios.

Nível 3: abstração (ou síntese, ou dedução informal)

Gradativamente, após a análise de formas e a identificação de propriedades inerentes a partes delas, o pensamento geométrico permite que sejam feitas comparações entre propriedades de formas distintas. Neste nível, os alunos já conseguem estabelecer relações entre propriedades ou, mais precisamente, relacionam figuras ou objetos por meio de suas propriedades, embora não exista ainda o interesse em justificar afirmações a partir de outras, em construir cadeias dedutivas (MACHADO, 2001, p. 53).

Neste nível, por exemplo, a percepção da quantidade de lados de duas peças de um Tangram já possibilita aos alunos dizerem que essas peças são do mesmo tipo, apesar de serem de cores diferentes, o que não ocorreria no nível 1, dado que a propriedade de possuírem a mesma quantidade de lados não seria tão perceptível. Uma rede de relações inicia-se tornando possível comparar figuras geométricas ou objetos manipuláveis fornecendo algumas semelhanças e/ou algumas diferenças entre eles.

No entanto, apesar de, nesse nível, os alunos serem capazes de reconhecer propriedades de figuras geométricas e utilizar tais propriedades na resolução de tarefas, eles ainda não conseguem construir um discurso argumentativo lógico-dedutivo suficientemente eficiente para o convencimento de outras pessoas. Tal construção discursiva ocorre paulatinamente e, quando acontece, indica que esse aluno já começa a alcançar, em algumas situações, o nível 4.

Nível 4: Dedução Formal

Nesse nível, os alunos compreendem o significado da dedução como forma de estabelecer a teoria geométrica. São capazes de compreender formas lógicas-dedutivas de discurso e entender sua validade universal. Crowley (1987) afirma que um aluno, nesse nível, compreende o papel de termos indefinidos, axiomas, postulados, definição, teoremas e demonstrações.

Nesse nível, o aluno é capaz de realizar tarefas mais complexas de demonstração. Crowley (1987) indica algumas tarefas que podem ser oferecidas aos alunos neste nível. São

elas: identificar o que é dado e o que deve ser provado em um problema; identificar informações implícitas em uma figura ou por informações fornecidas; demonstrar uma compreensão do significado do termo indefinido postulado, teorema e definição; demonstrar uma compreensão das condições necessárias e suficientes; provar rigorosamente as relações desenvolvidas informalmente no nível anterior; provar relações desconhecidas; identificar estratégias gerais de demonstrações; pensar sobre o pensamento geométrico.

Neste nível 4, o estudante começa a compreender o sistema lógico-dedutivo da geometria euclidiana, embora ainda não possua um “pensamento geométrico” independente da percepção do meio ambiente em que vive. Ou seja, ele compreende a dedução da geometria euclidiana, porém necessita ainda do “conteúdo perceptível” que os registros utilizados carregam.

Quando ele conseguir compreender que o sistema lógico-formal pode ser considerado essencialmente como manipulação de “formas de registro”, segundo regras pré-determinadas, regras sintáticas, ele já estará alcançando o nível 5.

Nível 5: Rigor

Neste nível, segundo Crowley (1987, p.3), “[...] o aluno pode trabalhar em uma variedade de sistemas axiomáticos, ou seja, geometrias não euclidianas podem ser estudadas e diferentes sistemas podem ser comparados. A geometria é vista de forma abstrata” (Tradução nossa).¹

Ao atingir este nível, o aluno já consegue manipular os objetos geométricos, independentemente do conteúdo, que o registro formal carregue. Consegue acompanhar deduções lógicas em uma teoria formalizada devido apenas à compreensão das relações lógico-sintáticas, não tendo mais a necessidade de pensar em possíveis propriedades euclidianas dos registros.

3.4 Propriedades da Teoria Van Hiele

Existem três aspectos básicos que precisam ser considerados quando se adota o modelo de Van Hiele. O primeiro aspecto é, evidentemente, a existência de níveis. Os autores adotados na presente pesquisa descrevem cinco níveis, outros adotam apenas os quatro níveis iniciais considerados aqui. O segundo aspecto é a existência de certas propriedades inerentes a esse

¹ At this stage the learner can work in a variety of axiomatic systems, that is, non-Euclidean geometries can be studied, and different systems can be compared. Geometry is seen in the abstract.

modelo. Alguns autores também unem a propriedade 2 com a propriedade 3, descritas a seguir, e elencam apenas quatro propriedades. O terceiro aspecto é a possibilidade do movimento de um nível para o próximo superior (USISKIN, 1982).

Quanto às propriedades, Crowley (1987, p. 4, tradução nossa)¹, considera que elas “[...] são particularmente significativas para os educadores, porque fornecem orientação para a tomada de decisões de ensino”.

Propriedade 1: Hierarquia e Sequencialidade

A adoção do modelo de Van Hiele é inseparável da compreensão da validade desta propriedade. Em primeiro lugar, existe a hierarquia dos níveis. O nível 1 é subalterno ao nível 2, que por sua vez é subalterno ao nível 3, e assim por diante. Em segundo lugar, existe a sequencialidade na passagem de um nível para outro. Segundo esse modelo, não há a possibilidade de o aluno passar, por exemplo, do nível 3 para o nível 5 sem passar pelo nível 4. A propriedade de hierarquia e sequencialidade garante que o aluno passe do nível 1 para o nível 2, passe do nível 2 para o nível 3, passe do nível 3 para o nível 4 e passe do nível 4 para o nível 5. Não existe a possibilidade de pular níveis. Porém, estudos como o de Hershkowitz (1990), revelam que uma criança pode interagir com níveis distintos e em contextos diferentes, podendo até mudar de nível durante a resolução de um exercício.

Tais evidências que tornam tal fato como verdadeiro foram observadas por Burger e Shaughnessy (1986) e por Fuys, Geddes e Tischler (1988), os quais notaram alunos raciocinando entre os níveis 1 e 2, indicando a transição entre eles.

Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) advertem quanto aos níveis de Van Hiele não serem assim tão discretos, mas sim contínuos, o que significa que a aquisição de um nível não seja assim tão instantaneamente, podendo levar semanas ou até meses. Os pesquisadores sugerem um paradigma alternativo quanto à aquisição dos níveis do modelo de Van Hiele, avaliando essa aquisição e classificando-a em 5 tipos: ausência de aquisição, baixa, intermediária, alta ou completa aquisição. Assim, é possível associar mais de um nível a um aluno, desde que seja apresentada detalhadamente seu desenvolvimento em cada um desses níveis. Portanto, é possível dizer que um aluno tenha aquisição completa no Nível 1, baixa aquisição no Nível 2,

¹ These properties are particularly significant to educators because they provide guidance for making instructional decisions.

e nenhuma aquisição no Nível 3. Isso em se tratando do modelo tradicional não aconteceria, pois o mesmo aluno seria classificado no Nível 1, sem maiores detalhes.

Propriedade 2: Avanço de nível

Segundo Van Hiele (1986), o avanço de um nível ao próximo depende mais da instrução recebida pelo aluno do que propriamente da idade ou da série em que ele estuda, pois a maneira de condução do estudo e o método empregado pelo professor no processo de ensino de Geometria fazem diferença para sua aprendizagem.

Propriedade 3: Intrínseco e Extrínseco

Os objetos intrínsecos no nível “n” tornam-se extrínsecos quando o aluno passa para o nível “n+1” e tornam-se extrínsecos para o próximo nível.

Propriedade 4: Linguística

Conforme Usiskin (1982, p. 5), “[...] cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e sua rede de relações conectando esses símbolos”. À medida que o aluno alcança níveis mais altos ele, gradativamente, vai trabalhando com notações formais mais elaboradas e adquirindo/utilizando termos em língua natural mais elaborados.

Propriedade 5: Separação

Professor e aluno necessitam estar pensando (raciocinando) em um único nível, uma vez que quando duas pessoas estão em níveis separados, raciocinam em níveis diferentes, não há compreensão mútua, logo, o aprendizado não acontece.

3.5 As Etapas de Aprendizagem do Modelo

Pensando em como contribuir com o processo de ensino e aprendizagem em Geometria, Van Hiele (1986) descreve cinco etapas com o intuito de auxiliar os professores durante a elaboração das atividades. As etapas são: A Indagação Informada; a Orientação Dirigida; a Explicação, a Orientação Livre e a Integração.

A seguir descrevemos resumidamente as etapas da aprendizagem conforme Crowley (1987).

Etapa 1 - Indagação informada

É nesta etapa que professor e aluno discutem sobre atividades e objetos a serem estudados. Observações são feitas, questões levantadas e o vocabulário específico para o nível em que se encontram é apresentado ao aluno. Nesta etapa, o professor pode avaliar o conhecimento prévio de seus alunos acerca dos conteúdos a serem estudados.

O livro didático, nesta etapa, pode ser uma ferramenta de efetiva contribuição, e permite que o professor inicie o estudo das unidades com observações e perguntas sobre os objetos a serem abordados. A abertura da unidade pode apresentar ilustrações que retratem os temas que serão abordados em todos os seus capítulos. Com esse auxílio, o professor pode explorar questionamentos que possibilitem ao aluno remeter seu pensamento a objetos geométricos do seu cotidiano.

Etapa 2 - Orientação dirigida

O professor deve ser bem criterioso nas escolhas dos materiais para que seus alunos possam, por meio deles, explorá-los. Segundo Crowley (1987, p. 5, tradução nossa)¹, “[...] essas atividades devem gradualmente revelar aos alunos as estruturas características do nível em que estão. Assim, grande parte do material consistirá em tarefas curtas destinadas a obter respostas específicas”. As tarefas que o professor apresentará precisam ser bem planejadas, para que seja possível a construção dos conceitos e relações do nível em que estão, pois isso favorecerá a passagem para o nível adiante.

Etapa 3 – Explicitação

Nesta etapa, deverá haver a estimulação de situações nas quais os alunos tenham de se expressar e transmitir ideias uns aos outros. Esse tipo de atividade, feita sob a orientação do professor, deve prezar pelo uso de linguagem própria e adequada ao nível. Os alunos, por meio de suas experiências anteriores, expressam verbalmente e com simbologia adequada, suas visões sobre as estruturas ou conceitos que foram observados.

¹ These activities should gradually reveal to the students the structures characteristic of this level. Thus, much of the material will be short tasks designed to elicit specific responses.

Etapa 4 - Orientação livre

Nesta etapa, as tarefas devem ser apresentadas ao aluno com maior grau de dificuldade e com maior número de etapas a serem realizadas. De preferência, devem ser fornecidas tarefas que possuam vários caminhos de resolução, ou mesmo, tarefas que possuam várias respostas, ou ainda, tarefas abertas. Os alunos adquirem experiência ao buscarem, por eles mesmos, soluções das tarefas. Quando as tarefas proporcionam uma investigação, a maioria das relações entre os objetos de estudo acabam se tornando mais evidentes aos alunos.

Atividades contextualizadas são uma excelente maneira para o professor explorar diferentes estratégias que levem o aluno a pensar, refletir e problematizar. Por exemplo, uma situação em que algum cômodo de sua casa irá passar por uma reforma completa e caberá a ele (aluno) a tarefa de determinar as áreas a serem pintadas, a área do chão e a quantidade de piso necessária para cobri-lo, tendo em vista que o cômodo pode ter a forma quadrada ou retangular. Assim, o aluno desenvolve a habilidade de solucionar uma situação problema em que ele determinará por onde começar.

Etapa 5 – Integração

É nesta fase que os alunos revisam, comparam e sintetizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode contribuir apenas auxiliando-os na elaboração da síntese, porém sem agregar conceitos até aqui não estudados por eles. Segundo Crowley (1987, p. 6), “No final da quinta fase, os alunos atingiram um novo nível de pensamento. O novo domínio de pensamento substitui o antigo e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizagem no próximo nível”.

De acordo com a Teoria de Van Hiele, com exceção da fase cinco, as demais podem ocorrer em qualquer ordem ou até mesmo simultaneamente.

3.6 A aprendizagem da Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval

Utilizaremos, também, em nossa análise das tarefas que envolvem conhecimentos relacionados às relações entre figuras bi e tridimensionais nos livros da coleção A Conquista da Matemática, a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003, 2004), na qual se ressalta a necessidade da utilização de diversos registros de representação para a aprendizagem do mesmo objeto matemático.

Com referência à Geometria, Duval (2004) considera que sua aprendizagem requer uma atividade cognitiva específica, que não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Isto porque, segundo ele, as figuras podem impor resistências à aprendizagem derivadas de fatores intrínsecos à sua representação figural.

De fato, nem sempre é fácil “ver” na figura as relações ou as propriedades relativas às hipóteses que correspondem à solução desejada, porque as figuras podem impor resistências à aprendizagem, dado que estão sujeitas a fatores intrínsecos à representação figural.

Duval (2005) considera a Geometria uma área da Matemática exigente, pois estimula o olhar, a linguagem e o gesto. Segundo o pesquisador ela depende da coordenação simultânea de pelo menos dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo em língua materna e o registro figural.

A Figura 5 apresenta os dois tipos de registros:



Fonte: A autora (2021)

Convém observar que os registros discursivos podem ser grafados no texto utilizado, em língua materna com suporte escrito, ou podem ser pronunciados por professores e alunos, em língua materna com suporte verbal.

De acordo com Duval (2012), para que exista atividade cognitiva - no nosso caso particular, para que haja pensamento geométrico - é essencial a interiorização de representações semióticas.

