UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PRODUZINDO INFINITOS: UM ESTUDO SOB O OLHAR DO MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

Vinícius Aparecido Salatta

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

PRPGEM

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR

Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

PRODUZINDO INFINITOS: UM ESTUDO SOB O OLHAR DO MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

VINÍCIUS APARECIDO SALATTA

Orientador:
Sérgio Carrazedo Dantas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Junho, 2021

Ficha de identificação da obra elaborada pela Biblioteca
UNESPAR/Campus de Campo Mourão
Bibliotecária Responsável: Liane Cordeiro da Silva CRB 1153/9

Salatta, Vinícius Aparecido
S161p Produzindo infinitos: um estudo sob o olhar dos campos semânticos. / Vinícius Aparecido Salatta. -- Campo Mourão, PR : UNESPAR, 2021.
111 f. : il.; color.

Orientador: Sérgio Carrazedo Dantas.
Dissertação (Mestrado) – UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), 2021.
Linha de Pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática.

1. Matemática-Estudo e Ensino. 2. Infinito. I. Dantas, Sérgio Carrazedo (orient). II. Universidade Estadual do Paraná–Campus Campo Mourão, PR. III. UNESPAR. IV. Título.

CDD 21.ed. 510.7
511.62

Vinícius Aparecido Salatta

PRODUZINDO INFINITOS: UM ESTUDO SOB O OLHAR DOMODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

Comissão Examinadora:

Sérgio C. Dantas

Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – campus Apucarana

Prof. Dr. Everton José Goldoni Estevan– Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – campus Apucarana

Prof. Dr. José Ricardo Viola dos Santos - Membro da Banca Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS) – campus Campo Grande

Resultado: Aprovado.

Campo Mourão
Junho, 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por me permitir ter a saúde, força e oportunidade necessária para chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Vilma e Celso, os quais me mostraram a importância dos estudos desde criança e me incentivaram a seguir esse caminho. Eu com certeza não estaria aqui se não fosse por vocês. E aos meus irmãos, Geovane e Nikolas que me proporcionaram boas risadas quando eu precisava descansar.

Agradeço à minha querida e amada esposa que esteve ao meu lado sempre em todos os momentos que precisei de uma palavra de incentivo, um ombro para encostar a cabeça depois de um dia cansativo, ou simplesmente alguém que aturasse as minhas longas conversas sobre esse trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Sérgio Carrazedo Dantas, que ao longo dessa caminhada já considero amigo. Agradeço pela força e orientações valiosas as quais levarei comigo durante toda a minha vida como pesquisador e como ser humano. Obrigado pela oportunidade que me deu para ser um dos seus primeiros orientandos.

Aos meus colegas do grupo Autômato, os quais renderam bons momentos de reflexão. Sem eles provavelmente essa pesquisa não teria ocorrido da forma que está aqui. Tenho certeza que muitas outras boas discussões me esperam nesse grupo.

A todos os meus colegas de mestrado do PRPGEM, professores e demais funcionários do programa. Nossa convivência e nossas discussões são momentos que carregarei sempre. Podem sempre contar comigo.

A todos os que me enviaram suas orações, forças, energias e pensamentos positivos quando estava com COVID-19. Tenho certeza que minha recuperação veio não só de Deus, mas de todos vocês também.

Por fim, agradeço a todos os que estiveram envolvidos nesse trabalho e em minha formação acadêmica, direta ou indiretamente. Sem a contribuição de vocês nada disso seria possível.

Tão correto e tão bonito
O infinito é realmente
Um dos deuses mais lindos
- Renato Russo

