UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

O PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECTIVA DE JEAN PIAGET

Suzana Domingues da Silva

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

O PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECIVA DE JEAN PIAGET

Suzana Domingues da Silva

Orientadora:
Dra Clélia Maria Ignatius Nogueira
Apoio: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de concentração: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em educação matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Setembro de 2021

Ficha de identificação da obra elaborada pela Biblioteca
UNESPAR/Campus de Campo Mourão
Bibliotecária Responsável: Liane Cordeiro da Silva CRB 1153/9

Silva, Suzana Domingues da
S586p O processo de generalização de função afim na perspectiva de Jean Piaget. / Suzana Domingues da Silva. -- Campo Mourão, PR, 2021.
136 f. : il.

Orientador(a): Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira.
Apoio: CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.
Tese (Mestrado) – UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), 2021.
Linha de Concentração: Conhecimento, Linguagens e Práticas Formativas em Educação Matemática.

1. Ensino-Matemática. 2. Função Afim. 3. Epistemologia e Psicologia Genética. I. Piaget, Jean. II. Nogueira, Clélia Maria Ignatuis (orient). III. CAPES. IV. Universidade Estadual do Paraná–Campus Campo Mourão, PR. V. UNESPAR. VI. Título.

Suzana Domingues da Silva

O PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECIVA DE JEAN PIAGET

Comissão Examinadora:

Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira – Presidente da Comissão Examinadora
UNESPAR/UNIOESTE

Dra. Luzia Marta Bellini- Membro da Banca
UEM

Dra. Regina Maria Pavanello - Membro da Banca
UNESPAR

Resultado: Aprovada

Campo Mourão
Setembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus pela saúde, força e sabedoria derramada em minha vida, oportunizando-me à conclusão desse trabalho que foi um sonho realizado! Diante de todas as dificuldades no trajeto desse sonho, nunca me deixou desanimar e sempre esteve comigo fortalecendo-me.

A minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Clélia Maria Ignatius Nogueira, pelas orientações e estudos realizados durante esses anos. Sempre disponível a me ajudar e mostrando-me o caminho certo para a conclusão desse trabalho. Muito obrigada!

A minha banca de qualificação, Prof.ª Dr.ª Marta Bellini, Prof.ª Dr.ª Regina Pavanello e Prof. Dr. Marcelo Carbone, que participou da minha qualificação, no entanto, por motivos de saúde, não pode estar presente na defesa. Obrigada a todos pelas valorosas contribuições na minha pesquisa, com certeza tais contribuições melhoraram ainda mais minha dissertação.

Aos meus pais Marlene e Antônio, que sempre estiveram presente na minha vida e mesmo não sabendo ao certo o que eu estava estudando (por serem semianalfabetos) sempre me apoiaram e rezaram por mim. A presença de vocês em minha vida foi fundamental para que eu pudesse concluir! Obrigada pelos princípios, educação, suporte e amor!

Ao meu – hoje - marido, Luiz Henrique, por ter me dado coragem de seguir em frente e a fazer o mestrado, sempre me apoiando e respeitando minha vontade. Obrigada pelo seu companheirismo e amor, foram fundamentais para mim.

Aos meus irmãos Sidney, Vanderlei, Claudecir e Luciana, por acreditarem em mim e me apoiarem. Em especial a minha irmã Luciana, que sabendo de minhas dificuldades de locomoção, falta de condições financeira, sempre que podia, ajudava-me financeiramente para que eu não desistisse.

Ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática - PRPGEM que me proporcionou o título de Mestra, pelos professores do programa que tiveram grandes *contribuições em minha formação acadêmica, profissional e pessoal, com seus incentivos, maneira de tratar as pessoas, com suas empatias, responsabilidades e afeto. Isso mostra o quanto esse programa é repleto de grandes profissionais, e tenho muito orgulho de ter sido parte e de ser integrante da primeira turma do programa. Muito Obrigada!*

Aos amigos do PRPGEM que tive o prazer de conviver, e de maneira especial, às minhas amigas que levarei para sempre no coração: Cassia, Cristiane, Fabricia, Renata Barros e Renata Gonçalves.

Por fim, e não menos importante, aliás, teve um papel importantíssimo para que essa dissertação fosse concluída, meu agradecimento à CAPES pela bolsa ofertada ao programa e que tive a oportunidades de fazer jus. Se não fosse a essa ajuda financeira, muito provavelmente não teria concluído.

RESUMO

Considerando a ideia base de generalização importante para a compreensão do conceito de função afim, o presente trabalho tem por objetivo compreender o processo de generalização de função afim em pesquisas já realizadas pelo grupo GEPeDiMa, sob a perspectiva da Epistemologia e Psicologia Genéticas estabelecidas por Jean Piaget, particularmente em seus estudos descritos no livro *Investigaciones sobre la generalización* (1984), mediante meta-análise dos resultados encontrados na pesquisa de Pavan (2010) intitulada *A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas*, e dos dados da pesquisa de Calado (2020) intitulada *Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim*. Para tanto, buscou-se responder ao seguinte problema de pesquisa: *Quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização relacionadas ao processo de generalização de função afim, identificadas nas pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?* Os resultados desta dissertação mostram que, em relação ao processo de generalização indutiva e construtiva, estabelecidos por Piaget, a principal razão pela qual os alunos não avançam de um nível para outro, isto é, da generalização indutiva para a construtiva, deve-se ao fato de ainda não terem tomado consciência de suas ações e das formas de abstrações que a tomada de consciência determina sobre os problemas e atividades propostas. Quando o sujeito não passa da abstração empírica para a abstração reflexionante isso implica necessariamente no nível de generalização que esse sujeito consegue alcançar, independentemente da idade ou nível de escolarização. A partir desta pesquisa, foi possível constatar também que o professor, ao trabalhar a função afim, deve considerar a proposta de tarefas que oportunizem o desenvolvimento do processo de generalização em geral, e dessa ideia base de função afim. Outro resultado advindo desta investigação é que a construção do conceito de função afim, particularmente da ideia base de generalização, pode e deve ser desenvolvida desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Função Afim. Generalização. Epistemologia e Psicologia Genética. Educação Matemática.

ABSTRACT

Considering the basic idea of generalization important to understand the concept of linear function, the present study aims to comprehend the process of generalization of the linear function in researches already done by the GEPeDiMa group, under the perspective of the Genetic Epistemology and Psychology established by Jean Piaget, particularly in his studies described in the book *Investigaciones sobre la generalización* (1984), by meta-analyzing the results found in the research of Pavan (2010) entitled *A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas*, and the data from the research of Calado (2020) entitled *Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim*. For this, we sought to answer the following research problem: *What are the possible reasons, according to the theory of Jean Piaget, for the difficulties of students from different levels of schooling related to the process of generalization of linear function, identified in research developed by GEPeDiMa?* The results of this dissertation show that, in relation to the inductive and constructive generalization process, established by Piaget, the main reason why students do not advance from one level to another, that is, from inductive to constructive generalization, is due to the fact that they have not yet become aware of their actions and the forms of abstractions that this awareness determines about the proposed problems and activities. When the subject does not go from empirical abstraction to reflexive abstraction, this necessarily implies the level of generalization that this subject can achieve, regardless of age or level of schooling. From this research, it was also possible to verify that the teacher, when working with the linear function, should consider proposing tasks that allow the development of the generalization process in general, and of the basic idea of the linear function. Another result of this research is that the construction of the concept of linear function, particularly the basic idea of generalization, can and should be developed from the early years of elementary school.

Keywords: Linear Function. Generalization. Genetic Epistemology and Psychology. Mathematics Education.

SUMÁRIO

CAPÍTLO 1 20

O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUA PRESENÇA NA EDUCAÇÃO PROPOSTA PELOS DOCUMENTOS OFICIAIS BRASILEIROS 20

1.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS IDEIAS BASE 20

1.2 A FUNÇÃO AFIM 24

1.3 BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM – BNCC 30

1.4 REFERENCIAL CURRICULAR DO PARANÁ: PRINCÍPIOS, DIREITOS E ORIENTAÇÕES 33

CAPÍTULO 2 39

APORTES TEÓRICOS PIAGETIANOS 39

2.1 ABSTRAÇÃO EMPÍRICA E REFLEXIONANTE 39

2.2 GENERALIZAÇÃO INDUTIVA E CONSTRUTIVA 46

2.3 GENERALIZAÇÃO INDUTIVA E CONSTRUTIVA **ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.**

CAPÍTULO 3 57

METODOLOGIA DA PESQUISA 57

3.1 PROBLEMA DE PESQUISA 57

3.2 OBJETIVO GERAL 57

3.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 57

3.3 PESQUISAS SELECIONADAS PARA ANÁLISES 58

3.4 A MOBILIZAÇÃO DAS IDEIAS BÁSICAS DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR CRIANÇAS DA 4ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL EM SITUAÇÕES-PROBLEMA DE ESTRUTURAS ADITIVAS E/OU MULTIPLICATIVAS 59

3.5 INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO 9º ANO A PARTIR DE SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM FUNÇÃO AFIM 63

CAPÍULO 4 68

ANÁLISE DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS 68

4.1 ANÁLISES DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA PROPOSTAS POR PAVAN (2010) ENVOLVENDO A IDEIA BASE DE GENERALIZAÇÃO 68
4.2 ANÁLISES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA POR CALADO (2020) A RESPEITO DA GENERALIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM 87
CONSIDERAÇÕES FINAIS 122
REFERÊNCIAS 125

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1: Organização do conceito de função afim na BNCC para o Ensino Médio 32
Quadro 1.2: Ideias bases de função identificadas durante os anos de escolaridades do Ensino Fundamental definido no Referencial Curricular do Paraná 34
Quadro 3.1: Problemas propostos por Pavan (2010) analisados nesse trabalho 61
Quadro 3.2: Sequência didática elaborada por Calado (2020) 64
Quadro 4.1: Problema 1 da segunda bateria de atividades de Pavan (2010) 68
Quadro 4.2: Generalização indutiva realizadas pelos alunos 70
Quadro 4.3: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva 71
Quadro 4.4: Generalização construtiva 72
Quadro 4.5: Problema 2 da segunda bateria de atividades proposta por Pavan (2010) 73
Quadro 4.6: Generalização indutiva 74
Quadro 4.7: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva 74
Quadro 4.8: Generalização construtiva 75
Quadro 4.9: Problema 2 da terceira bateria de atividades proposta por Pavan (2010). 76
Quadro 4.10: Generalização indutiva 76
Quadro 4.11: Generalização construtiva 77
Quadro 4.12: Problema 2 da quarta bateria de atividades proposta por Pavan (2010). 78
Quadro 4.13: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva 80
Quadro 4.14: Generalização construtiva 80
Quadro 4.15: Problema 1 da quinta bateria de atividades proposta por Pavan (2010). 81
Quadro 4.16: Generalização Indutiva 83
Quadro 4.17: Generalização Construtiva 83
Quadro 4.18: Problema 2 da quinta bateria de atividades proposta por Pavan (2010). 84
Quadro 4.19: Generalização Indutiva 85
Quadro 4.20: Generalização Construtiva 86
Quadro 4.21: Atividade 1 da sequência didática proposta por Calado (2020) 88

Quadro 4.22: Diálogo entre os integrantes do grupo G11 na resolução do item c) da atividade 1 90
Quadro 4.23: Diálogo entre os integrantes do grupo G5 na resolução do item c) da atividade 1 91
Quadro 4.24: Atividade 2 da sequência didática proposta por Calado (2020) 92
Quadro 4.25: Diálogo entre os integrantes do grupo G2 na atividade 1 proposta por Calado (2020) 93
Quadro 4.26: Diálogo do grupo G11 do item d) da atividade 2 desenvolvida por Calado (2020) 94
Quadro 4.27: Atividade 3 da sequência didática proposta por Calado (2020) 97
Quadro 4.28: Diálogo entre os integrantes do grupo G1 no item c) da atividade 3 proposta por Calado (2020 99
Quadro 4.29: Diálogo entre os integrantes do grupo G8 no item d) da atividade 3 proposta por Calado (2020) 101
Quadro 4.30: Atividade 4 da sequência didática proposta por Calado (2020) 102
Quadro 4.31: Diálogo entre os integrantes do grupo G10 na resolução do item a) da atividade 4 104
Quadro 4.32: Diálogo entre a pesquisadora Calado e os alunos do grupo G7 no item b) da atividade 4 105
Quadro 4.33: Diálogo entre a pesquisadora Calado e os alunos do grupo G5 no item b) da atividade 4 106
Quadro 4.34: Atividade 5 da sequência didática proposta por Calado (2020) 109
Quadro 4.35: Diálogo entre os integrantes do grupo G8 para a resolução do item c) da atividade 5 112
Quadro 4.36: Atividade 6 da sequência didática proposta por Calado (2020) 113
Quadro 4.37: Diálogo entre os integrantes do grupo G2 na resolução do item b) da atividade 6 115
Quadro 4.38: Diálogo entre a pesquisadora Calado e os integrantes do grupo G3 no item d) da atividade 6 116
Quadro 4.39: Atividade 7 da sequência didática proposta por Calado (2020) 118
Quadro 4.40: Diálogo entre os integrantes do grupo G3 na resolução do item b) da atividade 7 119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Gráfico representação a taxa de variação média de função 26
Figura 1.2: Gráfico da função afim.. 28
Figura 1.3: Função afim crescente, decrescente e constante 29
Figura 2.1: Processo de generalização.. 56
Figura 3.1: Quadro organizado por Pavan (2010) com o nome e as idades dos jeitos da pesquisa 60
Figura 4.1: Resolução do aluno DJH.. 69
Figura 4.2 Resolução do aluno RAF.. 70
Figura 4.3: Resolução do item a) desenvolvida pelo grupo G11 na atividade 1 88
Figura 4.4: Resolução do item B) desenvolvida pelo grupo G11 na atividade 1 88
Figura 4.5: Resolução do item a) realizada pelo grupo G3 89
Figura 4.6: Resolução do item b) realizada pelo grupo G3 89
Figura 4.7: Generalização do grupo G6 no item d) da atividade 2 proposta por Calado (2020) 95
Figura 4.8: Generalização do grupo G8 no item e) da atividade 2 96
Figura 4.9: Generalização do grupo G5 no item e) da atividade 2 96
Figura 4.10: Resolução do grupo G9 no item b) da atividade 3 98
Figura 4.11: Resolução do grupo G9 no item c) da atividade 3 99
Figura 4.12: Generalização do grupo G8 no item d) da atividade 3.......................... 101
Figura 4.13: Resolução do grupo G5 no item a) da atividade 4 103
Figura 4.14: Generalização do grupo G6 no item c) da atividade 4 108
Figura 4.15: Resolução do grupo G10 na construção gráfica da atividade 5 110
Figura 4.16: Resolução do grupo G5 para a atividade 5.. 110
Figura4.17: Resolução do grupo G2 para atividade 5 111
Figura 4.18: Resolução do grupo G2 para o item b) da atividade 5 111
Figura 4.19: Generalização do grupo G5 no item d) da atividade 5.......................... 113
Figura 4.20: Resolução do grupo G5 no item c) da atividade 5 115
Figura 4.21: Generalização do grupo G3 do item d) da atividade 6.......................... 116
Figura 4.22: Generalização construtiva do grupo G12 da atividade 7....................... 121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1: correspondência entre o espaço e o tempo 21

INTRODUÇÃO

O conceito de função emergiu da tentativa de filósofos e cientistas compreenderem e explicarem racionalmente os fenômenos naturais, e, apesar de sua definição em termos matemáticos aparecer pela primeira vez por volta de 1700 com os trabalhos de Newton, os primeiros indícios desse conceito surgiram com os pitagóricos (séc. VI a.C.) (NOGUEIRA, 2014).

Dentre os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula, a função, pela sua característica de envolver relações entre grandezas, é de grande importância para o ensino, uma vez que está ligada a outros vários conceitos matemáticos, como: na Matemática Financeira no que se refere ao cálculo de juros simples (função de 1º grau) e compostos (função exponencial); na proporcionalidade em relação à variação entre grandezas; nas progressões aritméticas associadas às funções afins, e as geométricas associadas às funções exponenciais, dentre outras; além de sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, por exemplo, na Física no que se refere ao movimento uniforme; na Química em relação à proporcionalidade, e na Biologia, como, por exemplo, no crescimento de determinada bactéria.

O pensamento funcional é recomendando pelo documento oficial brasileiro desde os Anos Iniciais, mesmo que de maneira implícita. Considerando a função um dos componentes curriculares da Álgebra, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que o pensamento algébrico dever ser estimulado desde os primeiros anos de escolaridade por meio de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Nessa direção, "A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)" (BRASIL, 2018, p. 270). No Ensino Fundamental - Anos Finais, os conteúdos devem ser retomados para serem aprofundados e ampliados, fazendo com que os alunos sejam capazes de compreender o significado de variável em uma expressão, estabelecer generalização, investigar regularidades e dependência entre grandezas, "É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação" (BRASIL, 2018, p. 271).

Segundo Nogueira, "[...] o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. É a função que dá mobilidade à Matemática, que retira a Rainha das Ciências da sua rigidez estática e permite a representação e o estudo de fenômenos móveis" (2014, p. 121). E, ao pretender trabalhar um conteúdo em determinado nível de ensino, primeiro deve-se determinar quais são as ideias base envolvidas e, no que se refere à função, elas são: variável, dependência, regularidade e generalização (*Ibid*., p. 123).

Nesse sentido, o GEPeDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática que é composto por docentes e discentes do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - PPGECEM/UNIOESTE e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná – PRPGEM/UNESPAR, do qual fazemos parte, minha orientadora e eu, vem desenvolvendo pesquisas com vistas a mapear o Campo Conceitual das Funções considerando a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Neste momento, todas as pesquisas em desenvolvimento estão voltadas ao estudo da função afim, pois, segundo Caraça, "[...] é do bom senso do observador recortar o seu *isolado*[1] de estudo, de modo a compreender nele todos os fatores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar" (1951, p. 112). Assim, com o intuito de contribuir ainda mais para as pesquisas desse grupo, surgiu então a oportunidade de desenvolver esse trabalho relacionado ao tema função afim.

Os resultados de pesquisas realizadas por Rezende, Nogueira e Calado (2020), Manzan (2014) e Pinto (2014), dentre outros, apontam que das ideias base acima mencionadas, a generalização é a mais complexa, para todos os sujeitos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, até ao Ensino Superior. Desse modo, tal como é referido por Tinoco (2011), quando o aluno começa a fazer o uso da linguagem algébrica causa uma ruptura na forma de pensar e agir em Matemática, até mesmo em alunos com mais facilidades em técnicas algébricas. Ainda para esta autora, os alunos dificilmente representarão uma determinada situação-problema algebricamente, e mesmo que conduzidos para tal, ainda assim, apresentam dificuldades em concluir a explicação pedida simbolicamente (*Ibid*.). Para Tinoco (2011), "O uso da linguagem e das técnicas algébricas para argumentar matematicamente é muito pouco explorado" (p. 6). No entanto, "[...] o registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométricas é passo decisivo para que construam o conceito de função, embora não seja fácil" (NOGUEIRA, 2014, p. 9). Nesse mesmo pensamento, Tinoco (2011. p. 21) afirma que "A origem do conceito de função está intimamente ligada à necessidade do homem de registrar regularidade observadas em fenômenos e generalizar leis e padrões".

Considerando que a noção de generalização está associada ao pensamento algébrico,

---

[1] "Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados. A tal conjunto daremos o nome de isolados" (CARAÇA, 1951, p. 112).

corroboramos com Blanton e Kaput (2005, p. 413) ao afirmarem que o pensamento algébrico é o "[...] processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". E, dependendo do nível de experiência do aluno, a generalização pode ser expressa por meio de palavras, símbolos ou uma relação funcional (*Ibid.*).

Para Blanton e Kaput (2005) o pensamento algébrico pode assumir várias formas, por exemplo, na generalização da aritmética envolvendo operações e propriedades numéricas; na generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais; na modelagem para expressar e formalizar generalizações; e para generalizar sobre abstrações extraídas de cálculos e relações. Dessas quatros formas, a generalização da aritmética e o pensamento funcional são os mais comuns do pensamento algébrico nos níveis escolares elementares (BLANTON; KAPUT, 2005).

Portanto, a generalização está no bojo do pensamento algébrico. Nesse sentindo, Kaput (1999, p. 6), citada por Canavarro (2007), afirma que:

> A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimento, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objectos de nível superior para o raciocínio ou comunicação) (KAPUT, 1999 *apud* CANAVARRO, 2007, p 87).

Para Piaget (1984) a generalização vai além de abstrair. Generalizar envolve a construção de novas estruturas cognitivas, todavia preservando o que existia no antigo.

Tal como afirma Piaget (1995), assim como há dois tipos de abstração – empírica e reflexionante – há também dois tipos de generalização – indutiva e construtiva-, e esses dois tipos de generalização são oriundos das abstrações, isto é, a generalização indutiva pressupõe uma abstração empírica, assim, como, a generalização construtiva pressupõe uma abstração empírica. As duas formas de abstração existem em todos os níveis de desenvolvimento, e a relação entre abstração e generalização são muito próximas.

Diante do exposto, foi realizado um levantamento no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, a fim de pesquisar trabalhos que investigassem o processo de generalização da função afim utilizando como aporte teórico Piaget (1984). A primeira busca deu-se pela expressão "função afim", e, no período que se realizaram as buscas (julho de 2020), a plataforma retornou 83 mestrados profissionais e 28 mestrados acadêmicos. A segunda busca foi realizada pela expressão “função polinomial do 1° grau” em que a plataforma retornou 2 trabalhos de mestrados profissionais e nenhum mestrado acadêmico. Por fim, a terceira busca se deu pela expressão “função do primeiro grau” em que o catálogo de teses e dissertações da CAPES retornou 3 pesquisas de mestrados profissionais e nenhum mestrado acadêmico. No entanto, nenhuma dessas pesquisas tiveram como centro de investigação a ideia base de generalização, inclusive trazendo Piaget (1984) como fundamentação. Nossos resultados corroboram com os resultados de Calado (2020), que também fez esse levantamento no banco de dados da Capes e concluiu que nenhuma das pesquisas teve como foco investigar a ideia de generalização associada à função afim.

Portanto, devido às considerações anteriormente explicitadas, surgiu então o problema de pesquisa: *Quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas nas pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?*

Para responder esse problema, estabelecemos o seguinte objetivo geral: analisar o processo de generalização de função afim em pesquisas já realizadas pelo grupo GEPeDiMa, sob a perspectiva da Epistemologia e Psicologia Genéticas estabelecidas por Jean Piaget, particularmente em seus estudos descritos no livro: *Investigaciones sobre la generalización*.

A partir disso, buscamos respaldos teóricos e metodológicos nos estudos de Jean Piaget no que se refere tanto à abstração quanto à generalização.

Levando em consideração o objetivo dessa pesquisa e, com a finalidade de respondermos a questão levantada, realizamos uma meta-análise dos dados obtidos nas pesquisas de Pavan (2010) intitulado, *A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas,* e dos dados obtidos por Calado (2020) apresentados no trabalho intitulado, *Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim*. As duas pesquisas investigaram o conceito de função afim.

Esse texto organiza-se em cinco partes com a seguinte estrutura: essa introdução, seguida de quatro capítulos e das considerações finais. No capítulo 1, intitulado, *O conceito de função e sua presença na educação proposta pelos documentos oficiais brasileiros*, são apresentados fragmentos epistemológicos do conceito de função destacando suas ideias base, até o estabelecimento da definição formal de função afim. Também são apresentadas as orientações do documento norteador nacional – Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - e do estado do Paraná – Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações - para ensino de Matemática de função, em particular da função afim.

O capítulo 2, intitulado, *Aportes teóricos Piagetianos*, apresenta aspectos teóricos piagetianos que sustentam as análises dessa pesquisa, isto é, estudos realizados acerca da abstração e da generalização sustentadas particularmente nos livros *Abstração Reflexionante* (1995) e *Investigaciones sobre la gene*ralizacion (1984), respectivamente.

No capítulo 3, intitulado, *Metodologia da pesquisa*, discorremos sobre o problema de pesquisa, objetivo geral e os específicos, assim como as duas pesquisas selecionadas para as meta-análises, de Pavan (2010) e Calado (2020), apresentando o contexto de cada uma, os sujeitos investigados e as atividades que nos propusemos a analisar de acordo com nosso objetivo.

O capítulo 4, *Análise das sequências didáticas*, descreve as análises das situações-problemas e das sequências didáticas propostas por Pavan (2010) e Calado (2020), respectivamente, com a identificação das estratégias de resolução que alunos realizaram nas atividades sobre generalização, e na identificação das generalizações indutivas e/ou construtivas da função afim, baseados em Piaget (1984).

Por fim, apresentamos as considerações finais da pesquisa.

CAPÍTULO 1

O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUA PRESENÇA NA EDUCAÇÃO PROPOSTA PELOS DOCUMENTOS OFICIAIS BRASILEIROS

Neste capítulo, apresentamos fragmentos da história de elaboração do conceito de função, destacando desde suas ideias base até o estabelecimento da definição formal de função afim. Também são apresentadas as orientações do documento norteador nacional – Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - e do estado do Paraná – Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações - para ensino de Matemática de função, em particular da função afim.

1.1 O Conceito de Função e suas Ideias Base

O conceito de função tal como se apresenta hoje demandou um longo período de tempo para ser desenvolvido e delineado na forma como está, e essa demora deu-se, principalmente pelo contexto científico de cada momento histórico, pois cada definição foi estabelecida considerando-se a necessidade de cada época e o avanço alcançado pelas ciências em geral e a Matemática em particular.

Para Caraça (1951), "É natural, portanto, esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a *lei quantitativa*[1], surja também o conceito matemático próprio para o seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o instrumento" (p. 125). E aponta que a realidade tem duas características fundamentais: 1ª interdependência: toda realidade é interligada. Desde conceitos mais simples aos mais complexos, essa relação de dependência está em tudo que vemos no universo. Essas dependências "[...] tocam-se e entrelaçam-se no mais íntimo detalhe do organismo universal" (p. 110). 2º a fluência: tudo se transforma e vai variando no decorrer do tempo. Nada fica estático, "De modo que, do extremo superior ao inferior da escala, do movimento prodigioso de expansão do Universo, ao movimento não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo – tudo flui, tudo devém, tudo é, a todo o momento, *uma coisa nova*" (p. 110). Assim,

[1] "Lei quantitativa – aquela que diz respeito a variação de quantidade" (CARAÇA, 1951, p. 120).

segundo Caraça, função é um instrumento matemático criado pelo homem advindo de sua necessidade de entender e explicar a realidade (fenômenos de dependência e variação).

Vale dizer que função é o estudo da variação de quantidade, é uma correspondência entre dois conjuntos numéricos aos quais atribuímos variáveis para que seus elementos sejam representados, por exemplo: x e y; x é uma variável de um conjunto numérico que se relaciona com y que é outra variável de outro conjunto numérico, e, se há uma correspondência de $x -> y$, isso quer dizer que y é função de x, logo, em linguagem matemática, escrevemos a função como sendo $y(x)$ (CARAÇA, 1951). Como exemplo, o autor usa a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda de corpos no vácuo, medindo as alturas de queda em intervalos de tempo iguais. Para isso, utiliza uma tabela (tabela 1.1) que consiste na representação de dois conjuntos numéricos – tempo e espaço – postos em correspondência unívoca.

Tabela 1.1: correspondência entre o espaço e o tempo

Tempos (em segundos)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5

Fonte: Caraça (1951, p. 126).

Por meio dessa tabela é possível encontrar a regularidade – lei quantitativa – do fenômeno estudado. É claro, afirma o autor, que nela não há toda a regularidade, mas ela dá uma ideia dessa lei (*Ibid*.).

Postas essas considerações, a definição de função pode ser escrita da seguinte maneira: “Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de $x -> y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente” (CARAÇA, 1951, p. 129).

Lima *et al* (2016, p. 40) trazem a seguinte definição: “Dados os conjuntos *X*, *Y*, uma função $f\colon X \to Y$ (lê-se ‘uma função de *X* em *Y*’) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar, a cada elemento $x \epsilon X,$ um elemento $y = f(x) \epsilon Y$. O conjunto *X* chama-se o *domínio* e *Y* é o *contradomínio* da função *f*”. Além da definição de *domínio* e *contradomínio*, tem-se ainda no estudo das funções a definição de *imagem* que, como bem ressaltam Lima *et al* (2016), para cada *x* pertencente ao domínio (*X*), o elemento $f(x) \epsilon Y$ é chamado de *imagem* de x pela função *f*, ou o valor assumido pela função *f* no ponto $x \epsilon X$. “Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que *f* transforma (ou leva) *x* em *f(x)*” (*Ibid*., p.40).

Para Lima *et al* (2016), o domínio, o contradomínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$ são três ingredientes que constituem uma função, e quando se diz “a função *f*”, subentende-se aí o domínio *X* e seu contradomínio *Y*. E não existe função sem que eles sejam especificados.

Apesar de o conceito de função estar bem definido hoje em dia, Caraça, em sua obra, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, faz uma importante observação para a diferença entre função e expressão analítica, que, por sua vez, andam firmemente confundidas na linguagem e na escrita de matemáticos (1951). É raro, aponta Caraça, encontrar em livros matemáticos a frase: “seja a função $y(x)$, cuja definição analítica é $y = 4{,}9x^2$; o matemático escreverá mais simplesmente – seja a função $y = 4{,}9x^2$” (1951, p. 131). Ora, se função é a relação da variação de quantidade, a expressão analítica é apenas uma maneira de estabelecer correspondência entre as duas variáveis, “A lei matemática constitui, portanto, o terreno de que a função se vai nutrir” (CARAÇA, 1951, p. 131). Isto é, quando escrevemos a expressão analítica temos uma sentença que satisfaz os fenômenos que estão em correspondência.

Outra observação importante, quanto à nomenclatura e à escrita, é destacada por Lima *et al* (2016) quando ressaltam ser comum em livros antigos ou mesmo nos atuais se referir à função dizendo “a função *f(x)*”, quando na verdade deveriam dizer “a função *f*”, uma vez que *f(x)* é a imagem ou valor de *f* no ponto $x \epsilon X$. “Algumas vezes essa linguagem inexata torna a comunicação mais rápida e fica difícil de resistir à tentação de usá-la. Mas é indispensável a cada momento ter a noção precisa do que se está fazendo” (*Ibid*., p. 40).

Ao pretender trabalhar um conteúdo em determinado nível de ensino, primeiro deve-se determinar quais são as ideias base nele envolvidas, e no que se refere ao conceito de função Tinoco (2002) e Nogueira (2014) consideram essenciais para o seu aprendizado as noções de: variável, dependência, regularidade e generalização. Campiteli e Campiteli (2006) vão mais além, para os autores, além daquelas mencionadas anteriormente, deve-se considerar as ideias de proporcionalidade, continuidade, descontinuidade, relação e correspondência. Ao planejar as aulas, o professor nem sempre conseguirá trabalhar essas ideias separadamente, e pode, também, não ser apropriado fazê-lo (*Ibid*.).

Quanto às ideias base de função, a de <u>variável</u> se refere a um símbolo (letra) que representa qualquer elemento de um conjunto numérico, porém não é exatamente nenhum dos números desse conjunto, o que faz com que, das noções de função, esta seja a mais difícil para os alunos (TINOCO, 2002). Além disso, o professor precisa se preocupar em explorar com seus alunos as diferenças que existem na utilização das letras em diversas situações, pois, sem esse estudo, os alunos são levados a pensar que sempre a letra será uma incógnita, acarretando neles o hábito de sempre igualar qualquer expressão a zero na tentativa de encontrar um valor para a(s) variável(eis) envolvida(s) (2002, p. 5).