Flores e Moretti (2005) nos explicam que é impossível haver comunicação entre dois ou mais indivíduos sem um suporte midiático comum a todos os envolvidos. Eles apontam para o fato de que a função da comunicação “é a função de transmissão de uma mensagem ou de

uma informação entre indivíduos; ela requer a utilização de um código comum aos indivíduos” (FLORES, MORETTI, 2005, p. 3).

Esses autores também nos explicam que conseguimos tratar uma informação que nos foi passada mediante mobilização de regras internas do sistema de códigos adotados. A função de tratamento “é a que transforma uma representação em outra, utilizando unicamente as possibilidades de funcionamento do sistema de representação mobilizado” (*ibid.*, 2005, p. 3).

Ainda, dentro da situação particular do estudo de Geometria, quando durante um diálogo, ou argumentação, tomamos consciência de, por exemplo, alguma propriedade, que conseguimos explicitar ou concluir mediante escrita, estamos realizando a objetivação. A função que “é a que permite a um sujeito tomar consciência daquilo que até então não tinha feito. É o trabalho de exteriorização” (COLOMBO; BUEHRING; MORETTI, 2009, p. 101).

Portanto, a utilização de registros é intrínseca ao funcionamento cognitivo do pensamento humano. No caso da Geometria, Duval (2012) diz que não se pode ter produção ou compreensão acerca de um objeto ou propriedade geométrica sem o manejo de registros: “Se é chamada “semiose” a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e “noesis¹” a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que noesis é inseparável da semiose” (DUVAL, 2012, p. 270).

Duval (2012) aponta a existência de duas operações que podem ser realizadas no manejo de registros semióticos, o tratamento e a conversão. O tratamento é uma operação realizada em registros, mas que fornece um registro final da mesma classe ou do mesmo sistema do registro inicial. Por exemplo, quando um aluno realiza o preenchimento da região interna de um triângulo ele está realizando um tratamento no registro figural. Já a conversão realizada em uma representação é uma transformação que fornece um registro final contido em uma classe, ou em um sistema, diferente do registro inicial. Por exemplo, quando um aluno recebe uma tarefa em registro escrito e tem de esboçar uma figura geométrica ele terá de realizar uma conversão de registros.

Para Duval (2012), a conversão é a transformação fundamental para a compreensão e produção de conhecimento matemático. Esse será um ponto a ser verificado na análise das tarefas contidas no livro didático utilizado. De acordo com Leivas e Fogaça (2017, p. 83), “As conversões são tratamentos que exigem mudança de registro e esse tipo de transformação

¹ Na fenomenologia, aspecto subjetivo da vivência, constituído por todos os atos tendentes a apreender o objeto: o pensamento, a percepção, a imaginação etc. Etimologia (origem da palavra *noese*). Do grego *noésis*. Fonte: <https://www.dicio.com.br/noese/> .

enfrenta os fenômenos de não congruência”. Segundo Duval (2003), de acordo com os autores acima, “[...] isso se traduz pelo fato de os alunos, muitas vezes, não reconhecerem o mesmo objeto por meio de duas ou mais representações diferentes” (*ibid.*, 2017, p. 83).

Na presente pesquisa consideraremos duas classes de registros, os registros figurais e os registros discursivos.

Para Duval (2012b, p. 287), “Os tratamentos figurais são operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre [...] uma figura geométrica, para obter uma modificação figural desta figura”. Em relação à figura, esses tratamentos podem caracterizar uma atividade cognitiva que permita “a possibilidade de modificação que surge da relação das partes com o todo, por exemplo, relações ópticas (visuais) ou posicionais de uma figura” (DUVAL, 2004, p.162, tradução nossa).

Para (LEIVAS e FOGAÇA, 2017, p. 83) “Os tratamentos constituem-se de transformações situadas dentro de um mesmo registro”. Duval (2003) salienta que o professor, por muitas vezes, se limita a um único tipo de registro de representação. O que acaba diminuindo a capacidade de compreensão de seu aluno e engessa o objeto de estudo em um único tipo de registro.

O registro discursivo, realizado na língua materna (língua natural), evidencia definições, teoremas ou hipóteses que dizem respeito a um problema matemático, enquanto o registro figural é importante e fundamental para elucidar as propriedades que constituem ou determinam um desenho (DUVAL, 2004). Assim, o fundamental, para o autor (Duval, 2012) está na realização de uma tarefa no campo da Geometria que existam conversões entre o registro figural e o registro discursivo.

A Geometria exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas, em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio. Requer a utilização de registros figurais para designar as figuras e suas propriedades e registros em língua natural para enunciar definições, teoremas, hipóteses. (KLUPPEL e BRANDT, 2012, p. 5).

Duval (2004) destaca que conceitualização não ocupa a primeira posição entre as dificuldades para se aprender Geometria. Para o pesquisador a dificuldade estaria na “proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes dentro de um mesmo registro, e a falta de coordenação entre tratamentos que provém de diferentes registros” (KLUPPEL e BRANDT, 2012, p. 120).

A figura 6 apresenta um exemplo retirado da página 93 do volume 6 destinado ao 6º ano dos AFEF, em que os tratamentos discursivos e figurais são utilizados simultaneamente e de forma interativa, conforme afirma Duval (2004).

Figura 6 – Exemplo de atividade apresentada no livro do 6º ano

Planificação
Os poliedros podem ter sua superfície planificada. Vamos fazê-lo com alguns poliedros:

PENSE E RESPONDA
Responda às questões no caderno.
1. Observe os poliedros acima e suas superfícies planificadas e monte um quadro para cada um deles que contenha as seguintes informações:

Número de lados da base do poliedro	Número de faces do poliedro	Número de faces laterais do poliedro	Número de arestas do poliedro	Número de vértices do poliedro

Veja abaixo um exemplo:
• Poliedro A

Número de lados da base do poliedro	Número de faces do poliedro	Número de faces laterais do poliedro	Número de arestas do poliedro	Número de vértices do poliedro
5	7	5	15	10

Fonte: Livro volume 6

No quadro 3, retirado da página 94 do mesmo livro, observa-se a não realização dessa interação, pois apresenta apenas o registro discursivo, diminuindo o potencial heurístico em relação à aprendizagem do aluno:

Quadro 3 – Nomenclatura de prismas e pirâmides

Poliedro \ Número de lados da base	3 lados	4 lados	5 lados	6 lados
	Prisma	Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal
Pirâmide	Pirâmide triangular	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal

Fonte: Livro volume 6

Duval (2012) pontua haver uma singularidade nos problemas de Geometria que proporcionam registros de representações planas e espaciais com interações autônomas que se diferenciam, como apreensão perceptiva, discursiva, sequencial ou operatória. Além disso, para formar uma sólida perceptiva compreensão, “é essencial que cada uma das apreensões seja

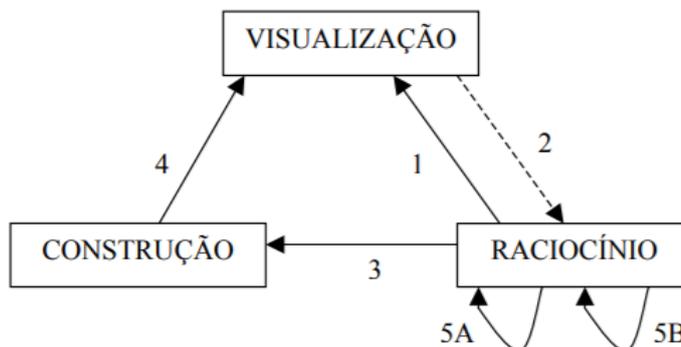
levada em consideração e, ao analisar uma figura geometricamente é importante mobilizar mais de uma apreensão” (IMAFUKO, 2019, p. 34).

Segundo Duval (2012), quando se explora uma figura, inconscientemente, já se utiliza da apreensão perceptiva, pois ela é imediata, permitindo a identificação ou reconhecimento da forma, restringindo-se somente às certificações, com a atribuição epistemológica de reconhecer objetos bidimensionais e tridimensionais.

O raciocínio geométrico, segundo Duval (2012), envolve três processos cognitivos com funções epistemológicas específicas: o processo de visualização (representação visual); o processo de construção (construção da figura) e o processo de raciocínio (que conduz para a prova e a explicitação).

Na Figura 7, cada seta representa o modo como determinado processo pode apoiar outro numa tarefa geométrica. Entretanto, o processo de visualização nem sempre ajudará a raciocinar (seta 2) e o processo de raciocínio pode ocorrer independentemente dos demais (DUVAL, 1998).

Figura 7: Interações cognitivas envolvidas na atividade geométrica



Fonte: DUVAL, 1998, p. 38

Para Duval (2012), os problemas em Geometria estão carregados de uma certa originalidade que favorece registros de representações planas e espaciais com interpretações independentes que se distinguem como: apreensão perceptiva, discursiva, sequencial ou operatória. Para o autor, para se obter uma sólida compreensão se faz necessário considerar cada uma dessas apreensões, sendo que, para se analisar uma figura geométrica é essencial mobilizar mais de uma apreensão.

Em uma atividade, ao explorar uma figura, geralmente se utiliza a apreensão perceptiva (Figura 8). Pois ela é imediata, permite o reconhecimento de sua forma, restringindo-se apenas em sua identificação bi ou tridimensional (DUVAL, 1994).

Tal apreensão pode não ser capaz de ilustrar propriedades matemáticas de uma figura, motivo pelo qual se faz necessária uma apreensão discursiva que dispõe de informações em suas legendas ou hipóteses referentes à explicitação das propriedades existentes (DUVAL, 1994).



Fonte: Livro v.6, p. 91

Em uma atividade, quando solicitado que se determine o número de arestas e faces de uma pirâmide com 10 vértices (atividade 4 do vol. 6, p. 94), inicialmente utiliza-se a apreensão discursiva. Apesar disso, é necessária a apreensão perceptiva da figura para determinar sua forma, para, depois, tentar sua resolução por meio de uma representação figural, porque um aluno do 6º ano ainda não conhece a relação de Euler que, segundo a BNCC, ainda não foi trabalhada.

A apreensão sequencial ou operatória exerce a função de construir um modelo. Tal apreensão se faz presente nas atividades em que se utilizam instrumentos como régua, compasso, *software*, entre outros, com o objetivo único de reproduzir as figuras geométricas. É importante obedecer a ordem específica que pode depender das propriedades matemáticas como também do instrumento a ser utilizado (DUVAL, 1994).

A diferença entre os modelos propostos por Duval e por Van Hiele, está na hierarquia dos níveis de pensamento geométrico, considerada importante segundo Van Hiele, já no modelo proposto por Duval não há hierarquia entre as apreensões geométricas. Assim, é possível mobilizar mais de uma apreensão ao se resolver uma situação problema em Geometria.

CAPÍTULO 4 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo discutiremos os procedimentos metodológicos utilizados nessa pesquisa, salientando o objeto de pesquisa e sua caracterização, bem como a organização da coleta dos dados para posterior análise.

4.1 Abordagem e Objeto de Pesquisa

Tendo em vista as dificuldades, já apontadas, de professores e alunos dos AFEF em relação às relações entre as figuras geométricas bi e tridimensionais, esta pesquisa tem por objetivo analisar como é apresentado esse tema nos livros da coleção A Conquista da Matemática, recomendada pelo Programa Nacional do Livro Didático e adotado pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) para ser utilizado nas salas de aula de todos os anos AFEF. A análise inclui também o Manual do Professor dada a possibilidade não só de que ele apresente mais situações em que essas relações sejam analisadas, como também que ele ofereça possibilidades de aprendizado aos mestres que tenham dificuldades em relação ao tema.

A presente pesquisa se caracteriza como sendo de cunho documental (GIL, 2002) e a organização dos dados foi norteada por uma adaptação da análise de conteúdo proposta por Bardin (1977, p. 45). Assim sendo, a organização da análise consistiu-se em três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados.

Nessa organização a primeira fase consistiu-se na escolha das ideias centrais da pesquisa, mediante o que se procedeu à escolha dos documentos a serem analisados, os objetivos da pesquisa e a formulação de indicadores para fundamentar a interpretação final dos dados. Nela foram selecionados para análise, na qual se levou em consideração a BNCC – Base Nacional Comum Curricular (2019), os livros do sexto ao nono ano da coleção A Conquista da Matemática. Também nessa fase realizamos um levantamento de pesquisas que se referem ao tema desta investigação.

Uma importante decisão em relação à pesquisa foi o uso das representações figurais por entender que a utilização das figuras em situações problemas da Geometria pode contribuir e auxiliar no entendimento de uma solução, pois “proporcionam uma maneira mais direta de explorar os diferentes aspectos para a compreensão de uma situação como um todo, de antecipar

os resultados de um procedimento, de selecionar uma solução¹” (DUVAL, 1994, p. 121, nossa tradução). O que exige, no entanto, que os tratamentos discursivos e figurais sejam efetuados de maneira simultânea e interativa. Outra decisão foi a de utilizar os trabalhos de Van Hiele no sentido de todo o conhecimento novo repousar em conhecimentos anteriores.

A característica mais proeminente do modelo é uma hierarquia de cinco níveis da maneira de compreender as ideias espaciais. Cada um desses cinco níveis descreve o processo de pensamento usado nos contextos geométricos. Os níveis descrevem como nós pensamos e que tipos de ideias geométricas nós pensamos sobre ao invés de quanto conhecimento nós temos. Uma diferença significativa de um nível para o outro são os objetos de pensamento – o que nós somos capazes de pensar geometricamente sobre. (NUNES; ONUCHI, 2010, p. 400).

Em relação à segunda fase proposta por Bardin (1977), a da exploração do material, foram definidas quais unidades da coleção abordavam conteúdos relacionados a relações entre figuras geométricas bi e tridimensionais e que estão explicitadas no Quadro 4.