RESUMO

Apresenta-se nesse trabalho uma pesquisa fundamentada pelo Modelo dos Campos Semânticos voltada ao estudo dos resíduos de enunciação produzidos por alunos de Cursos de Graduação em Matemática quando são colocados de frente a situações que tratam de infinito. Assim, viabiliza-se a produção de significados diante de possíveis direções de interlocução manifestadas por eles em um questionário desenvolvido e aplicado pela plataforma do GeoGebra: o GeoGebra Materiais e o GeoGebra *Classroom*. A aplicação desse questionário foi realizada de forma inteiramente *online* devido ao cenário pandêmico causado pela doença COVID-19. Para a construção do questionário, foi preciso realizar um estudo de como o conceito do infinito foi tratado em alguns momentos durante o tempo, além de um levantamento bibliográfico voltado a pesquisas que tratem do tema em revistas brasileiras de Educação e Ensino de Matemática. A fundamentação no Modelo dos Campos Semânticos permitiu uma leitura mais refinada das enunciações produzidas pelos alunos, tornando plausível certas direções de interlocução que não seriam possíveis se não fossem por uma leitura positiva e plausível. Após a produção e análise dos dados, percebe-se que muitas vezes os alunos parecem manifestar uma crença-afirmação cujas legitimidades são advindas de sua vivência no dia a dia e não de uma cultura acadêmica de um Curso de Graduação em Matemática onde outras legitimidades predominam. Tal percepção se deu por meio da constatação de enunciações que parecem estar pautadas no uso da ferramenta *zoom* bem como afirmações que muitas vezes nos levam a entender que, para os alunos, o limite quase sempre *tende* mas nunca *é*.

Palavras-chave: Infinito. Modelo dos Campos Semânticos. GeoGebra.

ABSTRACT

In this work, we present a research based on the Semantic Fields Model focused on the study of the enunciation residues produced by students of undergraduate Mathematics courses they are faced with situations that deal with infinity. In this way, we are producing meanings in the face of possible directions of interlocution manifested by them in a questionnaire developed and applied by the GeoGebra platform: GeoGebra Materials and GeoGebra Classroom. The application of this questionnaire was carried out entirely online due to the pandemic scenario caused by the disease COVID-19. For the construction of the questionnaire, it was necessary to carry out a study of how the concept of the infinite was treated in some moments during the time, in addition to a bibliographic research focused on the topic in Brazilian journals of Education and Teaching of Mathematics. The foundation in the Semantic Fields Model allowed us a more refined reading of the statements produced by the students, making plausible certain directions of interlocution that would not be possible had it not been for a positive and plausible reading. After the production and analysis of the data, we noticed that students often seem to manifest a belief-affirmation whose legitimacy comes from their daily experience and not from an academic culture of an undergraduate Mathematics courses where other legitimacy predominates. This perception occurred through the observation of statements that seem to be based on the use of the zoom tool, as well as affirmations that often lead us to understand that, for students, the limit almost always *tends* but never *is*.

Keywords: Infinite. Semantic Fields Model. GeoGebra.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

O trabalho que apresento a seguir é fruto de uma curiosidade minha enquanto aluno de graduação voltada ao objeto *infinito*, curiosidade essa resultante de dois elementos. O primeiro é a dificuldade que tive em compreender este conceito quando explicitado nas disciplinas que cursava durante a minha graduação, dificuldade essa que hoje acredito que se deu pelo pouco aprofundamento desse conceito quando era apresentado. Contudo, não acho que o infinito que conheci durante minhas aulas era insuficiente para se compreender os outros conceitos que meus professores queriam expor naquele momento, pois nesse caso entendo que o infinito era apenas um meio para um fim. Mas eu queria mais.

Com isso se soma meu profundo interesse em tentar compreender coisas que não compreendo e que de certa forma provocaram ou ainda provocam grandes discussões quando evocados em certos meios. O infinito foi o objeto que me "capturou" por isso e, durante a leitura desse trabalho, espero que o *um autor* instituído por quem lê esse texto possa compartilhar pelo menos um pouco desse fascínio que adquiri ao longo de minha vida acadêmica.

Diante disso apresentei uma proposta ao meu orientador. Essa ideia amadureceu e nosso objetivo então se tornou realizar um estudo das produções de significado[1] para infinito feita por alunos de Cursos de Graduação em Matemática com o auxílio do *software* GeoGebra e fundamentados pelo Modelo dos Campos Semânticos (MCS). O resultado desse estudo é apresentado nos capítulos que se seguem.

Nosso primeiro movimento no início dessa pesquisa foi descobrir como o infinito foi tratado ao longo do tempo. Descobrimos que Zenão foi um grego controverso ao propor seus paradoxos, os quais remetendo ao infinito podem ir em direção tanto ao desejo do eleata de provar que o movimento não existe, quanto ao oposto dessa ideia ao propor paradoxos que mostram o absurdo de se considerar tal hipótese.