Queiroz (2008) fez um estudo sobre os diversos usos das variáveis, e, no que se refere à compreensão em relação à função, o autor afirma que é necessário que se reconheça situações de variações simultâneas e o aspecto relacional entre elas, e que tais informações podem ser representadas em tabelas, gráficos, expressões analíticas ou problemas verbais. Em cada representação "[...] é importante perceber a correspondência entre as variáveis e que a alteração de uma delas, provoque mudanças na outra. Este reconhecimento relacional implica na capacidade de determinar o valor de uma das variáveis quando a outra é reconhecida" (*Ibid*., p. 38).

A <u>dependência</u> é a relação entre as quantidades que estão variando. Em uma relação funcional, uma das grandezas – a variável dependente – é determinada, perfeita e univocamente, pela variação da outra grandeza – variável independente (TINOCO, 2002). Nogueira (2014) afirma que essa relação de dependência entre grandezas é o que dá à função o caráter dinâmico e "[...] sem a noção de dependência entre grandezas variáveis, seria impossível representar mesmo que apenas graficamente o movimento de algum objeto. Por essa razão, exemplos utilizando 'espaço de frenagem' de veículos sejam tão utilizados na introdução desse conceito" (p. 40).

Qualquer grandeza que depende de uma outra grandeza é função dela, assim, pode-se dizer que "[...] uma função é uma grandeza; uma função é uma grandeza variável; uma grandeza variável depende de outra grandeza" (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 34)

A <u>regularidade</u> refere-se à existência de padrões nas relações funcionais, e por meio deles é possível surgir previsões. "A existência da regularidade é extremamente importante porque permite a repetição e previsão; [...] ora, repetir e prever é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza" (CARAÇA, 1951, p. 119). Para Tinoco (2002), muitos fenômenos fluem com certa regularidade, permitindo fazer previsões sobre etapas que não podem ser observadas e o "O reconhecimento de regularidade em situações reais, em sequências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial à construção do conceito de função" (p. 6).

Nogueira (2014) destaca que a compreensão da ideia de regularidade pode ser iniciada muito cedo, desde a Educação Infantil no trabalho com desenhos incentivando as crianças menores a encontrarem padrão de repetição e às crianças maiores ao apresentar sequências numéricas, como, 5, 10, 15, 20, ... e pedir que adivinhem o número seguinte.

A generalização referente à relação funcional é resultado de todas as ideias base anteriormente descritas. Para que seja possível generalizar, primeiro é preciso que se tenha uma correspondência entre dois conjuntos numéricos dos quais existem *dependência* entre duas *variáveis* e, a partir do momento em que é percebida uma *regularidade*, é possível escrever um padrão a fim de estabelecer a *generalização*. É necessário que haja a generalização "[...] do contrário, teríamos sempre que estar apegado a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente" (CARAÇA, 1951, p. 127).

A abstração, segundo Tinoco (2002), ocupa um importante papel na capacidade de generalizar. A autora ainda afirma que muitas vezes os alunos generalizam situações que apresentam regularidades identificando apenas leis que se aplicam a casos particulares e, para que isso possa ser amenizado, é necessário que eles "[...] desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os. Os registros de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função" (TINOCO, 2002, p. 6).

A partir desse estudo do conceito de função podemos perceber a importância dela na educação e como está relacionada a nosso cotidiano. Observamos, também, a importância das ideias base para a compreensão do conceito de função.

1.2 A Função Afim

No caso da função afim, objeto de estudo desse trabalho, ela é, em geral, a primeira a ser trabalhada, desde os anos iniciais no Ensino Fundamental I, de maneira implícita, até os anos finais (9º ano) do Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, agora, definida e expressa formalmente no rigor matemático.

A função afim se apresenta como alicerce para que outras funções possam ser ensinadas, uma vez que, ao estudá-la os alunos começam a construir os conceitos de variáveis, dependências, regularidades e generalizações, que, de acordo com Nogueira (2014), são os conceitos básicos de função.

De maneira formal, Lima *et al* (2016, p. 87) definem a função afim da seguinte maneira: "Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes $a, b \epsilon \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \epsilon \mathbb{R}$", ou seja, $f(x) = ax + b$ é a sua forma generalizada. Há ainda casos particulares da função afim, como afirmam Lima *et al* (2016), são eles: a *função identidade*, as *translações*, *funções lineares*, e *funções constantes*.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como função identidade quando $f(x) = x$ para todo $x \epsilon \mathbb{R}$, pois, para cada valor de $x \epsilon \mathbb{R}$, tem-se o mesmo valor correspondente para; já as translações são definidas em $f(x) = x + b$, em que o gráfico da função translada em *b* unidades no eixo OY. As funções lineares são modelos matemáticos para problemas de proporcionalidade[1] em que são definidas como $f(x) = ax$, o que significa que "[...] grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de x" (LIMA et al, 2016, p. 96). Por fim, tem-se a função constante quando $f(x) = b$ (LIMA *et al*, 2016).

O gráfico de uma função afim $f: x \longmapsto ax + b$ é uma linha reta não vertical[2] (LIMA et al, 2016), e do ponto de vista geométrico, o número *b*, denominado de *coeficiente linear*, é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo *y*, e o número *a* é denominado de *coeficiente angular* dessa reta em relação ao eixo *x*. No tocante ao comportamento do gráfico, quanto maior o valor de *a*, mais a reta se afasta do eixo *x* (ou se aproxima do eixo *y*), e quanto menor o valor de *a*, mais a reta se aproxima do eixo x (ou se afasta do eixo y).

Analisando uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é possível saber se é afim sem que seus coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente, pois o coeficiente *b*, as vezes chamado de valor inicial da função *f*, é o valor que a função assume quando $x = 0$, isto é, $b = f(0)$ (LIMA *et al*, 2016). Os mesmos autores ainda apontam que o coeficiente *a* é obtido a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função *f* assume em dois pontos distintos x_1 e x_2 por meio da expressão:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tal expressão matemática é resultado da utilização do conceito de taxa de variação média de função em um intervalo dado. A taxa de variação média é dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e consiste no

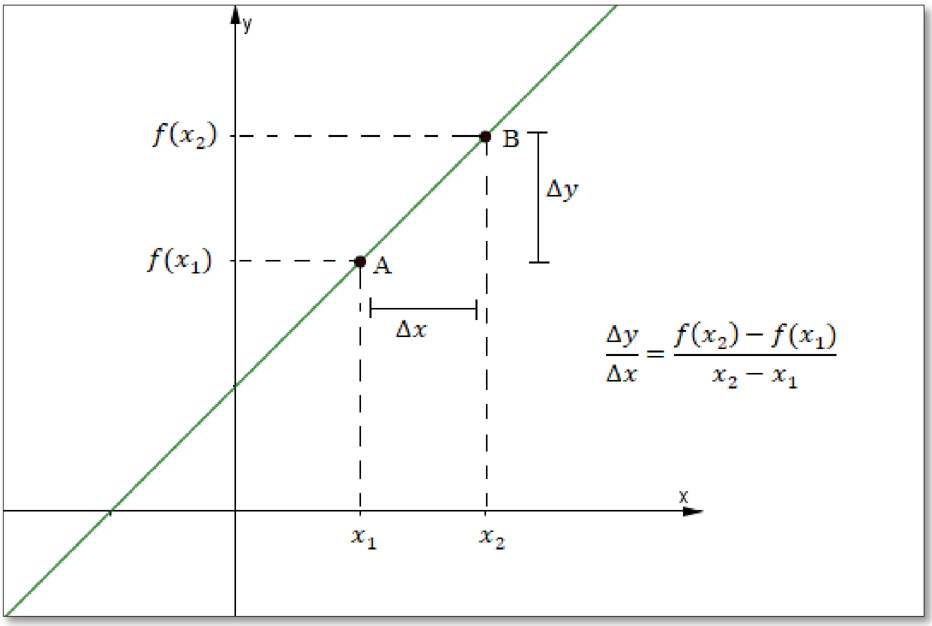
---

[1] "*Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais*" (LIMA et al, 2016, p. 96).

[2] A demonstração pode ser encontrada em LIMA, Elon Lages. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 250 p. v. 1.

quociente entre a medida da variação na ordenada $(f(x_2) - f(x_1))$ e a medida da variação correspondente na abscissa $(x_2 - x_1)$, como mostra a figura 1.1.

Figura 1.1: Gráfico representação a taxa de variação média de função



Fonte: A autora, 2021.

O coeficiente *a* significa que a cada variação de uma unidade em *x* tem-se uma variação de a unidades em y, e, no caso da função afim, essa taxa de variação é sempre constante (MIRANDA, 2019), pois, conhecidos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$ e utilizando o conceito de taxa de variação média, obtém-se:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_1 - ax_2}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Daí, conclui-se que o coeficiente a, na função afim, chama-se *taxa variação* ou *taxa de crescimento*.

Outra forma de encontrar a lei de formação da função afim é resolvendo um sistema cujas incógnitas são os coeficientes *a* e *b*. Como o gráfico da função afim é uma reta, e que por meio de dois de seus pontos a reta fica inteiramente determinada, é possível definir por completo a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conhecendo os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, cuja função assume dois valores distintos $x_1 \neq x_2$ escolhidos aleatoriamente (LIMA *et al*, 2016). Resulta que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, então para determinar os coeficientes a e b de modo a obter $f(x) = ax + b$ para todo *x* pertencente aos reais, basta resolver o sistema (LIMA *et al*, 2016):

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Uma maneira de resolver esse sistema é subtraindo uma equação da outra resultando em $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Depois, para obter o coeficiente *b*, basta substituir o valor de *a* em uma das equações, encontrando $b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$. Isso prova que "*Dados arbitrariamente* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, *com* $x_1 \neq x_2$, *existe uma, e somente uma, função afim* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_1) = y_1$ *e* $f(x_2) = y_2$. *[...] Toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim*" (LIMA *et al*, 2016, p. 94).

A título de exemplificação:

Exemplo 1: Seja a função f cuja expressão analítica é dada por $f(x) = ax + 2$. Sabendo que $f(1) = 5$ e $f(2) = 8$, vimos que o coeficiente *b* é o valor inicial da função, ou seja, $b = f(0)$, assim, substituindo $x = 0$ na função, temos:

$$b = f(0) = a.0 + 2$$

$$b = 2$$

Para encontrar o coeficiente *a* basta substituir os valores na equação:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{5 - 8}{2 - 1}$$

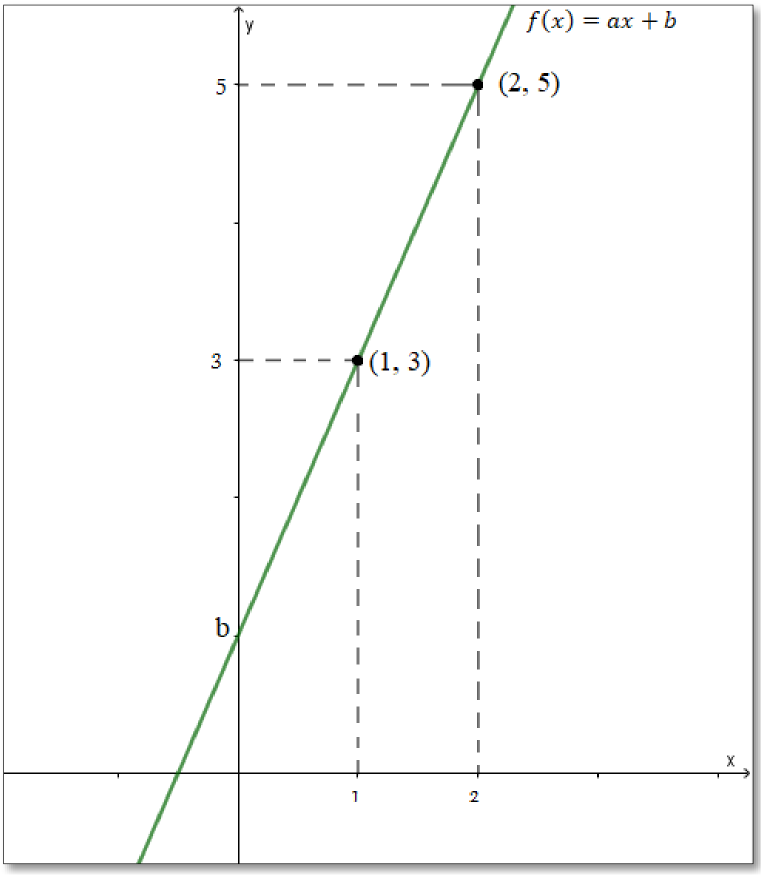
$$a = \frac{-3}{-1}$$

$$a = 3$$

Dessa forma, a lei de formação da função é dada por $f(x) = 3x + 2$.

Exemplo 2: Seja a função f cuja expressão analítica é dada por $f(x) = ax + b$. Conhecendo dois de seus pontos como representado no gráfico a seguir, por meio do sistema $\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$, determinamos inteiramente a função.

Figura 1.2: Gráfico da função afim



Fonte**:** A autora, 2021**.**

Para encontrar o valor do coeficiente *a* substituímos em:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{5 - 3}{2 - 1}$$

$$a = 2$$

E para determinar o valor de *b* fazemos:

$$b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{2.3 - 1.5}{2 - 1}$$

$$b = \frac{6 - 5}{1}$$

$$b = 1$$

Ou ainda, sabendo o valor de a, basta substituir em alguma das equações do sistema $a = 2$, isto é:

$$ax_1 + b = 3$$

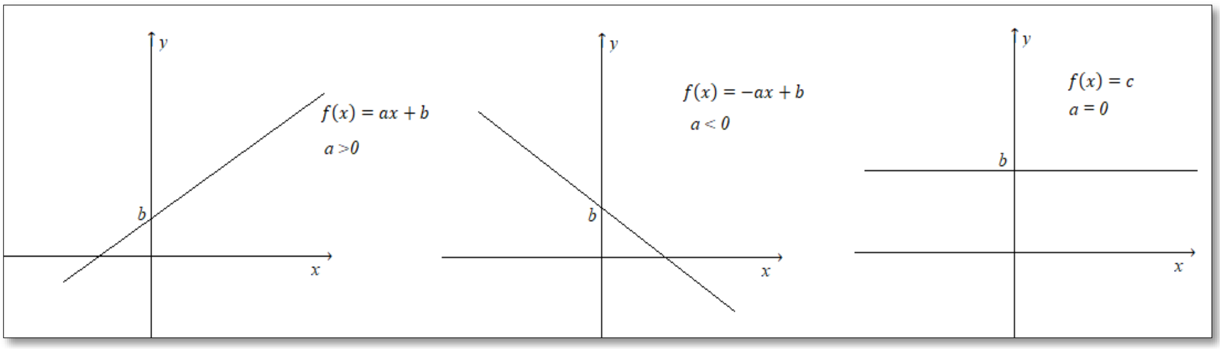
$$2.1 + b = 3$$

$$b = 1$$

Assim, a função fica inteiramente determinada, ou seja, $f(x) = 2x + 1$.

Outro fator importante a respeito do coeficiente *a* no estudo de função afim, refere-se à análise do crescimento e decrescimento da função. Se *a* for positivo, ou seja, $a > 0$, a função é crescente, se a for negativo, isto é, $a < 0$, a função é decrescente, e se for zero, $a = 0$, a função é constante. Lembrando que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ é crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (LIMA *et al*, 2016).

Figura 1.3: Função afim crescente, decrescente e constante



Fonte**:** A autora, 2021.

São várias as terminologias atribuídas ao coeficiente *a* – *coeficiente angular*, *inclinação*, *taxa de variação* e *taxa de crescimento*. No entanto, Lima *et al* (2016) afirmam que quando nos referimos à função afim dada por $f(x) = ax + b$, o mais apropriado é utilizar as nomenclaturas, taxa de crescimento ou taxa de variação.

> Se a função afim *f* é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número *a* de *coeficiente angular* da função *f*. O nome mais apropriado, que usamos, é *taxa de variação* (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos,

> ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de *f*, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas de *x* e *f(x)*. Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta (LIMA *et al*, 2016, p. 95).

Outro equívoco é referir-se à função afim chamando-a de função do primeiro grau. Para Lima *et al* (2016), essa nomenclatura sugere o seguinte questionamento: o que é o grau de uma função? Os autores afirmam que função não tem grau, o grau é do polinômio que a constitui, por exemplo, na função afim em que $a \neq 0$ a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio de grau 1. Esse erro acontece também em relação à função quadrática, pois muitas vezes são chamadas de funções do segundo grau (LIMA *et al*, 2016). Isso se aplica a qualquer função polinomial.

A partir de nosso estudo sobre a função afim, notamos que ela, por ser, em geral, a primeira função ensinada aos alunos, tem muitas características e conceitos que podem trazer dificuldades em sua resolução, por isso a importância de serem estudadas algumas ideias base desde os anos inicias do Ensino Fundamental para posteriormente sua formalização ser trabalhada no último ano dos anos finais (9° ano).

1.3 Base Nacional Curricular Comum – BNCC

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento que visa nortear os currículos e propostas pedagógicas dos sistemas de ensino federal, estadual e municipal de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Nela são estabelecidos conhecimentos, competências e habilidades de todas as áreas de conhecimento, visando o desenvolvimento dos alunos ao longo de sua escolaridade básica (BRASIL, s/d).

Na área de Matemática, a Base Nacional Curricular Comum (2018), destaca que "O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (p. 265).

Nessa direção, com relação ao Ensino Fundamental, o documento destaca que os campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais e que se articulam, dentre elas: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação; e essas ideias, na escola, devem ser objetos de conhecimentos. Para ilustrar, o documento traz um exemplo da proporcionalidade que deve estar no estudo de operações com números naturais, representação fracionária, áreas, *funções*[1], probabilidade, dentre outras. Desse modo, mesmo que implicitamente em algumas ideias, todas elas se relacionam com o conceito de função.

A BNCC (2018) estabelece cinco *unidades temáticas* – Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística –, em que cada uma delas pode receber ênfase diferente a depender do ano de escolarização. O conceito de função é estudado na BNCC na unidade temática Álgebra.

A unidade temática Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico que, segundo a BNCC (2018), "[...] é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas" (p. 270). E ainda, para que isso ocorra é necessário

> [...] que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade (BRASIL, 2017, p. 270).

Nesse sentido, é imprescindível que as noções de regularidade e generalizações de padrões e propriedades de igualdades, estejam presentes no processo de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, sem, no entanto, a utilização de letras para representar as regularidades (BRASIL, 2018). E ainda, nos Anos Inicias, "A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas" (*Ibid.*, p. 270).

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo dessa temática retoma, aprofunda e amplia o que foi trabalhado nos Anos Inicias. Nessa fase da escolaridade, os alunos devem compreender os diversos significados das variáveis em uma expressão, estabelecer generalização, investigar a regularidade de uma sequência numérica, substituir um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas, "[...] é necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação" (BRASIL, 2018, p. 212). É, portanto, nessa fase, mais precisamente no nono ano, que o ensino de função é explicitamente referenciado. Isto é, nessa unidade temática,

[1] Grifo do autor.

um dos *Objetos de Conhecimentos* é a Função cujo estudo consiste nas representações numérica, algébrica e gráfica, sendo sua *Habilidade* "Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis (BRASIL, 2017 p. 317).

Já no Ensino Médio, a área de *Matemática e suas Tecnologias*, a BNCC (2018) "[...] propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (p. 527), e para a continuação dessas aprendizagens, o foco no Ensino Médio "[...] é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos" (p. 582).

Para organizar as aprendizagens propostas no currículo, a BNCC (2018) organiza os conteúdos do Ensino Médio, assim como no Ensino Fundamental, em unidades temáticas, juntando num quadro os temas: Número e Álgebra; Geometria e Medidas; e Probabilidade e Estatística; dos quais o conceito de Função está localizado no quadro Número e Álgebra apresentado a seguir.

Quadro 1.1: Organização do conceito de função afim na BNCC para o Ensino Médio

Número e Álgebra
Habilidades
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: Baseado na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 543 – 544).

Portanto, as orientações da BNCC são para que o conceito de função, de modo especial a função afim, seja abordado desde os anos iniciais, mesmo que de maneira implícita, até os anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

1.4 Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações

Baseado na BNCC e seguindo a mesma estrutura, o Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações, é um documento criado pelo Estado do Paraná para a orientar a elaboração ou reelaboração das propostas curriculares e Projetos Político-Pedagógicos das escolas da rede estadual, municipal e privada de ensino, no que se refere a todas modalidades e às etapas da Educação Básica: Educação Infantil e o Ensino Fundamental. O documento tem como proposta trazer para a realidade paranaense as discussões sobre os princípios e direitos brasileiros nos currículos do estado, além de trazer reflexão sobre a transição das etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental, bem como, a transição dos Anos Inicias para os Anos Finais deste nível de ensino (PARANÁ, 2018). Embora a BNCC contemple toda a Educação Básica, no Referencial Curricular do Paraná, o Ensino Médio não foi apresentado, pois encontra-se em fase de discussão e análise.

O documento propõe, com relação à disciplina de Matemática, as unidades temáticas: números e álgebra, geometrias, grandezas e medidas e tratamento da informação. O Referencial Curricular amplia o que está proposto na BNCC e procura

> [...] minimizar a fragmentação dos conhecimentos e a ruptura na transição do Ensino Fundamental – anos iniciais e finais, sendo proposto para cada ano, um conjunto progressivo de conhecimentos matemáticos historicamente construídos, de forma a que o estudante tenha um percurso contínuo de aprendizagem e possa, ao final do Ensino Fundamental, ter seu direito de aprendizagem garantido (PARANÁ, 2018, p. 807 – 808).

Como referencial teórico e metodológico, o Referencial propõe teorias e tendências da Educação Matemática. De acordo com o documento, a Educação Matemática possibilita ao professor balizar suas práticas pedagógicas e suas ações a fim de considerar não apenas os conhecimentos matemáticos, mas também aspectos cognitivos, sociais, culturais, entre outros (PARANÁ, 2018). Desse modo, o documento apresenta algumas tendências em Educação Matemática, como, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Investigação Matemática e Mídias Tecnológicas, que são meios que permitem o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos (PARANÁ, 2018). "Essas estratégias permitem um trabalho interdisciplinar, contextual e articulado entre os diversos conhecimentos da própria Matemática, assim como a comunicação entre os conhecimentos e saberes das diferentes disciplinas" (*Ibid*., p. 932).

Quanto ao conteúdo de função afim, assim como na BNCC, o Referencial recomenda que ideias base desse conceito sejam trabalhadas a partir dos anos inicias do Ensino Fundamental, na unidade temática "número e álgebra". No 1° ano do Ensino Fundamental um dos objetivos de aprendizagem é reconhecer padrões e regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais (PARANÁ, 2018, p. 941), conforme mostra o quadro a seguir, e, na medida que vai aumentando o grau de escolaridade, as ideias base de função vão se explicitando e recebendo maior ênfase.

Quadro 1.2: Ideias bases de função identificadas durante os anos de escolaridades do Ensino Fundamental definido no Referencial Curricular do Paraná

1° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**

Números e Álgebra	Padrões e regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. Reconhecer os primeiros termos de uma sequência recursiva, sejam eles formados por números naturais, figuras ou objetos e explicitar o padrão, isto é, esclarecer a regularidade observada, para indicar ou descrever os elementos ausentes.
2° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Sequências figurais e numéricas	(EF02MA10) Identificar e descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
3° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Sequências numéricas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
4° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Números naturais Sequências numéricas	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
5° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Propriedades da igualdade Noção de equivalência: expressões numéricas envolvendo incógnita	(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos seja desconhecido.
Geometrias	Plano cartesiano	(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano,

		como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas
6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Geometrias	Plano cartesiano	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1.º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
7° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Equação do 1.º grau Sequência e expressões algébricas Linguagem algébrica	(EF07MA14) Compreender e classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar e compreender a simbologia/linguagem algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
8° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Equação do 1.º grau Sequência e expressões algébricas Linguagem algébrica	(EF08MA11) Reconhecer, identificar e compreender padrões e regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Números e Álgebra	Função do 1.º grau	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

		Observar regularidades, identificar e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. Compreender o conceito de função, identificando suas variáveis e lei de formação. Construir tabelas correspondentes a uma função. Reconhecer o domínio e a lei de associação de uma função. Reconhecer e conceituar a função constante e as do 1.º grau. Construir gráficos de funções constantes, do 1.º grau com ou sem o auxílio de softwares de geometria dinâmica. Representar uma função por seu gráfico no plano cartesiano.

Fonte: Baseado no Referencial Curricular do Paraná (2018, p. 827 – 887).

Considerando o Quadro 1.2, as ideias base do conteúdo de função afim estão presentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por exemplo, já no 1° ano do Ensino Fundamental um dos objetivos de aprendizagem é reconhecer padrões e regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais (BRASIL, 2018, p. 941).

No tocante ao Ensino Fundamental – Anos Finais, o Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (2018) apresenta o conteúdo de funções na unidade temática Número e Álgebra (p. 887) e, assim como na BNCC (2018), esse conteúdo aparece, explicitamente, no nono ano do Ensino Fundamental com os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Observar regularidades, identificar e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.
- Compreender o conceito de função, identificando suas variáveis e lei de formação.
- Construir tabelas correspondentes a uma função. Reconhecer o domínio e a lei de associação de uma função. Reconhecer e conceituar a função constante e as do 1.º e 2.º grau.

- Construir gráficos de funções constantes, do 1.º e de 2.º grau com ou sem o auxílio de softwares de geometria dinâmica.
- Representar uma função por seu gráfico no plano cartesiano.
- Reconhecer o vértice e a concavidade de uma parábola.
- Obter as coordenadas do vértice de uma função do 2.º grau de caso simples.
- Obter as coordenadas dos pontos de intersecção das parábolas com os eixos coordenados.
- Identificar o vértice como ponto de máximo ou de mínimo de uma função do 2.º grau.

Portanto, conforme mostrado no quadro anteriormente, na medida em que aumenta o grau de escolaridade, as ideias base de função vão tendo uma ênfase ainda maior até que 9° ano do Ensino Fundamental a função é efetivamente estudada começando com a função afim que está presente nos currículos em todos os níveis de conhecimento, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Médio.

CAPÍTULO 2

APORTES TEÓRICOS PIAGETIANOS

Neste capítulo, trazemos aspectos da teoria piagetiana que subsidiam as análises realizadas para responder nossa questão de pesquisa. Dessa forma, resumimos nesse capítulo, os estudos realizados acerca da abstração e da generalização sustentadas particularmente nos livros *Abstração Reflexionante* (1995) e *Investigaciones sobre la gene*ralizacion (1984), respectivamente.

2.1**Abstração Empírica e Reflexionante**

Piaget, em seu livro, *Investigaciones sobre la generalización* (1984), faz um estudo sobre as generalizações indutivas e construtivas, esta última sendo a essência dessa sua obra, na qual procura explicar sua formação e seu mecanismo. Piaget (1984) afirma que assim como há dois tipos de abstrações, isto é, abstração empírica e abstração reflexionante, há, do mesmo modo, pelo menos dois tipos de generalização, a indutiva e a construtiva, e que as generalizações advêm das abstrações, ou seja, toda generalização supõe uma abstração prévia (1995). "Com efeito, o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização, bem como o resultado de uma abstração empírica conduz a precisar o grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto" (PIAGET, 1995, p. 59).

O autor ainda afirma que

> Considerando somente suas duas principais formas, primeiramente fica claro que em uma abstração empírica, procedendo apenas por dissociação de caracteres já dados no objeto, a generalização que dela resulta somente poderia ser indutiva e desprovida de necessidade, enquanto que a abstração reflexionante, consistindo em um reflexionamento de coordenações já implicam uma construção, a reflexão reorganizadora que disto resulta conduz a generalizações necessárias (PIAGET, 1995, p. 59).

Para desenvolver uma reflexão sobre essa perspectiva, apresentamos a seguir, uma abordagem teórica a respeito das abstrações empírica e reflexionante a fim de chegarmos às generalizações indutivas e construtivas.

O cerne da teoria da Epistemologia Genética desenvolvida por Piaget consiste em afirmar que a ação é constitutiva de todo conhecimento. Para Piaget, se o sujeito não age o conhecimento não acontece, isto é, o conhecimento depende da ação que, por sua vez, é produtora de conhecimento (RUIZ; BELLINI, 2001). Logo, para que ocorra uma compreensão matemática, a ação humana é fundamental (MARTINS, 2007).

O sujeito constrói seu conhecimento quando age, e “[...] as estruturas lógicas ‘se manifestam igualmente sob espécies de estruturas operatórias, em ligação com as coordenações gerais da ação’” (GRANGER, 1974, p. 281). Na Epistemologia Genética, “[...] o pensamento não está, fundamentalmente, ligado à linguagem (surdos-mudos), invalidando, em pedagogia, a mera transmissão por processos verbais (a inteligência está ligada à ação)” (LIMAS, 1980, p. 15).

Piaget explica a ação a partir de observações e análises dos comportamentos de um recém-nascido, pois é um período em que as crianças só conhecem aquilo que suas ações as permitem conhecer (RUIZ; BELLINI, 2001). Nessa perspectiva, afirmam Ruiz e Bellini (2001), o mundo do recém-nascido não se compõe de objetos como no mundo do adulto, mas de coisas para chupar, agarrar, olhar e etc. de modo que “[...] progressivamente vai se produzindo um duplo movimento de integração do sujeito e do objeto: na medida em que o sujeito coordena suas ações começa a dar unidade ao objeto com o qual interatua” (p. 22). Esses movimentos, afirma Bellini (2020), são chamados de adaptação, de construção da inteligência, e também dos dois modos de operar-se como pensamento que nasce da equilibração – assimilação e acomodação daquilo que a criança lida.

Segundo Granger, a ação para Piaget é considerada uma forma de adaptação dos organismos ao meio “[...] e essa adaptação comporta solidariamente uma fase de acomodação – que modifica a estrutura desse organismo – e uma fase de assimilação, - que substitui os dados originários de contato com o mundo por esquemas de operação” (1974, p. 282). Ainda para o autor

> [...] assimilação e acomodação desenvolvem-se conjuntamente até que se chegue a um modo de comportamento cuja relativa estabilidade dependa das compensações ativas do sujeito em respostas às perturbações do meio. [...] Mas, é somente através de uma sucessão de tais *equilíbrios* provisórios que o organismo humano atinge a figura definitiva do comportamento racional. O *equilíbrio*, pelo menos nas etapas anteriores à estruturação da conduta estritamente lógica, é, pois, pensado como momento de uma gênese e as estruturas que o definem são inseparáveis de uma história (GRANGER, 1974, p. 282-283).

Nessa perspectiva, Saladini (2008, p. 31) afirma que a acomodação consiste na “alteração das estruturas cognitivas em função do contato com o objeto assimilado”. E que pode ocorrer de duas maneiras: “[...] ou o sujeito cria um novo esquema de ação ou, então, modifica um esquema já existente, adaptando-o à nova necessidade. O que determina a acomodação é a ação do sujeito sobre o objeto, na tentativa de assimilá-lo" (p. 31). Quanto à assimilação, a autora ressalta que "[...] está relacionada à incorporação de um objeto, num esquema anteriormente já constituído ou ainda em construção. É esta incorporação nas ações do sujeito que garantirá a significação do objeto" (SALADINI, 2008, p. 38). Somente na presença da assimilação e acomodação é que a adaptação se torna possível (SALADINI, 2008).

Como dimensões da teoria da ação tem-se o conhecimento físico, o lógico-matemático e o conhecimento social (BELLINI, 2020).

Nessa perspectiva, para Piaget, a aprendizagem pode-se dar por meio de dois tipos de experiências: a física que consiste em agir sobre o objeto e extrair dele alguma característica; e a lógica-matemática em que o conhecimento não é dado pelo objeto, mas das ações do sujeito sobre eles ou da coordenação de suas ações. A primeira se refere à abstração empírica, a segunda, à abstração reflexionante (RUIZ; BELLINI, 2001).