Quadro 4: Unidades analisadas na coleção A Conquista da Matemática

Volume 6	6º ano PNLD - 2020	Unidade 3 – Figuras Geométricas	3- Figuras Geométricas Sólidos Geométricos
Volume 7	7º ano PNLD - 2020	Não contempla	Não contempla
Volume 8	8º ano PNLD - 2020	Não contempla	Não contempla
Volume 9	9º ano PNLD - 2020	Unidade 8 – Figuras Espaciais	3- Projeção Ortogonal Vistas Ortogonais

Fonte: A autora (2021)

A terceira e última fase da pesquisa consistiu no tratamento dos resultados e interpretação dos dados de modo que estes fossem tratados “de maneira a serem significativos e válidos” (BARDIN, 1977, p. 101). Foi nela que observamos as sequências de atividades apresentadas em cada volume, bem como as representações figurais utilizadas. Em especial, destacamos:

- a) Atividades que indiquem mobilização de apreensões perceptivas, discursivas sequenciais e operatórias para a compreensão das relações entre figuras bi e tridimensionais (Duval).

¹ Permettant ainsi de saisir d’un coup une situation dans son ensemble, les figures sont le Moyen le plus direct d’en explorer les différents aspects, d’anticiper les résultats d’une démarche, de sélectionner une solution. (DUVAL, 1994, p. 121)

- b) Atividades que indiquem preocupação em construir conhecimento novo a partir de conhecimentos anteriores já dominados ou em vias disso (Van Hiele).
- c) Contribuição do Manual do Professor para auxiliar sua tarefa em sala de aula, como também para a ampliação do conhecimento dos professores sobre o tema em questão.

Será considerado também para as análises os critérios apontados no Quadro 5 a seguir, em relação ao modelo de Van Hiele:

Quadro 5 - Indicadores de análise da coleção tendo o Modelo de Van Hiele como referencial

Nível	Objetivos	O que esperar do LD
Nível 1 (Básico) Reconhecimento	1.1 Reconhecer, comparar e nomear figuras geométricas por sua aparência global.	Exemplos contendo figuras, tanto em sua abordagem inicial quanto na sessão de atividades propostas. Permitir ao aluno realizar comparações e nomeá-las por sua aparência global.
	1.2 Trabalhar tarefas que possibilitem o manuseio das figuras geométricas em diferentes posições.	Situações problemas que permitam, em sua resolução, o manejo e reprodução de figuras.
	1.3 Identificar e classificar formas geométricas presentes no seu cotidiano.	Estabelecer relações com objetos comuns, presentes no cotidiano, que sejam compatíveis com o nível de ensino em que o aluno se encontra.
Nível 2 Análise	2 Descrever figuras por suas propriedades.	Apresentar exemplos e exercícios que propiciem ao aluno descrever figuras conforme suas propriedades básicas.
	2.2 Comparar figuras por meio de suas propriedades e características.	Apresentar exemplos e exercícios que contenham figuras e que permitam ao aluno comparar e identificar características semelhantes ou diferentes.
	2.3 Analisar propriedades características das figuras ou objetos identificados, estabelecer relações com o número de lados, ângulos e diagonais.	Apresentar figuras que pertençam a um mesmo grupo com características comuns, permitir ao aluno realizar a comparação quanto ao número de lados, ângulos, lados paralelos, lados congruentes e diagonais.
	2.4 Identificar e construir figuras apenas por descrições ou pela presença de suas propriedades.	Apresentar atividades ou tarefas que favoreçam a identificação e o esboço de figuras por meio de sua descrição.
	2.5 Compreender que as figuras podem ser classificadas quanto a medida de seus lados e ângulos.	Apresentar exemplos e atividades que permitam ao aluno realizar questionamentos sobre a possibilidade ou não de agrupar figuras de acordo com suas propriedades.
	2.6 Diferenciar figuras pelas propriedades.	Apresentar exemplos, tarefas e atividades que possibilitem aos alunos identificarem, entre as figuras fornecidas, propriedades que as diferenciam umas das outras.

	2.7 Compreender as relações geométricas e propriedades para solucionar problemas.	Apresentar situações problemas que envolvam o uso das propriedades das figuras e que permitam estabelecer relações entre elas.
Nível 3 Abstração	3.1 Perceber que uma propriedade pode decorrer de outra.	Apresentar exemplos, tarefas e atividades que favoreçam a utilização das propriedades das figuras para sua descrição.
	3.2 Compreender e utilizar definições.	Apresentar definições, tanto na parte de apresentação de conteúdo quanto na parte de atividades.
	3.3 Promover argumentação lógica informal.	Apresentar exemplos, tarefas e atividades que promovam a argumentação lógica informal.
	3.4 Ordenar as classes das figuras geométricas.	Possibilitar situações que favoreçam a ordenação ou inclusão de figuras geométricas em classes.
	3.5 Construir uma figura por meio de outra.	Apresentar situações que permitam ao aluno construir figuras por meio de outras figuras conhecidas.
Nível 4 Dedução	4.1 Dominar o processo dedutivo e das demonstrações.	Apresentar atividades que favoreçam o processo dedutivo e que auxiliem demonstrações.
	4.2 Compreender e diferenciar o papel dos axiomas, teoremas e provas.	Apresentar tanto na parte curso quanto na parte das atividades, exemplos e tarefas que auxiliem na compreensão de axiomas, teoremas.
	4.3 Reconhecer quando utilizar elementos auxiliares no problema.	Apresentar tarefas que favoreçam a utilização de propriedades, definições, axiomas e teoremas.
	4.4 Deduzir uma propriedade a partir de outra.	Apresentar situações que possibilitem a dedução de uma propriedade por meio de uma figura já conhecida ou de um fato conhecidamente verdadeiro.
Nível 5 Rigor	5.1 Visualizar propriedades mais gerais de sistemas dedutivos.	Apresentar situações que permitam visualizar propriedades em figuras ainda não verificadas.
	5.2 Comparar vários sistemas possíveis tanto a Geometria euclidiana quanto a não-euclidiana.	Apresentar exemplos que favoreçam a comparação entre figuras da Geometria euclidiana e a não-euclidiana.
	5.3 Desenvolver sequências mais longas de enunciados e compreender o significado de dedução.	Favorecer atividades com enunciados que estimulem a argumentação e a compreensão de uma dedução.

Fonte: A autora, 2021

Quanto à Teoria dos Registros Representação Semiótica consideraremos as interações entre os dois tipos de registros: o registro na língua natural (registro discursivo) e o registro figural (registro não discursivo).

No próximo capítulo serão discutidas as análises da coleção A Conquista da Matemática.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DA COLEÇÃO: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

O livro didático é um dos principais instrumentos e, ao mesmo tempo uma fonte concentrada de informação impressa utilizada por grande parte dos professores e alunos nas escolas brasileiras. Tal característica permite inferir que o livro didático se configura como base para escolarização e o letramento de muitos discentes brasileiros.

Além disso, como apontam os PCNs, “Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apoiam-se quase que exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória” (BRASIL, 1998, p. 21-22). Levando esse fator em consideração, é esperado que um Livro Didático – LD não atenda somente as especificidades para o professor, mas também que ele seja capaz de permitir a compreensão dos objetos e conceitos nele apresentados e que serão explorados pelo aluno, muitas vezes, sem sua presença.

Salientamos que, nesta coleção, as relações entre objetos bi e tridimensionais são abordadas conforme recomenda a BNCC (2019) nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:

Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. (BRASIL, 2019, p. 272).

No entanto, essas relações são pouco enfatizadas nos AFEF, embora haja menção à importância disso nesse documento: “No Ensino Fundamental – Anos Iniciais em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa” (BRASIL, 2019, p. 272). Ainda, por outro lado, salienta que, para os anos finais “o ensino de Geometria precisa ser visto **como consolidação e ampliação das aprendizagens realizada** (*ibid.*, 2019, p. 272).

O que significa que, ao longo dos quatro anos, haverá a necessidade da retomada e aprofundamento dos temas já abordados.

5.1 Análise Geral da Coleção em Relação a Geometria

De acordo com a proposta metodológica, foram analisados os quatro volumes da coleção “A Conquista da Matemática” para os Anos Finais do Ensino Fundamental, a mais votada pelos professores da rede estadual entre as apresentadas pelo PNLD 2020 e adotada em toda a rede oficial.

Concordamos com os autores da coleção em análise quando salientam que o livro didático é apenas um dos muitos recursos didáticos que auxiliarão o professor em seu trabalho docente e não a única fonte para que desenvolva seu esse trabalho, mas consideramos também que ele é talvez o material ao qual ele tem acesso. Assim sendo, consideramos também a importância da existência de um Manual do Professor que proporciona aos mestres mais subsídios para sua atuação em sala de aula.

Os autores da coleção se preocuparam em apresentar, ao longo de cada volume, algumas tendências da Educação Matemática como modelagem, resolução de problemas, tecnologias digitais e comunicação, para que o LD já oferecesse ao professor de Matemática essa possibilidade de trabalhá-las em sala de aula, estando em conformidade com tais tendências.

A obra em si é composta por quatro (4) volumes do livro do aluno que vai do 6º ao 9º ano e cada livro também possui um caderno de atividades, porém este último é vendido separadamente e não foi fornecido aos professores, nem aos alunos da rede estadual de ensino do Estado do Paraná. Cada livro inicia-se com uma abertura e cada unidade traz uma imagem (ilustração, fotografia ou um infográfico), além de algumas questões cujo objetivo é contextualizar os alunos a respeito do assunto a ser estudado e mobilizar conhecimentos anteriores. Os capítulos são apresentados com exploração de diferentes recursos, como textos, imagens e atividades, além de contar com **seções** nomeadas como: Fórum; Um Novo Olhar; Nós; Atividades; Educação Financeira; Por Toda Parte; Para Quem Quer Mais; Tratamento da Informação; Tecnologias; Retomando o que Aprendeu; Atualidades em Foco; e **boxes** - um destaque como: Pense e Responda; Saiba que; Descubra mais) que buscam favorecer compreensões, aprofundamentos e articulações. Apesar disso, nos tópicos relativos à Geometria, observamos que essas seções e esses boxes se fazem pouco presentes no decorrer de cada volume.

A obra está em conformidade com a BNCC (2018) quanto à incorporação dos fluxogramas e gráficos, educação financeira, *software* de Geometria dinâmica, tecnologias e habilidades do século XXI ao currículo de Matemática. Dentre os quatro volumes da obra analisada verificamos que os autores exploram o uso da calculadora comum, da planilha

eletrônica do *LibreOffice* Calc, régua, compasso e *software* GeoGebra (também como *software* de **Geometria Dinâmica**) para o ensino da Geometria, links para o acesso a jogos, textos e vídeos educativos, textos, livros paradidáticos, que enriquecem o assunto e a aula, ao mesmo tempo em que aguçam a curiosidade do aluno enquanto fazem uso das **Tecnologias** nas aulas. Na seção Tratamento de Informação, os autores exploram muito bem os **Fluxogramas e os Tipos de Gráficos**. Quando abordam a **Educação Financeira** optam por recortes de jornais ou *sites* com temas pertinentes à faixa etária. Quanto às **Habilidades do Século XXI**¹, habilidades estas que, acreditamos, o livro didático, por si só não é capaz de contemplar, dado que se refere a atitudes necessárias ao aprendizado: colaboração, autonomia, protagonismo.

O Quadro 6 apresenta os objetos do conhecimento e as habilidades conforme apresentados na BNCC (BRASIL, 2018) relacionados aos conteúdos tratados nas unidades do volume destinado para o 6º ano dos AFEF.

Quadro 6 – Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC trabalhados no 6º ano

	Objetos do conhecimento	Habilidades
6º ano	<p>Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados</p> <p>Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)</p> <p>Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados</p>	<p>(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.</p> <p>(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.</p> <p>(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.</p> <p>(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.</p> <p>(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a</p>

¹ <https://tecnologia.educacional.com.br/blog-pense-matematica/5-itens-bncc-para-curriculo-matematica-da-sua-escola/>

	<p>Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas</p> <p>Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e softwares</p>	<p>ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.</p> <p>(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.</p> <p>(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.</p> <p>(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).</p>
--	---	---

Fonte: (BRASIL, 2018)

O Quadro 7 aponta os objetos do conhecimento e as habilidades da BNCC (BRASIL, 2019) relacionados aos conteúdos abordados nas unidades do volume destinado ao 7º ano dos AFEF.

Quadro 7 – Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC para o 7º ano

	Objetos do conhecimento	Habilidades
7º ano	<p>Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem</p> <p>Simetrias de translação, rotação e reflexão</p> <p>A circunferência como lugar geométrico</p> <p>Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal</p>	<p>(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p> <p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p> <p>(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.</p> <p>(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.</p> <p>(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existências do</p>

	<p>Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos</p> <p>Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero</p>	<p>triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.</p> <p>(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.</p> <p>(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.</p> <p>(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.</p> <p>(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.</p>
--	---	---

Fonte: (BRASIL, 2018)

O Quadro 8 apresenta os objetos do conhecimento e as habilidades da BNCC (BRASIL, 2019) para o volume destinado ao 8º ano dos AFEF.

Quadro 8 – Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC para o 8º ano

	Objetos do conhecimento	Habilidades
8º ano	<p>Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros</p> <p>Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares</p> <p>Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas</p> <p>Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação</p>	<p>(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.</p> <p>(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.</p> <p>(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.</p> <p>(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.</p> <p>(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.</p>

Fonte: (BRASIL, 2018)

O Quadro 9 apresenta os objetos do conhecimento e as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) relacionados aos conteúdos tratados nas unidades do volume destinado para o 9º ano dos AFEF.

Quadro 9 - Tópicos e habilidades de Geometria indicados na BNCC para o 9º ano

	Objetos do conhecimento	Habilidades
9º ano	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também <i>softwares</i> .
	Distância entre pontos no plano cartesiano	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	Vistas ortogonais de figuras espaciais	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Fonte: (BRASIL, 2018)

Os objetos do conhecimento (conteúdos) e as habilidades, expostos no Quadro 9, nos permitirão identificar como os autores da coleção em análise abordam cada um deles e de que maneira os autores exploram essas habilidades em cada nível dos AFEF, no decorrer de seus quatro volumes. A partir do exposto no Quadro 9, buscaremos identificar o tratamento das figuras planas e espaciais, bem como se é promovida a relação entre elas ao longo dos quatro volumes da coleção.

Os critérios elencados no Quadro 5 nortearão nossas análises acerca da teoria e atividades que os autores exploram na coleção quanto ao modelo de Van Hiele.

5.2 Análise Individual dos Volumes

Cada um dos quatro volumes da obra é composto por nove (9) unidades e cada unidade é composta por uma quantidade variável de capítulos. Para melhor compreensão da disposição dos tópicos relacionados com o nosso tema, elaboramos quadros que discriminam os temas abordados por cada volume.

5.2.1 Livro Volume 6

O Quadro 10 apresenta a quantidade e os assuntos abordados no volume 6 em relação a figuras bi e tridimensionais.

Quadro 10 - Conteúdo de Geometria plana e espacial para o 6º ano

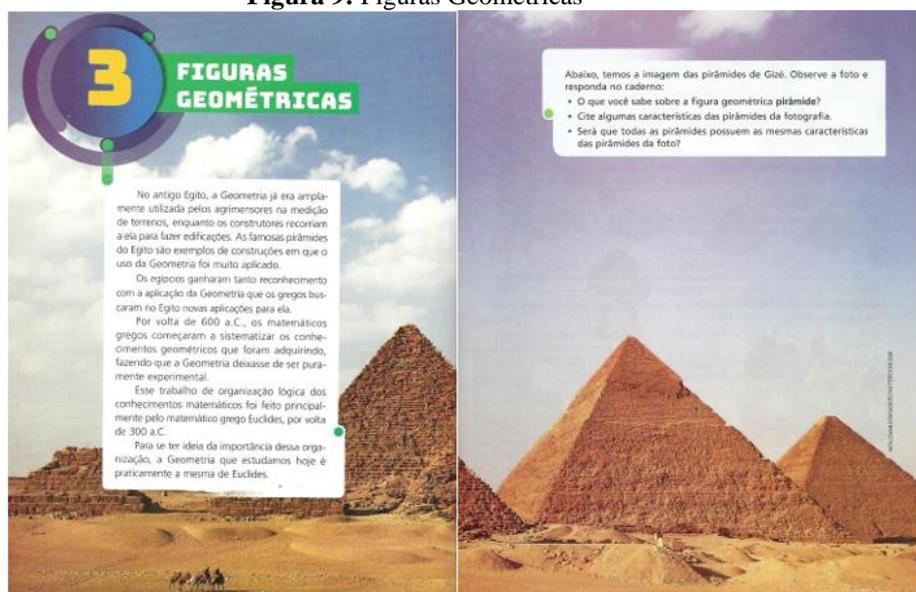
	UNIDADE	CAPÍTULO
VOLUME 6	3- Figuras Geométricas	1- Ponto, reta e plano 2- A reta 3- Figuras Geométricas 4- Sólidos Geométricos
	7- Ângulos e Polígonos	1- Giro, abertura e inclinação 2- O ângulo 3- Construções de retas paralelas e perpendiculares 4- Polígonos 5- Triângulos e quadriláteros 6- Construção e ampliação de figuras planas

Fonte: A autora, 2021

A primeira unidade a tratar da Geometria é a unidade 3. Os autores da coleção já cometem, a nosso ver, um equívoco ao tratar a Unidade 3 de “**Figuras Geométricas**”, já que apenas no capítulo três dessa unidade é que, de fato, essas são tratadas. Do nosso ponto de vista caberia melhor o título de “elementos geométricos”.

A unidade tem início com um texto que aborda o uso e a importância da Geometria já no antigo Egito e uma ilustração que retrata as pirâmides construídas naquela época, conforme apresenta a Figura 9.

Figura 9: Figuras Geométricas



Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 76 e 77)

A ilustração apresenta as três principais pirâmides e o texto finaliza com três questões: “O que você sabe sobre a figura geométrica pirâmide? Cite algumas características das pirâmides da fotografia. Será que todas as pirâmides possuem as mesmas características da foto? (GIOVANNI; JÚNIOR; CASTRUCCI, 2019, p. 77).

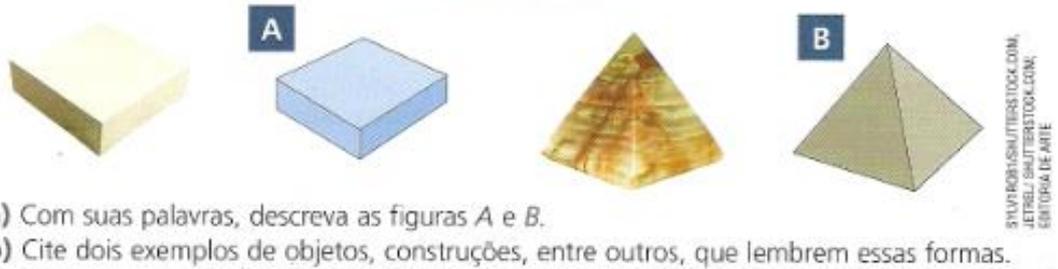
No Manual do Professor (MP), os autores sugerem que o professor apresente, neste momento, pirâmides com base triangular, quadrada, pentagonal e hexagonal, para que o aluno possa observar informalmente algumas características semelhantes entre elas. Apesar de o primeiro capítulo da unidade fazer referência às noções primitivas da Geometria para, só no capítulo quatro, iniciar o estudo dos sólidos geométricos, a ilustração e a forma como o texto foi apresentado podem oportunizar ao aluno responder as duas primeiras questões da página 77. Para que o aluno seja capaz de responder à questão se faz necessário que o professor atenda as instruções fornecidas pelos autores no Manual do Professor (MP) e apresente outras pirâmides com bases diferentes das apresentadas nas figuras.

Essa abordagem está relacionada ao nível visual/Nível 1 do modelo de Van Hiele, que, segundo Maciel (2016), refere-se ao reconhecimento das formas geométricas observadas em objetos relacionados com o cotidiano ou com suas imagens e à habilidade de atribuir nomes às formas geométricas consideradas, neste caso a imagem das famosas pirâmides do Egito.

De acordo com Duval (2003 e 2004), os tratamentos discursivos e os tratamentos figurais devem ser empregados ao mesmo tempo e reciprocamente. No exemplo a seguir, Figura 10, observa-se que essa interação ocorre, pois o tratamento figural é capaz de possibilitar o registro discursivo.

Figura 10: Exemplo de atividade com figuras espaciais

3. Se você tatear objetos como os que vemos a seguir, vai perceber bicos que lembram pontos (vértices), quinas que lembram partes de retas (arestas) e superfícies que lembram partes de planos (faces). *Respostas pessoais.*



Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 79)

Nesta mesma atividade, embora o capítulo não trate de figuras planas e espaciais, os autores da coleção tentam fazer uma ligação com os conceitos primitivos ponto, reta e plano, com figuras tridimensionais. Porém, fazer os alunos verificarem esses conceitos em uma figura tridimensional é a melhor forma de entendê-los?

Se considerarmos a TRRS, o processo de visualização por si só não garante a apreensão perceptiva, ou seja, não garante a construção dos objetos matemáticos vértices, arestas e faces. Talvez isso se dê porque os autores consideram que tais conhecimentos já foram desenvolvidos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o que nem sempre acontece.

No capítulo 3 da unidade 3, conforme apresenta a Figura 11, na abordagem de figuras planas e não planas os autores apresentam os sólidos geométricos (página 89) e utilizam uma metodologia que pode favorecer a identificação dessas figuras pelo aluno e permitir que eles as classifiquem em figuras geométricas planas e não planas.

Figura 11: Parte teórica do capítulo 3



CAPÍTULO
3

FIGURAS GEOMÉTRICAS



Contornando a face de um dado apoiado em uma folha de papel, observamos que todos os pontos da figura traçada estão no plano representado pela folha de papel.

As figuras geométricas que estão contidas em um plano, isto é, que têm todos os seus pontos em um mesmo plano, são chamadas de **figuras geométricas planas**.

Já as figuras geométricas que não estão contidas em um único plano, ou seja, aquelas que não têm todos os seus pontos em um mesmo plano, são chamadas de **figuras geométricas não planas**.



A face de um dado lembra uma figura geométrica plana.

O dado lembra uma figura geométrica não plana, o cubo.

Quando olhamos o mundo à nossa volta, para a natureza e para os objetos construídos pelo ser humano, podemos perceber que ele é repleto de objetos que lembram figuras geométricas. Veja alguns exemplos:



➤ Uma laranja lembra uma esfera.



➤ Embalagens de produtos possuem formas que lembram as figuras geométricas não planas.



➤ Conseguimos ver nos favos de mel formas que lembram hexágonos.



➤ Prédios, como o Museu de Arte de São Paulo (Masp), apresentam formas que lembram figuras geométricas não planas.



➤ Bandeiras, como a do Brasil, apresentam formas que lembram figuras geométricas planas.

Nas imagens acima existem elementos que lembram **figuras geométricas planas** e elementos que lembram **figuras geométricas não planas**. Algumas figuras geométricas não planas podem ser chamadas de **sólidos geométricos**.

Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 89)

Segundo Santos e Amâncio (2021), tarefas que possibilitam ao aluno manipular objetos tridimensionais podem permitir uma análise de suas características globais, o que, de acordo com Nasser (2010), são características que assinalam o Nível 1 do modelo de Van Hiele.

A maneira como foi conduzida a explicação do assunto no livro pode favorecer a compreensão e identificação de figuras planas presentes em objetos tridimensionais e vice-versa, pois são objetos presentes no cotidiano do aluno como o “dado”, o que, de certa forma, possibilita uma interação mais significativa.

A situação exposta na Figura 11 pode favorecer a transição do Nível 1 – Visual para o Nível 2 – Análise, dependendo da condução realizada pelo professor em sala de aula.

De qualquer modo, como expõe Kluppel (2012), é preciso cuidado com as definições apresentadas nos livros didáticos, pois precisam “cumprir as quatro funções, no tratamento do discurso, e interagir com os tratamentos figurais para permitir, na resolução de exercícios e demonstrações de teoremas a utilização de operações discursivas (descrição, explicação, narração e raciocínio)” (KLUPPEL, 2012, p. 71). Na breve apresentação feita pelos autores não

salientam claramente a representação figural e a representação discursiva para apresentação dos objetos geométricos apresentados, o que para Duval (2012), é essencial. Assim, não deveria ficar a cargo do leitor a interpretação de que o objeto tridimensional seja um cubo, ou seja, a situação é conduzida como se o aluno já soubesse.

Neste capítulo são apresentadas cinco atividades relacionadas à Figura 12 que exploram objetos planos e não planos. A questão 1 de acordo com o modelo de Van Hiele, encontra-se no nível 1, no qual o aluno precisa apenas identificar objetos geométricos utilizando apenas da sua percepção visual para isso dado que é neste nível que o aluno reconhece as figuras, visualmente, e identifica suas formas levando em conta suas características globais, tanto pela sua aparência quanto por suas propriedades. Porém, ainda não utilizam das propriedades para classificá-las, apenas as classificam por sua aparência.

Figura 3: Exemplo de exercícios

Folha de papel, superfície do tampo de uma mesa, tela de um quadro.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

- Pense no mundo em sua volta e liste objetos da natureza ou construídos pelo homem que lembram figuras geométricas. *Resposta pessoal.*
- Classifique as figuras geométricas da atividade anterior em planas ou não planas. *Resposta pessoal.*
- Entre os elementos descritos nas fichas, escreva quais nos dão a ideia de:
 - uma figura geométrica plana;
 - uma figura geométrica não plana.
 Lata de extrato de tomate, dado, tubo de cola bastão, garrafa de água.
- O professor de Geografia pediu aos alunos que desenassem numa folha de papel o mapa do estado onde nasceram. O desenho que eles fizeram representa uma figura geométrica plana ou não plana? *Plana.*
- São figuras planas ou não planas?
 - A planta de uma casa desenhada em papel vegetal. *Plana.*
 - A maquete dessa mesma casa. *Não plana.*

folha de papel

lata de extrato de tomate

superfície do tampo de uma mesa

tela de um quadro

dado

tubo de cola bastão

garrafa de água




90

Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 90)

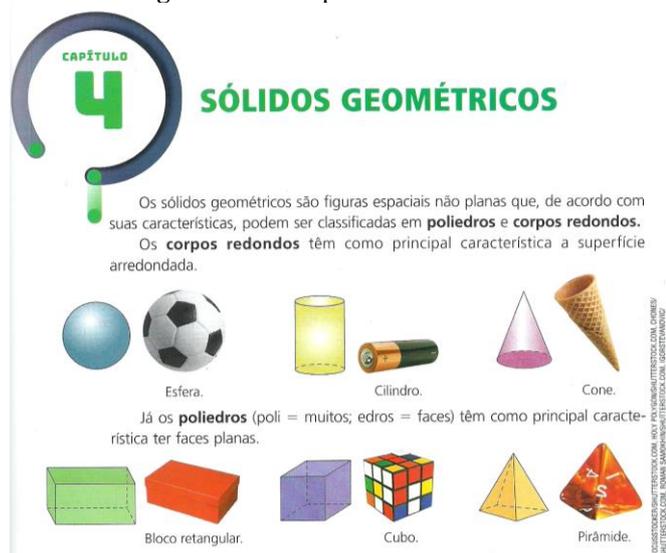
Já as demais questões estão no nível 2 do modelo de Van Hiele, pois é necessário realizar uma comparação para classificar os objetos em planos e não planos. Assim, o aluno, nesta mesma seção de exercícios, pode transitar do nível 1 para o nível 2, o que, conforme destacam Braga e Dornelles (2011), pode ser de grande relevância para o desenvolvimento do pensamento geométrico entre os níveis.