A palavra *abstração*, do verbo latino *abstrahere*, significa arrastar, puxar, retirar, extrair, aspirar, separar, apartar, e, da sua própria definição, tem-se uma limitação "congênita" do conhecimento, ou seja, nunca se retira ou extrai-se tudo, mas apenas algumas características (BECKER, 2014).

Segundo o Dicionário de Filosofia Abbagnano, abstração é "A operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo, etc., e isolada de outras coisas com que está em uma relação qualquer" (ABBAGNANO, 1970 *apud* BECKER, 2014, p. 105).

Piaget, em sua obra, *Abstração Reflexionante: Relações Lógico-Aritméticas e Ordem das Relações Espaciais* (1995), faz um estudo, por meio do método clínico[1], em que define dois tipos de abstração: aquela cuja característica é tirada do objeto, isto é, o que pode ser observado, chamada de *abstração empírica*; e aquela cujas coordenações são extraídas sobre as ações que o sujeito realiza a partir dele, a *abstração reflexionante*.

As abstrações reflexionante e empírica são, por natureza, operações que retiram coordenações de ações ou características, retendo-as, e descartando o restante. Não obstante, a abstração reflexionante, ao contrário da empírica, tem um grau mais elevado, uma vez que comporta atividades contínuas que podem permanecer inconscientes, mas que, a partir de

[1] "O Método Clínico consiste em entrevistas individuais com os estudantes durante a resolução de problemas elaborados segundo os critérios que se deseja. Piaget acredita que somente com este método se pode chegar ao centro da estrutura cognitiva do sujeito e descrevê-la de modo realista, por permitir que a criança atue intelectualmente por si mesma manifestando assim, a orientação cognitiva que lhe é natural no período de desenvolvimento em que se encontra" (PAVAN, 2010, p. 31).

determinado nível de coordenações, atingem tomadas de consciência complexas. Por sua vez, a abstração empírica se limita a escolher dentre os observáveis perceptíveis aqueles que respondem a uma certa questão (PIAGET, 1995, p. 278).

As duas formas de abstração existem em todos os níveis de desenvolvimento “[...] dos patamares sensório-motores, e mesmo orgânicos, até as formas mais elevadas do pensamento científico” (*Ibid*., p. 286).

Em relação à abstração empírica, esta consiste e se apoia sobre os objetos físicos, ou seja, são propriedades e informações retiradas dos objetos, como, a cor, o peso, a forma, etc., assim como aspectos materiais da própria ação, por exemplo, os movimentos e empurrões (PIAGET, 1984; 1995). Piaget afirma que esse tipo de abstração, por mais elementar que possa parecer, não consiste em apenas nas “leituras” dos objetos, pois para abstrair qualquer propriedade é imprescindível valer-se de instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.) “[...] oriundos de ‘esquemas’ (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito” (1995, p. 5). E ainda, por mais que estes esquemas sejam necessários, a título experimental, “[...] à abstração empírica, ela não se refere a eles, mas busca atingir o dado que lhe é exterior, isto é, visa a um conteúdo em que os esquemas se limitam a enquadrar formas que possibilitarão captar tal conteúdo” (PIAGET, 1995, p. 5).

De acordo com Nogueira e Pavanello (2008), os aportes da abstração empírica para Piaget são indispensáveis

> [...] por fornecerem conteúdos de conhecimento, por permitirem controlar as antecipações e levantarem questões. Esses aportes são, todavia, secundários, pois não são eles que estão em jogo na formação de instrumentos de conhecimento (classificação lógica, as operações aritméticas, a possibilidade de combinatória, etc.), instrumentos estes que não se encontram como tais na realidade, pois são coordenações ou estruturas de atividades intelectuais do sujeito. Assim, toda abstração empírica necessita, para se efetivar, de quadros de conhecimentos que foram criados graças a uma abstração reflexionante prévia (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 119).

Becker (2014) recorre a várias situações do dia a dia para dar exemplos de abstrações empíricas:

> Assim como ouço um violão, sinto o odor de um perfume, vejo uma árvore alta e verde, saboreio uma maçã, tateio paredes e portas no escuro para me localizar, sigo com o olhar o movimento de um carro ou de um avião, também observo ações de pessoas como dirigir um automóvel, digitar um texto, plantar uma árvore, andar de bicicleta, gesticular num discurso, brincar, remar, nadar, escrever à mão ou ler. Tais qualidades, retiradas de objetos (violão, perfume, árvore, maçã, paredes, portas, automóveis, aviões) ou de ações (dirigir, digitar, andar de bicicleta, gesticular, brincar, remar ou nadar), são todas observáveis. Retirar características desses objetos ou ações, isto é, desses observáveis, qualifica as abstrações empíricas (BECKER, 2014, p. 106).

Por sua vez, a abstração reflexionante não se apoia sobre o objeto, mas se dá pelas inferências que o sujeito extrai de suas ações e coordenações sobre eles (PIAGET, 1984, p. 7). E ainda, “A abstração ‘reflexionante’ é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores [...]” (PIAGET, 1995. p.193).

No processo de abstração reflexionante as coordenações não podem ser observadas, apenas inferidas por meio de observações do comportamento, pois elas estão no cérebro, na mente; por exemplo, quando uma criança toma consciência de que o resultado da soma 3+3+3 é o mesmo que multiplicar 3x3, tem-se, portanto, a coordenação de duas ações de somar em uma única de multiplicar; a coordenação é, portanto, algo dinâmico, não estático (BECKER, 2014).

E essa passagem de uma ou muitas coordenações numa operação, a uma mais complexa, faz-se por abstração reflexionante a qual “[...] implica equilibração, por assimilações e acomodações, retirando qualidades dessas coordenações ou operações, constituindo, assim, novidades. Uma nova operação, composta de muitas coordenações de ações, mais capaz que a anterior e de maior abrangência” (*Ibid.*, p. 107).

Piaget, (citado por Ruiz e Bellini, 2001, p. 35), para exemplificar a experiência lógico-matemática (abstração reflexionante), recorre ao relato de infância de um de seus amigos: quando tinha entre quatro ou cinco anos de idade, estava brincando de contar pedras. Enquanto contava, colocou-as em fileiras e contou dez pedras, depois, começou novamente a contagem, mas no sentido contrário, e encontrou novamente dez. Ficou maravilhado de ter encontrado o mesmo resultado em direções diferentes, então colocou-as em círculos e contou-as encontrando dez novamente. Assim continuou fazendo outros arranjos e sempre encontrando dez.

Portanto, como afirmam Ruiz e Bellini (2001), dessa experiência, ele não descobriu uma propriedade das pedras, mas da ação de ordenar, pois as pedras não tinham ordem, foi sua ação que impôs uma ordem. Descobriu que o resultado da soma independe das configurações das pedras, pois essas não possuem soma, são simplesmente uma pilha; para somar era necessário a ação, ou seja, a operação de coloca-las juntas e contá-las “Assim, não é uma propriedade física das pedras que se descobre com a experiência. É uma propriedade da ação exercida sobre as pedras, o que certamente é uma outra forma de experiência” (RUIZ; BELLINI, 2001, p. 35).

A abstração é reflexionante em dois sentidos complementares e inseparáveis: *reflexionamento e reflexão*, que podem ser observados em todos os estádios do desenvolvimento humano, por exemplo, quando o bebê é capaz de valer-se de certas coordenações e estruturas já construídas para solucionar um novo problema (PIAGET, 1977/1995, *apud* BECKER, 2014).

O *reflexionamento* consiste na projeção sobre um patamar superior das informações extraídas de um patamar inferior, por exemplo, a representação simbólica de uma ação, caracterizando, segundo a Epistemologia Genética, o *continuum* da construção do conhecimento (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008). Por outro lado, a *reflexão* é um ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior das qualidades transferidas do patamar inferior (PIAGET, 1995).

> Em primeiro lugar, ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo "reflexionamento" (*réfléchissement*). Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou pôr em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por "reflexão" (réflexion) (PIAGET, 1995, p. 6).

Piaget (1995) afirma que o reflexionamento não diz respeito apenas ao deslocamento dos observáveis em função de sua conceituação progressiva pela tomada de consciência, sendo necessário distinguir dois aspectos em um sistema de conceitos: sua forma e seu conteúdo. O conteúdo consiste apenas em observáveis, portanto, da abstração empírica. E sua forma, que "[...] consiste em reunir objetos em um todo, apoiando-se sobre relações de equivalência, em função de suas qualidades comuns" (p. 276), supõe a abstração reflexionante. Na primeira das variedades distinguidas (conteúdo) já presume uma abstração reflexionante enquanto reflexão, mas relacionada a uma forma muito elementar (formação de conceito). Os patamares seguintes – reconstituições, depois, comparações entre situações análogas – admitem uma abstração maior, enquanto reflexão.

Essa imbricação de reflexão e reflexionamento é a construção dos patamares sucessivos. E a formação de cada um dos patamares acarreta novas reflexões, portanto, uma reconstrução sobre um novo plano o que foi projetado do anterior (PIAGET, 1995).

> Até agora assistimos, pois, a um processo de espiral: todo reflexionamento de conteúdo (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão. Há, assim, pois, uma alternância ininterrupta de reflexionamentos → reflexões → reflexionamentos; e (ou) conteúdos → formas → conteúdos reelaborados → novas formas, etc., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo, sem começo absoluto" (PIAGET, 1995, p. 276-277).

A abstração reflexionante tem, ainda, dois desdobramentos: a abstração pseudo-empírica e a refletida. A abstração pseudo-empírica acontece quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações. A abstração pseudo-empírica difere da empírica no sentido de que esta retira as informações dos objetos, como cor, peso, etc., já aquela, são resultados tirados sobre a leitura dos objetos, como por exemplo, ordenar pedras e contá-las, isto é, as propriedades constatadas são introduzidas no objeto por atividades do sujeito (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008).

A abstração pseudo-empírica desempenha um papel muito importante nos níveis mais elementares durante o estágio das operações concretas, pois o sujeito "[...] para efetuar uma composição operatória (e *a fortiori* pré-operatória), e para julgar seus resultados, tem necessidade de vê-las inseridas em objetos: a abstração pseudo-empírica serve, então, de suporte e de auxiliar essenciais às abstrações reflexionantes" (PIAGET, 1995, p. 277).

Quanto à abstração refletida, ela acontece "em níveis superiores, quando a reflexão é obra do pensamento, isto é, sempre que uma abstração reflexionante se tornar consciente, ela é denominada *abstração refletida*" (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 119).

Becker (2014) afirma que a criança, ao longo de seu desenvolvimento, trabalha com abstração empíricas e reflexionantes, e que, na medida em que evolui, já na adolescência, seu avanço caracteriza-se frequentemente de abstração refletida, caso seja estimulada continuamente por desafios cognitivos.

A tomada de consciência é determinante no processo reflexionante. Para Piaget a tomada de consciência "é uma reconstituição conceitual do que tem feito a ação" (PIAGET, 1978 *apud* SALADI, 2008, p. 34). E que

> [...] a ação, ela só tende para um alvo e ela está satisfeita quando o alvo é atingido. Ela é dominada por aquilo que eu chamaria de êxito. Enquanto que a tomada de consciência comporta mais a compreensão: trata-se de saber como se tem êxito [...] é a interpretação e a explicação da ação. Na própria ação, a compreensão está centralizada sobre o objeto e não sobre os mecanismos que permitiram atingi-lo ((PIAGET, 1978 *apud* SALADINI, 2008, p. 34).

Assim, o sujeito toma consciência de suas ações quando é capaz de explicar as coordenações necessárias pelas quais efetivamente agiu. Portanto a tomada de consciência tem um papel fundamental nesse processo reflexionante, pois a partir do momento em que o sujeito toma consciência dos resultados de uma abstração reflexionante, tem-se aí a abstração refletida (Piaget, 1995, p. 193), "É, através da abstração refletida que o sujeito constrói os conceitos matemáticos, abrindo caminho para sua generalização a uma grande variedade de conteúdos inacessíveis sem essa nova tomada de consciência" (MARTINS, 2007, p. 29).

> No entanto, uma abstração refletida difere profundamente de um *insight* porque não se trata de uma organização súbita da percepção, mas é resultado de um longo processo de construção. A estrutura que possibilita um *insight* é, de acordo com a teoria da *Gestalt,* inata ou *a priori* e não sofre transformações pela experiência, enquanto a estrutura que possibilita uma abstração refletida é construída por abstração reflexionante, transformando-se com a experiência e a equilibração; é estruturada e estruturante ao mesmo tempo (BECKER, 2014, p. 108).

Assim, conclui Becker (2014), todas as descobertas da humanidade, desde o fogo ou roda passando por todas as evoluções humanas, como, a lâmpada elétrica, o cálculo diferencial integral, a mecânica quântica, a internet, etc., são oriundas de abstrações refletidas, "É essa abstração que transforma as quase necessidades em necessidades; o possível em necessário; o finito em infinito... o tronco de uma árvore em cilindro, a árvore serrada em circunferência, uma pedra redonda em esfera [...]" (BECKER, 2014, p. 109).

Diante do estudo que realizamos sobre a abstração empírica e reflexionante, esperamos ter melhor compreensão sobre a generalização indutiva e construtiva, pois tais abstrações são imprescindíveis no estudo das generalizações, uma vez que, segundo Piaget (1984) só se tem generalização por meio de abstrações anteriores.

2.2**Generalização Indutiva e Construtiva**

A generalização é um grau mais elevado do pensamento humano e está intimamente relacionado com a abstração. Como Piaget (1984)[1] afirma, as generalizações requerem uma abstração prévia. E a relação entre a abstração e generalização não acontece de maneira separada, ela é construída de maneira solidária, pois uma depende da outra para acontecerem. Do mesmo modo, temos essa mesma construção sincrônica e solidária nas generalizações indutivas e construtivas, ou seja, para o sujeito generalizar de forma indutiva é preciso uma generalização anteriormente construída, por mais elementar que possa ser. Como é referido por Piaget (1984, p. 68) "[...] não há dúvida que toda generalização indutiva supõe um marco prévio cuja utilização atual pode ser ou não justificada e cuja formação se deve a generalizações construtivas anteriores e mais elementares".

---

[1]Todas citações diretas ou indiretas referentes à Piaget (1984), são traduções da autora desse texto cuja referência pode ser encontrada em: PIAGET, J. **Investigaciones Sobre La Generalización**: estudios de epistemología y psicología genéticas. Tlahuapan: Editora Premià, 1984.

Nessa direção, Piaget (1984, p. 7) afirma que a generalização constitui dois grandes mistérios do conhecimento: 1º) o fato de engendrar estruturas constantemente novas, no sentido de não estarem contidas naquelas do ponto de partida, mas que, uma vez construídas, aparecem como o produto necessário destas; 2º) e que esta construção se apoia sem cessar sobre o que está em devir, portanto, sobre o que ainda não está realizado, tanto e frequentemente mais que sobre a aquisição anterior.

Quanto à generalização indutiva, procedente da abstração empírica, ela parte de relações observadas nos objetos e se remete a eles para verificar sua validez com a finalidade de estabelecer um grau de generalização, mas sem encontrar explicações ou razões para justificar o observado (PIAGET, 1984, p. 8). O sujeito não pensa *a priori*, ele se limita a raciocinar e generalizar somente no que está observando (p. 47).

Piaget (1984, p. 186) afirma que ao falar sobre generalizações indutivas não está discutindo sobre questões da lógica, mas refere-se às "[...] fronteiras epistemológicas entre o que provém dos objetos e o que é proporcionado pelas operações ou ações do sujeito". Para o autor, as investigações realizadas sobre a generalização sempre partem do observável (indutivo) e que vai se evoluindo de acordo com as coordenações das ações do sujeito sobre o objeto até a construção de novas formas e conteúdo (construtivo).

Ainda, segundo Piaget (1984, p. 26), nas generalizações indutivas, quando o sujeito, depois de encontrar uma solução, seja falsa ou verdadeira, aplica-a sem uma justificativa a novos conteúdos que já estavam presentes nas informações, mas que ainda não foram utilizadas. Nesse caso não há criação de novas formas, nem, posteriormente, a construção de novos conteúdos, apenas uma simples aplicação do esquema resolutório anterior. Para exemplificar essa situação, recorremos à atividade proposta por Calado (2020) em que pedia para os alunos escreverem uma expressão algébrica da função afim que representasse o valor a ser pago por um aluno que cursasse qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos, sabendo que para cursar qualquer língua, o aluno precisava pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00. Para essa atividade, um grupo apresentou a generalização $240x$, somando a parte fixa (R$150,00) à parte variável (R$90,00). Segundo Calado (2020) esse grupo já havia desenvolvido estratégia inadequadas no item a) dessa *atividade 3*, utilizando a mesma estratégia de resolução, desse modo, os alunos encontraram uma solução incorreta e aplicaram, do esquema resolutório anterior, a outra situação. Portanto, não houve nenhuma criação de novas formas nem novas construções, caracterizando a generalização indutiva.

Além disso, na generalização indutiva, as inferências dos sujeitos se limitam a uma generalização de “algum” para “todo” dos fatos observados ou das relações constatadas (PIAGET, 1984, p. 186). A isso, Piaget (1984) chama de raciocínio recorrente, isto é, o sujeito começa sua investigação, descobre alguma regularidade e generaliza sem a necessidade de constatar se vale para “todas”. No entanto, quando questionado, verifica que tal constatação já não funcionará sempre.

Segundo Piaget (1984, p. 56):

> [...] o raciocínio recorrente (ou ‘indução completa’ como o chama Poincaré) constitui precisamente o padrão por excelência destas construções baseando-se nas posteriores. Se se verifica uma propriedade no caso do primeiro número, e valendo-se para *n*, vale, necessariamente para *n-1*, então valerá para todos os números: nesta formulação, está claro que o momento decisivo não é o controle sobre 0 ou 1, ou sobre n, mas, precisamente, a passagem de n a n-1, o que proporciona, retroativamente, a razão do anterior”.

Um exemplo de pensamento recorrente pode ser observado na pesquisa de Calado (2020) em que, na *atividade 3*, os alunos tinham que descobrir se duas cartelas de 12 pregadores cada era suficiente para prender 22 camisas dispostas lado a lado de modo que uma camisa fique presa à seguinte por apenas um pregador. Nessa atividade um aluno constatou, por meio de observação, que um camisa necessitava de 2 pregadores, portanto, 22 camisas eram necessários 44 pregadores e, com isso, afirmou que não era suficiente: “*Olha só, cada camisa usa 2 prendedores, então para as 22 camisas, 24 pregadores é pouco. [...] para as 22 camisas ia usar 44 prendedores”* (CALADO, 2020, p. 128).

Piaget (1984, p.56) afirma que há duas fases na formação do raciocínio recorrente: durante a primeira fase, a propriedade em jogo se dá pela observação para um ou dois números, e as razões para essas observações são locais ou incompletas, portanto, a generalizações indutivas, ou seja, sem necessidade. Por outro lado, a segunda fase se inicia quando o sujeito não se limita a raciocinar sobre o que observou, mas sente a necessidade de pensar a posteriori, “[...] e é essa necessidade ligada às construções anteriores, isto é, a um ‘todo’ virtual, o que caracteriza a recorrência e uma nova forma de generalização que, assim, se torna construtiva, pois sempre estará aberta aos futuros possíveis” (PIAGET, 1984, p. 57).

Nessa direção, podemos exemplificar, ainda na mesma atividade de Calado (2020, p. 127), com a fala de dois alunos:

> - Uma camiseta precisa de 2 pregadores. Eu fiz 22 vezes 2 deu 44, aqui só tem 24 pregadores – aluno A.- Huuuun, não sei não. Porque se você faz duas camisas juntas, você economiza 1 pregador, olha aqui – aluno B.- Precisa de 23 pregadores – aluno

> B.- Verdade. Usa só 1 prendedor a mais – aluno A.- Que é o prendedor do começo. Escreve isso – aluno B.

Percebemos na fala do *aluno A* a primeira fase do pensamento recorrente, pois constatou apenas para um número (1 camisa), portanto, o seu pensamento ainda está em processo de construção. Já o *aluno B*, percebeu que para duas camisas apenas três pregadores eram suficientes, portanto, ele não se limitou a raciocinar sobre o que observou em apenas uma camisa, mas pensou *a posteriori*, isto é, houve a necessidade de raciocinar sobre o observado.

No que se refere à generalização construtiva, essa, por sua vez, é quando se apoia ou se dá sobre operações do sujeito ou seus produtos. Neste caso ela é de natureza simultaneamente compreensiva e extensiva e chega, portanto, à produção de novas formas e por vezes de novos conteúdos (PIAGET, 1984, p. 8). Não se trata de assimilar conteúdos novos de formas já constituídas, mas de engendrar novas formas e novos conteúdos, ou seja, novas organizações estruturais (*Ibid*., p. 188)

A formação da generalização construtiva consistirá precisamente em uma transposição de uma construção material para uma construção conceitual – partindo das observações e manipulações dos objetos à conceitualização de suas ações -, e, a partir do momento em que os sujeitos conseguem ter uma abstração refletida sobre suas ações, cuja tomada de consciência condiciona os processos generalizadores, elas evoluem de um nível a outro (*Ibid*., p. 50-51). Podemos citar, como exemplo, a generalização obtida por um aluno do grupo G5 investigado por Calado (2020) na *atividade 1*, em que se solicitava aos alunos que determinassem uma expressão algébrica que representasse o valor pago por Ana se ela quisesse comprar qualquer quantidade de pães, sabendo que cada pão custava R$0,18 centavos. O aluno apresentou corretamente a generalização fazendo $y = 0{,}18x$, como mostra o diálogo entre os integrantes do grupo - *Então, seria 18 vezes x. Na verdade, é 0,18 vezes x* –aluno A. - *Como assim?* – aluno B. - *O valor do pão é 0,18. Mas a gente não sabe quantos pães ela vai querer, então é x* – aluno A. - *Verdade* – aluno B. (CALADO, 2020, p. 98). Portando, esse aluno alcançou a generalização construtiva, uma vez que tomou consciência de suas ações, isto é, além de saber fazer, o sujeito foi capaz de explicar as coordenações necessárias de sua ação. Tal como é referido por Saladini (2008, p. 53), “[...] o sujeito toma consciência de sua ação quando é capaz de explicar as coordenações necessárias para a efetivação desta ação, o que mais uma vez comprova que a tomada de consciência no nível da conceituação é dependente da tomada de consciência no nível da ação (saber fazer)”.

Piaget ainda destaca que o processo de generalização construtiva começa quando os sujeitos não se limitam à leitura dos resultados das ações ou manipulações, mas quando conseguem entender o próprio esquema de construção, ou seja, começam a entender as coordenações necessárias que dão 'razões' a suas ações (1984, p. 53). Para Piaget, a eficácia dessas coordenações necessárias se manifesta pelo descobrimento das "razões" atribuídas às regularidades, já que elas representam critério autêntico das generalizações construtivas (*Ibid.*, p. 55).

Piaget (1984), para explicar o papel da generalização construtiva, utiliza-se do pensamento funcional ao mencionar que, quando o sujeito estabelece uma relação entre a variável y e a variável x e verifica a constância dessa relação, esse processo é extensivo e sempre supõe um marco prévio de assimilação devida às atividades do sujeito, e que, neste caso, corresponde às relações funcionais. E, ainda para o mesmo autor,

> Se $y = f(x)$, este marco é a própria função "f" que permite a união dos conteúdos "x" e "y" e de suas variações. Estas variáveis, suas variações e a própria existência de suas relações pertencem ao campo do observável, mas o poder de estabelecer as relações se deve às ações ou operações do sujeito (mas simplesmente "aplicadas" e não, todavia, "atribuídas" causalmente aos objetos), e, portanto, resulta de generalizações construtivas anteriores (intervindo despois nos morfismos ou correspondência sensório-motriz (PIAGET, 1984, p. 8).

A passagem de uma generalização indutiva para construtiva não acontece num "estalar de dedos" como se fosse mágica, é um processo de evolução do sujeito em relação aos seus pensamentos, o quais estão diretamente relacionados com a abstração reflexionante e a tomada de consciência. No entanto, esse processo não acontece de maneira linear, por acúmulo de informações, mas por estádios, e que de acordo com Bellini (2020, p. 171) "[...] os estádios não são uma classificação estática de comportamento, mas períodos de construção de conhecimentos distintos que levam a criança a alcançar os conhecimentos da humanidade". A esse respeito, Piaget (1984), em seu livro, faz várias investigações valendo-se do método clinico com crianças de 4 a 13 anos de idade. Tais investigações vão mostrando que dependendo do estádio em que essa criança se encontra, pode ou não alcançar a generalização construtiva da situação proposta. Ainda para Piaget, a generalização indutiva e construtiva sempre vêm reunidas e indissociáveis

> [...], mas o fato de que no transcurso de seu desenvolvimento mudam, não somente de proporções, mas também, e sobre tudo, de subordinações, impede de falar de um processo contínuo, e implica em atribuir às formas superiores (ou mais precisamente lógico-matemáticas a partir de um nível de metareflexão) das generalizações indutivas

> e das abstrações pseudo-empíricas, um significado diferente ao que tenham nas formas iniciais (PIAGET, 1984, p. 69).

As evoluções "admiráveis" dos sujeitos se devem às relações estreitas que existem entre as transformações da generalização e as etapas, não somente a da tomada de consciência, mas também, e sobretudo, das formas de abstrações que elas determinam (PIAGET, 1984, p. 68)

De acordo com Piaget (1984, p. 68) no início da investigação – estádio I- o sujeito limita-se às descobertas dos resultados de suas manipulações, que a princípio aparecem deformada (nível IA), e somente depois as descobertas começam a ser verdadeiras e aceitas (subestádio IB), por isso as falsas abstrações empíricas, e posteriormente corretas, assim como, as generalizações indutivas errôneas que se tornam posteriormente válidas apesar de muito breves.

Em seguida (nível IIA e IIB), na medida em que o sujeito vai tomando consciência do desenvolvimento de suas ações bem-sucedidas – as quais continuam sendo abstrações empíricas acerca das manipulações materiais – e finalmente do próprio esquema com suas coordenações necessárias (abstração reflexionante), a generalização se torna cada vez mais construtiva até chegar na "surpreendente" capacidade dos sujeitos do estádio III em construir novas figuras e formas não fornecidas empiricamente. "Com efeito, essas novas figuras são deduzidas, não do material em que não foram inseridas, mas de construções anteriores ou de seus resultados, mas sempre com base nas possibilidades por elas abertas, o que representa algo decididamente novo" (PIAGET, 1984, p. 68).

A esse respeito, podemos trazer, como exemplo, a investigação feita por Piaget (1984), no capítulo III de seu livro *Investigações sobre generalizações*, em que se trata de determinar o número de pares que se podem construir entre elementos[1] contíguos relacionados por elásticos (1-2, 3-4, e etc. e não 1-3, 2-4), assim, como, os números de trios de elementos contíguos (1-2-3, 2-3-4, etc), dos quádruplos e etc. A generalização requerida equivale a determinar que, com *n* elementos é possível formar *n*-1 pares, *n*-2 trios, *n*-3 quádruplos, e assim por diante. Nessa investigação, segundo Piaget (1984), no nível IA, os alunos conseguem generalizar para os pares, mas não para os trios, e eles têm muitas dificuldades de tomar conhecimento do resultado de suas ações e posteriormente tomar consciência do mecanismo dela, isto é, do esquema de

[1]Para realizar essa investigação, utilizou-se de material manipulável, que consistia em uma tábua de 80cm por 8cm, com 12 furos sequenciais mantendo uma distância de 6cm cada. Para formar os conjuntos, utilizou-se de barras, que eram colocadas nos furos (as barras representavam os elementos de um conjunto), e de elásticos que juntavam essas barras para formar os pares, trios e etc.

construção (PIAGET, 1984, p. 45), como, por exemplo, a criança SAR depois de algumas constatações admite que

> "[...] é necessário *"5 elásticos para 6 barras"*. Mas logo, "Que está sempre acontecendo? A mesma quantidade de elásticos e de barras? – *Não, mais barras* – Quanto mais? – *Muito mais".* Para os trios, constrói conjuntos disjuntos com 6 barras e dois conjuntos com 4 barras: "quantos elásticos você pegou? – *2*- Para? *4 barras* – E se adicionar mais uma barra? *Um elástico a mais* – Então, quantas elásticos para 5 barras? – *4*".(PIAGET, 1984, p. 46).

As crianças desse nível, mesmo constatando que o número de barras é sempre maior que o número de elásticos, quando questionadas sobre a quantidade de elásticos, afirmam que terá o mesmo que o número de barras, ou seja, fazem correspondência termo a termo, e isso, para Piaget (1984) é o início das dificuldades da generalização, pois essa ideia de correspondência se deve à abstração reflexionante e à generalização construtivas anteriores aos pensamentos elaborados por meio desse dispositivo (PIAGET, 1984, p. 47).

No nível IB, segundo Piaget (1984), os sujeitos constatam *n-1* até uma certa quantidade de barras. A partir da sexta barra já começam a dizer que número de elásticos são os mesmos que o de barras, ou seja, tem-se generalização indutiva até certo *n*, como podemos ver a seguir

> DUP (5;8) observa 2 elásticos para 3 barras, 3 elásticos para 4 barras, porém necessita contar 4 elásticos para 5 barras: "E se adicionar mais 1 (ou seja, 6?) – *5*. Como supôs? – *Eu adivinhei*. E para 7? – *7* Por quê? – *Porque tem 7 barras*". Depois de constatar 6 elásticos para 7 barras, ele antecipa 7 para 8 barras, mas erra para 10 barras: "*8 elásticos* – Por que? – *porque depois de 9 é 8, não, depois de 7 é 8".* [...] Conta: "*Não, 9*. – E para 12 barras? – *10* (ele faz e constata 9). Constatações: 2 elásticos para 3 barras; 3 para 4; 4 para 5; 6 para 7, (mas por antecipação) 10 para 12 barras. Trios: os constrói bem e constata 2 elásticos para 4 barras e 3 para 5, mas 6 elásticos para 7 barras; etc., para 6 barras prevê 5 elásticos, como fazia para os pares. Depois de várias tentativas e constatações, pergunta-se a Dup a diferença entre 2 em 2 e 3 em 3: *"Não é diferente"* e volta a n-1 para os trios (PIAGET, 1984, p. 48).

Para Piaget (1984), embora sejam poucas as evoluções dos sujeitos do nível IA para o IB, há nesse nível a presença da generalização indutiva acerca de observações corretas e não falsas como no nível IA.

O subestádio IIA marca os progressos da generalização indutiva à passagem aos princípios da generalização construtiva (PIAGET, 1984). Como podemos observar no exame feito a criança MIL a seguir

> Constrói imediatamente dois pares com 3 barras e antecipa 3 elásticos para 4 barras. "Como você sabe? – *Porque* (adiciona ao par 3-4, a 1-2 e 2-3 já feitos) – E se adicionar 1 barra (5)? – *4*. Teremos 5 barras e 4 elásticos? – *Ah, não* (a falta de correspondência termo a termo o assusta quando vem expressa verbalmente). – Quantas? – *5* (logo conta mentalmente). *No, 4*. – O que você contou? - ... - Com 7 barras (ocultamos)? – *6*. -Como você sabe? – *4-5, 5-6, 6-7, e como já tem 3* (para 4 barras). – E com 12 barras? – *11*. O que você contou? – (mostra os intervalos), *Ali no meio* – E se em vez de 12 tivéssemos 15 (sem as barras)? – (vacilação) – *15*. – Quanto tinha para 3 barras? – *2 elásticos*. E 4? – *3*. E com 6? – *já não sei* (conta). *5*. – E com 8? -...-Você pode encontrar sem contar? - *Não*. – E com 10? – *Não posso ... 8 não, 11; não, 9*. – Está certo disso? – *Sim, tem que ser um número antes do 10*. – E com 15? – *14*. Então enuncia a relação regular. "*Tem (sempre) mais barras*, mas não sabe explicar por quê. [...] para os trios se confunde mesmo com as observações: *"já não estou entendendo mais nada"*(PIAGET, 1984, p. 49).