Neste nível 2, os alunos não apenas pensam em figuras pela aparência, mas já seriam capazes de as classificarem quanto aos aspectos de uma classe. Dessa maneira, eles poderiam pensar, por exemplo, nas características comuns entre figuras planas e as não-planas. Portanto, seriam capazes de identificar propriedades das formas por meio da investigação e experimentação.

De acordo com a TRRS, como apontam Arcego, Kierfer e Mariani (2021), há uma exigência maior da atividade cognitiva relativa à Geometria para alcançar os conceitos, de onde há necessidade da realização dos tratamentos figurais e discursivos. Observamos que as questões 1, 2 e 4 não atendem a tais especificidades, pois não apresentam o registro figural, o qual permitiria ao aluno a identificação das figuras e suas propriedades.

No capítulo 4, os autores da coleção iniciam a abordagem da Figura 13 classificando os sólidos geométricos em poliedros e corpos redondos.

Figura 13: Exemplo de exercícios



Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 91)

Do ponto de vista do modelo de Van Hiele, para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico no aluno, os autores deveriam ter (mesmo que no MP, por exemplo), alertado o professor de Matemática para levar os sólidos geométricos para sala de aula deixando que fossem manuseados pelos alunos, fazendo com que eles percebessem que uns apresentam

quinas e outras formas mais arredondadas, surgindo daí a necessidade de um nome especial para diferenciá-las como um poliedro ou um corpo redondo.

Lembrando a advertência de Brandt e Moretti (2017, p. 87), de que “A Geometria exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas, em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio”, a atividade exigiria o uso de registros figurais e registros da língua materna de maneira simultânea e interativa, conforme foi apresentado na Figura 13.

Logo a seguir o livro apresenta uma única atividade que consiste em nomear as figuras apresentadas (Figura 14).

Figura 14: Exemplo de exercícios

ATIVIDADES

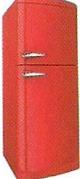
Responda à questão no caderno.

1. Observe os objetos a seguir e escreva o nome do sólido geométrico que cada um deles lembra. Em seguida, classifique-os em poliedro ou corpo redondo.

a)  Cilindro: corpo redondo.

b)  Esfera: corpo redondo.

c)  Pirâmide: poliedro.

d)  Bloco retangular: poliedro.

e)  Cubo: poliedro.

f)  Cone: corpo redondo.

THAMMASAK LEK/SHUTTERSTOCK.COM, S-F/SHUTTERSTOCK.COM, KATALEERWAN INTARACHOTE/SHUTTERSTOCK.COM, PASHKAS/SHUTTERSTOCK.COM, EVGENY KARANDAEV/SHUTTERSTOCK.COM, STACY BARNETT/SHUTTERSTOCK.COM, EDITORIA DE ARTE

Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 91)

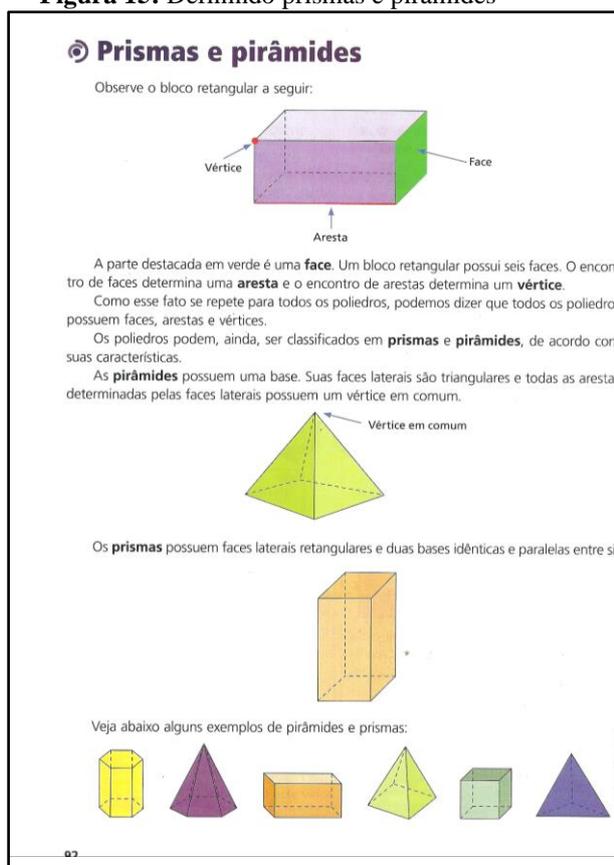
É uma atividade que requer do aluno muito mais que um simples reconhecimento, ou seja, os alunos devem analisá-las e ordená-las quanto a suas classes, o que já seria uma característica do Nível 3, o da abstração no modelo de Van Hiele.

Nessa atividade o registro figural apresentado pode ser capaz de permitir ao aluno dialogar com seu registro discursivo (nomenclatura e classificação). Segundo Duval (2004), a figura constitui uma situação geométrica só na medida em que os conceitos de certas unidades figurais e algumas de suas associações estejam claramente definidas de entrada. A figura por si

só não é capaz de transmitir nada de suas características se não estiver acompanhada do discurso.

No mesmo capítulo, os autores optaram por abordar apenas os prismas e as pirâmides. Nele, os autores, conforme apresenta Figura 15, já exemplificam prismas e pirâmides com diferentes bases, mas deixaram de apresentar o prisma oblíquo, o que pode futuramente levar o aluno ao erro, fazendo-o imaginar que não seja um tipo de prisma.

Figura 15: Definindo prismas e pirâmides



Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 92)

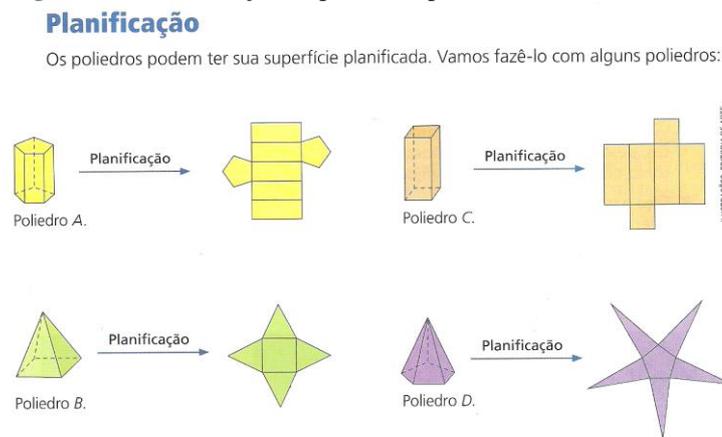
O livro apresenta, nesta atividade, dois exemplos de planificação para os prismas e dois para as pirâmides. Nas figuras 13 e 14 observamos a presença dos dois tipos de registros na abordagem dos conceitos. As imagens (figuras) estão acompanhadas pelos registros discursivos, o que contribui heurísticamente para o reconhecimento de cada uma delas e contribui para a organização de suas características.

Observa-se, também, que tais exemplos já se enquadram no Nível 2 do modelo de Van Hiele, pois, de acordo com Villiers (2010, p.401), a passagem do Nível 1 para o Nível 2 “[...] envolve a aquisição da linguagem técnica por meio da qual as propriedades do conceito podem

ser descritas”. É possível observarmos que para o aluno realizar a classificação entre prismas e pirâmides e seus elementos, se faz necessária não apenas uma simples observação, mas também uma análise das características de cada objeto, envolvendo “[...] o reconhecimento de algumas novas relações entre conceitos e o refinamento e a renovação de conceitos existentes” (VILLIERS, 2010, p. 401).

A Figura 16 apresenta as atividades nas quais os alunos irão precisar dos registros figurais apresentados logo acima delas para responderem as questões.

Figura 164: Planificação de prismas e pirâmides, e tarefas



PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Observe os poliedros acima e suas superfícies planificadas e monte um quadro para cada um deles que contenha as seguintes informações:

Número de lados da base do poliedro	Número de faces do poliedro	Número de faces laterais do poliedro	Número de arestas do poliedro	Número de vértices do poliedro

Veja abaixo um exemplo:

- Poliedro A

Número de lados da base do poliedro	Número de faces do poliedro	Número de faces laterais do poliedro	Número de arestas do poliedro	Número de vértices do poliedro
5	7	5	15	10

Poliedro B: 4; 5; 4; 8; 5. Poliedro C: 4; 6; 4; 12; 8. Poliedro D: 5; 6; 5; 10; 6.

2. Relacione, para os prismas, o número de lados da base com os demais dados do quadro. Essa relação se manteve nos dois prismas? Sim, a relação é igual para todos os prismas.

3. Faça, para as pirâmides, o mesmo trabalho realizado na atividade 2. É possível identificar uma relação entre os dados do quadro? Sim, existe uma relação e ela é igual para todos as pirâmides.

Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 93)

No MP, os autores sugerem associar tais formas com objetos do cotidiano dos alunos, como as embalagens, o que permitiria ao professor conduzir uma tarefa investigativa com seus alunos mediante a qual seria possível eles desenvolverem habilidades como a percepção e a representação de figuras geométricas.

Tal tarefa pode levar o aluno a perceber a possibilidade de uma figura tridimensional, como o prisma, possuir faces que são figuras planas. Van de Walle (*apud* Santos e Amâncio, 2021, p. 170) afirma a importância de os alunos disporem de “uma variedade de exemplos das formas [...] para desenhar, construir, fazer, compor e decompor formas em ambos os espaços bi e tridimensionais”.

Em seguida são apresentados dois questionamentos (Figura 17) a respeito de pirâmides e prismas que requereriam mais exemplos do que os expostos anteriormente. A nomenclatura é apresentada de maneira pronta, sem permitir que os alunos a desenvolvam a partir de tarefas mediante as quais pudessem, conforme apontam Santos e Amâncio (2021), manipular, explorar, construir uma linguagem geométrica própria, a partir da qual poderiam não somente perceber quais são as diferenças e quais as semelhanças entre as formas, como sugere Van de Walle (2009), de modo a ir se aproximando da linguagem geométrica formal.

Figura 175: Pense e responda

Nomenclatura

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Vimos na página 92 algumas características das pirâmides. Releia essas características, pesquise diferentes pirâmides e reflita sobre qual elemento pode ser utilizado como diferenciador entre pirâmides. **O polígono da base.**
2. Faça o mesmo exercício da atividade 1, mas agora para os prismas. Qual o elemento diferenciador entre os diferentes prismas? **O polígono da base.**

A nomenclatura de prismas e pirâmides é feita de acordo com o polígono da base. Observe o quadro abaixo com exemplos de nomenclatura desses poliedros.

Poliedro \ Número de lados da base	3 lados	4 lados	5 lados	6 lados
	Prisma	Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal
Pirâmide	Pirâmide triangular	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal

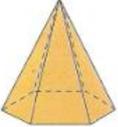
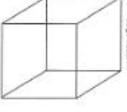
Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 93)

As atividades desse capítulo, Figura 18, estão todas no nível de análise em relação ao modelo de Van Hiele, pois as respostas a elas exigem do aluno a capacidade de perceber as características das figuras e conseguir descrever suas propriedades.

Figura 186: Atividades

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Você já viu que os prismas e as pirâmides têm algumas características diferentes. Escreva duas diferenças entre os prismas e as pirâmides.
2. Se um prisma possui 6 arestas na sua base, como ele é chamado? Quantos vértices ele possui?
Prisma hexagonal; 12 vértices.
3. Observe a pirâmide abaixo e responda:

Os prismas possuem os lados em forma de retângulos e duas bases paralelas. As pirâmides possuem as faces na forma triangular e apenas uma base.
- a) Quantas faces, vértices e arestas tem essa pirâmide? 7 faces, 7 vértices e 12 arestas.
- b) Qual a forma de suas faces laterais? E de sua base? Triângulos; hexágono.
- c) Do que depende seu nome? Como podemos nomeá-la? Seu nome depende da forma da base; pirâmide hexagonal.
4. Se uma pirâmide tiver 10 vértices, quantas arestas e faces ela terá?
10 faces e 18 arestas.
5. Preciso construir um cubo de arame usando 15 cm de arame para cada aresta. De quantos centímetros vou precisar? 180 cm


94

Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 93)

Santos e Amâncio (2021), com base em Van de Walle, apontam que as atividades, neste nível, devem propiciar aos alunos a organização de classes de formas, de modo a explorar tanto os seus elementos que se assemelham quanto aqueles que se diferem. Assim, eles seriam capazes de categorizar os poliedros distinguindo-os em grupos de prismas e pirâmides, dado que, conforme Pachêco, Pachêco e Silva (2017), os alunos neste nível já são capazes de identificar as características das figuras realizando uma descrição de suas propriedades.

A Figura 19¹ apresenta duas atividades que, tendo em vista a BNCC (...) poderiam favorecer ao aluno o trânsito entre os diversos tipos de registros de representação, permitindo que ele viesse a ter uma maior flexibilidade e fluidez na área e, com isso, promover o desenvolvimento dos alunos, por apresentarem tanto o registro discursivo (cubo) quanto o figural (sua representação geométrica).

Nessas duas atividades podemos identificar o primeiro momento em que os autores tratam da transição do bidimensional para o tridimensional, porém a intenção revelada por eles no MP é a de que os alunos dominem a habilidade EF06MA17².

¹ Os autores poderiam ter fornecido os moldes das planificações dos sólidos ao final do capítulo, possibilitando ao professor um trabalho com a planificação e a montagem dessas figuras com seus alunos, pois não são todas as escolas que possuem os modelos de sólidos para o uso em sala de aula e mesmo porque ao oferecer esse tipo de tarefa, acaba permitindo que o aluno transite entre os dois primeiros níveis de Van Hiele, o que indiretamente propicia o desenvolvimento do pensamento geométrico no aluno.

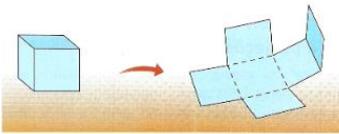
² Habilidade da BNCC trabalhada na unidade.

Santos e Amâncio (2021), por exemplo, com tal objetivo, realizaram atividades que propunham aos alunos a exploração de objetos e desenhos que representassem as figuras geométricas tridimensionais e apresentassem os resultados obtidos, tanto oralmente quanto por escrito, de forma coletiva e com a participação do professor. O que, de certo modo, significava não somente proporcionar uma progressão entre os níveis, como no modelo de Van Hiele, como também o manejo de diferentes registros, como recomenda Duval.

Figura 197: Atividades 6 e 7

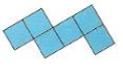
DESAFIO

6. Veja a planificação de uma caixa de papelão com a forma de cubo.



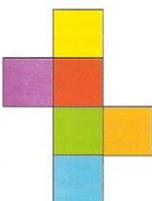
Há mais de uma planificação de cubo. Descubra e registre no caderno quais das figuras a seguir representam uma superfície cúbica planificada. Alternativas: a, b, d, fe h.

a)  d)  g) 

b)  e)  h) 

c)  f) 

7. Verifique e registre no caderno qual dos seis cubos corresponde à planificação dada. Alternativa f.



a)  c)  e) 

b)  d)  f) 

ILUSTRAÇÕES: ESTERHO DE ABRE

Fonte: Volume 6 (6º ano, p. 95)

Ainda, ao final deste capítulo, em relação à Figura 19, na seção “Retomando o que aprendeu”, os autores sugerem sete atividades que consideramos explorar em os dois primeiros níveis do modelo de Van Hiele, porque quando um aluno se encontra no Nível 2, ele já é capaz de considerar todas as formas de uma classe em vez de apenas se basear em figuras específicas, como fazia anteriormente no Nível 1. No entanto, essas atividades não privilegiam os dois tipos de apreensões da TRRS consideradas neste trabalho.

Embora o livro apresente algumas sugestões e atividades que poderiam promover a investigação pelos alunos, em sua maioria elas não promovem a construção do pensamento geométrico do aluno, visto que, ao abordar na Unidade 3 – Capítulo 4 (Os Sólidos

Geométricos), os autores não exploram conceitos de figuras planas a partir das figuras espaciais. Assim, considerando as teorias que norteiam nossa pesquisa e com os critérios que elencamos no quadro 6, o volume 6 deixa de proporcionar situações que permitiriam o manuseio e reprodução de figuras espaciais; o estabelecimentos de relações com objetos comuns presentes no cotidiano e no nível de ensino no qual o aluno se encontra; apresentação de figuras que pertençam a um mesmo grupo com características comuns, o que permitiria ao aluno realizar a comparação entre os objetos bi e tridimensionais. Há ausência de tarefas que: favoreçam a identificação e desenhos de figuras por meio de sua descrição; exemplos e atividades que promovam a argumentação lógico-formal e situações que favoreçam a ordenação ou inclusão das figuras geométricas.

5.2.2 Livro volume 9

No Quadro 11 podemos verificar os tópicos relacionados com o volume 9:

Quadro 11: Conteúdo Geométrico para o 9º ano

	UNIDADES	CAPÍTULOS
VOLUME 9	4- Relações entre Ângulos	1- Ângulos determinados por uma reta transversal Circunferência
	5- Proporção e Semelhança	1- Segmentos proporcionais 2- Feixe de retas paralelas Figuras semelhantes
	7 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo e na Circunferência	1- O teorema de Pitágoras 2- As relações métricas no triângulo retângulo 3- Comprimento de arco de circunferência Relações métricas na circunferência
	8 - Figuras Planas, Espaciais e Vistas	1- Polígono regular 2- Representações no plano 3- Figuras espaciais

Fonte: A autora, 2021.

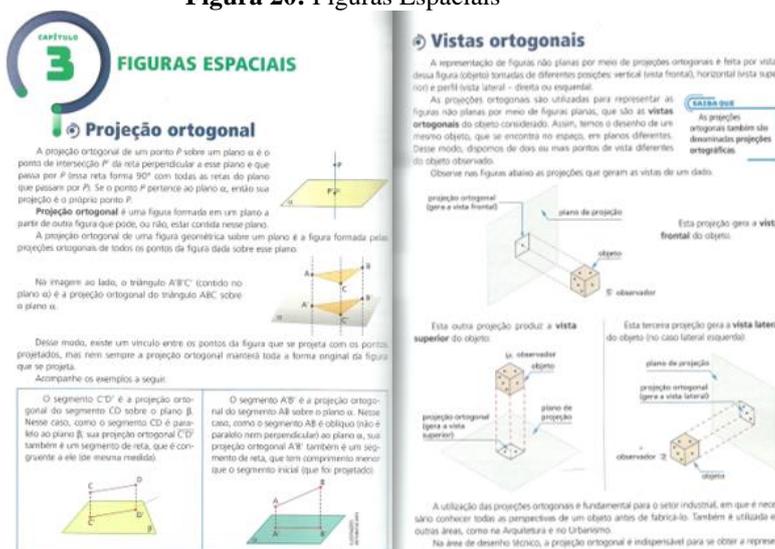
É somente nesta unidade que conseguimos detectar alguma atividade relacionada, a nosso ver, à relação entre figuras bi e tridimensionais. A unidade 8 – Figuras Planas, Espaciais e Vistas - é iniciada com um texto sobre a impressão 3D e algumas imagens usadas como

ilustração. No MP os autores disponibilizam o *link*¹ para ampliar a discussão com os alunos a respeito da impressão 3D.

Em relação ao capítulo 3 – Figuras Espaciais (Figura 20), os autores sugerem, no MP, uma atividade utilizando sombras para representar o conceito de projeção ortogonal para, só depois, apresentarem a definição do seu significado para o aluno, porém sem apresentar nenhum exemplo, ficando esse esclarecimento do seu significado a cargo do professor.

No livro do aluno, a representação geométrica para a projeção ortogonal e as vistas ortogonais são acompanhadas somente por uma explicação, sem uma exploração mais abrangente das construções. Exploração esta que, de acordo com a teoria de Van Hiele, permitiria uma maior participação do aluno, no processo de construção dos conceitos geométricos. Com relação à TRRS, identificamos a presença dos dois tipos de registros que tomamos como essenciais.

Figura 20: Figuras Espaciais



Fonte: Volume 9 (9º ano, p. 238-239)

Finalmente, a figura 21 apresenta a descrição dos passos para obtenção de projeções que geram vistas ortogonais de figuras não planas.

¹ <http://livro.pro/dzjxvs>

Figura 218: Figuras Espaciais

Em uma projeção ortogonal de um objeto, as linhas projetantes (raios de visão) sempre têm direção ortogonal em relação ao plano de projeção, ou seja, formam com o plano um ângulo de 90°.

Dependendo da forma do objeto considerado, partes de sua superfície podem ficar ocultas em relação ao sentido de observação. Observe as projeções abaixo.

De maneira simplificada, vamos apresentar os passos para a obtenção das projeções que geram as vistas ortogonais de figura não plana.

1º passo: Definimos qual é a vista frontal do objeto, que determina a disposição das outras vistas. Geralmente é a vista com mais detalhes da forma do objeto ou a vista apresentada na posição de utilização da peça considerada.

2º passo: Visualizando a figura, identificamos as dimensões dela, definindo largura, altura e profundidade.

3º passo: Anotamos quais vistas serão usadas, imaginando os planos retilíneos.

4º passo: Desenhamos a vista frontal no local destinado a ela.

5º passo: Em seguida, desenhamos a vista superior, usando linhas auxiliares impressas finais.

6º passo: Depois, de maneira análoga, desenhamos a vista lateral direita do objeto.

SAZAR ODE
Uma tracejada representa um recorte na figura.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Avalie se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
A projeção ortogonal de um segmento de reta PQ sobre um plano π que não tem pontos comuns com PQ sempre é um segmento de reta.

2. (Enem) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide e seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide de base quadrangular.

O deslocamento descrito por João foi movi-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto M, e depois do ponto M ao ponto C.

1. Afirmação falsa, pois se o segmento estiver sobre uma reta que é perpendicular ao plano, a projeção ortogonal do segmento será apenas um ponto.

O desenho que Bruno deve fazer é:

a) b) c) d) Alternativa c

3. Observe a peça representada. Identifique cada vista ortogonal dessa peça apresentada no desenho abaixo pela respectiva cor.

Resposta: vista frontal, laranja; vista superior e vista lateral.

Fonte: Volume 9 (9º ano, p. 240-241)

As três atividades¹ apresentadas na figura em questão estão no nível de abstração. No entanto, a explicação dada anteriormente talvez não permitiria a compreensão necessária do tema pelos alunos para a resolução das questões propostas.

Pelas nossas análises, até o momento da abordagem desse conteúdo e pela faixa etária dos alunos, estes poderiam possuir um conhecimento geométrico que lhes permitisse realizar essas tarefas. O que não descarta a possibilidade de, em uma sala de um 9º ano qualquer, termos alunos que ainda se encontrem em níveis inferiores ao da teoria.

Identificamos a ausência das relações entre as figuras geométricas bi e tridimensionais nos volumes 7 e 8 dessa coleção. Alguns tópicos são tratados de maneira isolada e sem qualquer associação entre elas. Assim, o desenvolvimento do pensamento geométrico conforme o modelo de Van Hiele, acaba ficando comprometido.

¹ Se possível, poderiam ter sido pensadas para serem executadas no GeoGebra ou em um outro *software* de Geometria dinâmica para propiciar uma investigação mais detalhada e explorar os recursos que o ambiente 3D possibilita.

Quanto à presença e sincronia dos registros figurais e discursivos e suas apreensões, a coleção em análise não atendeu ao que estabelece a TRRS. Embora a BNCC (2019), ao evidenciar a importância do uso de vários tipos de registros, não apenas por meio dos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também com a importância da linguagem materna para apresentar e elaborar relatórios, tanto oralmente quanto por meio de outros registros. Segundo Duval, os registros de representações semióticas, embora pareçam ser apenas um meio que o aluno possui para manifestar suas representações mentais, são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento, e, segundo os PCNs, “A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos” (BRASIL, 1998, p. 57).

5.4 Algumas Considerações a respeito das relações entre as figuras geométricas bi e tridimensionais no decorrer dos quatro volumes

Ao longo de nossas análises, observamos a ausência do tratamento das relações entre as figuras geométricas planas e espaciais na coleção A Conquista da Matemática.

Os Quadros 12 e 13 apontam o que os documentos oficiais estabelecem e orientam acerca dos conteúdos estruturantes para a Geometria, no decorrer dos AFEF.

Quadro 5 – Conteúdos e habilidades para o 6º e o 7º ano referentes aos sólidos geométricos

Conteúdos (PCN)	Objetos do conhecimento (BNCC)	Habilidades (BNCC)
-Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria. -Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados. -Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.	-Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais

<p>-Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.</p> <p>-Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medidas, fazendo uso de terminologia própria.</p> <p>-Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.</p>		<p>e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.</p> <p>(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).</p>
--	--	--

Fonte: PCN (1998) e BNCC (2018)

Podemos inferir que na transição entre o volume 6 para o volume 7 da coleção não há uma continuação referente às relações que buscamos identificar nessa pesquisa. Ainda constatamos que os PCNs (BRASIL, 1998) evidenciavam as relações entre as figuras planas e espaciais mesmo que de maneira discreta. Apesar disso, não observamos o tratamento de tais relações ao olharmos para BNCC (BRASIL, 2018), mesmo sabendo que tal documento orienta tanto no currículo oficial quanto na elaboração dos livros didáticos aprovados pelo PNL D.

O Quadro 13 apresenta o comparativo para os volumes 8 e 9 e mesmo que a coleção se encontre em conformidade com a BNCC, as relações entre as figuras bi e tridimensionais não aparecem. O conceito de figura plana e espacial não é apresentado com clareza, ficando a cargo do professor realizar essa tarefa.

Quadro 6 – Conteúdos e habilidades para o 8º e 9º ano referentes aos sólidos geométricos

Conteúdos (PCN)	Objetos do conhecimento (BNCC)	Habilidades (BNCC)
<p>-Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.</p> <p>-Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).</p> <p>-Representação de diferentes</p>	<p>Vistas ortogonais de figuras espaciais.</p> <p>Volume de prismas e cilindros.</p>	<p>(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.</p> <p>(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.</p> <p>(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse</p>

vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas. -Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.		conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
--	--	--

Fonte: Brasil, 1998 e 2018.