Piaget (1984) afirma que nesse nível, as reações dos sujeitos são reveladoras no que diz respeitos à passagem de formas indutivas às construtiva de generalização, não, no entanto, quando as crianças descobrem casos particulares da lei *n-z*, porque ainda pode ser indutivo, mas quando começam a entender as razões de suas observações, por exemplo, quando MIL conta os intervalos para ter uma ideia do número de elásticos no caso dos pares.

Já o subestádio IIB, é caracterizado pela descoberta progressiva do esquema de construção. Esse esquema ainda é progressivo, pois, tal como Piaget (1984) refere-se, ainda é encontrado marcas de generalização indutiva fundamentada em observações. O diálogo a seguir refere-se ao exame desse estádio.

> [...] *"Sempre tem um a menos*. – Por exemplo, quantos elásticos a menos para os grupos de 5? – *4 a menos*. – E um grupo de 25? – *Espere...24 a menos*. Menos que o quê? – *Menos elásticos que barras, mas não se sabe quantas barras tem*. – Para ter grupos de 25, quantas barras são necessárias? – *Pelo menos 100 ou algo assim*, - Não é menos? – *50, sim, seriam dois grupos*. – 2? – *Não, mais. Ah, poderia ter 26*. – E com 26 barras, quantos grupos de 25? – *Seriam dois grupos*" (PIAGET, 1984, p. 52).

Piaget, afirma que, nesse subestádio, é notório o progresso realizado pelos sujeitos desse nível em relação ao nível IIA, e que o progresso da generalização construtiva "[...] se deve ao fato de que já não se limitam à uma leitura dos resultados da ação ou das manipulações materiais que intervém nesta construção [...], ou seja, começam entender o próprio esquema desta construção, isto é, das coordenações que dão as 'razões'" (PIAGET, 1984, p. 53).

Para Piaget (1984), no Estádio III, os sujeitos fundamentam-se suas deduções no esquema de construção destacando dele as coordenações necessárias. E, ainda para autor, é interessante notar que a lei *n-2* para os trios são encontradas sem observações prévias, mas graças às inferências a partir da lei *n-1* dos pares, como podemos observar no exame realizado na criança DIA.

> Trios: n-2 “porque cada vez salta uma barra, então são menos 2”. Quádruplos: ainda necessita contar. “E para 20 barras? – menos 19. – Quantos grupos de 20 com 25 barras? – Pode ter 5, porque cada vez que se move uma barra é necessário um elástico (mas começa de 21, logo corrige) – São 6, - Pode explicar por quê? – Por que cada vez que tenho outro grupo (de N) diminuo de uma barra” (PIAGET, 1984, p. 52).

Concluindo esse estádio III, Piaget (1984) afirma que os sujeitos se fundamentam de maneira constante no próprio esquema de suas ações, permitindo, às vezes, antecipações por construções mentais ou representativas, substituindo, assim, as manipulações materiais, ao mesmo tempo em que a explicação das coordenações necessárias proporciona as razões. Portanto, podemos observar, nesse exemplo, que a ação do sujeito e a tomada de consciência de suas ações são imprescindíveis no progresso da generalização indutiva para generalização construtiva, e que “Toda a evolução psicogenética das generalizações apresentada nesta obra, parece dominada por uma tendência cada vez mais acentuada, por substituir ou duplicar os conhecimentos de natureza exógena por uma reconstrução endógena” (PIAGET, 1984, p. 200), isto é, de fora para dentro. E que, ainda para o mesmo autor; “[...] esta tendência pode explicar-se pelas leis da tomada de consciência, procedendo da periferia ao centro, quer dizer, dos observáveis (aos pontos de interferência entre os objetos e o resultado das ações) às coordenações internas necessárias ao desenrolar dos atos” (p. 200-201).

Não obstante, esse progresso da generalização pode não ocorrer de maneira linear, havendo momentos em que os sujeitos alcançam o princípio da generalização construtiva, mas em outros casos voltam para a generalização indutiva mediante observações, e esse “paradoxo”, tal como é referido por Piaget (1984, p. 50), é facilmente explicado pelas leis da abstração e tomada de consciência. Segundo Piaget (1984, p. 50), é necessário distinguir pelo menos três níveis nos dados da própria ação incluindo as transições entre eles.

> Primeiro, partindo da periferia (a tomada de consciência procede precisamente da periferia até o centro) se tem os resultados exteriores à ação que podem ser conhecidos pelo sujeito em que este entenda como os tenha alcançado. [...] Em segundo lugar, a ação ocorre em seu desenvolvimento material e o fato de tomar conhecimento ainda se situa, como no caso dos resultados externos, no nível da abstração empírica (referindo-se aos deslocamentos, as manipulações como tais...). Por fim, há a compreensão do mecanismo interno de ação, ou seja, de suas coordenações necessárias (origem das operações lógico-matemáticas) e a tomada de consciência dessa lógica praxeológica se deve então à abstração refletida (PIAGET, 1984, p. 50 – 51).

Como exemplo, podemos citar o caso do sujeito MIL, investigado por Pavan (2010), em duas situações-problema. O enunciado do *problema 2* da quarta bateria de atividades é proposto por Pavan (2010, p. 102) da seguinte maneira: *A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la*, nesse sentido, os alunos, no item c), eram questionados se era possível calcular qualquer número de pulos do filho canguru, ou seja, pedia a generalização. Para essa situação esse aluno MIL respondeu, *"Sim, fazendo o mesmo número de pulos da mãe vezes três"* (p.106). Constatamos que esse aluno apresentou capacidade de generalizar desprendendo-se de exemplos específicos, da tabela completada no problema, e da tabuada do três, demostrando, assim, a generalização construtiva. Já no *problema 2* da quinta bateria de atividades, os alunos deveriam responder se era possível uma pessoa comprar qualquer quantidade de quilos de frutas e verduras, sabendo que cada quilo custava R$ 4,00 reais. Para esse problema, MIL generalizou da seguinte maneira: *"Sim eu faria contas de vezes e mais como 4x30 e 4x60"* (PAVAN, 2010, p. 160). Neste caso, inferimos que MIL apresentou uma generalização indutiva, pois limitando-se a exemplos para generalizar e fundamentou sua generalização por meio de suas observações.

Portanto, como afirma Piaget (1984, p. 51), não há nada de contraditório nas reações dos sujeitos. Quando se dificulta a ação, conseguem executá-la aos poucos, mas só percebem claramente o resultado, mesmo que distorcido, quando são questionados. Ainda para o mesmo autor "[...] só se tem, por meio destas observações, corretas ou não, generalizações indutivas, por falta de abstração refletida e por falta de tomada de consciência do mecanismo coordenador interno que permitiu a realização das ações" (PIAGET, 1984, p. 51).

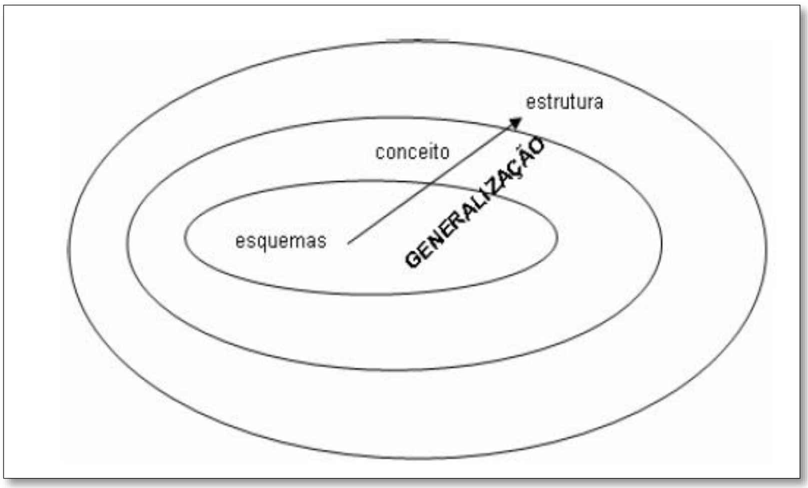
No processo generalizador, Piaget (1984) afirma que a conceitualização constitui o terceiro nível da tomada de consciência das ações:

> [...] no primeiro nível, o pensamento não alcança senão os resultados exteriores da ação, sendo esta imediatamente adaptada ou resultado de vacilações (por falta de direção conceitual); no segundo nível a consciência coincide com o desenvolvimento das ações em suas manipulações materiais sucessivas, mas podem ser, em parte, dirigidas pelos progressos de conceitualização; por fim, no terceiro nível, o pensamento remonta desde as manipulações até suas coordenações necessárias (PIAGET, 1984, p. 62).

De acordo com Martins (2007, p. 49), "o desenvolvimento da generalização construtiva se dá por um processo de equilíbrio entre sucessivas diferenciações e integrações, ocorrendo, em todos os momentos, algum grau de generalização. A continuidade desse processo se dá por desequilíbrios e reequilibrações".

Becker (2006), citado por Martins (2007, p. 47), mostra um esboço (figura 2.1) do processo de generalização, em que a coordenação do sujeito sobre suas ações transforma os esquemas em conceitos, ampliando a estrutura que lhe dá sustentação.

Figura 2.1: Processo de generalização



Fonte: Becker, 2006 *apud* Martins, 2007, p. 47.

Ou seja, quando o sujeito generaliza, ele amplia possibilidades de construir novas totalidades no processo de aprendizagem e não apenas memorização de conteúdo (*Ibid*., p. 48).

Tendo em vista que o objetivo principal dessa dissertação é investigar a generalização da função afim mobilizada por alunos do 5° e 9° anos do Ensino Fundamental, a teoria piagetiana, mais precisamente, seus estudos sobre o processo de generalização, contribuiu para o desenvolvimento dessa investigação, pois ofereceu respaldos teóricos na orientação das análises das estratégias desenvolvidas pelos alunos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo discorremos sobre o problema de pesquisa, o objetivo geral e os específicos, assim como as duas pesquisas selecionadas para as meta-análises, de Pavan (2010) e Calado (2020), apresentando o contexto dessas pesquisas, os sujeitos investigados e as atividades que propusemos a analisar de acordo com nosso objetivo.

3.1 Problema de Pesquisa

Considerando que a generalização é um dos conceitos mais complexos em relação ao ensino e aprendizagem de função (MANZAN, 2014; PINTO, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020) e que a linguagem algébrica é imprescindível para a construção desse conceito (TINOCO, 2011; NOGUEIRA, 2014), nossa pesquisa buscou responder o seguinte problema: quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas em pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?

A fim de respondermos o problema de pesquisa, elaboramos os seguintes objetivos, geral e específicos, descritos a seguir.

3.2 Objetivo Geral

Analisar o processo de generalização de função afim em pesquisas já realizadas pelo grupo GEPeDiMa, sob a perspectiva da Epistemologia e Psicologia Genéticas estabelecidas por Jean Piaget, particularmente em seus estudos descritos no livro: *Investigaciones sobre la generalización*.

3.2.1 Objetivos Específicos

- ✓ Analisar produções já realizadas sobre função afim, no tocante à generalização, do grupo GEPeDiMa;

- ✓ Identificar se as ideias mobilizadas pelos alunos na construção da generalização da função afim são feitas de maneira indutiva ou construtiva.

3.3 Pesquisas Selecionadas Para Análises

Essa investigação possui caráter qualitativo e cunho interpretativo em que se deseja compreender os resultados encontrados nas pesquisas desenvolvidas pelo grupo GEPeDiMa no tocante à generalização sob a perspectiva da Epistemologia e Psicologia Genética estabelecidas por Jean Piaget, particularmente em seus estudos descritos no livro: *Investigaciones sobre la generalización* (1984).

Os dados cuja meta-análise realizamos nesta investigação foram produzidos mediante a aplicação de sequências didáticas constituídas de tarefas envolvendo o conceito de função afim, particularmente a ideia base de generalização, aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental I e II, mais precisamente, estudantes do 5° e 9° ano.

Para alcançar o objetivo dessa pesquisa, realizou-se uma meta-análise dos dados já obtidos na pesquisa de Pavan (2010) que tem como título, *A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas*, e dos dados obtidos por Calado (2020), em investigação intitulada, *Invariantes Operatórios Relacionados à Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim*.

Segundo Bicudo (2014), meta-análise ou meta-síntese é uma investigação que vai além daquelas já realizadas, e, no caso de trabalhos qualitativos que são sínteses de interpretações de dados primários, a meta-análise efetua interpretação das interpretações das pesquisas selecionadas dessa análise. Ainda para a autora, a meta-análise "É uma investigação pautada em comparações e análises dos dados primários de pesquisas, tomadas como significativas em relação ao tema posto sob foco" (BICUDO, 2014, p. 9).

Nesse sentido, buscamos, no trabalho de Pavan (2010) e Calado (2020), trazer novas reflexões sobre o processo de generalização pesquisado por elas, mas agora sob outra perspectiva, a de Piaget, mais precisamente em seus estudos descritos no livro: *Investigaciones sobre la generalización* de 1984.

Em seu livro, Piaget, por meio do Método Clínico Piagetiano e valendo-se de materiais manipuláveis, investiga como os sujeitos chegam à generalização e qual generalização que esses sujeitos se encontram, uma vez que, para ele há dois tipos: a generalização indutiva e construtiva. E são essas duas formas de generalização que buscamos identificar nos dados produzidos pelas pesquisas de Pavan (2010) e Calado (2020), as quais estão descritas nas seções 3.4 e 3.5 respectivamente.

3.4 A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas

A pesquisa de Pavan (2010), fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, teve como objetivo investigar se tarefas envolvendo estruturas aditivas ou multiplicativas possibilitam a alunos de 4ª série, atualmente 5° ano, reconhecer e mobilizar as ideias bases de função, como, correspondência, variável, dependência, regularidade e generalização. Para isso, foram realizadas entrevistas individuais valendo-se das orientações do Método Clínico Piagetiano, pois, segundo Pavan (2010), era fundamental que a criança descrevesse o mais fiel possível os raciocínios utilizados para resolver as tarefas propostas, algo que apenas com observação e análise da produção escrita não seria possível. A pesquisa foi desenvolvida, em contraturno, com 10 crianças do 5° ano do Ensino Fundamental, com idades variando entre 9 e 10 anos de uma escola Municipal de Floresta- Paraná.

Para a entrevista, Pavan (2010) estipulou o prazo de 1 hora com cada criança, no entanto, dos dez alunos entrevistados, MIL, MAR e DIO precisaram de duas sessões, pois foram mais lentos na resolução das tarefas. A entrevista de IGO durou 1 hora e 25 minutos, mas foi escolha de a criança continuar para não precisar marcar outro dia. O único critério adotado pela pesquisadora para a participação na pesquisa, foi o “querer participar” do aluno, e “prometer” comparecer no horário e local estabelecido para a entrevista.

Pavan (2010) organizou em um quadro o nome atribuído às crianças e suas respectivas idades, como segue:

Figura 3.1: Quadro organizado por Pavan (2010) com o nome e as idades dos jeitos da pesquisa

Nome	Idade ANOS: MESES
MIL	9:5
LUA	9:5
MAR	9:5
KEM	9:6
ROB	9:7
BRU	9:10
DIO	9:10
RAF	10:1
DJH	10:2
IGO	10:6

Fonte:Pavan (2010).

Para a entrevista, a fim de orientar e direcionar as explicações para o objetivo da pesquisa, Pavan (2010, p. 34) utilizou um roteiro semiestruturado contento algumas questões pré-determinadas, a saber:

- Você entendeu o que o problema está perguntando?
- Como você pensou para resolver o problema? Explica-me para que eu possa entender como você pensou.
- Teve um amigo seu que resolveu o problema dessa outra forma. O que você acha? Por quê?
- Se você tivesse um amigo que não entendesse esse problema como você faria para explicar para ele?
- Como você chegou a este resultado?
- Será que tem alguma outra maneira de resolver o problema?
- Posso representar este problema por meio de desenhos ou de alguma outra maneira?
- Tem alguma conta que você aprendeu na escola e que possa representar o que você acabou de me explicar?
- Por que você fez uma conta de vezes?
- Que resposta você encontrou?

- Como você mostraria para um coleguinha que este resultado está certo?
- O que você achou mais difícil de fazer neste problema?

As situações-problema desenvolvidas pela pesquisadora foram organizadas em 5 baterias de atividades das quais a primeira é organizada em três situações-problemas e as outras 4 em duas situações-problema cada. Na primeira bateria, as situações-problema envolviam a ideia de correspondência; na segunda bateria as situações-problema tinham o objetivo de investigar a ideia de variável e se as crianças conseguiam generaliza-las; a terceira bateria de atividades teve por objetivo investigar se os sujeitos reconheciam a relação de dependência; a quarta, por sua vez, envolvia a ideia de regularidade; e por fim, a quinta bateria de atividades envolvendo proporcionalidade, objetivou investigar se as crianças reconheciam a variável generalizando as situações-problema propostas. Como resultados, Pavan (2010) comprovou que os alunos investigados reconheceram e mobilizaram, mesmo que de maneira intuitiva, as ideias base de função, e, que essas noções de função podem e devem ser trabalhadas desde o Ensino Fundamental I, para, futuramente, serem ampliadas.

Dado o exposto e considerando o objetivo da nossa pesquisa, selecionamos para as análises os dois problemas da segunda bateria de atividades, o problema 2 da terceira bateria, o problema 2 da quarta bateria, e os dois problemas da quinta bateria de atividades, posto que neles é possível a mobilização da ideia base de generalização.

No quadro 3.1 a seguir é mostrado todos os problemas analisados.

Quadro 3.1: Problemas propostos por Pavan (2010) analisados nesse trabalho

Problema 1 (segunda bateria de atividades) - João foi à feira e comprou 3 quilos de batatas para sua mãe. Se cada quilo de batata custa R$ 1,30 quanto João pagou pela compra? Se ele tivesse comprado 5 quilos quanto pagaria? Podemos calcular o custo para qualquer quantidade de batatas? Como?
Problema 2 (segunda bateria de atividades) - Em uma cidade, um trem foi planejado para que a distância de qualquer estação e a seguinte seja sempre 10 km. 

a) O que você pode dizer sobre a distância percorrida pelo trem:

- após 7 paradas?

- após 12 paradas?

b) É possível calcular para qualquer número de paradas? Como fazemos isso?

Problema 2 (terceira bateria de atividades) - Pedro chegou à cidade de São Paulo, para ir até a casa de seu primo ele chamou um taxi. O taxi cobra uma taxa fixa de R$ 4,00 mais R$ 1,20 por quilometro rodado.

a) Se a casa do primo de Pedro fica a 15 quilômetros de onde ele está, quanto ele pagará para o motorista?

Problema - 2 (quarta bateria de atividades) A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la: (Adaptado de Imenes, Jakubo e Lellis, 2002)

Vamos completar a tabela relacionando os pulos da mãe com o do filho:

	Mãe	Filho
Número de pulos	1	3
	2	
		9
	4	
	5	
		18

Figura 41 – Ilustração da segunda situação-problema da Quarta Bateria

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?

b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?

c) Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?

Problema 1 (quinta bateria de atividades) - Temos que o preço de 2 carrinhos da marca FORTE é 18 reais.

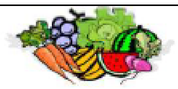
a) Se comprarmos 4 carrinhos quanto pagaremos?

b) Se comprarmos 6 quanto pagaremos?

c) Qual é o valor então de cada carrinho?

d) Podemos calcular o valor de quantos carrinhos quisermos? Como?

Problema 2 (quinta bateria de atividades) - Luzia compra frutas e verduras na feira. Hoje ela comprou 2 quilos. Veja na tabela quanto ela pagou. Ana comprou 3 quilos, escreva na tabela quanto ela pagou. Eduardo comprou quatro quilos. Escreva na tabela quanto ele pagou. (Adaptado de Nunes, 2001).

		
Luzia	2 quilos	8 reais
Ana	3 quilos	
Eduardo	4 quilos	

a) Se eu quiser comprar 6 quilos de frutas e verduras quanto pagarei?

b) E por 10 quilos, quanto pagarei?

c) Se gastei 32 reais na feira, qual é a quantidade de frutas e verduras que comprei?

d) Poderei calcular para qualquer quantidade de frutas e verduras? Como?

Fonte: Pavan (2010).

3.5 Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim

Sustentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, a pesquisa de Calado (2020) teve o objetivo de analisar invariantes operatórios, relacionados à generalização, mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mediante situações envolvendo função afim. A pesquisa contou com a participação de 32 estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental de um colégio estadual do interior do Paraná. Segundo Calado (2020), antes do desenvolvimento da pesquisa, a professora regente da turma afirmou já ter abordado o conteúdo de função presente no livro didático adotado pela escola, isto é, definição de função, domínio, imagem, lei de formação (generalização) e gráficos tanto para função afim quanto para a função quadrática, mas que os problemas trabalhados eram exercícios fechados, sem contextualização.

Para alcançar o objetivo da pesquisa, Calado elaborou uma sequência didática composta por sete tarefas contextualizadas e organizadas de acordo com o grau de dificuldade, ou seja, em cada atividade exigia um grau de complexidade mais elevado, como, atividades que exigiam mais cálculo, mais operações matemáticas na generalização, apresentação de tabelas, e interpretação gráfica (CALADO, 2020). A aplicação dessa sequência ocorreu durante as aulas de matemática, iniciando dia 29 de julho com encerramento no dia 15 de agosto, totalizando 12 horas/aula (*Ibid*., 2020).

Os alunos foram organizados em grupos (duplas ou trios) e, buscando preservar a identidade deles, Calado (2020) nomeou cada grupo com a letra G seguida de um número de identificação ficando, assim, nomeados de G1 a G13.

No decorrer do desenvolvimento da pesquisa, Calado (2020) recolhia as resoluções dos alunos ao fim de cada atividade para que não fizessem alterações em suas estratégias, e, recolhidos os registros escritos, conversava com a turma abordando as principais situações, principalmente a ideia de generalização.

Os resultados obtidos por Calado (2020) mostram que a sequência didática permitiu identificar, por meio das estratégias de resolução dos alunos, doze teoremas em ação implícitos em suas respostas, dos quais sete eram relacionados a conhecimentos verdadeiros e cinco a conhecimento equivocados. Dentre os conhecimentos equivocados, três foram relativos à generalização, e os demais relacionados a casos específicos da situação, mas que eram necessários para construir o processo generalizador (CALADO, 2020). A sequência didática desenvolvida com os alunos foi bastante pertinente, pois “[...] considerando que elas foram elaboradas do nível mais elementar para o mais complexo, notamos um avanço no conhecimento dos alunos, uma vez que na última atividade dez grupos, dentre os onze investigados, apresentaram resposta correta relativa à generalização (CALADO, p. 176, 2020).

Portanto, para nossa pesquisa, consideramos todas atividades da sequência didática elaborada por Calado (2020), uma vez que em todas elas são abordadas a noção de generalização.

No quadro 3.2 a seguir são apresentadas as sequências didáticas elaboradas por Calado (2020).

Quadro 3.2: Sequência didática elaborada por Calado (2020)

Atividade 1: Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$ \ 0{,}18$ cada um. a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães? b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães? c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Atividade 2 *(Adaptada de Tinoco (2002))* – No último sábado, Ana foi à padaria com apenas $R\$\ 2,00$ para comprar seus pães preferidos que custam R$ 0,18 cada um.

a) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco?
b) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco?
c) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar?
d) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana.
e) Escreva uma expressão algébrica que represente o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade possível qualquer de pães.

Atividade 3: A escola de línguas MultLingue oferece cursos de inglês, espanhol e francês. Para cursar qualquer uma dessas línguas, o aluno precisa pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00.

a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?
b) Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?
c) Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1230,00 com o curso de espanhol?
d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

Atividade 4 *(Adaptada de Tinoco (2002))* D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:

- as camisas são colocadas lado a lado;
- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador;

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.
b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.
c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessário para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

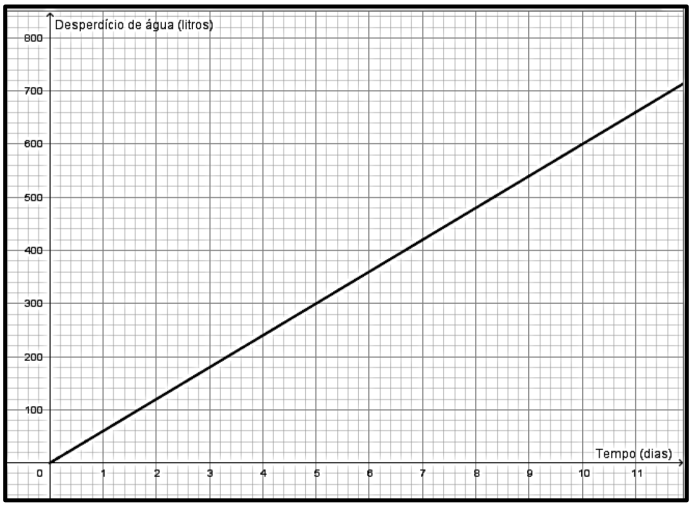
Atividade 5: Paulo é mecânico e, quando possível, realiza atendimento em domicílio. Sendo assim, a expressão algébrica que melhor representa o valor a ser pago pelos clientes de Paulo é: $v = 45h + 35$, em que h representa o número de horas trabalhadas de Paulo e v representa o valor a ser pago pelos clientes que o contratam.

Com base nas informações apresentadas, faça uma representação gráfica da situação e responda os itens a seguir.

a) Qual(is) a(s) variável(is) envolvida(s) na situação?
b) Suponha que Paulo tenha feito uma visita a um cliente que firmou o contrato, no entanto, no dia seguinte, desistiu do serviço, antes que Paulo começasse seu trabalho. Nesse caso, quanto o cliente terá que pagar para Paulo?
c) Considere agora que outro cliente tenha pagado o valor de R$ 215,00. Por quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando na casa desse cliente?

d) Escreva os passos para determinar o valor a ser pago por um cliente quando Paulo permanece uma quantidade qualquer de horas realizando um atendimento em domicílio.

Atividade 6 *(Adaptado ENEM (2010))* – Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira. Sabendo que y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, observe o gráfico a seguir e responda as questões seguintes.



a) De quanto será o desperdício se a torneira permanecer por 5 dias gotejando?
b) Se a torneira ficar por 7 dias gotejando, qual será o desperdício?
c) Sabendo que houve um desperdício de 840 litros, por quantos dias a torneira ficou gotejando?
d) Escreva uma expressão algébrica que representa o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando.
e) Utilizando a expressão do item anterior determine de quantos litros será o desperdício se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Compare o valor obtido com o resultado no item b. O que você pode concluir?

Utilizando a expressão do item d, determine por quantos dias a torneira ficou gotejando se houve um desperdício de 840 litros. Agora, compare o valor obtido com o resultado do item c. O que você pode concluir?

Atividade 7 *(Adaptada Martins, Rezende e Hermann (2019))* – Uma das maneiras de reduzir o consumo de energia elétrica foi a criação da tecnologia LED (sigla em inglês para diodo emissor de luz) que já está substituindo as lâmpadas fluorescentes. As lâmpadas LED são mais eficientes que as fluorescentes, produzem a mesma luminosidade com menor consumo de energia. No quadro abaixo relacionamos os preços e os consumos de duas lâmpadas equivalentes.

Lâmpada	Potência	Preço da lâmpada	Gasto mensal de energia
LED	11 Watts	R$ 12,00	R$ 1,10
FLUORESCENTE	22 Watts	R$ 8,00	R$ 2,20

Sabendo que Paula possui na sala de sua casa os dois tipos de lâmpadas e que elas são sempre ligadas ao mesmo tempo, responda as questões que seguem.

a) Ao final de dois meses, qual terá sido o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia)? Neste caso, para qual tipo lâmpadas Paula terá o menor gasto?
b) Para o caso de cinco meses de uso, para qual tipo de lâmpada o gasto de Paula será menor?
c) A vizinha de Paula comprou um determinado tipo de lâmpada e depois de cinco meses de uso gastou R$ 17,50 (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia). Neste caso, qual das lâmpadas foi a escolhida pela vizinha de Paula? Você considera que esta foi a melhor opção? Justifique sua resposta.
d) Suponha agora o caso de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade qualquer de meses, escreva uma expressão algébrica que determina o gasto total com a lâmpada (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia).
e) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores gastos com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia) dependendo do seu tempo de uso. A partir da representação gráfica, determine para quais meses o valor a ser gasto com cada lâmpada é menor.

Fonte: Calado (2020).

Portanto, são as situações-problema apresentadas no quadro 3.1 de Pavan (2010), e a sequência didática elaborada por Calado (2020) mostrada no quadro 3.2, que compõem as atividades analisadas nesse trabalho.

CAPÍULO 4

ANÁLISE DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Nas seções 4.1 e 4.2 a seguir, são realizadas as análises das situações-problemas e da sequência didática propostas por Pavan (2010) e Calado (2020), respectivamente, a fim de identificarmos as generalizações indutivas e/ou construtivas da função afim, baseados em Piaget (1984).

4.1 Análises das situações-problema propostas por Pavan (2010) envolvendo a ideia base de generalização

Nessa seção, discorremos sobre meta-análises realizadas nas situações-problemas desenvolvidas por Pavan (2010) buscando identificar se os alunos alcançaram a generalização construtiva estabelecida por Piaget (1984).

Generalização Indutiva e Construtiva do problema 1 de Pavan (2010) da segunda bateria de atividades

Para essa análise, consideramos a *situação-problema 1* da segunda bateria de atividades elaborada por Pavan (2010), como mostrado no quadro 4.1.

Quadro 4.1: Problema 1 da segunda bateria de atividades de Pavan (2010)

Problema 1 (Pavan 2010) - João foi à feira e comprou 3 quilos de batatas para sua mãe. Se cada quilo de batata custa R$ 1,30 quanto João pagou pela compra? Se ele tivesse comprado 5 quilos quanto pagaria? Podemos calcular o custo para qualquer quantidade de batatas? Como?

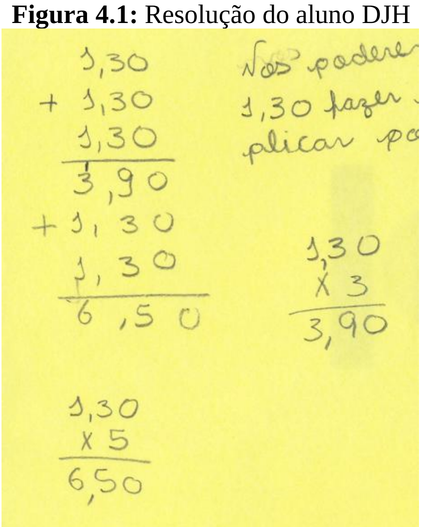
Fonte: Pavan (2010).

Nas duas primeiras perguntas do *Problema 1* os alunos de Pavan (2010) precisavam determinar quanto João gastou na compra de 3 e 5 quilos de batatas, respectivamente. Para esses itens, segundo a autora, os alunos não tiveram dificuldades na resolução. Apenas os alunos

MAR e IGO que anteciparam[1] a resposta, mas, ao serem solicitados que as explicassem, resolveram corretamente. Na resolução, metade dos alunos utilizaram o método da adição no primeiro momento, ou seja, para comprar 3 quilos de batatas fizeram: 1,30 + 1,30 + 1,30, e para 5 quilos somou, com a anterior, mais duas parcelas de 1,30. Ao serem questionados se teria outra forma de resolver, eles responderam que sim, e fizeram a multiplicação de 3x1,30 e 5x1,30. São os casos de MAR, LUA, DJH, KEM, BRU. Já os alunos ROB, RAF, IGO, DIO e MIL utilizaram somente o método da multiplicação.

Na figura 4.1 a seguir é mostrado uma resolução feita por um dos alunos que se utilizaram da soma resolver o problema.

Figura 4.1: Resolução do aluno DJH

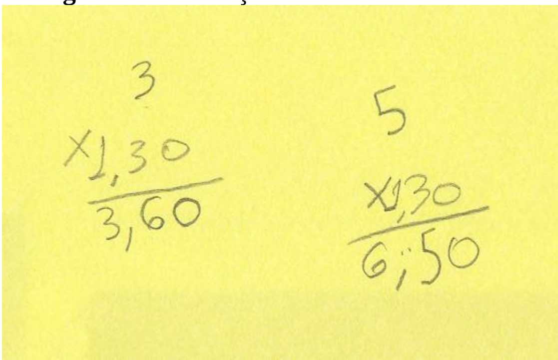


Fonte: Pavan (2010).

Na figura 4.2 a seguir é mostrado a resolução de um dos alunos que se valeram já no primeiro momento da multiplicação.

[1] "A antecipação de respostas sem maiores reflexões indica que as crianças não estão habituadas a ler com atenção os problemas e utilizam a "adivinhação" como estratégia de solução" (PAVAN, 2010, p. 72).

Figura 4.2 Resolução do aluno RAF



Fonte: Pavan (2010).

Na terceira pergunta do *problema 1* era questionado aos alunos se tinha uma maneira para calcular qualquer quantidade de batatas e qual seria essa maneira. Nesse caso, pedia a generalização do problema.

Os alunos MAR, LUA, DJH e BRU generalizaram por meio de exemplos, o que, segundo Piaget, caracteriza uma generalização indutiva. Nesse sentido os alunos ainda não tomaram consciência de suas ações, eles falam o que conseguem "enxergar" naquele momento. Para Piaget (1984), quando o sujeito se fundamenta em observações e generaliza todas as situações apresentadas por meio delas, constitui, então, a generalização do tipo indutiva. No quadro 4.2 a seguir é possível observar a generalização obtidas pelos alunos.

Quadro 4.2: Generalização indutiva realizadas pelos alunos

MAR	**Generalização:** "*Se for 10 quilos, 10 vezes 1,30, se for 20 quilos, 20 vezes 1,30".*
LUA	**Generalização:** *"Por eseplo 50 da 50x1,30".*
DJH	**Generalização:** *"Nós poderemos ex= 9 quilos por 1,30 fazer uma conta e multiplicar por 9".*
BRU	**Generalização:** "*30x1,30 e 20x1,30*".

Fonte:Baseada em Pavan (2010).

Um ponto importante a destacar é que todos os alunos, exceto KEM, que resolveram as duas primeiras perguntas do *problema 1* pelo método da adição, se encontram na generalização indutiva, ou seja, quando solicitados se podiam calcular para qualquer quantidade, valeram-se de exemplos para isso. Segundo Pavan (2010) esses alunos ainda não têm construído e consolidado o conceito de multiplicação. Fato esse que comprava o que Piaget afirma sobre a generalização construtiva:

> [...] quando a generalização se fundamenta em ou se refere às operações do sujeito ou seus produtos, sua natureza é nesse caso simultaneamente compreensiva e extensiva, e então conduz à produção de novas formas e por vezes novos conteúdo (cf. os números e suas múltiplas variedades) (PIAGET, 1984 p. 8).

Ou seja, a generalização construtiva requer um nível mais elevado do pensamento que permite ao sujeito construir estruturas novas a partir das iniciais.

Quanto aos alunos RAF e DIO, esses estão no nível intermediário que configura o progresso da generalização indutiva e a passagem aos princípios da generalização construtiva (PIAGET, 1984).

Como podemos observar nas respostas desses alunos descritas no quadro 4.3, o avanço da generalização construtiva se deve ao fato deles não se limitarem à leitura dos resultados (PIAGET, 1984), ou seja, não se valeram de exemplos para generalizar. No entanto, não conseguem explorar bem o conceito de multiplicação e se prendem ao conceito da adição para explicar suas razões.

Quadro 4.3: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva

RAF	**Generalização:** *"Multiplicando ou somando* (mais fácil a multiplicação), *o quilo de batatas com o dinheiro* (preço)".
DIO	**Generalização:** "*Também da para fazer de mais e é só pegar o quilo que você quer comprar e somar de vezes ou de mais*".

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Mesmo RAF afirmando que a multiplicação é mais fácil, ele ainda menciona a adição, assim como DIO, deixando para segundo plano a multiplicação. Para Pavan (2010), por mais que DIO tenha resolvido as questões anteriores valendo-se da multiplicação, "[...] ainda não é um conceito construído, mas apenas uma outra forma de registrar raciocínios aditivos" (PAVAN, 2010, p. 79).

"Os sujeitos desse nível tomam consciência de suas construções progressivas, mas ainda não destacam o esquema generalizador como esquema de coordenação necessária" (PIAGET, 1984, p. 51).

Com relação aos alunos ROB, IGO e KEM, esses chegaram à generalização sem a utilização de exemplos, e sem a utilização do algoritmo da adição para isso, mostrando que, para qualquer quantidade de batatas compradas, o valor será 1,30 vezes essa quantidade. Os alunos fundamentaram seus raciocínios no próprio esquema de construção, destacando deles as coordenações necessárias para generalizar (PIAGET, 1984). Com isso, podemos dizer que chegaram à generalização construtiva, pois ocorreu uma transposição da construção material a uma construção conceitual (PIAGET, 1984). No quadro 4.4 é apresentado as respostas dos alunos.

Quadro 4.4: Generalização construtiva

ROB	**Generalização:** "*Fazendo 1,30 x* (vezes) *o tanto de quilo que você queria comprar*".
IGO	**Generalização:** *"Pode calcula para qualquer quantidade de batata fazendo conta de vezes 1,30".*
KEM	**Generalização:** *"Sim, sempre vai ser a quantidade de batatas vezes 1,30"*

Fonte:Baseado em Pavan (2010).

Com relação à aluna KEM, apesar de ter feito pelo algoritmo da adição as duas primeiras perguntas, ela não generalizou por meio de exemplo, isso porque, segundo Pavan (2010), "[...] a ideia de variável é bem clara, pois não necessitou de valores específicos, compreendendo que o que é variável aqui, é a quantidade de batatas, conforme fica explícito no registro escrito de sua generalização" (PAVAN, 2010, p. 78).

Já o aluno MIL não conseguiu apresentar nenhuma generalização para situação, ou mesmo tentou por meio de exemplos (PAVAN, 2010).

Assim como constatado por Pavan (2010), alguns alunos não conseguiram apresentar a situação de forma genérica, mas, mesmo utilizando exemplos particulares, indica que estão no caminho da generalização. Vale ressaltar que os sujeitos investigados por Pavan (2010) são alunos do 5° ano, o que significa que eles ainda não tiveram experiências com a álgebra, então a generalização foi expressa em linguagem natural.

Generalização Indutiva e Construtiva do problema 2 de Pavan (2010) da segunda bateria de atividades.

Para essa análise, consideramos a *problema 2* da segunda bateria de atividades elaborada por Pavan (2010), como mostrado no quadro 4.5.

Quadro 4.5: Problema 2 da segunda bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema 2 - Em uma cidade, um trem foi planejado para que a distância de qualquer estação e a seguinte seja sempre 10 km.

a) O que você pode dizer sobre a distância percorrida pelo trem:
- após 7 paradas?
- após 12 paradas?

b) É possível calcular para qualquer número de paradas? Como fazemos isso?

Fonte:Pavan (2010).

Em relação ao item a) os alunos não tiveram dificuldades na resolução (PAVAN 2010). Ainda segundo a mesma autora, as crianças MAR, ROB, RAF, KEM, e BRU, resolveram esse item por meio do algoritmo da multiplicação, isto é, para encontrar a distância percorrida pelo trem após 7 paradas, fizeram 7x10, e para 12 paradas, 12x10. Vale ressaltar que no problema 1 os alunos MAR, KEM e BRU valeram-se, a princípio, de somas de parcelas iguais para encontrar o resultado, ou seja, utilizaram a adição. Já nesse problema 2, eles utilizaram a multiplicação para encontrar os resultados. Além disso, a criança MAR não antecipou o resultado como no problema anterior.

As crianças LUA, DJH, IGO, DIO e MIL resolveram o item a) por meio da adição e contagem de 10 em 10. Questionados se havia outra maneira de resolver, apenas os alunos LUA, IGO e MIL responderam que podia ser feito a multiplicação. Os outros se mantiveram na soma.

No item b) os alunos eram questionados se poderiam calcular para qualquer quantidade de paradas, ou seja, nesse item pedia aos alunos a generalização do problema.

A generalização apresentada pelos alunos BRU, LUA, DJH e DIO, é do tipo indutiva, pois utilizaram exemplos específicos para generalizar, como podemos observar no quadro 4.6, quando a criança BRU afirma que: *"Se for 99 paradas, 99x10"*. Segundo Piaget (1984, p. 186), na generalização indutiva, as inferências, sejam elas corretas ou falsas "[...] se limitam a generalizar, de ‘alguns’ a ‘todos’, os fatos ou relações constatadas, ou seja, observações a título de conteúdos dessas constatações”.

Quadro 4.6: Generalização indutiva

BRU	**Generalização:** *“Se for 99 paradas, 99x10”*.
LUA	**Generalização:** *“Ele poderia fazer 10x30”.*
DJH	**Generalização:** *“Se for 14 paradas, 140 km, 120+20=140”*.
DIO	**Generalização:** *“Contando de 10 em 10 até o tanto de paradas que o trem deu”.*

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

É interessante notar que os alunos que generalizaram de forma indutiva resolveram o item a) pela soma das parcelas, isto é, de 10 em 10 (exceto BRU). Logo, podemos inferir que por esse motivo eles ainda não chegaram à generalização construtiva, pois, tal como é referido por Piaget (1984), a generalização construtiva consiste em novas organizações estruturais.

Os sujeitos MAR e KEM estão nível intermediário, isto é, o progresso da generalização indutiva e a passagem aos princípios da generalização construtiva. Como podemos observar no quadro 4.7 a seguir, a criança MAR consegue apresentar uma forma mais genérica para a situação ao afirmar: *“Sim, por vezes cada parada que ele dava, 10 km”.* No entanto, acredita ser necessário trazer à tona um exemplo específico para isso, quando diz: *“Exemplo 20x10”*. Inferimos que MAR está a caminho da generalização construtiva, pois, no problema anterior, generalizou de maneira indutiva, já nesse problema, consegue fundamentar seus pensamentos em esquemas que estão começando a ser construídos, ou seja, MAR está tomando consciência de seus resultados e, num processo de abstração refletida, estruturando seus esquemas.

A criança KEM, nesse item b), afirma que é possível calcular para qualquer quantidade de parada, mas não deixa explícito qual conta pode ser feita para isso. Quando diz: “*mas também apenas 10 km*”, entendemos que KEM se refere ao algoritmo da adição, contando de 10 em 10. É interessante notar que no problema anterior KEM alcançou a generalização construtiva, já nesse problema 2 não podemos concluir isso.

Quadro 4.7: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva

MAR	**Generalização:** *“Sim, por vezes cada parada que ele dava, 10 km”. “Exemplo 20x10”*.

KEM	**Generalização:** *"Pode, sempre quantas paradas quiser mas também apenas 10 km"*.

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

De acordo com Piaget (1984, p. 50) tem-se um paradoxo, pois há momentos em que os sujeitos alcançam um princípio de generalização construtiva, já em outros casos, se limitam a generalizações indutivas. Mas isso pode ser facilmente explicado pelas leis da abstração e a tomada de consciência, como afirma o autor. Para Piaget (1984) é necessário distinguir três níveis incluindo as transições entre eles, a saber:

> Primeiro, saindo da periferia (a tomada de consciência procede precisamente da periferia ao centro), se tem os resultados exteriores da ação que podem ser conhecidos pelo sujeito sem que entenda como tenha alcançado. [...] Em segundo lugar, a ação ocorre em seu desenvolvimento material e o fato de tomar conhecimento ainda está situado, como no caso de resultados externos, no nível da abstração empírica (referente a deslocamentos, as manipulações como tais, ...). E por último, tem a compreensão do mecanismo interno da ação, ou seja, de suas coordenações necessárias (origem das operações lógico-matemáticas) e a tomada de consciência dessa lógica praxeológica se deve então à abstração refletida (PIAGET, 1984, p. 51).

Quanto aos alunos ROB, RAF e IGO, eles apresentaram de forma genérica a situação sem recorrerem à exemplos específicos, configurando, assim, a generalização construtiva, uma vez que esses sujeitos fundamentam seus raciocínios no próprio esquema de construção extraindo deles as coordenações necessárias, conforme mostrado no quadro 4.8 (PIAGET, 1984).

Quadro 4.8: Generalização construtiva

ROB	**Generalização:** *"Fazendo os 10 km vezes o tanto de parada"*.
RAF	**Generalização:** *"Sim, multiplicando os km com as paradas"*.
IGO	**Generalização:** *"É possível calcular qualquer número paradas usano 10 km multiplicano"*.

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Já o aluno MIL, assim como no problema anterior, não apresentou nenhum tipo de generalização.

Generalização Indutiva e Construtiva do problema 2 de Pavan (2010) da terceira bateria de atividades.

Analisamos o *problema 2* da terceira bateria de atividades proposta por Pavan (2010). Mesmo o problema não pedindo a generalização, como mostrado no quadro 4.9, Pavan (2010) questiona aos alunos se "Pedro poderia calcular o valor a ser pago pela corrida para qualquer quantidade de quilômetros" (PAVAN, 2010, p. 94), por esse motivo o analisamos.

Quadro 4.9: Problema 2 da terceira bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema 2 - Pedro chegou à cidade de São Paulo, para ir até a casa de seu primo ele chamou um taxi. O taxi cobra uma taxa fixa de R$ 4,00 mais R$ 1,20 por quilometro rodado. a) Se a casa do primo de Pedro fica a 15 quilômetros de onde ele está, quanto ele pagará para o motorista? b) E se Pedro desejar ir ao shopping que fica a 12 quilômetros quanto pagará para o motorista?

Fonte: Pavan (2010).

Segundo Pavan (2010), todos os alunos utilizaram o algoritmo da multiplicação para resolver os itens a) e b), ou seja, para saber quanto Pedro pagará ao percorrer 15 km, fizeram 15x1,20 e resultado somaram com 4 reais. Do mesmo modo, para calcular o valor que Pedro pagará por uma corrida de 12 km, fizeram 12x1,20 e somaram com esse resultado 4 reais.

De acordo com essa evolução do pensamento, a multiplicação começa a se consolidar. Como esse problema já consta da terceira bateria, é possível inferir que a implementação das tarefas presentes no instrumento contribuiu para a aprendizagem.

No tocante ao questionamento se Pedro poderia calcular o valor para qualquer quantidade de quilômetros, podemos observar nas respostas dos alunos DJH, MAR, DIO, BRU, MIL e LUA, no quadro 4.10, que apresentam a generalização de forma indutiva recorrendo a valores específico para tal.

Quadro 4.10: Generalização indutiva

DJH	**Generalização:** *"Ele pode, se for 19 km, faz 19x1,20 mais 4 reais que é da taxa fixa".*
MAR	**Generalização:** *"Se for 14 km, 14x1,20= 16,80 16,80+4,00=20,80".*

DIO	**Generalização:** *"Ele por exemplo se fosse andar 5 quilômetros, ia fazer 1,20 a taxa de quilômetro rodado vezes 5 mais o resultado que deu mais os 4 reais"*.
BRU	**Generalização:** Primeiro deu um exemplo: *"se for 89 km, faz 89x1,20=106,80+4,00=110,80"*. Depois de questionada novamente respondeu: *"pegaria qualquer distância que ia e daí ia vezes* (explicou depois que era o valor que ia cobrar) *mais* (explicou que era mais a taxa fixa) *o valor que ia dá"*.
MIL	**Generalização:** *"Acho que sim, se ele fosse numa sorveteria que ficava a 19 km ele ia pega 19x1,20 e ia paga os quilômetros e com o outro ele ia paga mais o fixo"*.
LUA	**Generalização:** *"Se for 13 km, 18,40+1,20=19,60 19,60+4,00=23,60"*. (recorrendo à resposta de 12 km do item b) sem perceber que na resposta 18,40 já havia calculado 4,00).

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Vale trazer à atenção que essa é a primeira vez que MIL generaliza, além disso é nesta terceira bateria de atividades que MIL utiliza a multiplicação para resolver os problemas propostos. Assim, podemos inferir que MIL está no progresso de abstração empírica para abstração reflexionante, assimilando o conteúdo e tomando consciência de suas ações. Segundo Piaget a abstração reflexionante se dá pelas inferências que o sujeito extrai de suas ações e coordenações sobre eles (PIAGET, 1984, p. 7).

Não identificamos nessa situação problema nenhuma resposta dos alunos que se enquadram no nível intermediário.

Quanto aos alunos RAF, ROB, IGO e KEM conseguem generalizar de forma construtiva (quadro 4.11), pois apresentam a generalização de forma genérica, sem se limitarem a exemplos. Esses alunos já têm construído o conceito de multiplicação e a noção de variável, alguns desde o primeiro problema que pedia a generalização, como, RAF e ROB, outros construíram no decorrer das atividades, como, IGO e KEM.

Quadro 4.11: Generalização construtiva

RAF	**Generalização:** *"Pegaria o quilômetro e multiplicaria por 1,20 e somaria os 4 reais"*.
ROB	**Generalização:** "*Os 1,20 mais* (oralmente ele falou vezes) *o quilômetro que ele quiser mais a taxa fixa"*.

IGO	**Generalização:** *“Pode, faria conta de vezes depois mais 4 reais”*.
KEM	**Generalização:** *“Ele pode pegar quantos quilômetros quiser vezes 1,20 e mais 4,00 reais”.*

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Segundo Piaget (1984, p. 201), conforme o sujeito toma consciência das coordenações de suas ações, “[...] se torna capaz de construir novas formas, seja por meio das interpretações de conteúdos exteriores, ou engendrando, graças a eles, novos conteúdos (número, etc.), o que caracteriza a generalização construtiva em suas diversas variedades”.

Generalização Indutiva e Construtiva do problema 2 de Pavan (2010) da quarta bateria de atividades.

O problema analisado refere-se ao *problema 2* da quarta bateria de atividades, como mostrado no quadro 4.12 a seguir. Para esse problema, Pavan (2010) traz uma tabela a fim de possibilitar uma melhor visualização da regularidade presente na situação.

Quadro 4.12: Problema 2 da quarta bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema - 2 A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la: (Adaptado de Imenes, Jakubo e Lellis, 2002)

Vamos completar a tabela relacionando os pulos da mãe com o do filho:

	Mãe	Filho
Número de pulos	1	3
	2	
		9
	4	
	5	
		18

Tabela 9: Segunda situação-problema da Quarta Bateria

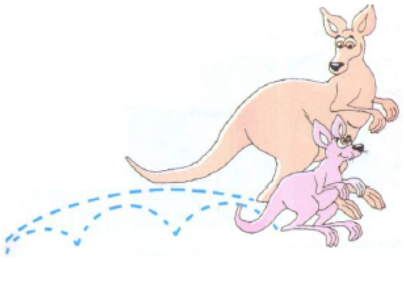


Figura 41 – Ilustração da segunda situação-problema da Quarta Bateria

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?

b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?

c) Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?

Fonte: Pavan (2010).

Para completar a tabela Pavan (2010) afirma que os alunos LUA, BRU e KEM identificaram a regularidade fazendo a contagem de 3 em 3. Questionados se haveria outra maneira de resolver, responderam que poderia utilizar a tabuada do 3. Quanto aos alunos MAR, ROB, RAF, DJH, IGO, DIO e MIL, identificaram a regularidade na tabela e a completaram por meio da multiplicação.

Segundo Pavan (2010), no item a) todos os alunos, para calcular quantos pulos o filho daria se a mãe tivesse dado 26 pulos, utilizaram o algoritmo da multiplicação fazendo *26x3=78* pulos. Do mesmo modo, para o item b) todos os alunos utilizaram a divisão para encontrar a quantidade de pulos que a mãe deu sabendo que o filho havia dado 222 pulos, isto é, fizeram *222/3=78* pulos.

Mesmo LUA e BRU terem completado a tabela valendo-se da contagem de 3 em 3, para o item a) e b) utilizaram a multiplicação, assim, Pavan (2010) afirma que LUA e BRU ainda não consolidaram o conceito de multiplicação, mas já estão percebendo a equivalência entre esta e a adição.

Com relação ao item c) quando questionados se era possível calcular qualquer número de pulos do filho e por quê, somente os alunos LUA e BRU apresentaram a generalização por meio de exemplos. LUA responde: *"Porque qualquer pulo que a mae da pode calcula, exemplo 200x3"*, e BRU afirma: *"Sim, somando por exemplo 97x3=291"*. As respostas apresentadas pelos alunos limitaram-se à generalização indutiva, pois se detiveram a exemplos concretos para tal. Assim como nas situações anteriores, LUA e BRU se valeram, a princípio, do algoritmo da adição, ou seja, a contagem de 3 em 3. A adição já está conceitualmente consolidada enquanto operação, portanto, possibilita avançar, a caminho da generalização, o que não acontece ainda com a multiplicação. A adição, para esses alunos já se constituiu em abstrações, ou seja, não importa o que se está somando, o procedimento é o mesmo. Se já conseguem abstrair o objeto, já conseguem sintetizar essas abstrações e, assim, caminham para a generalização.

Quanto aos alunos MAR, DJH e IGO, acreditamos que eles estejam no nível intermediário da generalização. Quando MAR e IGO afirmam que pode ser calculado pela *"tabuada do três"*, ou mesmo DJH, ao dizer que para ser calculado tem que fazer "*em 3 vezes, por que na tabela estava em 3 vezes"*, inferimos que eles não tomaram consciência por completo de seus esquemas generalizadores apoiando suas explicações na tabuada do três ou na tabela anteriormente completada, como afirma DJH. Mesmo não se limitando a exemplos específicos não chegaram à generalização construtiva. Como afirma Piaget (1984, p. 51) esses alunos tomaram parcialmente consciência de suas construções, mas ainda não destacam o esquema generalizador como esquema de coordenações necessárias. No quadro 4.13 a seguir é mostrado as generalizações apresentadas pelos alunos.

Quadro 4.13: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva

MAR	**Generalização:** *"Calculando pela tabuada do 3"*.
DJH	**Generalização:** *"Em 3 x* (a criança explicou que o x representava vezes), *por que na tabela estava em 3 x"*.
IGO	**Generalização:** *"Usano a tabuada do três"*.

Fonte: baseado em Pavan (2010).

Os alunos KEM, ROB, RAF, DIO e MIL apresentaram capacidade de generalizar desprendendo-se de exemplos, da tabela completada anteriormente, e da tabuada do três, demostrando, assim, a generalização construtiva.
No quadro 4.14 a seguir podemos observar as respostas dos alunos quanto à generalização.

Quadro 4.14: Generalização construtiva

KEM	**Generalização:** *"Sim, podemos colocar quantos passo quiser mas sempre colocando os pulos da mãe vezes 3"*.
ROB	**Generalização:** *"Sim. Porque se a mãe dar 3 pulos o filho terá que fazer 3 vezes mais"*.
RAF	**Generalização:** *"Eu faria o tanto de pulos que a mãe deu com os 3 pulos do filho, multiplicava"*.
DIO	**Generalização:** *"Sim, fazendo a conta da mãe fazendo de vezes 3"*.
MIL	**Generalização:** *"Sim, fazendo o mesmo número de pulos da mãe vezes três"*.

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Em conformidade com as características desse nível de generalização Piaget (1984, p. 193) afirma que

> Na medida em que se constrói o novo a partir do conhecido (e não reencontrando o conhecido nos objetos novos, como nos passos indutivos), a generalização construtiva procede naturalmente através de diferenciações e integrações, já que as novidades não se sobrepõem simplesmente a quem as procede, mas que se derivam em partes.

Vale destacar que houve um progresso expressivo do aluno MIL quanto à sua generalização, pois nos dois primeiros problemas analisados nesse texto, MIL não apresentou nenhuma generalização; no terceiro problema generalizou de forma indutiva; já nesse, chegou à generalização construtiva.

Generalização Indutiva e Construtiva do problema 1 de Pavan (2010) da quinta bateria de atividades.

No quadro 4.15 a seguir apresentamos o *problema 1* da quinta bateria de atividades analisada nessa seção.

Quadro 4.15: Problema 1 da quinta bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema 1 - Temos que o preço de 2 carrinhos da marca FORTE é 18 reais. a) Se comprarmos 4 carrinhos quanto pagaremos? b) Se comprarmos 6 quanto pagaremos? c) Qual é o valor então de cada carrinho? d) Podemos calcular o valor de quantos carrinhos quisermos? Como?

Fonte: Pavan (2010).

Em relação a esse problema, segundo Pavan (2010), as crianças MIL e MAR não conseguiram encontrar o resultado correto em nenhuma das situações, por consequência, não conseguiram identificar as variáveis e nem generalizar.

Para encontrar o valor de 4 carrinhos, MIL fez *18x4=72*, e para 6 carrinhos fez *18x6=108*. Mesmo Pavan (2010) pedindo para que lesse o problema novamente e ressaltando que o valor de 2 carrinhos eram 18 reais, MIL não percebeu o erro.

MAR, no item a), para encontrar o valor de 4 carrinhos respondeu 22 reais, questionada se não achava estranho que dois carrinhos custassem 18 reais e que quatro carrinhos 22 reais, pensou um pouco e fez a divisão de 18 divido por 4 em que resultou 4,50. Pavan (2010) a questionou novamente se não achava estranho que um carrinho custasse 4,50 sendo que dois eram 18 reais. Então formulou *18+18+18+18* para encontrar o valor de quatro carrinhos. MAR questionada novamente sobre o valor de cada carrinho, respondeu 18 reais. Pavan (2010)

Explicou-lhe novamente que 18 reais era o valor de dois carrinhos, e MAR efetuou então *18-2=16*.

Segundo Pavan (2010), as crianças RAF, DJH, KEM e ROB no item a) responderam de imediato *4x18* para calcular o valor de quatro carrinhos. Ao pedir que explicassem sobre como tinham pensando, eles refletiram e encontraram o valor unitário do carrinho fazendo *18/2=9*. Assim, continuaram a resolução por meio do valor unitário. No item a) fizeram *4x9=36*, e no item b) fizeram *6x9=54*.

Tal como é referido por Pavan (2010), os alunos LUA, IGO e DIO resolveram o item a) pelo algoritmo da adição fazendo *18+18=36* para encontrar o valor de quatro carrinhos explicando que *"18 é dois carrinhos e o outro 18 é de mais 2 carrinhos"*. Para o item b) apenas os alunos LUA e IGO utilizaram a adição *36+18=54* para encontrar o valor de 6 carrinhos, justificando que *"36 era o valor de 4 carrinhos e 18 o valor de 2 carrinhos"*. O aluno DIO no item b) para encontrar o valor de 6 carrinhos dividiu 18 por 2 na calculadora e respondeu que era 9 reais, depois realizou a conta 6x9=54. Pavan (2010) questionando os alunos LUA e IGO qual seria o valor de cada carrinho, LUA respondeu que era 9, pois 18 dividido por 2 é igual a 9. Já IGO disse que era 9 reais, pois 9+9 é 18.

Já a criança BRU, no item a), utilizou o algoritmo da multiplicação fazendo 18x2=36, e explicou que *"como dois carrinhos custava 18 reais então 4 carrinhos é 2 duas vezes dois carrinhos"*. E para encontrar o valor de 6 carrinhos fez 9x6=54 encontrando o valor unitário de cada carrinho (PAVAN, 2010).

No tocante ao item d), em que pedia se era possível calcular o valor para qualquer quantidade de carrinho, isto é, a generalização do problema, as crianças LUA e IGO valeram-se de exemplos para generalizar, configurando, assim, a generalização indutiva. Inferimos que LUA ainda não conseguiu progredir em suas generalizações, pois não consolidou o conceito de multiplicação, ou seja, não conseguiu engendrar novas organizações estruturais.

IGO, por sua vez, em situações anteriores conseguiu chegar à generalização construtiva, mas por ter recorrido à adição nesse problema, prendeu-se a ela para generalizar. IGO nessa situação não destacou o esquema generalizador como esquema de coordenações necessárias (PIAGET, 1984). E ainda, segundo Piaget (1984), não há nada contraditório nessas reações, "Portanto, só se tem, a partir dessas observações, corretas ou não, generalizações indutivas, por falta de abstração refletida e por falta de tomada de consciência do mecanismo coordenador interno que permitiu a realização das ações" (PAIGET, 1984, p. 51).

Quadro 4.16: Generalização Indutiva

LUA	**Generalização:** *"Se for 7 carrinhos então 54+9=63* (54 é o resultado de 6 carrinhos e o 9 é o valor de cada carrinho), *ou ainda se for 18 carrinhos pode fazer 18+18+18+18+18+18+18+18+18"*.
IGO	**Generalização:** "*Nos podemos calcular qualquer números de carrinho usano a conta de mais"*.

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

A criança BRU, no item d), respondeu: *"Sim, se for 5 carrinhos 5x9,00=45,00, nós fasemo 9 vezes a quantidade que quisermos".* Em vista disso, inferimos que ela ainda se encontra no nível intermediário progredindo quanto à generalização indutiva e apresentando princípios da generalização construtiva. Apesar de apresentar de forma genérica a situação ao dizer *"fasemo 9 vezes a quantidade que quisermos"* mostrando indícios de generalização construtiva, BRU recorre a um exemplo específico ao dizer *"sim, se for 5 carrinhos 5x9,00=45,00".* Desse modo não houve abstração refletida por parte de BRU, não compreendeu o mecanismo interno da ação, ou seja, das coordenações necessárias (PIAGET, 1984).

No entanto, desde as primeiras investigações BRU saiu da generalização indutiva e seguiu para o nível intermediário, não regredindo para o indutivo. É possível identificar aqui o processo de generalização caminhando passo a passo.

Quanto aos alunos RAF, ROB, DJH, DIO e KEM, como podemos observar no quadro 4.17, eles apresentaram a situação de forma genérica sem a necessidade de recorrerem à exemplos específicos, configurando, assim, generalização construtiva.

É interessante mencionar o progresso do aluno DJH que, a princípio, generalizava de modo indutivo, passou pelo nível intermediário, e agora conseguiu generalizar de forma construtiva compreendo o mecanismo interno de suas ações e construindo o esquema generalizador.

Quadro 4.17: Generalização Construtiva

RAF	**Generalização:** *"Sim, multiplicando o tanto de carrinho com 9 reais".*
ROB	**Generalização:** *"Sim, os nove reais vezes o tanto de carrinho".*
DJH	**Generalização:** *"Uma conta de 9 vezes o tanto de carrinhos".*
DIO	**Generalização:** *"Sim, se for 5 carrinhos 5x9,00=45,00, nós fasemo 9 vezes a quantidade que quisermos".*

KEM	**Generalização:** *"Sim podemos comprar quantos carrinhos quisermos, mas sempre com 9 reais".*

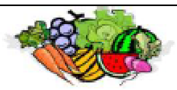
Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Generalização Indutiva e Construtiva do problema 2 de Pavan (2010) da quinta bateria de atividades.

Por fim, no quadro 4.18 a seguir é mostrado o *problema 2* da quinta bateria de atividades proposta por Pavan (2010) analisado nessa seção.

Quadro 4.18: Problema 2 da quinta bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema 2- Luzia compra frutas e verduras na feira. Hoje ela comprou 2 quilos. Veja na tabela quanto ela pagou. Ana comprou 3 quilos, escreva na tabela quanto ela pagou. Eduardo comprou quatro quilos. Escreva na tabela quanto ele pagou. (Adaptado de Nunes, 2001).

		
Luzia	2 quilos	8 reais
Ana	3 quilos	
Eduardo	4 quilos	

a) Se eu quiser comprar 6 quilos de frutas e verduras quanto pagarei? 115

b) E por 10 quilos, quanto pagarei?

c) Se gastei 32 reais na feira, qual é a quantidade de frutas e verduras que comprei?

d) Poderei calcular para qualquer quantidade de frutas e verduras? Como?