Embora, a coleção apresente figuras geométricas planas e espaciais nos quatro volumes da coleção em análise, elas se encontram desconexas, ou seja, não há relações entre suas formas bi e tridimensionais. A passagem do bi para o tridimensional, ou vice-versa, fica a cargo do professor, pois, conforme o documento norteador vigente, a BNCC (BRASIL, 2018), os conteúdos estão presentes no decorrer da coleção em relação às unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades expostos pelo documento, mas quando recorremos ao que o documento trata em suas entrelinhas, percebemos que a retomada das relações bi e tridimensionais não estão sendo aprofundadas pelos autores ao longo da coleção.

É importante destacar que não analisamos outras coleções, porém ao comparar seus sumários com essa em análise, identificamos que o tratamento das relações entre as figuras planas e espaciais também não ocorre. Assim, podemos considerar que o modo como a BNCC estabelece e trata os objetos do conhecimento pode estar influenciando na abordagem desses conteúdos, escolhida pelos autores de livros didáticos, que devem seguir suas orientações.

CONCLUSÕES

A pesquisadora procurou identificar como a coleção didática “A Conquista da Matemática”, adotada em toda rede estadual de ensino do Estado do Paraná para os anos de 2020 e 2021, aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2020), trata as relações entre figuras planas e espaciais segundo critérios e indicadores organizados pela pesquisadora. Há, como embasamento teórico, o modelo de Van Hiele e a Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval.

A BNCC (2018), documento norteador dessa coleção, recomenda a exploração dos sólidos geométricos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, aliando-se à identificação de características das formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e à associação de figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Porém, ao realizar as análises, percebe-se que, embora o documento realize tal recomendação, ele não é claro, apresentando uma “fragilidade” quanto à sua organização e estruturação dos conteúdos, agora chamados “Objetos do conhecimento”. De acordo com os tópicos/conteúdos elencados pelo documento, que são norteadores para a composição dos cinco eixos temáticos para Matemática, constata-se uma quebra na construção de conceitos referentes às figuras planas e espaciais para os AFEF.

Essa quebra não é observada ao se analisar o mesmo documento quando ele estabelece e orienta a respeito das figuras planas e espaciais para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), as definições e conceitos que remetem a essas figuras geométricas, se fazem presentes nos objetos do conhecimento do 1º ao 5º ano dos anos iniciais. Isso permite e favorece a construção do pensamento geométrico aos alunos dessa etapa, pois, de acordo com as orientações apresentadas pelo documento, há uma continuidade no tratamento das figuras bi e tridimensionais, o que possibilita aos autores de livros didáticos uma continuidade no tratamento das figuras planas e espaciais e suas relações. É possível, assim, a retomada de tais conceitos antigos, favorecendo a exploração de novos, também garantindo uma continuidade entre os temas geométricos que devem ser explorados nessa etapa do conhecimento.

Atualmente, para que um LD seja adotado e utilizado em sala de aula, se faz necessário que o mesmo passe por uma avaliação pelo PNLD, mostrando estar em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), além de passar por uma avaliação entre os professores de cada

disciplina. Assim, até que um livro chegue às mãos de um aluno ele foi avaliado por órgãos e profissionais que compõem o processo de ensino e aprendizagem.

Lembramos que, como evidenciado por Vasconcellos (2008); Costa, Bermejo e Moraes (2009); Oliveira, Lopez e Cardoso (2016), há a questão que envolve a dificuldade de professores dos AIEF em relação à Geometria plana e espacial. Isso porque, conforme apontaram tais pesquisas, os professores deixam de abordar a transição do espaço para o plano e não exploram as relações entre figuras bi e tridimensionais, por não terem vivenciado situações que promovessem esse tipo de abordagem durante todo o período escolar e acadêmico. Dessa forma, pela insegurança que possuem com os tópicos relacionados à Geometria, optam por não a ensinarem.

Os temas apresentados na coleção sob análise, referentes aos temas que tratam das formas bi e tridimensionais nos AFEF, que é nosso alvo de investigação, não promovem a construção, muito menos um avanço no pensamento geométrico dos alunos, para essa etapa. Observamos que apenas em um capítulo no volume do 6º ano é explorado de forma sucinta os sólidos geométricos, depois apenas em um tópico do capítulo no volume do 9º ano é que os autores da coleção voltam a tratar dos sólidos geométricos, a partir das vistas de figuras tridimensionais. Assim, fica eminente que se o professor não complementar os objetos do conhecimento durante os AFEF com outros instrumentos que nortearão seu trabalho em sala de aula, apenas com o LD em mãos essa transição de objetos bidimensionais para tridimensionais, e vice-versa, não será realizada/construída com alunos deste ciclo.

Respeitar a ordenação de etapas significa não saltar etapas de ensino, o que nem sempre é fácil na prática pedagógica. Neste sentido, o modelo de Van Hiele contribui para autonomia do desenvolvimento no aluno, tratando do ensino e aprendizagem em Geometria de maneira que o aluno progrida sucessivamente e sem pular etapas, construindo seu próprio conhecimento. Ou seja, ele não chega em um nível mais avançado sem passar e compreender os níveis anteriores.

Ao considerarmos todo o processo de ensino e aprendizagem, os documentos oficiais que o norteiam, pesquisas que tratam do uso do livro didático para o ensino de Matemática tais como as de Oliveira (2007), Pértile (2011), Masetti (2016), Maciel (2016), inferimos que o livro didático não pode ser o único instrumento a ser utilizado pelo professor para o ensino e aprendizagem em matemática. De acordo com o modelo de Van Hiele (2006), a aprendizagem de novos conceitos, quando exclusivamente por meio de livros didáticos, acaba se tornando insuficiente ou ineficaz para se alcançar a aprendizagem de novos conceitos, à medida que proporciona pouca informação. Segundo o autor, para que um novo conhecimento aconteça por

meio desse processo é imprescindível um longo treinamento. Fato não observado no sistema educacional do país.

A coleção, no geral, contribui para o trabalho do professor em sala de aula. No entanto, para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico no aluno, cada livro, além de possibilitar um avanço gradual em conceitos geométricos de um volume a outro, teria também que atender o modelo de Van Hiele em todos os tópicos relacionados à Geometria.

De acordo com Moreira (2013), no tocante à Geometria, o autor pontua que sua presença sempre ao final de cada volume fazia com que muitos professores deixassem de ensiná-la. Assim, com a reorganização dos capítulos e a apresentação do conteúdo de Geometria no decorrer da obra, isso poderá contribuir com seu ensino em sala de aula. Apesar disso, isso ainda não é uma garantia de que o tratamento das relações entre as figuras geométricas planas e espaciais será realizado, pois, conforme a organização atual dos conteúdos nos livros didáticos, seguindo a orientação da BNCC (BRASIL, 2018), o que foi evidenciado em nossa pesquisa, o tratamento entre essas figuras fica comprometido.

Sentimos falta de tarefas mais exploratórias que permitissem ao aluno uma construção dos próprios conceitos geométricos com a condução do professor que será um mediador desse conhecimento.

Destacamos que os recursos tecnológicos como os *links* de *software* ou vídeos são importantes e contribuem muito para a construção do conhecimento, porém, se o professor não estiver capacitado para lidar com essas tecnologias ou a escola não possuir um laboratório de informática e rede de internet que permita esse tipo de abordagem, esse recurso se tornará dispensável. Portanto, se faz necessário que o material didático, no caso o livro didático, ofereça caminhos ao professor para que ele possa desenvolver esse tipo de tarefa com seus alunos.

Conforme cita Crowley (1987), as tarefas geométricas precisam ser apresentadas em uma sequência que vai das mais simples às mais complexas e capazes de permitirem o reconhecimento, a análise, a abstração, a dedução e, por último, o rigor. E isso não foi identificado na coleção, já que a transição de objetos planos para espaciais e vice-versa foi proposta apenas nos volumes 6 e 9, e de maneira pouco significativa para desenvolver a construção do pensamento geométrico em alunos ao longo dessa etapa.

Identificamos que embora os autores tratem os conceitos bi e tridimensionais apenas nos volumes seis (6) e nove (9), a maneira como apresentam e conduzem a contextualização de cada tópico, bem como as atividades propostas, não possibilita ao professor conduzir uma construção dos conceitos que auxiliarão nessa transição no decorrer dos AFEF. Um exemplo

de como proporcionar tarefas que permitam aos alunos realizar essa transição entre conceitos geométricos, de figuras bidimensionais para tridimensionais e vice-versa, foi proposto por Santos e Sant'Anna (2015). As pesquisadoras propuseram atividades de diferenciação de figura plana/sólido geométrico, as quais possibilitavam ao aluno identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações. Ainda, permitindo durante o processo a passagem entre as cinco fases propostas por Van Hiele: interrogação/informação, orientação dirigida, explanação, orientação livre e integração.

Ao final das análises do volume 6, pontuamos a falta das planificações dos sólidos no próprio livro didático do aluno, pois seria de grande contribuição, não apenas levando-se em consideração a teoria que norteia nossa pesquisa, mas também conforme estabelece a matriz curricular do estado do Paraná. Esta cita como objetivos da aprendizagem em Geometria a importância na compreensão do conceito de espaço geométrico (bi e tridimensional) e a identificação, associação e construção de sólidos geométricos, a partir de suas planificações.

Embora a coleção contemple o conteúdo de Geometria, conforme estabelece a BNCC (2018) para os AFEF e apresente situações que fazem parte do cotidiano dos alunos, deixa de propiciar a construção do desenvolvimento geométrico no aluno, pois o intervalo entre os temas que tratam de objetos geométricos planos e espaciais acaba influenciando na aprendizagem do aluno e implicando no seu desenvolvimento geométrico. Ainda, observamos que a coleção não apresenta tarefas que favoreçam os dois primeiros níveis da teoria – Nível Básico – Reconhecimento e 2º Nível – Análise – tanto na abordagem dos conteúdos quanto nos exemplos e atividades propostas pelos autores, o que acaba restringindo-se principalmente nos níveis de Abstração e Dedução, conforme revelou o volume 9 da coleção.

De acordo com a teoria de Van Hiele, as cinco fases da aprendizagem também exercem papel importante para que o aluno transite de um nível mais baixo a outro mais elevado, porém, para que o professor trabalhe a construção do pensamento geométrico em seus alunos, é necessário que ele conheça a teoria e que o material por ele adotado também apresente tarefas que possibilitem a ele ser mediador do conhecimento e não um mero transmissor.

Conforme apontou Santos e Amâncio (2021) e Pachêco, Pachêco e Silva (2017), os dois primeiros níveis da teoria de Van Hiele são primordiais para o amadurecimento do pensamento geométrico no aluno. No entanto, se fazem menos presentes quando analisamos a coleção de um volume a outro. Assim, o desenvolvimento do pensamento, conforme o modelo de Van Hiele, acaba ficando comprometido.

Quanto à presença e sincronia dos registros figurais e discursivos e suas apreensões, a coleção em análise atende consideravelmente o que estabelece a TRRS apresentada nessa pesquisa, embora identifiquemos traços da teoria na BNCC (2018), que evidenciam a importância do uso de vários tipos de registros, não apenas por meio dos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também a importância da linguagem materna para apresentar e elaborar relatórios, tanto oralmente quanto por meio de outros registros. Segundo Duval, os registros de representações semióticas, embora pareçam ser apenas um meio que o aluno possui para manifestar suas representações mentais, são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento. Segundo os PCNS, “A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos” (BRASIL, 1998, p. 57).

Salientamos que o livro didático não tem o poder de transmitir o conhecimento geométrico ao aluno. Ele pode contribuir com caminhos que auxiliem o professor nesse percurso de mediador do conhecimento, mas não deve ser a única fonte do conhecimento geométrico utilizado pelo professor em sala de aula, mesmo porque o livro é um dos muitos recursos que se pode utilizar no processo de ensino e aprendizagem em Geometria.

Os autores da coleção analisada discorrem a respeito de todos os pontos elencados nos objetos do conhecimento do documento vigente, o que permite inferir que a coleção se encontra em conformidade com a BNCC (2018). Porém, é importante destacar que as figuras planas e os sólidos geométricos são tratados separadamente durante os quatro volumes da coleção e, em nenhum momento foi identificado na coleção o tratamento conjunto de figuras planas e espaciais. Relembremos nossa questão de pesquisa: “A maneira que os autores abordam e exploram os elementos geométricos planos e espaciais na coleção didática A Conquista da Matemática - adotada pelo governo do Estado do Paraná na rede Estadual de Ensino a partir de 2020 – é capaz de propiciar aos alunos possibilidades de compreensão, tanto na apresentação teórica quanto nas atividades propostas?”. Podemos respondê-la da seguinte maneira: Concluímos que a compreensão da transição entre conceitos geométricos planos para espaciais e vice-versa fica comprometida, pois tal passagem fica a cargo apenas do professor, pois em nenhum momento os autores apresentaram situações que favorecessem a transição do espaço para o plano ou vice-versa.