Fonte: Pavan (2010).

Para esse problema, segundo Pavan (2010), todos os alunos, com exceção de MAR, conseguiram resolver a situação. No entanto, a princípio, tiveram um pouco de hesitação quanto ao preço de 3 quilos de verduras e frutas, e com isso antecipavam uma resposta incorreta. Somente depois de instigados a refletir sobre o valor de 1 quilo é que percebiam a necessidade de encontrar esse valor para completarem a tabela. Com isso utilizaram o seguinte esquema de resolução: se dois quilos é 8 reais então 8 divido por 2 é 4 reais; *4+4=8* então cada quilo custava 4 reais (PAVAN, 2010).

Segundo Pavan (2010), após terem encontrado o valor de 1 quilo de frutas e verduras, as crianças perceberam a regularidade e completaram a tabela utilizando a tabuada do 4. No item a), para encontrar o valor de 6 quilos, fizeram *6x4=24*, e no item b), para encontrar o valor de 10 quilos, *10x4=40*.

Com relação ao item c), que pedia para encontrar a quantidade de quilos sabendo que foi gasto 32 reais, as crianças IGO, KEM, MIL, DIO e DJH, resolveram utilizando o seguinte esquema de resolução: *4 x ? = 32* (quatro vezes quanto é 32? encontrando como resultado 8. Já a criança BRU. ao saber quanto era o valor gasto em 10 quilos de frutas e verduras, aproveitou o resultado e subtraiu 32 reais, procedendo da seguinte maneira: *40-32=8* quilos. E os alunos, LUA, RAF e ROB utilizaram o algoritmo da divisão fazendo 32 divido por 4 igual a 8 (PAVAN, 2010).

No tocante ao item d), os alunos precisavam determinar se poderiam calcular o valor para qualquer quantidade de frutas e verdura. Nesse item pedia a generalização do problema.

Para esse item apenas MAR não generalizou, as outras crianças reconheceram, além da regularidade na tabela, que o valor a ser pago dependeria da quantidade de quilos que quisesse comprar (PAVAN, 2010). Segundo Pavan (2010), as crianças deixaram claro em suas generalizações a ideia de variável ao evidenciarem que o que está variando é a quantidade de frutas e verduras.

Inferimos que MIL e IGO apresentaram uma generalização indutiva, pois valeram-se de exemplos para generalizar quando MIL afirma, *"Sim eu faria contas de vezes e mais como 4x30 e 4x60"*, ou IGO ao dizer *"Podemos calcular para qualquer quantidade somando quatro em quatro"*. Nesse caso, MIL e IGO não tomaram consciência do esquema necessário para generalizar, limitando-se a exemplos e fundamentando suas generalizações por meio de suas observações. Em conformidade com esse nível, Piaget (1984, p. 41) afirma que "De maneira geral, o critério da generalização indutiva reside no fato de que se fundamenta nas descobertas ou somente no resultado das ações, enquanto que a construtiva generaliza as próprias ações ou operações, ampliando e complementando suas formas anteriores".

Quadro 4.19: Generalização Indutiva

MIL	**Generalização:** *"Sim eu faria contas de vezes e mais como 4x30 e 4x60"*.

IGO	**Generalização:** *"Podemos calcular para qualquer qualtidade somano quatro em quatro"*.

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Vale trazer à atenção que os alunos MIL e IGO, em momentos anteriores, chegaram à generalização construtiva, enquanto nessa situação problema generalizaram de forma indutiva. A esse respeito Piaget (1984) afirma que só se tem a generalização indutiva por falta de abstração refletida e por falta de tomada de consciência do mecanismo coordenador interno. Nessa direção, Bellini e Pavanello, citadas por Freire, afirmam que

> [...] os conhecimentos são produzidos por desequilíbrio na interação. O apreendido é o conhecimento reestruturado. É um processo de construção e reconstrução contínua, no qual não há ponto de partida e não há ponde de chegada final. A generalização pode ser indutiva em primeiro nível e, também, construída por outras formas de raciocinar, formas de inferir, formas de pensamento lógico (BELLINI; PAVANELLO, 2009 *apud* FREIRE 2017, p. 96).

Os alunos DIO, KEM, BRU, DJH, ROB, RAF e LUA, apresentaram a situação de forma genérica, desprendendo-se de exemplos específicos, configurando, assim, a generalização construtiva, como podemos observar no quadro 4.20 a seguir.

Quadro 4.20: Generalização Construtiva

DIO	**Generalização:** *"Sim, fazendo a conta de vez o quilo e o preço da verdura que é 4 reais"*.
KEM	**Generalização:** *"Sim, podemos pegar quantos quilos quiser mas o preço sempre será 4,00 reais cada quilo"*.
BRU	**Generalização:** *"Sim 4 x (vezes) algun tanto que a gente quiser"*.
DJH	**Generalização:** *"Sim na conta de 4 x"*. A criança explicou que o *x* era vezes 4.
ROB	**Generalização:** *"Sim. Fazendo os 4 reais vezes o quilo que ela quiser"*.
RAF	**Generalização:** *"Multiplicando os 4 reais com os quilos"*.
LUA	**Generalização:** *"Eu faria a quantidade x 4"*. A criança explicou que o *x* era vezes 4.

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

Em relação aos alunos ROB e RAF, desde o *problema 1*, que pedia a generalização da situação, já conseguiram generalizar sem trazer à tona exemplos específicos, isto é, apresentaram uma generalização construtiva, pois de acordo com Piaget (1984), esses alunos chegaram à abstração refletida das situações apresentadas compreendendo o mecanismo interno de suas ações e construindo o esquema generalizador necessário. Podemos inferir, também, que um fator importante que permitiu que isso ocorresse deu-se pelo fato de que esses alunos já na segunda bateria de atividades haviam consolidado o conceito de multiplicação, reiterando o que Piaget (1984) afirma, isto é, que a generalização construtiva requer um nível mais elevado do pensamento, permitindo ao sujeito construir estruturas novas a partir das iniciais.

Quanto aos alunos DIO, KEM e DJH, percebemos, que no decorrer das baterias de atividades, a generalização foi progredindo passo a passo, desde a indutiva, passando pelo intermediário até chegar na generalização construtiva.

Quanto aos alunos MIL, IGO, BRU e MAR, mesmo que em algumas situações não alcançaram a generalização construtiva, evoluíram rumo a esta no decorrer da implementação do instrumento de produção de dados. O mesmo aconteceu com LUA, que nesta última bateira de atividades alcançou a generalização construtiva.

Para Piaget (1984, p. 68) a “[...] evolução se deve naturalmente às relações estreitas que existem entre as transformações da generalização e as etapas, não só da tomada de consciência, mas, também, e sobre tudo, das formas de abstração que esta determina”.

4.2 Análises da sequência didática proposta por Calado (2020) a respeito da generalização da função afim

Nesta seção, discorremos sobre meta-análises realizadas nas atividades desenvolvidas por Calado (2020) com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, com o intuito de identificar se eles alcançaram a generalização construtiva defendida por Piaget (1984).

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 1 de Calado (2020).

Para essa análise, consideramos a *atividade1* elaborada por Calado (2020), como mostrado no quadro 4.21.

Quadro 4.21: Atividade 1 da sequência didática proposta por Calado (2020)

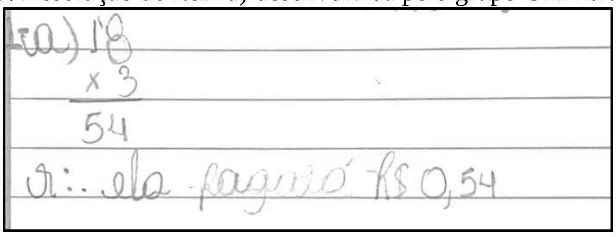
Atividade 1: Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$$ 0,18 cada um. a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães? b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães? c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Fonte: Calado (2020)

Nos itens a) e b) da *atividade 1*, os alunos precisavam determinar quanto Ana pagará na compra de 3 e 7 pães respectivamente, sabendo que cada pão custava R$ 0,18 centavos. Para isso, tinham que multiplicar o número de pães pelo valor unitário de cada pão. Essas duas perguntas, segundo Calado (2020), os alunos não tiveram dificuldades para resolver, uma vez que, para esse nível de ensino (9° ano), são considerados de fácil interpretação. Além disso, os alunos puderam contar com o auxílio da calculadora, evitando erros nas contas com números decimais (*Ibid*.)

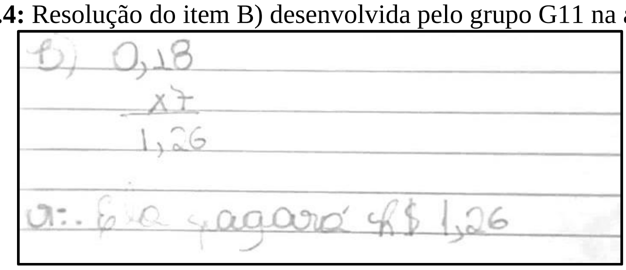
Dos treze grupos que resolveram essas duas atividades, doze utilizaram a mesma estratégia de resolução, sendo: $3x\ 0{,}18\ =\ 0{,}54$ e $7\ x\ 0{,}18\ =\ 1{,}26$ para a compra de 3 e 7 pães (CALADO, 2020). As figuras 4.3 e 4.4 a seguir apresentam a resolução do item a) e b) respectivamente, realizado pelo grupo G11.

Figura 4.3: Resolução do item a) desenvolvida pelo grupo G11 na atividade 1



Fonte: Calado (2020, p. 93).

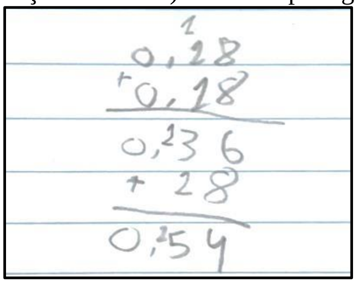
Figura 4.4: Resolução do item B) desenvolvida pelo grupo G11 na atividade 1



Fonte: Calado (2020, p 94).

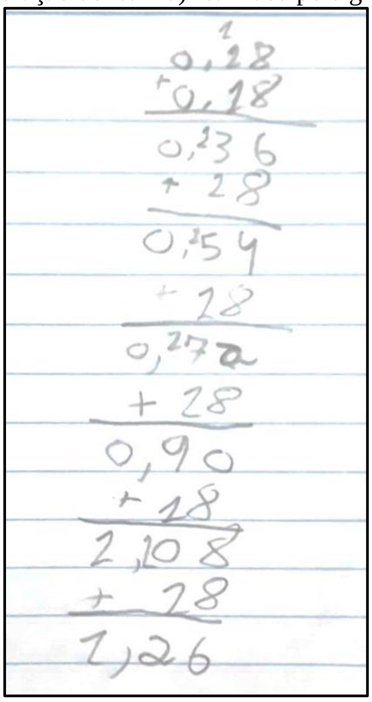
Nesses itens a) e b) da atividade 1, apenas o grupo G3 apresentou uma estratégia diferente dos demais, mas também de maneira correta. Eles fizeram a soma de parcelas iguais quantas vezes era a quantidade de pães pedidas, isto é, para encontrarem o valor que Ana pagará na compra de 3 pães, fizeram: $0{,}18 + 0{,}18 = 0{,}36$ e, a esse resultado, somavam mais $0{,}18$ ficando: $0{,}36 + 0{,}18 = 0{,}54$; e com valor para 7 pães realizaram a conta da mesma maneira, ou seja, somaram os dois primeiros valores, e ao resultado somavam mais quantas vezes era necessário, como é mostrado nas figuras 4.5 e 4.6 a seguir (CALADO, 2020).

Figura 4.5: Resolução do item a) realizada pelo grupo G3



Fonte: Calado (2020, p. 95).

Figura 4.6: Resolução do item b) realizada pelo grupo G3



Fonte: Calado (2020, p. 95).

De acordo com Calado (2020, p. 96) todos os grupos desenvolveram as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois, para calcularem o valor pago por Ana na compra dos pães, tiveram que estabelecer uma correspondência entre o valor unitário e a quantidade de pães, além disso, o resultado obtido (valor) depende da quantidade de pães que Ana deveria comprar, e a regularidade pode ser observada por meio do valor unitário de cada pão.

No item c) da *atividade 1* os alunos tinham que determinar uma expressão algébrica que representasse o valor pago por Ana se ela quisesse comprar qualquer quantidade de pães, ou seja, nesse item pedia a generalização da função.

Como previsto por Calado (2020), os alunos tiveram bastante dificuldade nesse item, por isso a pesquisadora realizou uma conversa com a turma questionando-os sobre o que seria uma expressão algébrica e explicando o que era pedido: "[...] *O x representa um número qualquer. Por exemplo, na expressão x+2, eu posso atribuir valores para o x. x pode valer 0, 2, 3 e assim por diante. Agora, vocês têm que pensar em uma expressão que represente essa situação da atividade* (CALADO, 2020, p. 97).

Feito essa discussão com os alunos, segundo Calado (2020), os grupos G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8 e G9 desenvolveram estratégias corretas para generalização, já os grupos G10, G11, G12 e G13, não. As generalizações apresentadas pelos nove grupos variaram entre $Y = 0{,}18x$ ou apenas $0{,}18x$ não mencionando a variável dependente (CALADO, 2020).

Para esse item, o grupo G11 apresentou a expressão $x + 0{,}18 = y$. No quadro 4.22 há um recorte feito por Calado (2020) mostrando o argumento que um dos integrantes utilizou para chegar na generalização.

Quadro 4.22: Diálogo entre os integrantes do grupo G11 na resolução do item c) da atividade 1

- *Olha, vai ser tipo x mais 0,18. Sendo que x é a quantidade de pães que a gente não sabe, mais o valor de cada pão. Como é uma soma de valores, então fica x+0,18* – aluno A. - *Ah tá* – aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 100)

No fragmento da conversa anteriormente descrita no quadro, constatamos que o aluno utiliza a adição para generalizar, e não verifica sua validade. Nesse caso, inferimos que, implicitamente, o sujeito faz somas de parcelas iguais (0,18 + 0,18....) para determinar o valor a pagar dependendo da quantidade de pães. No entanto, como foi pedida uma expressão algébrica – a qual possui letras e números- o aluno representou "qualquer quantidade de pães" pela letra *x*. Dessa forma, consideramos que esteja no nível intermediário da generalização, ou seja, o progresso da generalização indutiva à passagem da generalização construtiva, pois, apesar de apresentar uma lei de formação equivocada, valendo-se do algoritmo da soma, não se limitou em apresentar um valor específico representando qualquer quantidade por x.

Em relação ao grupo G5, este alcançou a generalização requisitada na atividade proposta. No quadro a seguir, é apresentado o trecho destacado por Calado (2020) da conversa entre os alunos desse grupo.

Quadro 4.4: Diálogo entre os integrantes do grupo G5 na resolução do item c) da atividade 1

- *Então, seria 18 vezes x. Na verdade, é 0,18 vezes x* –aluno A. - *Como assim?* – aluno B. - *O valor do pão é 0,18. Mas a gente não sabe quantos pães ela vai querer, então é x* – aluno A. - *Verdade* – aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 98)

Portanto, podemos inferir desse diálogo descrito anteriormente que, pelo menos um dos integrantes do grupo alcançou a generalização construtiva, uma vez que tomou consciência de suas ações, isto é, além de saber fazer, o sujeito foi capaz de explicar as coordenações necessárias para efetivação de sua ação, fato que, segundo Piaget (1984), é imprescindível na generalização construtiva.

> Na medida em que o sujeito toma consciência das coordenações de suas ações, se torna capaz de construir novas formas, seja por meio de interpretação de conteúdos exteriores, ou engendrando, graças a elas, novos conteúdos (números, etc.), o que caracteriza a generalização construtiva em suas diversas variedades (PIAGET, 1984, p. 201).

Em relação aos outros grupos, inferimos, também, que chegaram à generalização construtiva, uma vez que apresentaram como resposta a expressão algébrica que relaciona o valor a ser pago pelo pão em função da quantidade de pães desejada, isto é, desenvolveram a generalização sem se limitarem a exemplos específicos, atribuindo a essa “qualquer quantidade” a variável *x*.

O grupo G10 representou a lei de formação como $y = 1.x$; o grupo G12 representou por $2x^2 + 5x - 3$; e o grupo G13 representou por $x^2 + 0{,}18 = x$. Desse modo, acreditamos que os alunos não alcançaram uma abstração reflexionante em relação à dependência e à expressão que a representa, isto é, a noção de relacionar o valor a ser pago em função da quantidade de pães. Logo, como teriam que apresentar uma expressão algébrica, colocaram o que vieram à mente.

Por meio das análises realizadas por Calado (2020) dessa *atividade 1*, não identificamos nenhum grupo que se encontra no nível de generalização indutiva, ou seja, generalização que se limita apenas no observável.

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 2 proposta por Calado (2020).

No quadro 4.24 a seguir apresentamos a atividade 2 desenvolvida por Calado (2020) analisada nessa seção.

Quadro 4.24: Atividade 2 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 2 *(Adaptada de Tinoco (2002))* – No último sábado, Ana foi à padaria com apenas $R\$\ 2{,}00$ para comprar seus pães preferidos que custam R$ 0,18 cada um. a) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco? b) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco? c) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar? d) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana. e) Escreva uma expressão algébrica que represente o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade possível qualquer de pães.

Fonte: Calado (2020)

Nessa *atividade 2* para os itens a) e b), segundo Calado (2020), doze grupos apresentaram a mesma estratégia de resolução para determinar o troco, fazendo: $2 - 0{,}54 = 1{,}46$ na compra de 3 pães, e $2 - 1{,}26 = 0{,}74$ na compra de 7 pães. Apenas o grupo G3 apresentou uma estratégia incorreta nesses itens. Para a letra a), fizeram: $0{,}27 \div 2{,}00 = 1{,}35$, e para a letra b), $0{,}63 \div 2 = 0{,}35$. No diálogo apresentado no quadro a seguir, não foi identificada por Calado (2020) nenhuma estratégia de resolução correta.

Quadro 4.25: Diálogo entre os integrantes do grupo G2 na atividade 1 proposta por Calado (2020)

Diálogo entre integrantes do grupo 2 (G2) - fragmento - *3 pães deu 54 centavos agora divide por 2 reais. Dá 27 centavos de troco, e agora divide por 2 de novo. A Resposta dá 1 real e 35 centavos* – aluno A. - *Huuuun* – aluno B. - *Daí pra 7 pães dá 31 centavos de troco* – aluno A.

Fonte: Calado (2020, p. 102)

O item c) pedia a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar com R$2,00 sabendo que cada pão corresponde a R$ 0,18. Doze grupos apresentaram estratégias corretas por meio de tentativas, concluindo que poderia ser comprado 11 pães no máximo. Das estratégias utilizadas, os grupos G1, G4, G5, G8, G12 e G13, utilizaram o algoritmo da multiplicação, fazendo: $11\ x\ 0{,}18\ =\ 1{,}98$. O grupo G9, por sua vez, utilizou o algoritmo da divisão, calculando: $2\ \div\ 0{,}18\ =\ 11{,}111$ .... Já os grupos G3, G6, G7, G10 e G11, apenas afirmaram que era possível comprar 11 pães. E o grupo G2 não apresentou nenhuma estratégia de resolução (CALADO, 2020).

Para a letra d) dessa *atividade 2,* os grupos tinham que descrever com suas palavras qual seria o troco de Ana se ela comprasse qualquer quantidade de pães, isto é, a generalização da função em linguagem natural. Nesse item, Calado (2020) afirma que os alunos ficaram com muita dúvida, pois é algo que não estão acostumados a fazer. Desse modo, a pesquisadora conversou com a turma sobre o processo de generalização por meio da linhagem natural explicando que deveriam descrever os cálculos necessários para se obter o troco.

Inferimos que os grupos G1, G4, G7, G12 e G13 estão, nesse item, na generalização indutiva, pois valeram-se de exemplos com valores específicos para generalizar. Segundo Calado (2020, p. 107), os grupos G1, G4 e G13 consideraram, para "qualquer quantidade", a quantidade máxima possível de pães que poderia ser comprada e depois calcularam o troco, como, por exemplo, quando o grupo G1 responde: "*Ana foi na padaria com 2 reais e comprou 11 pães que custou 1,98 e sobrou 0,02 centavos de troco*". O grupo G12, não considerou a quantidade máxima de pães, mas sim valores aleatórios para exemplificar a situação, ao afirmarem: *"se ele tivesse 0,50 centavos ele poderia comparar 2 pães ele irá receber de troco 0,14 centavos de troco"* (CALADO, 2020, p. 107). Tal como é referido por Piaget (1984) estamos diante de um processo de generalização indutiva, uma vez que, "[...] o critério da generalização indutiva reside no fato de que se fundamenta nas constatações ou somente no resultado das ações" (p. 41). Já o grupo G7 apenas descreve que para encontrar o troco para qualquer quantidade de pães compradas *"[...] é necessário descobrir o valor de cada pão e dividir pelo valor inicial"* (*Ibid*., p 108), aqui, acreditamos que estamos diante de uma falsa generalização indutiva implicada por considerações não pertinentes (Piaget, 1984).

No diálogo que Calado (2020) apresenta da conversa entre os componentes do G11 (quadro 4.26 a seguir), inferimos que o *aluno A* se encontra na generalização indutiva, pois ao afirmar, *"Então escreve aí, fui ao mercado com 3 reais e comprei 3 balas de 40 centavos, aí coloca o troco",* limita-se a exemplo específico para generalizar e se fundamenta em observações. Já o *aluno B*, está no nível intermediário do processo generalizador, isto é, um progresso da generalização indutiva e a passagem aos princípios da generalização indutiva, pois ao dizer, *"Então na verdade o que eu tenho que fazer é subtrair o valor que eu tenho pelo valor que eu tenho que pagar"*, não se limita a valores específicos como numa generalização indutiva, mas também não consegue explicar com clareza a situação proposta, indicando que o aluno tomou parcialmente consciência de suas ações, configurando o nível intermediário.

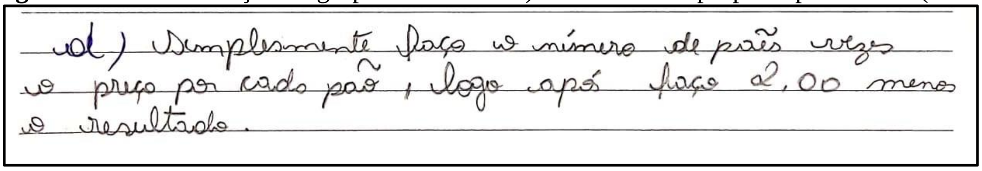
Quadro 4.26: Diálogo do grupo G11 do item d) da atividade 2 desenvolvida por Calado (2020)

- *Coloca assim, Fernanda foi ao mercado...* – aluno A. - *Pera aí, ela tinha 2 reais né?* – aluno B. - *Mas pode colocar outro preço, coloca 3 reais – aluno A.* - *É?* – aluno B. - *É, inventa um problema. Tipo assim, ela comprou balas de 40 centavos e ela tinha 3 balas, quanto ia vir de troco pra ela?* – aluno A. - *Vai dar 1 real e 20 centavos. Sobra 1,80* – aluno B. - *Então escreve aí, fui ao mercado com 3 reais e comprei 3 balas de 40 centavos, aí coloca o troco* – aluno A. - *Não. Então na verdade o que eu tenho que fazer é subtrair o valor que eu tenho pelo valor que eu tenho que pagar. Vou colocar isso* – aluno B

Fonte: Calado (2020, p. 106)

Quanto aos grupos G5, G6 e G9, descreveram que para determinar o troco é preciso multiplicar a quantidade de pães compradas pelo preço dele, e, em seguida, fazer R$2,00 menos o resultado da multiplicação feita anteriormente (CALADO, 2020). Na figura 4.7 a seguir, está a resposta do G6 para esse item.

Figura 4.7: Generalização do grupo G6 no item d) da atividade 2 proposta por Calado (2020)


d) Simplesmente faço o número de pães vezes o preço por cado pão, logo após faço 2,00 menos o resultado.

Fonte: Calado (2020, p. 105)

Desse modo, inferimos, da resposta do grupo G6, que houve a generalização construtiva, pois não se limitaram a exemplos e conseguiram fundamentar seus raciocínios no próprio esquema de construção, destacando deles as coordenações necessárias para generalizar (PIAGET, 1984). Assim como o grupo G6, os grupos G5 e G9 também alcançaram a generalização construtiva, pois apresentaram formas parecidas de generalização (CALADO, 2020).

Os grupos G2, G3, G8 e G10 não apresentaram nenhuma generalização da atividade (CALADO, 2020).

Para o item e) dessa *atividade 2* os alunos deveriam escrever uma expressão algébrica que representasse o troco de Ana para qualquer quantidade de pão comprada. Assim como no item anterior, nesse também é pedido a generalização da atividade, porém, por meio da expressão algébrica.

Os grupos G4 e G13 escolheram uma quantidade específica de pães para generalizar, assim sendo, não desenvolveram uma abstração reflexionante da situação proposta e por isso não conseguem pensar além de exemplos com valores específicos, representando somente o que podem "observar" no momento, configurando o que Piaget (1984) chama de generalização indutiva.

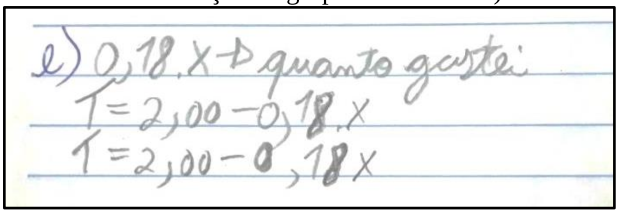
O grupo G7, segue na tentativa de utilizar o algoritmo da divisão para generalizar a atividade, fazendo $y = \frac{2-x}{0,18}$, o que, segundo Piaget (1984, p. 60), apresenta uma falsa generalização indutiva por considerações construtivas anteriores e não pertinentes para a situação proposta, mas que são tão fortes que, mesmo quando sugerindo a generalização (como na conversa feita por Calado (2020) e os alunos, explicando novamente o que era pedido na questão), não se provoca nenhuma compreensão.

Já os grupos G11 e G12 responderam por meio de uma expressão quadrática fazendo: $2x^2 + 5x - 3$, e o grupo G3 generalizou por $2xy$. Diante disso, os resultados obtidos por G11, G12 e G3, sugerem que ainda estão no nível de abstração empírica a respeito da *atividade 2*, pois, para os itens a), b) e c) encontraram respostas corretas devido às “manipulações” com números específicos, já nesse item, que pedia a generalização, não conseguiram apresentar alguma resposta.

Portanto, os sujeitos dos grupos G3, G7, G11, G12 não antecipam uma resposta correta, por falta de compreensão e tomada de consciência em relação à dependência do troco em função da quantidade de pães compradas, isto é, $T(p) = 2 - 0{,}18p$, as soluções são, enfim, por tentativas infundadas.

Para esse item e) o grupo G8 – que anteriormente não apresentou resposta em linguagem natural – descreve com êxito, em linguagem algébrica, o troco de Ana para qualquer quantidade de pães, por $T = 2 - 0{,}18x$ (CALADO, 2020), como podemos ver na figura 4.8 a seguir.

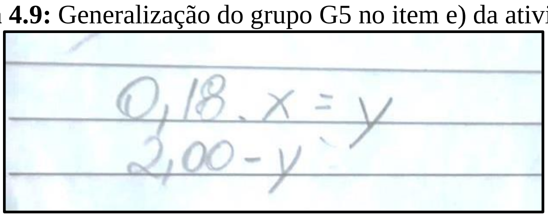
Figura 4.8: Generalização do grupo G8 no item e) da atividade 2



Fonte: Calado (2020, p. 109)

Segundo Calado (2020), os grupos G5, G6 e G9 também apresentaram a generalização, mas por meio de duas expressões algébricas, fazendo $0{,}18x = y$ como sendo o valor gasto para qualquer quantidade de pães, e, posteriormente, $2 - y$ para representar o troco, como podemos ver na figura 4.9 a seguir da resposta do grupo G5.

Figura 4.9: Generalização do grupo G5 no item e) da atividade 2



Fonte: Calado (2020, p. 109)

Assim, como esses grupos generalizaram na linguagem natural (*primeiro é necessário multiplicar o número de pães pelo preço de cada pão, em seguida, diminuir de 2,00 o resultado obtido*), também o fizeram aqui, seguindo os mesmos passos, mas agora por meio da expressão algébrica, confirmando a análise feita no item anterior, isto é, que esses grupos alcançaram a generalização construtiva dessa *atividade 2*.

Portando, os G5, G6, G8 e G9 apresentaram a situação de forma genérica sem a necessidade de recorrerem à exemplos específicos, configurando, assim, generalização construtiva.

Os grupos G1, G2 e G10 não apresentaram nenhuma estratégia de resolução (CALADO, 2020).

Diante disso, depois de recolhidas as resoluções das *atividades 1 e 2*, Calado (2020) achou necessário realizar outra conversa com a turma para esclarecer o significado de uma quantidade qualquer, discutindo as resoluções apresentadas por eles.

Em relação às *atividades 1* e *2*, o grupo G13 teve um avanço na generalização, pois na primeira atividade não apresentou nenhuma estratégia de resolução, já na segunda atividade conseguiu generalizar de forma indutiva. Quanto ao grupo G10, este ainda não conseguiu generalizar em nenhuma atividade. Os grupos G3, G11 e G12, ora apresentaram uma generalização indutiva, outrora deixaram de apresentar qualquer estratégia coerente de generalização.

Desse modo, corroboramos com Calado (2020) ao afirmar que fica clara a dificuldade dos alunos no processo de generalização, tanto em linguagem natural quanto na linguagem algébrica, mesmo os alunos compreendendo o contexto da situação. E isso se explica, segundo Piaget (1984), pela falta de abstração reflexionante cuja tomada de consciência é determinante nesse processo.

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 3 proposta por Calado (2020).

No quadro 4.27 a seguir apresentamos a atividade 3 da sequência didática desenvolvida por Calado (2020), e na sequência as meta-análises dessa atividade sob a perspectiva de Piaget (1984).

Quadro 4.27: Atividade 3 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 3: A escola de línguas MultLingue oferece cursos de inglês, espanhol e francês. Para cursar qualquer uma dessas línguas, o aluno precisa pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00.

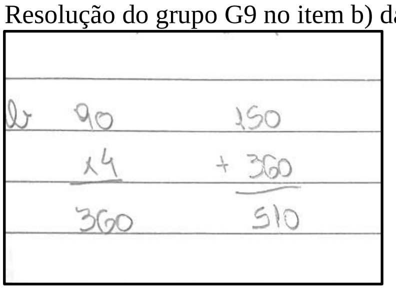
a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?
b) Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?
c) Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1230,00 com o curso de espanhol?
d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

Fonte: Calado (2020)

No item a) da *atividade 3*, os sujeitos tinham que determinar o valor gasto por um aluno que realizou a matrícula, mas desistiu de fazer os cursos. De acordo com Calado (2020), nove grupos (G1, G2, G4, G6, G7, G8, G9, G12 e G13) resolveram de maneira correta, afirmando que será gasto penas o valor da matrícula, ou seja, R$150,00, já que o aluno não cursou nenhuma língua. Os grupos G3, G5 e G10 apresentaram estratégias erradas de resolução, consideraram o valor da matrícula e mais uma mensalidade, fazendo $150 + 90 = 240$. Já o grupo G11 afirmou que *"ele não pagará nada pois não compareceu em nenhum curso"* (Calado, 2020, p. 115), apresentando, também, uma interpretação errada da situação.

No item b) era pedido aos sujeitos para determinarem o valor gasto por um aluno que frequentou 4 meses de curso de inglês. Para esse item, dez grupos (G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G12 e G13) apresentaram a mesma estratégia correta, ou seja, multiplicaram 90,00 (valor da mensalidade) por 4 meses, e posteriormente somaram com o valor da matrícula (R$150,00) (CALADO, 2020), como podemos observar na resolução do grupo G9 apresentada na figura 4.10 a seguir.

Figura 4.10: Resolução do grupo G9 no item b) da atividade 3



Fonte: Calado (2020, p. 117)

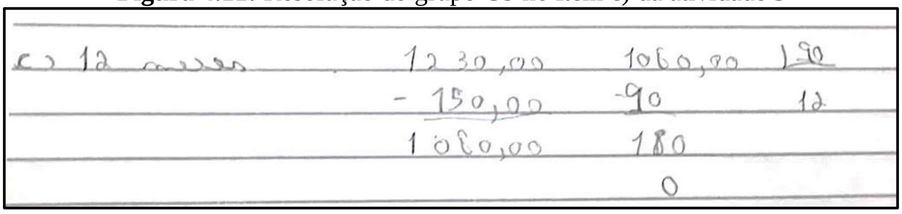
Ainda nesse item b) três grupos (G2, G10, G11) apresentaram soluções incorretas, pois consideraram apenas o valor das mensalidades, desconsiderando o valor da matrícula, isto é, fizeram apenas $4 \times 90 = 360$ (CALADO, 2020).

O item c) requeria dos alunos o cálculo de quantos meses de curso de espanhol fez um aluno que gastou R$ 1230,00. Para essa questão, de acordo com Calado (2020, p. 118), apenas o grupo G2 apresentou resposta incorreta ao afirmar que *"fez o curso por 1 ano e 1 mês"*. Ainda para a pesquisadora, embora o grupo não tenha deixado claro sua resolução, acredita-se que o grupo considerou apenas os valores das parcelas, fazendo $1230 \div 90 = 13{,}66$, e concluindo que o curso foi realizado em 13 meses, isto é, um ano e um mês. Os grupos G3, G5, G6 e G12 responderam corretamente a questão, mas somente afirmaram que o curso foi feito em 12 meses, não apresentando estratégias de resolução.

Os grupos G7, G8, G9 e G11 apresentaram suas estratégias corretas, fazendo $1230 - 150 = 1080$ e depois $1080 \div 90 = 12$ concluindo que foram 12 meses de curso.

Na figura 4.11 a seguir, é mostrado a resolução do grupo G9 para esse item c).

Figura 4.11: Resolução do grupo G9 no item c) da atividade 3



Fonte: Calado (2020, p. 119)

Ainda nesse item c), os grupos G1, G4, G10 e G13 apresentaram a resolução fazendo $90 \times 12 = 1080$ e posteriormente calcularam $1080 + 150 = 1230$ demostrando que o curso foi realizado em 12 meses (CALADO, 2020). Para chegarem a esse número de 12 meses, o grupo G1, tal como é referido por Calado (2020), fez por tentativa e erro, atribuindo valores para os meses e multiplicando por $R\$90{,}00$, o resultado obtido, somaram mais $R\$150{,}00$ que é o valor da matrícula, como podemos observar no diálogo do grupo a seguir (quadro 4.28).

Quadro 4.28: Diálogo entre os integrantes do grupo G1 no item c) da atividade 3 proposta por Calado (2020)

O grupo lê a letra c) - *Como será que faz?* – aluno A. - *Tem que ver quantos meses a pessoa fez o curso. Vamos chutar o valor, fala aí um valor pra colocar nos meses.* – aluno B.

- *Coloca 6 meses* – aluno A. - *Tem que testar pra 6 meses então. Faz aí* 6×90 *e depois soma 150* – aluno B. - *Dá 690, não dá certo* – aluno A. - *Faz pra 10 meses* – aluno B. - *Dá 1050. É mais ainda* – aluno A. - *Mas está perto. Faz pra 12 meses* – aluno B. - *Dá certo, dá 1230* – aluno A. - *Então a reposta é 12 meses. Coloca essa conta* – aluno B

Fonte: Calado (2020, p. 120)

O item d) pedia aos alunos para escreverem uma expressão algébrica que representasse o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos, ou seja, pedia a generalização da *atividade 3*. Para esse item, o grupo G10 apresentou a expressão algébrica: $240 + 90x$, ou seja, fizeram uma interpretação inadequada da situação considerando o valor fixo (R$150,00) mais uma parcela do curso de R$90,00, ficando $150 + 90 = 240$ (CALADO, 2020). Vale trazer à atenção que esse grupo, segundo Calado (2020), apresentou resposta correta para o item anterior, calculando o valor gasto para um curso de 12 meses, no entanto, apresentaram uma generalização incorreta. Nesse caso, inferimos que o grupo G10 encontra-se na generalização indutiva, pois conseguiram realizar as atividades anteriores com os dados fornecidos (manipulação com os números), porém, generalizar para todos os casos, não. É interessante notar também que é a primeira vez que esse grupo apresenta uma generalização do problema.

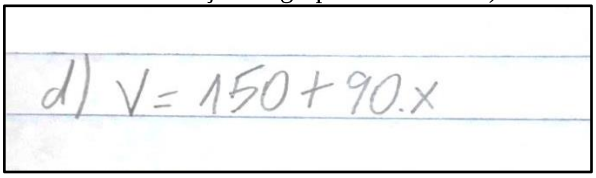
Os grupos G2, G6 e G12 apresentaram como generalização a expressão algébrica $V = 90x$ esquecendo do valor fixo R$150,00. Notamos que o grupo G2 não considerou o valor da matrícula no item c) dessa *atividade 3*, e que os grupos G6 e G12 apenas afirmaram que o aluno fez o curso em 12 meses, não apresentando estratégia de resolução. Desse modo, inferimos que esses grupos, para esse item d), estejam ainda na generalização indutiva, pois, por mais que apresentaram uma expressão algébrica da atividade, não conseguem generalizar de forma correta esquecendo o valor da matricula. Do mesmo modo, ocorre com o grupo G5, cuja generalização foi $240x$, somando a parte fixa à parte variável. Segundo Calado (2020) esse grupo já havia desenvolvido estratégia inadequadas no item a) dessa *atividade 3*, utilizando a mesma estratégia de resolução. Portanto, esse grupo também generalizou de forma indutiva, pois utilizou a mesma estratégia de antes e não houve nenhuma criação de novas formas nem novas construções.

Segundo Piaget (1984, p. 26) tem-se generalização indutiva

> [...] quando o sujeito, depois de ter encontrado uma solução (falsa ou correta) aplica-a rapidamente a novos conteúdos (cores, etc.), já presentes nas informações, mas que não tinham sido usados antes. Nesse caso, não há criação de novas formas, nem construção, posteriormente, de novo conteúdo, mas sim uma simples aplicação do esquema de resolução anterior.

Segundo Calado (2020), oito grupos desenvolveram estratégias corretas, a saber: G1, G3, G4, G7, G8, G9, G11 e G13, e as expressões algébricas variaram entre $V = 150 + 90x$ e $V = 90x + 150$ o que são idênticas devido comutatividade da operação de adição. A figura 4.12 mostra a resolução do grupo 8 nesse item d).

Figura 4.12: Generalização do grupo G8 no item d) da atividade 3



Fonte: Calado (2020, p. 121)

O quadro 4.29 a seguir, apresenta o diálogo dos integrantes do grupo G8 no processo de generalização da situação proposta.

Quadro 4.29: Diálogo entre os integrantes do grupo G8 no item d) da atividade 3 proposta por Calado (2020)

O grupo lê o item d)

- *Pra quantos meses é pra fazer?* – aluno A.

- *Qualquer. Tem que colocar x* – aluno B.

- *Huuuum, vai ficar x o quê?* – aluno A.

- *X ponto 90....* – aluno B.

Lê novamente o item d)

- *Tem que colocar o 150 da matrícula* – aluno B.

- *Mas daí vai fazer mais 90?* – aluno A.

- *Você tem que colocar vezes 90 e o 150 só paga uma vez* – aluno B.

- *Qualquer quantidade de meses, não precisa colocar 90, só o x que é pra qualquer quantidade de mês* – aluno A.

- *Mas tem que colocar o 90, porque o 90 é pra cada mês* – aluno B.

- *Como assim?* – aluno A

- *Olha só, ele só vai pagar o 150 uma vez. Digamos que ele faz 3 meses de curso, ele vai pagar 3 vezes 90 reais. Então V que é o valor pago é igual a X vezes 90* – aluno B.

- *E o 150?* – aluno A.

- *X vezes 90 mais 150* – aluno B.

- *Pode ser* – aluno A.

Fonte: Calado (2020, p. 121)

Como podemos observar nas discussões do diálogo anteriormente transcrita no quadro 4.29, do grupo G8, apenas o *aluno B* conseguiu alcançar a generalização construtiva, pois consegue explanar as coordenações necessárias que explicam suas ações. Enquanto que o *aluno A* ainda se encontra na generalização indutiva, pois não tomou consciência de suas ações, logo, não consegue transpor para um patamar superior aquilo que pode ser tirado do inferior, pois, tal que é referido por Piaget (1984), “De maneira geral, o critério da generalização indutiva reside no fato de que se fundamenta nas descobertas ou somente no resultado das ações, enquanto que a construtiva generaliza as próprias ações ou operações, ampliando e complementando suas formas anteriores” (p. 41). Portanto, inferimos que o grupo G8 chegou na generalização construtiva, assim, como, os demais grupos (G1, G3, G4, G7, G9, G11 e G13), pois também apresentaram a mesma estratégia de resolução.

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 4 proposta por Calado (2020).

No quadro 4.30 a seguir apresentamos a *atividade 4* da sequência didática desenvolvida por Calado (2020), e na sequência as análises realizadas.

Quadro 4.30: Atividade 4 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 4:*(Adaptada de Tinoco (2002))* D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:

- as camisas são colocadas lado a lado;
- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador;

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.

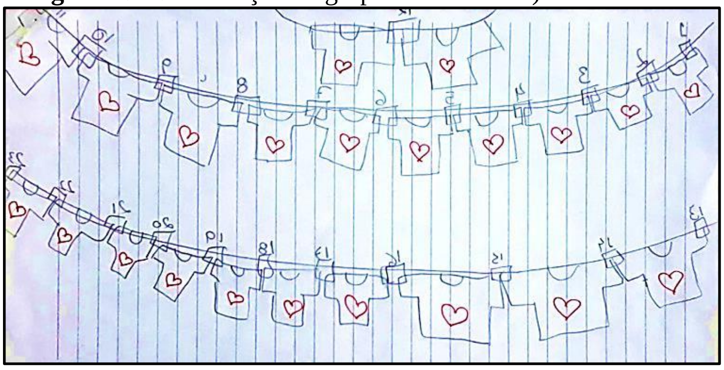
b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.

c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessário para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas

Fonte: Calado (2020)

Para o item a) dessa atividade, os alunos tinham que descobrir se duas cartelas de 12 pregadores cada era suficiente para prender 22 camisas dispostas lado a lado de modo que uma camisa fique presa à seguinte por apenas um pregador. Nesse item, segundo Calado (2020), seis grupos desenvolveram estratégias corretas de resolução, a saber: G4, G5, G6, G7, G9 e G13. Os grupos G4, G7, G9, G13 afirmaram que era possível, com 24 pregadores, prender 22 camisas, como aponta o grupo G13 ao escrever: *"sim, pois a cada 2 camisas são utilizado 3 pregadores"* (CALADO, 2020, p. 126). Os grupos G5 e G6 responderam que para prender 22 camisas, são necessários apenas 23 pregadores. O grupo G5, de acordo com Calado (2020), fez uma representação, por meio de desenho, das camisas penduradas, o que ajudou a compreender a situação e responder corretamente a questão. A figura 4.13 a seguir apresenta o desenho feito pelo grupo G8.

Figura 4.13: Resolução do grupo G5 no item a) da atividade 4



Fonte: Calado (2020, p. 127)

Os grupos G3 e G11 apenas afirmaram que é possível prender as camisas com 24 pregadores, porém não apresentam estratégia de resolução (CALADO, 2020).

Já os grupos G10 e G12 resolveram de maneira equivocada a questão, afirmaram que não era possível prender as camisas, pois cada uma delas utiliza 2 pregadores, logo seriam necessários 44 pregadores (CALADO, 2020). No diálogo transcrito no quadro 4.31 a seguir, mostra as discussões do grupo G10 para resolveram a situação proposta.

Quadro 4.31: Diálogo entre os integrantes do grupo G10 na resolução do item a) da atividade 4

Diálogo entre integrantes do grupo 10 (G10) - fragmento O grupo Lê o enunciado e a letra a) - *Olha só, cada camisa usa 2 prendedores, então para as 22 camisas, 24 pregadores é pouco* - aluno A. - *Huuuun, será?* - aluno B. - *É sim, para as 22 camisas ia usar 44 prendedores* - aluno A. - *Verdade, não vai dar certo. Vou responder isso* - aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 128)

Já os grupos G1 e G2 não apresentaram solução para esse item a).

No item b) dessa *atividade 4*, os sujeitos deveriam escrever com as próprias palavras o que D. Lurdes precisava fazer para saber quantos pregadores eram necessários para pendurar qualquer número de camisas, isto é, esperava dos alunos a generalização da questão em linguagem natural. Segundo Calado (2020), cinco grupos resolveram de maneira incorreta a questão: G3, G7, G9, G12 e G13, e os grupos G1, G4, G10 e G11 não apresentaram nenhuma estratégia de resolução.

O grupo G3, nesse item b), generalizou da seguinte maneira: *"será x camiseta e um pregador a menos"*. Enquanto que o grupo G12 afirmou que para determinar o número de pregadores tinha que fazer o cálculo de 22×12. Já o grupo G9 afirmou que é necessário fazer a quantidade de camisas dividido pela quantidade de pregadores (CALADO, 2020). Diante dessas generalizações, inferimos que esses grupos estejam na generalização indutiva, pois não conseguem generalizar para qualquer quantidade de camisas o número de pregadores necessários, ou seja, não tomaram consciência das coordenações de suas ações por esse motivo não engendram estruturas novas.

Os grupos G7 e G13 afirmaram que o número de pregadores é o dobro do número de camisas, também não generalizando de forma correta, como podemos observar das discussões entre os integrantes do grupo G7 a seguir.

Quadro 4.32: Diálogo entre a pesquisadora Calado e os alunos do grupo G7 no item b) da atividade 4

Diálogo entre a pesquisadora e o grupo 7 (G7) - fragmento O grupo lê o item b) da atividade - *Coloca assim, se tiver n camisetas precisam de n pregadores* - aluno A. - *Já sei. O número de camisas vezes 2* - aluno B. - *Faz assim, se eu tenho x camisetas eu tenho que utilizar x pregadores. Coloca c porque é camiseta* - aluno A. - *Mas não era o dobro de pregadores?* - aluno B. - *Não. Coloca, se eu tenho c camisetas eu tenho que utilizar x pregadores* - aluno A. - *Mas se eu não sei o número de camisetas, como vou saber o número de pregadores?* - aluno B. - *Será que seria x ao quadrado de pregadores?* - aluno A. O grupo chama a pesquisadora. - *Está certo, professora?* - aluno A. - *Vamos ver se vai funcionar se substituirmos valores? Coloca x valendo 4, eu tenho 4 camisetas, então eu teria 4 ao quadrado de pregadores. Quanto é 4 ao quadrado?* – pesquisadora. - *Acho que dá 16* - aluno A. - *Então pra 4 camisetas eu utilizo 16 pregadores?* – pesquisadora. - *Huuuum, não dá certo não. Daria 4 pregadores para cada camisetas. Não está certo* - aluno A. - *Então, vamos pensar mais um pouco. É importante vocês testarem valores para saber se a expressão algébrica de vocês está correta* – pesquisadora. A pesquisadora se afasta do grupo ..... - *Coloca aí aqui que precisa do dobro do número de camisetas para saber os pregadores* - aluno A. - *Mas é 3 pregadores a cada 2 camisetas* - aluno B. - *Ah, deixa assim mesmo* - aluno A.

Fonte: Calado (2020, p. 131-132)

No diálogo transcrito anteriormente, constatamos que o *aluno A* estabelece uma relação biunívoca entre o número de pregadores e de camisas ao dizer: "*Coloca assim, se tiver n* *camisetas precisam de n pregadores"*, ideia falsa, porém, segundo Piaget (1984, p. 47), razoável, já que esta estrutura de correspondência se constitui desde o nível sensório-motor, uma das principais formas de coordenação das ações, e isso se deve a abstrações reflexionantes e generalizações construtivas anteriores. Segundo Piaget (1984, p. 47), esse pensamento atual se fundamenta em observações uniformes e generaliza o que foi observado para todas as situações apresentadas, o que constitui o tipo de generalização indutiva. Quanto ao aluno ao *aluno A*, ele verifica que para uma camisa há necessidade de 2 pregadores, logo conclui: "*Já sei. O número de camisas vezes 2"*. Tem-se aqui, de acordo com Piaget (1984), um pensamento recorrente, pois começa sua investigação, descobre alguma regularidade e generaliza sem a necessidade de constatar se vale para "todas", configurando, também, generalização indutiva. Na generalização indutiva, as inferências dos sujeitos, sejam elas falsas ou verdadeiras, se limitam a uma generalização de "algum" para "todo" dos fatos observados ou das relações constatadas (PIAGET, 1984, p. 186).

Segundo Calado (2020. p. 132) é possível notar os alunos desse grupo G7 ainda estavam em situação de formulação, mas não conseguem validar suas respostas e apresentam a resolução mesmo sabendo que não estava correta, ao afirmar: "*Ah, deixa assim mesmo"*.

Assim como o grupo G7, o grupo G13 também apresentou a mesma estratégia de resolução, portanto, inferimos que também generalizaram e forma indutiva ao considerar o dobro de pregadores para *x* camisas.

De acordo com Calado (2020), apenas três grupos responderam corretamente a questão, afirmando que o número de pregadores é uma unidade a mais que o número de camisas, a saber: G2, G5 e G6. O diálogo transcrito no quadro 4.33 mostra a conversa entre os integrantes do grupo G5 e Calado (2020).

Quadro 4.33: Diálogo entre a pesquisadora Calado e os alunos do grupo G5 no item b) da atividade 4

O grupo lê o item b) da atividade - *Vamos fazer que 22 camisas precisam de 23 pregadores* - aluno A. - *Mas um número qualquer você não pode escolher um número* - aluno B. O grupo chama a pesquisadora. - *O que vocês fizeram pra determinar a quantidade de pregadores na letra a)? Que conta vocês fizeram?* – pesquisadora. - *Ah, a gente desenhou e contou os pregadores* - aluno B.

- *Então agora escolham algumas quantidades de camisas e determinem a quantidade de pregadores* - pesquisadora. ... - *Se fossem 15 camisas, quantos pregadores seriam necessários?* – pesquisadora. - *16 pregadores* - aluno B. - *Se fossem 5 camisetas?* – pesquisadora. - *6* - aluno B. - *O que você está fazendo para determinar o número de pregadores?* - pesquisadora. - *1 a mais* - aluno B. - *Então, agora vocês precisam escrever como estão determinando o número de pregadores* – pesquisadores. - *Ah tá! Escreve aí que coloca um a mais que as camisetas* - aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 130)

Portanto, do diálogo anteriormente descrito, o *aluno A* ainda se encontra na generalização indutiva pois limita-se a generalizar com valores específicos, ao afirmar: “*Vamos fazer que 22 camisas precisam de 23 pregadores”*. Em contra partida, o *aluno B* alcançou a generalização construtiva, pois consegue entender a situação ao dizer: “*Mas um número qualquer você não pode escolher um número”* e, com a mediação de Calado, eles escrevem a generalização do problema para qualquer quantidade de pregadores. Do mesmo modo, inferimos que os grupos G2 e G6 também generalizaram de forma construtiva, pois apresentaram a generalização da mesma maneira. Para Piaget (1984, p. 41), a generalização indutiva se limita em aplicar a novos objetos um esquema já conhecido por abstração empírica, enquanto que a generalização construtiva engendra novas formas por complementação ou diferenciação de uma operação.

O item c) da *atividade 4* pedia aos alunos que escrevessem uma expressão algébrica que representasse o número de pregadores necessário para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas, isto é, a generalização em linguagem matemática.

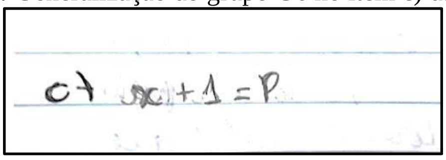
De acordo com Calado (2020), dos treze grupos, apenas três desenvolveram estratégias corretas: G2, G5 e G6. Os grupos G9, G7, G11, G12 e G13 apresentaram generalizações incorretas, e os grupos G1, G4, G10 e G13 não apresentaram nenhuma estratégia de generalização.

Os grupos G11 e G12 apresentaram a expressão $12x$, utilizando equivocadamente uma informação do item a) dessa *atividade 4* (cada cartela possui 12 pregadores), que, tal como é referido por Calado (2020) no meio da questão afirmaram que para determinar a quantidade de pregadores era necessário fazer 12×22. O grupo G9 generalizou pela expressão $y \div x$, assim como fez para o item anterior. Portanto, inferimos que esses grupos generalizaram de maneira indutiva, uma vez que encontraram uma solução incorreta no item anterior e aplicaram a mesma estratégia nesse item, não tendo a criação de novas formas nem novos conteúdos, mas apenas uma aplicação do esquema de resolução anterior (PIAGET, 1984, p. 26).

Já os grupo G7 e G13 apresentaram as expressões, $V = x + 2x - 1$ e $2x = 24x$ respectivamente, que segundo Calado (2020), não apresentam relação nem com a expressão algébrica correta nem com as resoluções que fizeram anteriormente. Desse modo, não conseguimos identificar qualquer tipo de generalização, no entanto, inferimos que estejam no processo de abstração empírica, apenas nas observações manipulações dos valores numéricos, uma vez que esses grupos fizeram corretamente o item a) dessa atividade 4.

Quanto aos grupos G2, G5 e G6, apresentam uma expressão algébrica correta alcançando, assim, uma generalização construtiva e confirmando as análises anteriores, pois, na generalização em linguagem natural, também conseguiram generalizar. A figura 4.14 a seguir mostra a generalização do grupo G6.

Figura 4.14: Generalização do grupo G6 no item c) da atividade 4



Fonte: Calado (2020, p. 134)

De acordo com as resoluções apresentadas, inferimos, em relação às atividades anteriores, que nessa *atividade 4* os alunos tiveram mais dificuldades em generalizar. No entanto, segundo Calado (2020), eles demonstraram interesse em desenvolver a atividade.

Notamos, também, que o grupo G2 vem progredindo em direção à generalização, pois pela primeira vez generaliza de forma construtiva a atividade proposta.

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 5 proposta por Calado (2020).

No quadro 4.34 a seguir apresentamos a *atividade 5* da sequência didática desenvolvida por Calado (2020). Os grupos G12 e G13 não participaram dessa investigação, pois não compareceram no dia da aplicação dessa atividade (CALADO, 2020).

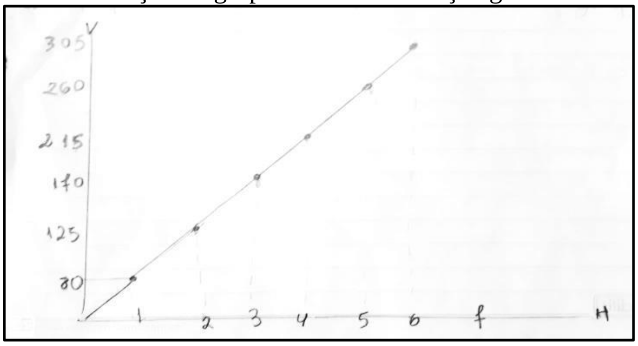
Quadro 4.34: Atividade 5 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 5: Paulo é mecânico e, quando possível, realiza atendimento em domicílio. Sendo assim, a expressão algébrica que melhor representa o valor a ser pago pelos clientes de Paulo é: $v = 45h + 35$, em que h representa o número de horas trabalhadas de Paulo e v representa o valor a ser pago pelos clientes que o contratam. Com base nas informações apresentadas, faça uma representação gráfica da situação e responda os itens a seguir. a) Qual(is) a(s) variável(is) envolvida(s) na situação? b) Suponha que Paulo tenha feito uma visita a um cliente que firmou o contrato, no entanto, no dia seguinte, desistiu do serviço, antes que Paulo começasse seu trabalho. Nesse caso, quanto o cliente terá que pagar para Paulo? c) Considere agora que outro cliente tenha pagado o valor de R$ 215,00. Por quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando na casa desse cliente? d) Escreva os passos para determinar o valor a ser pago por um cliente quando Paulo permanece uma quantidade qualquer de horas realizando um atendimento em domicílio.

Fonte: Calado (2020)

Nessa *atividade 5* o enunciado pedia aos alunos que fizessem uma representação gráfica da situação a partir da expressão algébrica apresentada na atividade, relacionando horas trabalhadas com o valor a ser pago. Segundo Calado (2020), os alunos tiveram bastante dificuldade em desenvolver a representação gráfica. Portanto, Calado (2020) considerou pertinente um momento didático com os alunos, discutindo e explicando sobre o gráfico solicitado. Ainda assim, mesmo com as discussões, apenas um grupo (G10) desenvolveu uma representação gráfica correta, como podemos ver na figura 4.15 a seguir.

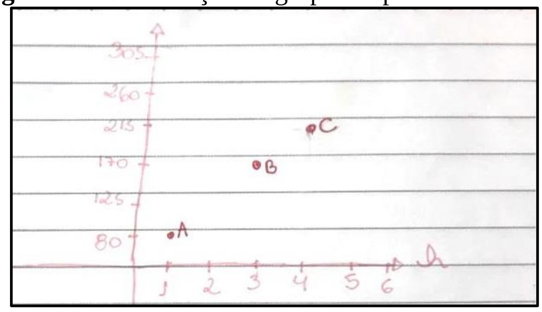
Figura 4.15: Resolução do grupo G10 na construção gráfica da atividade 5



Fonte: Calado (2020, p. 139)

Dois grupos (G5 e G6) apresentaram uma resolução parcialmente correta, uma vez que, representaram alguns pontos no plano cartesiano, porém não traçaram a reta que representa a função (CALADO, 2020). No entanto, acreditamos que esses grupos consideraram apenas um domínio discreto, ou seja, apenas horas inteiras (1, 2, 3, ...) e, portanto, apresentaram um gráfico apenas com os pontos, como podemos observar na figura 4.16 a seguir.

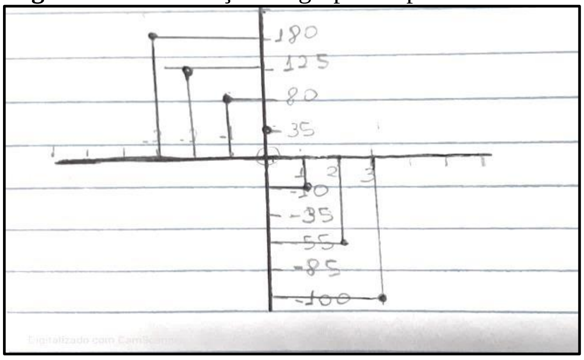
Figura 4.16: Resolução do grupo G5 para a atividade 5



Fonte: Calado (2020, p. 140)

Os grupos G7 e G8 fizeram o gráfico considerando a expressão $V = 45x$, desconsiderando o valor fixo de 35 reais. Já o grupo G2 apresentou o gráfico cujo domínio ia de -3 a 3, ou seja, considerou valores negativos para a variável *horas trabalhadas*, assim, como, representaram incorretamente os pontos calculados no gráfico, como podemos observar na figura 4.17 a seguir (CALADO, 2020).

Figura4.17: Resolução do grupo G2 para atividade 5



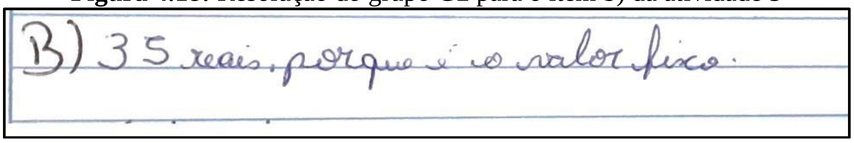
Fonte: Calado (2020, p. 140)

Os outros grupos não apresentaram estratégia de resolução e deixaram em branco, a saber: G1, G3, G4, G9 e G11.

Para o item a) dessa *atividade 5*, os alunos tinham que determinar quais eram as variáveis envolvidas na situação. Segundo Calado (2020) os alunos alegaram nunca terem ouvido esse tipo de questionamento, diante disso, a pesquisadora fez um momento de discussão trazendo para essa situação as variáveis presentes na *atividade 4*, e a partir de então, os alunos conseguiram identificar quais eram as variáveis presente nessa *atividade 5*. Tal como é referido por Calado (2020), não houve respostas incorretas, apenas o grupo G7 apresentou uma resolução parcialmente correta ao considerar apenas as *horas trabalhadas* como variável.

No item b), era proposto aos sujeitos calcular quanto o cliente pagará a Paulo, sabendo que ele havia feito uma visita a esse cliente, firmado o contrato, no entanto desistiu do serviço. Ou seja, os sujeitos tinham que considerar o valor da visita ($R\$35{,}00$). De acordo com Calado (2020), apenas os grupos G2 e G7 apresentaram estratégias corretas, afirmando que deveriam ser pagos $R\$\ 35{,}00$ pela visita que Paulo realizou ao cliente, como mostra a estratégia de resolução do grupo G2, na figura a seguir.

Figura 4.18: Resolução do grupo G2 para o item b) da atividade 5



Fonte: Calado (2020, p. 142)

O grupo G3 apresentou estratégia incorreta afirmando que o valor gasto era de $R\$\ 260{,}00$, ou seja, atribuiu 5 horas de trabalho. Os demais grupos apresentaram estratégias incorretas por não considerarem o valor fixo da visita, afirmando que o cliente não pagaria nada, pois o serviço não foi prestado.

No item c) dessa *atividade 5*, os sujeitos tinham que descobrir por quanto tempo Paulo trabalhou na casa de um cliente, sabendo que ele recebeu $R\$ 215{,}00$. Para esse item sete grupos (G1, G2, G5, G6, G7, G8 e G11) apresentaram respostas corretas.

Os grupos G1 e G6 fizeram por tentativas, atribuindo valores para a variável independente (horas trabalhadas) até chegar ao valor correspondente da variável dependente (valor pago pelo cliente). Já o grupo G8 realizou cálculos utilizando operações inversas, ou seja, $215 - 35 = 180$ e $180 \div 45 = 4$ (CALADO, 2020). No quadro 4.35 a seguir, é transcrito um trecho da conversa entre os integrantes desse grupo.

Quadro 4.35: Diálogo entre os integrantes do grupo G8 para a resolução do item c) da atividade 5

- *Como vamos fazer essa?* - aluno A. - *Pega o valor total e tira 35 que é o valor fixo, depois você divide por 45 para saber quantas horas ele trabalhou. O valor por hora é 45 reais* - aluno B. - *As contas deu 4* - aluno A. - *Então, quantas horas ele trabalhou?* - aluno B. - *4 horas. UAU!* - aluno A.

Fonte: Calado (2020, p. 144)

Os grupos G5, G7 e G11, segundo Calado (2020), apenas afirmaram que o serviço foi realizado em 4 horas, não apresentando estratégia de resolução.

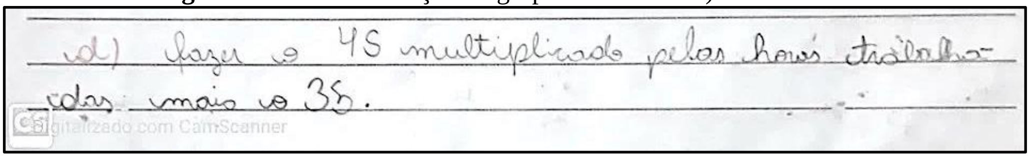
Os grupos G4, G9 e G10 apresentaram respostas incorretas, afirmando que o serviço foi realizado em 25 horas, assim como o grupo G3, que afirmou que o serviço foi realizado me 17 horas.