Essas relações não exploradas pelos autores na coleção, acaba comprometendo o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno, levando-se em conta o modelo de Van

Hiele, pois para que haja um avanço ou um progresso entre os níveis de aprendizagem se faz necessário a continuidade dos conceitos em todas as etapas da aprendizagem. Isso não foi observado por nós pesquisadoras quando se trata das relações entre as figuras bi e tridimensionais. Fato ao qual acreditamos estar relacionado à maneira como a Base Nacional Comum Curricular (2018), que é o mais recente documento norteador para todo o processo de ensino e aprendizagem, cujo caráter é normativo e seu objetivo é de estabelecer os conteúdos essenciais a serem estudados em todas as etapas da Educação Básica, está organizada. O documento, em nossa opinião, não está coerente quando menciona a importância para os AFEF de se realizar a “consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas” (BRASIL, 2018, p. 271). Além disso, quando o documento apresenta os objetos do conhecimento, ele não é claro quanto às relações entre figuras bi e tridimensionais. Assim, os autores dos livros didáticos não estão fugindo do que o documento está solicitando, porém, quanto às relações entre tais formas geométricas também não estão atendendo-as, visto que o próprio documento apresenta discrepâncias sobre o tema.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C. R. M; KALEFF, A. M. R. Poliedros de Platão sob uma perspectiva de educação matemática usando recursos didáticos concretos e virtuais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM/SP, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4995_2293_ID.pdf/ Acesso em: 15 nov. 2020.
- ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, set./dez. 2004.
- ALVES, G. S; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, n. 5, p. 69-76, 2010.
- AMARAL-SCHIO, R. B. Livro didático de ensino médio, geometria e a presença das tecnologias. **Renote**. v. 16, n. 2, p. 127-137, dez. 2018.
- ARAÚJO, M. A. S. Porque ensinar geometria nas séries iniciais de 1º grau. **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n.3, p.12-16, jul./dez. 1994.
- ARRUDA, J. P; MORETTI, M. T. Cidadania e Matemática: um olhar sobre os livros didáticos para as séries iniciais do Ensino Fundamental. **Contraponto**, Itajaí, v.2, n.3, p.423-437, 2002. Disponível em: <https://siaiap32.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/185/157/> Acesso em jul. 2020.
- AZEVEDO, D. P. **Uma análise de livros didáticos de Matemática da coleção “EJA – Mundo do Trabalho”**. 2017. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luis Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa, Edições 70, 1977.
- BARDINI, L. C. **Geometria no 5º ano: uma análise dos livros didáticos**. 2015. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.
- BARDINI, L. C; AMARAL-SCHIO; MAZZI, L. C. Aspectos do cotidiano e a geometria nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Sem Fronteiras – EMSF**, v.1, n.1, p.61-76, jan-junho, 2019.
- BASTOS, M. S. O livro didático nas aulas de matemática: um estudo a partir das concepções dos professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM/PE, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/CC01814219765.pdf/> Acesso em: 22. jul. 2021.

BRAGA, E. R; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n. 2, p. 273-289, set. 2011.

BRANDT, C. F; GUÉRIOS, E (orgs.). **Práticas e Pesquisas no campo da Educação Matemática**. Curitiba: CRV, 2017.

BRANDT, C. F; MORETTI, M. T; NOVAK, F. I. L. O desenvolvimento de aspectos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. **Olhar de Professor**. v. 21, n. 1, p. 98-115, jun. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2019.

BRASIL. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2019.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Guia do Livro Didático 2020: Matemática: Séries/Anos Finais do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC, 2019.

BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEB/MEC, 2006.

BRASIL. **Programa Nacional do Livro e Material Didático**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2020.

CATALÁ, C. A; FLAMARICH. C. B; AYMEMMI. J. M. F. **Invitacion a la didactica de la geometría**. Madrid: Sintesis, 1992.

COLOMBO, J. A. A; BUEHRING, R. S; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica, tarefas e análise de dados: articulações em torno do currículo de matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 4.8, p. 90-113, UFSC: 2009.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana**. 2016. 243 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

COSTA, A. P. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis**. 2013. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnologia) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

COSTA, André Pereira. Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v. 09, n. 18, p. 152-179, jan.-jun. 2020.

COSTA, M. S; AVELLATO, N. S. G. Livro didático de matemática: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez. 2010.

COSTA, A. C; BERMEJO, A. P. B; MORAES, M. S. F. Análise do ensino de geometria espacial. In: X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS. **Anais eletrônicos...** Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_49.pdf/ Acesso em: 10. abr. 2020.

CROWLEY, Mary L. The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In: **Learning and Teaching Geometry, K-12**, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

CURY, F. G. Análise de um livro didático de geometria plana apoiada na hermenêutica de profundidade. **ZETETIKÉ**. v. 27, p. 1-21, mar. 2019.

CUSTÓDIO, I. A. **O movimento de significações no Ensino e Aprendizagem de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2016.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères - IREM**, n. 17, 1994. 121-137.

DUVAL, R. Geometry From a Cognitive Point of View. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. p. 37-52. ISBN 0-7923-4990-3.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Tradução Myriam Veja Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. MORETTI, M. T. **REVEMAT**, Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012b.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 13.; 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. 12. Tema: Poliedros de Platão sob uma perspectiva de educação matemática usando recursos didáticos concretos e virtuais.

Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4995_2293_ID.pdf/ Acesso em: 14 de maio. 2021.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 13.; 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. 12. Tema: A Interface da Geometria Plana à Espacial: um estudo a partir dos triângulos e dos sólidos de Platão. Disponível em: Microsoft Word – 4613_3825_ID.doc (sbem.com.br) Acesso em: 19 de maio. 2021.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Matemática: Representação e Construção em Geometria**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FILHO, G. B. S. **Geometria espacial no Ensino Médio: uma abordagem concreta**. 2015. 175 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 28., Caxambu. **Anais...** Caxambu: SBEM/MG, 2005. Disponível em: http://28reuniao.anped.org.br/?_ga=2.106476486.433474148.1630689622-411968399.1630689622/ Acesso em: 30 maio 2021.

GEHRKE, T. T. **Trilhos matemáticos como contexto para o Ensino e a Aprendizagem de Geometria espacial com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio**. 2017. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Área de Ciências Tecnológicas, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: EDITORA ATLAS S.A, 2002.

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática 6**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2019.

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática 7**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2019.

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática 8**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2019.

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática 9**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2019.

GODOY, J.S. **A Geometria presente em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental**. 2016, 99 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

IMAFUKO, D. B. S. **O Ensino de área de figuras planas nos livros didáticos na transição dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental**. 2019, 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

JESUS, F. J. A. **Uso(s) do livro didático por professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental de Escolas da rede Estadual de Aracaju/SE.** 2017. 129 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos.** Niterói: Eduff, 1998.

KALEFF, A. M. *et al.* Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de Van Hiele. **Bolema.** v. 9, n. 10, 1994.

KALEFF, A. M. M. R. (1994). **Tomando o Ensino da Geometria em nossas mãos.** Educação Matemática em Revista, SBEM, São Paulo. n° 2, p. 19-25, 1º semestre de 1994.

KALEFF, A. M. M. R. (2008). **Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria.** Rio de Janeiro: UFF/ UAB/CEDERJ. 223 p.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval.** 2012, 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

KLUPPEL, G.T.; BRANDT, C. F. Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Unijuí, 2014. p. 113-134.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT, C. F. Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL - ANPED SUL, 9., 2012, Caxias do Sul. Anais... Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2012.

KAWAMOTO, Mariko. **Habilidades de visualização em Geometria espacial: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio.** Orientadora: Profª. Drª. Vera Helena Giusti de Souza. 2016. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera, São Paulo, 2016.

KOBAYASHI, Maria do Carmo Monteiro. **A construção da geometria pela criança.** Bauru: Edusc, 2001.

LAJOLO, Marisa. Livro didático: um (quase) manual do usuário. In: **Em aberto**, ano 16, n. 69, Brasília, 1996.

LAVILLE, Christian; DIONNE, Jean. **A construção do saber.** Belo Horizonte: UFMG, 2008.

LEIVAS, J. C. P; FOGAÇA, L. S. Os registros de representação semiótica e geometria dinâmica para o ensino de congruências de figuras geométricas planas. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.** v. 10, n. 3, p. 81-100, set./dez. 2017.

LIAO, T; ALMEIDA, S. R. M; MOTTA, M. S. Desenvolvimento de conceitos geométricos com alunos de um curso de pedagogia por meio de atividades envolvendo a realidade aumentada. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 16, p. 01-18, jan./dez, 2021.

LOCATELLI, S. C. Ensino de Geometria: O que revelam as tarefas escolares? 2015. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

LOPES, Alice Casimiro. O livro didático nas políticas de currículo. In: LOPES, Alice Casimiro. **Currículo e Epistemologia**, p. 205-228. Ijuí: Unijui, 2007.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, SBEM, Brasília, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas SP**: Editora Pedagógica Universitária, 1986.

MACEDO, J. A; BRANDÃO, D. P; NUNES, D. M. Limites e possibilidades do uso do livro didático de matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 68-86, jan./abr. 2019.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: Análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 2001.

MASETTI, C. **Análise de livros didáticos de Matemática: função exponencial**. 2016. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

MORAIS, L. B. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio**. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

MOREIRA, N. J. **Continuidade(s) e ruptura(s) nos livros didáticos “a conquista da matemática”**: como ensinar a partir de orientações metodológicas da educação matemática (1982-2009). Dissertação (Mestrado em Ensino) – Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.

MOURA, L. K. J; KRINDGES, A; WIELEWSKI, G. D. As vantagens do modelo de Van Hiele no ensino de Geometria. **Educação Matemática em Revista**. v. 2, n. 21, p. 56-65, nov. 2020.

NASSER, L.; SANT’ANNA, N. F. P. **Geometria Segundo a teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental**. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Mestrado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de Geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos**. 2012. 266 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

ORTIGÃO, M. I. R.; SANTOS, M. J. C.; LIMA, R. L. Letramento em Matemática no Pisa: o que sabem e podem fazer os estudantes? *Zetetiké*, FE - Unicamp, v. 26, n. 2, p. 375-389, 2018.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná**. Curitiba: SEED, 1998.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná: Princípios, direitos e orientações**. Curitiba: SEED, 2018.

PACHÊCO, F.F.F; PACHÊCO. G.F; SILVA, A.D.R. Uma análise em livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental acerca da proposta do ensino de polígonos sob a ótica da teoria de Van Hiele. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 12, n. 2, p. 101-115, abr. 2017.

PASSOS, C. L. B. **Representação, interpretação e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. 2000. 364 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PASSOS, C. L. B; NACARATO, A. M. O Ensino da Geometria no ciclo de alfabetização: um olhar da provinha Brasil. *Educação Matemática Pesquisa*, PUC - São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22016> /Acesso em: 18 jun. 2020.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, FE - Unicamp, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724> /Acesso em: 19 jun. 2020.

PÉRTILE, K. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio**. 2011. 87 f. Dissertação (Mestrado em educação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

PIRES, C. M. C; CURI, E; CAMPOS, T. M. M. **Espaço & Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do ensino Fundamental**. São Paulo: Proem, 2000.

PONTE, J. P; BROCARD, J; OLIVEIRA. H. **Tendências em Educação Matemática: Investigações matemáticas na sala de aula**. Minas Gerais: Autêntica Editora, 2006. p. 71.

RAMOS, X. F. B *et al.* O olhar geométrico para o campo de futebol: um cenário para exploração de áreas e perímetro de figuras planas. **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**. Cuiabá/Mato Grosso. 2019. Disponível em:

<https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/index/search/titles?searchPage=22/> Acesso em: 19 de nov.2020.

SANTOS, S. H; AMÂNCIO, R. A. O ENSINO DE FIGURAS TRIDIMENSIONAIS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: contribuições do modelo de Van Hiele. **Educação da Matemática em Debate**, v.8, n. 1, p.161-181, maio. 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/51750>. Acesso em jul. de 2021.

SANTOS, M. S; SANT'ANNA, N. F.P. O ensino de geometria e a teoria de Van Hiele: uma abordagem através do laboratório de ensino de matemática no 8º ano da educação básica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, GD-2., 2015, Juiz de Fora. **Anais...** Juiz de Fora: SBEM/MG, 2015. Disponível em: https://www.ufjf.br/ebapem2015/files/2015/10/gd2_marcele_santos.pdf/ Acesso em: 18 dez. 2019.

SANTOS, N. M. S; ROSA, M. C; SOUZA, D. S. Os sólidos geométricos na Educação Brasileira: comparativo entre PCN e BNCC. **JIEEM**. v. 14, n. 1, p. 99-109, 2021.

SILVA, L.; CANDIDO, C. C. **Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele**. Relatório de Iniciação científica. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2007

SILVA, P. V; SANTOS. L. Compreensão da Representação Bidimensional de Policubos por Alunos do 6º ano em Tarefas de Avaliação Externa. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 847-868, dez, 2018.

SILVA, E. C. R. T; SIQUEIRA, J, M. Geometria espacial no ensino médio: análise de um livro didático de matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12. 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM/SP, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7648_4094_ID.pdf/ Acesso em: mar. 2021.

SILVEIRA, P. F. **Explorando propriedades geométricas a partir de dobraduras em ambiente de Geometria Dinâmica**. 2020. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2020.

SETTIMY, T. F. O; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, jan./jun., 2020.

VAN HIELE, P. M. V. **Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education**. Orlando, Flórida: Academic Press, INC, 1986.

VAN-HIELE, P. M. **El problema de la comprensión: em conexión com la comprensión escolares em el aprendizaje de la Geometria**. 1957. 151f. Tesis (Doctorado em Matemáticas Ciencias Naturales) – Universidad Real de Utrecht. Utrecht.

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VASCOLCELOS, J. **Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: um olhar sobre o livro didático e a provinha Brasil. 2016. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

VASCONCELLOS, M. A diferenciação entre figuras geométricas não planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 77-106, jul./dez. 2008.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **EMP**. São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5167/> Acesso em: 12 jun. 2020.

USISKIN, Z. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. CDASSG PROJECT. University of Chicago, 1982.