No item d), os alunos deveriam escrever os passos para determinar o valor a ser pago por um cliente para qualquer quantidade de horas trabalhadas, isto é, a generalização da atividade em linguagem natural.

Para esse item, inferimos que os grupos G4, G6, G9 e G10 estejam no nível da generalização indutiva, pois afirmaram que o valor a ser pago é determinado calculando a quantidade de horas trabalhadas vezes o valor da hora (CALADO, 2020), desprezando o valor fixo de 35 reais. Portanto, esses sujeitos só generalizaram suas descobertas e resultados de suas ações, não ampliando e complementando suas formas anteriores. Assim, como, os grupos G1, G2, G3 e G10, que apresentaram como generalização a expressão algébrica dada no enunciado, o que não está errado, porém não foi o que Calado sugeriu que fizessem. Por esse motivo, inferimos que esses grupos também se encontram no nível de generalização indutiva, uma vez que não souberam explicar as razões de suas ações, ou seja, a ação realizada nos itens anteriores não foi interiorizada em forma de pensamento (abstração reflexionante) e por isso não conseguem explica-las (tomada de consciência).

Quantos aos grupos G5, G7 e G8 desenvolveram estratégias corretas de resolução, afirmando que o valor a ser pago é determinado multiplicando 45 pelas quantidades de horas trabalhadas mais 35 reais (CALADO, 2020). Como podemos observar na resposta apresentada pelo grupo G8 na figura 4.19 a seguir.

Figura 4.19: Generalização do grupo G5 no item d) da atividade 5


d) fazer o 45 multiplicado pelas horas trabalhadas mais o 35.

Fonte: Calado (2020, p. 145)

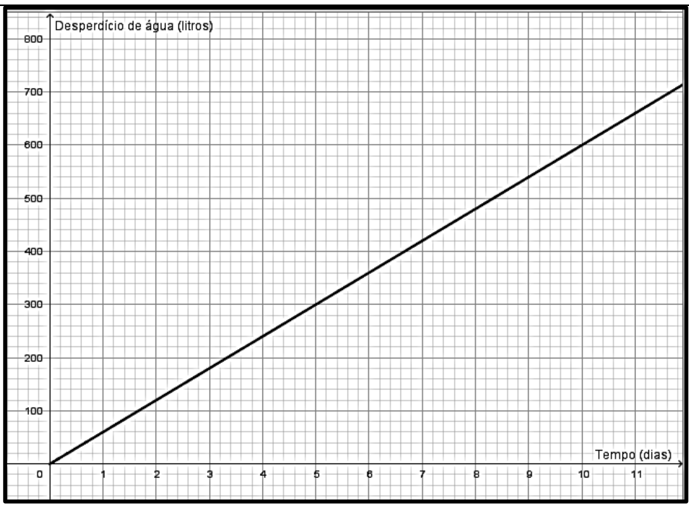
Portanto, esses grupos alcançaram a generalização construtiva, uma vez que conseguem explicar as razões que dão origem às suas ações, conseguem fazer uma organização estrutural, isto é, esses alunos chegaram à abstração refletida das situações apresentadas compreendendo o mecanismo interno de suas ações e construindo o esquema generalizador necessário (PIAGET, 1984).

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 6 proposta por Calado (2020).

No quadro 4.36 a seguir apresentamos a *atividade 5* da sequência didática desenvolvida por Calado (2020). Assim como na *atividade 5*, no dia da aplicação desta *atividade 6*, os alunos do grupo G12 e G13 também não compareceram (CALADO, 2020).

Quadro 4.36: Atividade 6 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 6:*(Adaptado ENEM (2010))* – Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira, sabendo que y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, observe o gráfico a seguir e responda as questões seguintes.



a) De quanto será o desperdício se a torneira permanecer por 5 dias gotejando?

b) Se a torneira ficar por 7 dias gotejando, qual será o desperdício?

c) Sabendo que houve um desperdício de 840 litros, por quantos dias a torneira ficou gotejando?

d) Escreva uma expressão algébrica que representa o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando.

e) Utilizando a expressão do item anterior determine de quantos litros será o desperdício se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Compare o valor obtido com o resultado no item b. O que você pode concluir?

f) Utilizando a expressão do item d, determine por quantos dias a torneira ficou gotejando se houve um desperdício de 840 litros. Agora, compare o valor obtido com o resultado do item c. O que você pode concluir?

Fonte: Calado (2020)

Nessa *atividade 5*, no item a), os alunos deveriam determinar, de acordo com gráfico dado na questão, quanto será o desperdício de água se a torneira permanecer por 5 dias gotejando, sabendo que y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias. Segundo Calado (2020), para esse item, todos os grupos determinaram de maneira correta a questão afirmando que o desperdício de água em 5 dias seria de 300 litros.

Para o item b), os grupos deveriam determinar o desperdício para 7 dias e, posteriormente, comparar os resultados. Como para 7 dias não aparece explicitamente a quantidade do desperdício de água no gráfico (eixo y), apenas os grupos G1, G2, G4, G5, G7, G8, G9 e G11 resolveram corretamente a questão, afirmando que o desperdício da água era de

420 litros. No diálogo tirado de Calado (2020, p. 151), transcrito no quadro a seguir, é possível perceber que o grupo descobriu quanto vale cada quadradinho entre uma quantidade de litros e outra, isto é, fizeram $100 \div 5 = 20$, para então determinar o desperdício para 7 dias cuja informação não estava explicita no gráfico.

Quadro 4.37: Diálogo entre os integrantes do grupo G2 na resolução do item b) da atividade 6

- *É 400 e alguma coisa, porque eu não sei quanto vale cada quadradinho* – aluno A.

- *Faz 100 dividido por 5. Dá 20? Então a resposta é 420* – aluno B.

- *420 mesmo – aluno A.*

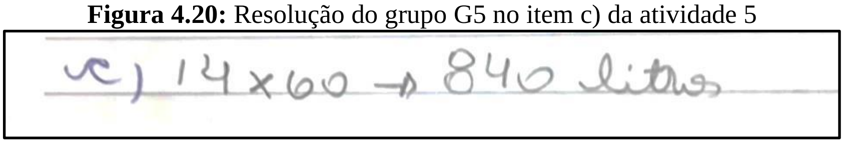
- *Cada quadradinho vale 20* – aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 151)

Em relação aos grupos G6 e G10, segundo Calado (2020), apenas afirmaram que o desperdício era de 400 litros, não considerando o valor da escala do gráfico. Já o grupo G3, afirmou que o desperdício, para 7 dias, seria de 700 litros.

No item c), os alunos tinham que determinar quantos dias a torneira ficou gotejando, sabendo que houve um desperdício de 840 litros de água. A resposta para essa questão não estava explícita no gráfico, desse modo, os alunos deveriam determinar o desperdício de água para um dia e depois encontrar a quantidade de dias para um desperdício 840 litros. Tal como é referido por Calado (2020), somente o grupo G5 apresentou resolução correta, determinando a quantidade de litros desperdiçados em um dia (60 litros) e posteriormente multiplicando esse resultado pelos dias até encontrar 840 litros, como podemos ver na figura 4.20 a seguir.

Figura 4.20: Resolução do grupo G5 no item c) da atividade 5


c) 14 x 60 → 840 litros

Fonte: Calado (2020, p. 152)

Os demais grupos apresentaram respostas incorretas nesse item, trazendo aproximações de acordo com as informações explícitas do gráfico (CALADO, 2020). Os grupos G1, G8 e G9 afirmaram que o desperdício foi de 13 dias; os grupos G2, G6, G7, G10 e G11 afirmaram que o desperdício foi de 12 dias; já os grupos G1 e G4 afirmaram que foi de 12 dias e meio.

No item d) pedia aos grupos que escrevessem uma expressão algébrica que representasse o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando, ou seja, pedia a generalização do problema. Segundo Calado (2020), os grupos G1, G3, G5, G7 e G8 apresentaram a generalização corretamente por meio da expressão $D = 60x$. No diálogo entre a pesquisadora e os alunos do grupo G3 os alunos formulam e validam a situação apresentando a generalização. Em seguida, na figura 4.21, mostra a expressão que o grupo G3 desenvolveu.

Quadro 4.38: Diálogo entre a pesquisadora Calado e os integrantes do grupo G3 no item d) da atividade 6

- *Professora, está certo a nossa expressão?* – apresenta a expressão $\text{D} = 60 \div \text{x}$ – aluno A.

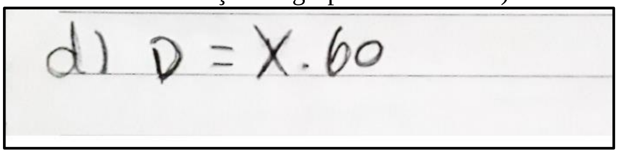
- *Vamos testar valores para ver se a expressão está correta. Com a sua expressão qual será o desperdício em 5 dias?* – pesquisadora.

- *Hiiii não dá certo* - aluno B.

- *Acho que vezes 60 vai dar certo* - aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 153)

Figura 4.21: Generalização do grupo G3 do item d) da atividade 6



Fonte: Calado (2020, p. 153)

Portanto, inferimos que esse grupo, assim como os outros 4, chegaram na generalização construtiva da situação proposta, pois conseguiram pensar *a posteriori* não se limitando a exemplos específicos, mas os utilizando para validar a generalização alcançada, isto é, transferiram para um patamar superior aquilo que foi tirado do inferior, pois para Piaget (1984), a generalização construtiva consistirá de uma transposição de uma construção material para uma construção conceitual, e, a partir do momento em que os sujeitos conseguem ter uma abstração refletida sobre suas ações, cuja tomada de consciência condiciona os processos generalizadores, elas evoluem de um nível a outro.

Quanto aos grupos G2, G4, G6, G9, G10 e G11, generalizaram de forma indutiva, pois, ao apresentarem a expressão $V = xy$, os alunos não conseguem generalizar para determinar o desperdício de água para qualquer quantidade de dias. Por mais que apresentaram uma expressão algébrica, tal expressão não representa corretamente a situação. Ou seja, não conceituaram a situação proposta e consequentemente não tomaram consciência de suas ações.

O item e) dessa *atividade 6*, solicitava aos alunos que, com a generalização estabelecida no item anterior, determinassem o desperdício de água se a torneira permanecesse gotejando por 7 dias. Portanto, os grupos que conseguiram generalizar no item anterior (G1, G3, G5, G7 e G8), responderam corretamente este item e), pois utilizaram a expressão desenvolvida e atribuíram o número 7 à variável independente (dias) fazendo $7 \times 60 = 420$, concluindo que o desperdício foi de 420 litros. Os outros grupos, como não conseguiram generalizar corretamente, não conseguiram encontrar a resposta correta. Os grupos G2, G4, G6, G9 e G10 fizeram $V = 7 \times 420$ multiplicando a quantidade de dias dada no enunciado pelo desperdício produzido em 7 dias. Já o grupo G11 verifica que no item b), para 7 dias, o desperdício era de 420 litros, logo afirma que o desperdício será o mesmo: *"Vou colocar aqui que o desperdício é o mesmo"* (CALADO, 2020, p. 156).

No item f) os sujeitos, por meio da expressão algébrica desenvolvida no item d), deveriam determinar por quantos dias a torneira permaneceu gotejando se o desperdício foi de 840 litros. Além disso, os alunos tinham que comparar o resultado obtido com o que foi determinado pelo gráfico. Para esse item, de acordo com Calado (2020) os grupos G1, G2, G3, G5 e G7 apresentaram estratégias corretas de resolução ao calcularem $840 \div 60 = 14$ concluindo que a torneira permaneceu gotejando por 14 dias. Os grupos G4 e G11 apenas afirmaram que o desperdício de água ocorreu em 14 dias. E os grupos G6, G8, G9 e G10 responderam que a torneira ficou gotejando por 13 dias, apresentando uma estratégia incorreta.

De maneira geral, os alunos ainda estão com muita dificuldade em generalizar, inclusive, apresentando erros nos itens e) e f) porque não generalizaram corretamente no item d). Apesar disso, percebemos um notório progresso do grupo G10, pois nas primeiras atividades que pedia generalização, deixava em branco, agora, já apresenta, mesmo que indutivamente, generalização para a situação proposta.

Generalização Indutiva e Construtiva da atividade 7 proposta por Calado (2020).

No quadro 4.39 a seguir apresentamos a *atividade 7* da sequência didática desenvolvida por Calado (2020). O grupo G13 não participou dessa investigação, pois não compareceu no dia da aplicação dessa atividade (CALADO, 2020).

Quadro 4.39: Atividade 7 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 7:*Adaptada Martins, Rezende e Hermann (2019))* – Uma das maneiras de reduzir o consumo de energia elétrica foi a criação da tecnologia LED (sigla em inglês para diodo emissor de luz) que já está substituindo as lâmpadas fluorescentes. As lâmpadas LED são mais eficientes que as fluorescentes, produzem a mesma luminosidade com menor consumo de energia. No quadro abaixo relacionamos os preços e os consumos de duas lâmpadas equivalentes.

Lâmpada	**Potência**	**Preço da lâmpada**	**Gasto mensal de energia**
LED	11 Watts	R$ 12,00	R$ 1,10
FLUORESCENTE	22 Watts	R$ 8,00	R$ 2,20

Sabendo que Paula possui na sala de sua casa os dois tipos de lâmpadas e que elas são sempre ligadas ao mesmo tempo, responda as questões que seguem.

a) Ao final de dois meses, qual terá sido o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia)? Neste caso, para qual tipo lâmpadas Paula terá o menor gasto?

b) Para o caso de cinco meses de uso, para qual tipo de lâmpada o gasto de Paula será menor?

c) A vizinha de Paula comprou um determinado tipo de lâmpada e depois de cinco meses de uso gastou R$ 17,50 (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia). Neste caso, qual das lâmpadas foi a escolhida pela vizinha de Paula? Você considera que esta foi a melhor opção? Justifique sua resposta.

d) Suponha agora o caso de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade qualquer de meses, escreva uma expressão algébrica que determina o gasto total com a lâmpada (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia).

e) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores gastos com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia) dependendo do seu tempo de uso. A partir da representação gráfica, determine para quais meses o valor a ser gasto com cada lâmpada é menor.

Fonte: Calado (2020)

Nessa *atividade 7*, de acordo com a tabela apresentada no enunciado da atividade, para o item a), foi sugerido aos alunos que calculassem ao final de dois meses, qual o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas, e qual delas terá o menor gasto. Para esse item, segundo Calado (2020), onze grupos apresentaram estratégias corretas. Os grupos G8, G9 e G12 utilizaram o algoritmo da multiplicação, fazendo o gasto de cada lâmpada vezes dois para determinar o gasto no final do segundo mês, em seguida somou esse gasto com o valor correspondente de cada uma, apresentado os seguintes cálculos: $2{,}20 \times 2 = 4{,}40$ e $8{,}00 + 4{,}40 = 12{,}40$ para a lâmpada fluorescente, e $1{,}10\ \times 2 = 2{,}20$ e $12{,}00 + 2{,}20 = 14{,}20$ para a lâmpada de LED, concluindo, assim, que a lâmpada fluorescente produz o menor gasto em relação à lâmpada de LED (CALADO, 2020).

Os grupos G1, G2, G3, G4, G6, G7, G9 e G10, também apresentaram corretamente a solução, mas utilizaram o algoritmo da adição para tal, fazendo: $1{,}10 + 1{,}12{,}20$ e $12{,}00 + 2{,}20 = 14{,}20$ para a lâmpada de LED, e $2{,}20 + 2{,}20 = 4{,}40$ e $8{,}00 + 4{,}40 = 12{,}40$ para a lâmpada fluorescente, concluindo que a lâmpada fluorescente tem o menor gasto (CALADO, 2020).

Apenas o grupo G5 resolveu de maneira incorreta esse item, pois somaram o valor gasto por cada lâmpada em um mês mais seus respectivos valores, não considerando dois meses de uso, afirmando que a lâmpada de LED o gasto era de $R\$13{,}10$ enquanto que a lâmpada fluorescente é de $R\$\ 10{,}20$.

Para o item b) os sujeitos tinham que determinar a lâmpada de menor gasto pra cinco meses de uso. Dez grupos (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9 e G12) apresentaram respostas corretas, fazendo a multiplicação da quantidade de meses (5) pelo gasto mensal de cada lâmpada e, posteriormente, somando esse valor gasto na compra da lâmpada, concluindo que a de LED, para 5 meses de uso, possui o menor valor (CALADO, 2020). O diálogo do grupo G3, transcrito no quadro 4.40, mostra as estratégias que fizeram para chegar na resposta.

Quadro 4.40: Diálogo entre os integrantes do grupo G3 na resolução do item b) da atividade 7

O grupo lê o item b) - *Agora tem que fazer com o 5* – aluno A. - *Com certeza vai continuar sendo a fluorescente, mas nós vamos fazer a conta só pra mostrar pra professora. Coloca 12,40 vezes 3. Dá 37, 20* – aluno B. - *Por quê?* - aluno A - *Porque aqui já foi 2 meses, faltam 3 porque é 5 meses* – aluno B. - *Mas o valor pago pela lâmpada você só vai usar 1 vez* – aluno A. - *Ah é* – aluno B.

- *Então 2,20 vezes 5 e depois soma 12* – aluno A

- *Dá 23* – aluno B.

- *Agora 1,10 vezes 5 e depois mais 12* – aluno A.

- *Dá 17,50. Caraca! Fica mais barato* – aluno B.

- *E você falou que ia ser a fluorescente* – aluno A.

- *Mas dá a de Led. Apesar de que eu preferiria gastar 19 reais do que 17, porque a Fluorescente é melhor* – aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 163-164)

Os grupos G10 e G11 apenas afirmaram que o gasto da lâmpada fluorescente é menor, não apresentando estratégia de resolução (CALADO, 2020). Segundo Calado (2020), esses alunos apenas observaram o valor de cada lâmpada, e não consideraram o gasto mensal por cada uma.

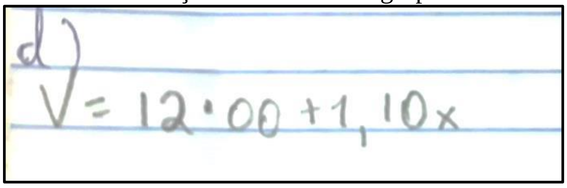
O item c), solicitava aos alunos para descobrirem qual foi a lâmpada escolhida pela vizinha de Paula, uma vez que, em cinco meses de uso, ela gastou R$ 17,50. A partir da resposta encontrada por eles, tinham que opinar se foi a melhor opção e justificar a resposta.

Segundo Calado (2020), os grupos G1, G2, G4, G5, G6, G8, G9 e G12 responderam de maneira correta, afirmando que a lâmpada escolhida foi a de LED e que seria a melhor opção, pois gastaria menos. Já os grupos G3, G7, G10 e G11, apresentaram estratégias incorretas, afirmando que a lâmpada escolhida foi a fluorescente e que esta seria a melhor opção por ter um gasto menor.

No item d) os alunos deveriam escrever uma expressão algébrica que determinasse o gasto total de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade de meses qualquer, isto é, pedia a generalização do problema. De acordo com Calado (2020) o grupo G10 apresentou a expressão $1{,}10x$, isto é, não considerou o gasto na compra da lâmpada. Desse modo, inferimos que os sujeitos desse grupo estão na generalização indutiva, pois não consideraram o valor gasto pela lâmpada, e não validaram a expressão. E, segundo Piaget (1984), na generalização indutiva, as inferências feitas pelo sujeito, sejam elas falsas ou verdadeiras, se limitam de observações a conclusões para todas as situações (PIAGET, 1984, p. 186).

Já os grupos G1, G2, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G11 e G12, segundo Calado (2020), responderam corretamente a solução apresentando a expressão algébrica: $V = 12{,}00 + 1{,}10x$, como podemos ver na resolução apresentada pelo grupo G12 na figura 4.22 a seguir.

Figura 4.22: Generalização construtiva do grupo G12 da atividade 7



Fonte: Calado (2020, p. 166)

Desse modo, esses grupos alcançaram a generalização construtiva, pois conseguiram representar corretamente a expressão para qualquer quantidade, pensando não somente no que estão "enxergando", mas conseguindo pensar além, saindo de uma construção material à construção conceitual (PIAGET, 1984). Pois, tal como é referido por esse mesmo autor, a generalização construtiva consiste em engendrar novas formas e novos conteúdos, isto é, novas organizações estruturais (PIAGET, 1984, p. 188).

Somente o grupo G3 não apresentou a generalização da atividade.

Diante das respostas apresentadas pelos grupos, desde a primeira atividade, observamos que a generalização é algo bem complexo para eles, até mesmo a generalização em linguagem natural, pois, em relação à generalização construtiva, em todas as atividades o número de grupos que generalizaram foram poucos. Dos treze grupos investigados, o grupo G8 generalizou de forma construtiva desde a primeira atividade. O grupo G5 generalizou de maneira indutiva somente na atividade 3, nas demais, alcançou a generalização construtiva. O grupo G10 apresentou evolução no desenvolvimento das atividades, generalizando de forma indutiva, porém não alcançou a generalização construtiva em nenhuma delas. Já os demais grupos transitaram entre a generalização indutiva e construtiva.

Podemos inferir, também, que as dificuldades que eles tiveram em chegar na generalização construtiva, pode ser pelo fato de que foram apresentadas várias representações da função, como, por definição, a própria função afim, ou seja, $f(x) = ax + b$, e os casos particulares, por exemplo, as translações $f(x) = x + b$, e as funções lineares definidas como $f(x) = ax$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos, agora, nestas considerações, responder ao nosso problema de pesquisa: *quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas em pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?* Para isso, tivemos por objetivo analisar, nas pesquisas de Pavan (2010) e Calado (2020), o processo de generalização desenvolvido pelos alunos, por meio de situações-problema e de atividades que envolviam o conceito de função afim, mais precisamente a ideia base de generalização, buscando identificar qual tipo de generalização esses sujeitos investigados mobilizaram, isto é, a generalização indutiva ou generalização construtiva, e as possíveis razões para a dificuldades desses sujeitos.

A fundamentação teórica, baseada na Epistemologia Genética estabelecida por Jean Piaget, particularmente no que se refere à Abstração Empírica e Abstração Reflexionante, e à Generalização Indutiva e Construtiva, sustentou as análises realizadas, pois, por meio delas, identificamos o nível de generalização alcançado pelos alunos, considerando as estratégias de resolução por eles apresentadas para as sequências de tarefas propostas por Pavan (2010) e Calado (2020).

Desta forma, foi possível identificar o nível de generalização dos estudantes (quando este era alcançado), ou se ainda estavam somente realizando abstrações, fossem elas empíricas ou reflexionantes.

No que se refere aos sujeitos colaboradores da investigação de Pavan (2010), foi possível acompanhar a evolução ocorrida no desenvolvimento da generalização durante a implementação dos problemas que compuseram o instrumento de produção de dados, uma vez que, nas primeiras tarefas, alguns alunos generalizavam de maneira indutiva e, com o desenrolar da implementação das tarefas, divididas por Pavan (2010) em baterias, foi possível identificar que as crianças, alunos da então 4ª série, foram tomando consciência de suas ações e abstraindo os resultados obtidos por elas, alcançando a generalização construtiva. Inferimos que um fator decisivo para que esse progresso ocorresse, foi o fato de que, a partir da realização das tarefas da segunda bateria, alguns alunos haviam consolidado o conceito de multiplicação, que se apresentou instável para a maioria dos estudantes quando da implementação da primeira bateria. Este fato, ilustra a afirmação de Piaget (1984) de que a generalização construtiva requer um nível mais elevado do pensamento, nível este que permite ao sujeito construir estruturas novas a partir das iniciais. Em contrapartida, inferimos, também, que foi devido à falta de domínio do conceito de multiplicação que alguns alunos tiveram mais dificuldades em generalizar de maneira construtiva.

Em relação à generalização da função afim desenvolvida pelos alunos colaboradores da investigação realizada por Calado (2020), identificamos muitas dificuldades na generalização construtiva, tanto quando solicitada de forma verbal, quanto em representação algébrica, sendo que, para nós, algo inesperado as dificuldades terem sido maiores no que se refere à verbalização. Entretanto, isso pode ser explicado pelo fato de que, desde a apresentação inicial do conceito de função afim, a lei de formação é explicitada, enquanto que, "falar sobre" o que determinada função "faz" ou de que maneira estão relacionadas as variáveis, não é algo comum de ser solicitado em sala de aula.

Desde a primeira atividade – considerada por Calado (2020) de menor complexidade para o nível de escolaridade que eles se encontravam (9° ano) -, houveram grupos que não conseguiram alcançar a generalização construtiva, que foi solicitada por representação algébrica. Esses resultados corroboram com Tinoco (2011) e Nogueira (2014), para quem a linguagem algébrica é inerente ao conceito de função, entretanto, sua utilização costuma ser de difícil aquisição pelos estudantes. Podemos inferir, também, que as dificuldades que eles tiveram em alcançar a generalização construtiva, pode ser pelo fato de que foram apresentadas várias representações da função, como, a própria função afim definida por $f(x) = ax + b$, e os casos particulares, como, $f(x) = x + b$, e $f(x) = ax$. No entanto, apesar das dificuldades encontradas, alguns grupos progrediram na generalização comparada às primeiras atividades.

Além disso, os colaboradores de Pavan (2010), por não terem conhecimento da linguagem algébrica, expressaram a generalização em linguagem verbal, enquanto que esta forma trouxe maiores dificuldades aos sujeitos de Calado (2020). Desse fato, emerge naturalmente uma indagação: será que os sujeitos colaboradores de Pavan (2010), quando chegassem no 9° ano, se fossem instados a resolver as tarefas propostas por Calado (2020), apresentariam um desempenho melhor nesse quesito? Conjecturamos que sim.

Dado o exposto e considerando as meta-análises realizadas na pesquisa de Pavan (2010) e Calado (2020), sob a perspectiva de Piaget (1984), constatamos que a principal razão pela a qual os alunos tiverem dificuldades de evoluir da generalização indutiva para construtiva, deve-se ao fato de ainda não terem tomado consciência de suas ações e das formas de abstrações que a tomada de consciência determina, tal como é referido por Piaget (1984). Pois, independentemente do nível de escolaridade e a idade dos alunos, identificamos nas análises realizadas, que, a partir do momento em que os alunos conseguem explicar as razões de suas ações a generalização se torna cada vez mais construtiva.

Constatamos, também, a importância de o professor desenvolver uma sequência didática voltada para o estudo da lei de formação da função que proporcione aos alunos várias situações, a fim de que eles possam identificar, no decorrer das tarefas ou problemas propostos, o que está acontecendo com as informações que estão colocando em correspondência, quais variáveis estão “em jogo” e quais delas são dependentes e independentes para, então, por meio de abstrações e tomada de consciência de suas ações, passarem da generalização indutiva para generalização construtiva. Isso porque, constatamos que todos os colaboradores de ambas as pesquisas aqui analisadas, evoluíram durante a implementação das tarefas propostas, corroborando com Pinto (2014), para quem, uma sequência didática bem planejada pode ser fundamental na condução do processo de ensino e aprendizagem dos alunos, levando-os à efetivação do conceito estudado, que, no nosso caso, o de função afim.

Recomendamos que as ideias-base do conceito de função, como, variável, dependência, regularidade e generalização, sejam trabalhadas, assim como é referido pelos documentos oficiais brasileiros, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental para que quando os alunos, ao chegarem aos finais (9° ano), cuja função afim é apresentada de maneira formal, consigam generalizar algebricamente as situações apresentadas, mas de maneira construtiva, não indutiva, como vimos na maioria das respostas de Calado (2020).

Isso porque não são somente as crianças que passam pela generalização indutiva, mas é o processo de generalização que tem duas etapas: indutiva e construtiva. Não se trata somente de algo relacionado à idade. Dito de outra forma, não somente é recomendável que as ideias base de função afim com a generalização sendo expressa em linguagem natural tenha seu início já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, mas que, nos Anos Finais, sejam propostas tarefas que possibilitem aos estudantes desenvolver o processo de generalização em suas duas etapas, a indutiva e a construtiva.

REFERÊNCIAS

BECKER, F. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. **Schème:** : Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, v. 6, n. e., p. 104-128, nov. 2014. Disponível em: http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/4276. Acesso em: 29 jul. 2020.

BELLINI, M, L. Piaget: uma teoria da ação. **Clareira**: Revista de Filosofia da Região Amazônica. v. 7, n. 1, p. 168-178. Jan-jul. 2020.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT**. v. 9, p. 07-20. junho de 2014.

BLATON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Jornal for Research in Mathematics Education**. v. 36, n. 5, p. 412 – 446. 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular** – Ensino Fundamental e Médio. Brasília, DF, 2017-2018.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. *In*: **Caderno dá licença**. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense, v. 6, p. 63-76, Niterói, 2007. Disponível em: http://www.dalicenca.uff.br/images/stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf. Acesso em: 08/01/2020.

CAMPITELI, H. C; CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**. v. XVI, n. 2. 2007. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/62447846.pdf. Acesso em: 16/02/2021.

CARAÇA, B. J. de. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, 1951.

CHAVES, M. I. A. de.; CARVALHO, H. C. de. Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio: Uma Sequência de Ensino-Aprendizagem. *In*: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.** 2004.

FREIRE, J. F. C de. **Direito de Expressão, Protesto e Greve:** Noções Sociais Construídas por Alunos de Diferentes Níveis de Escolaridade e os Processo de Generalização. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

GRANGER, G. G. **Filosofia do Estilo**. São Paulo: Editora Perspectiva, 1974.

LIMA, E. L *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. ed. 11. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, L, O de. **Piaget para principiantes**. São Paulo: Summus, 1980.

MANZAN, A. P. A. **A Apropriação Dos Conceitos De Função Afim E Quadrática Por Estudantes De Cursos De Engenharia**. Dissertação (Mestrado em enfermagem). Universidade de Uberaba, Uberaba, 2014.

MARTINS, L. C. **Abstração Reflexionante e Aprendizagem de Proporção**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o Conceito de Funções. *In*: Ramos, A.S.; Rejani, F.C. **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: Unicesumar, p. 121, 2014.

NOGUEIRA, C. M. I; PAVANELLO, R. M. A Abstração Reflexionante e a Produção do Conhecimento Matemático.**Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 30, p. 111-130, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1784. Acesso em: 29 jul. 2020.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Referencial Curricular do Paraná:** Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, 2018.

SALADINI, A, C. Da Ação à Reflexão: O Processo de Tomada de Consciência. **Schème**: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. v. 1, n. 2, p. 31-54. jul-dez. 2008.

SOUZA, V. D. M.; MARIANI, V. C.**Um Breve Relato do Desenvolvimento do Conceito de Função**. *In*: **V EDUCERE.** Curitiba, 2005. v. 1. p. 1-12.

PAVAN, L. R. **A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PIAGET, J. **Investigaciones Sobre La Generalización**: estudios de epistemoligía y psicología genéticas. Tlahuapan: Editora Premià, 1984.

PIAGET, J. **Abstração Reflexionante**: Relações Lógico-matemáticas e Ordem das Relações Espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PINTO, C. F. **Dissertações Brasileiras sobre o Ensino de Função Afim, a partir da implementação de Sequências Didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012: Questões para formação de professores e para pesquisa**. Dissertação Mestrado. UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.

QUEIROZ, P. C. G. Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função afim na Educação Básica:estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas.**Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** v. 13, n. 2, p. 25-50, nov. 2020.

RUIZ, A. R.; BELLINI, L. M. **Matemática: Epistemologia Genética e Escola**. Londrina: Edições CEFIL, 2001.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de função.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

ZUFFI, E. M. Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função. *In*: **Hipátia**, Campos do Jordão (SP). v. 1, n.1, p. 1-10, dez. 2016.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function.*In:* **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 16, n. 1, p. 37-85. 1976.