Descobrimos que o tempo pode ser infinito seja ele seguindo uma linha reta ou em ciclos e que, em certas condições, um hotel poderia abrigar mais pessoas do que imaginávamos ser possível. Esses e outros infinitos foram reunidos no Capítulo 1 desse

[1] Para o MCS, significado é aquilo que efetivamente se diz sobre um objeto, sendo objeto aquilo para o que se produz significados.

trabalho a fim de apresentar como o infinito tem sido tratado e representado em diferentes culturas, em algumas de forma mais ou menos complexas do que outras, mas sempre provocando dificuldades ou facilitando certas abordagens.

Após esse estudo histórico sobre o infinito, apresentamos como esse conceito é abordado em pesquisas de revistas brasileiras de *qualis* B1 ou superior nas áreas de Ensino ou Educação. Esse levantamento bibliográfico é detalhado no Capítulo 2 de modo que os artigos selecionados foram divididos em quatro categorias: História, Artes e Filosofia; Análise de Livro Didático; Pesquisa de campo; e Tecnologias.

No Capítulo 3 objetivamos expor a teoria que movimentou esse estudo, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), o qual possibilitou um estudo epistemológico voltado a entender melhor *de onde o outro está falando*, quais são as justificações[2] que o levam a produzir determinados significados e quais são as possíveis direções de interlocução[3] encontradas quando observamos seus resíduos de enunciação[4]. Tudo isto aliado a uma leitura plausível e positiva em que o sujeito não é lido pela falta e sim de um modo que torne possível determinados enunciados produzidos por ele.

Diante disso entendemos que o MCS se mostra pertinente a essa pesquisa uma vez que queremos verificar quais são os possíveis infinitos produzidos pelos alunos sem privilegiar concepções adotadas por uma ou outra cultura. Para isso precisamos considerar o sujeito como alguém cujas legitimidades[5] são produzidas dentro de uma cultura matemática (ou mais especificamente uma cultura do Curso de Graduação em Matemática) em que fazer determinadas afirmações sobre o infinito, ou simplesmente pensar em infinito é algo possível. Ao mesmo tempo, consideramos o contexto social e cotidiano de fora desta academia, um lugar em que falar sobre o infinito causa mais estranhamento do que no outro, pois as legitimidades que existem nesse meio são baseadas no caráter finito das coisas como a distância de nossas casas ao supermercado ou a quantidade de páginas e palavras desse trabalho.

Apresentada a base teórica da pesquisa, os procedimentos metodológicos adotados são abordados no Capítulo 4. Nossa opção de produção de dados se deu por

---

[2] Justificação é aquilo que o sujeito acredita que lhe autoriza a dizer o que diz.
[3] Basicamente, quem fala, fala na direção de um interlocutor, um ser cognitivo instituído por quem está falando. O interlocutor é que é capaz de produzir os mesmos significados que o sujeito com as mesmas justificações que ele, como autorizando o sujeito a dizer o que diz.
[4] Algo que eu acredito ter sido dito por alguém.
[5] Legitimidade está ligado a modos de produção de significados. Diversas culturas tentam firmar suas legitimidades em uma busca por desautorizar o que é legítimo em outras. Por exemplo, as religiões.

meio de um questionário realizado no site do GeoGebra presente no recurso *Atividade* da plataforma, a qual permite criar formulários semelhantes aos mais tradicionais como o *Google Forms,* por exemplo, mas com a possibilidade adicional de inserir construções do próprio GeoGebra para que os usuários possam interagir. Essas interações ficam salvas em outro recurso da plataforma, o *Classroom*, um ambiente que permite que quem criou a atividade tenha acesso a todos os *resíduos de enunciação* daqueles que interagiram na atividade, tanto os registros escritos quanto as manipulações nas construções anexadas à atividade.

Neste capítulo ainda apresentamos quais foram as questões abordadas no questionário e algumas das direções de interlocução que consideramos possíveis de serem tomadas pelos alunos. As direções expostas não são únicas, bem como não tínhamos a certeza de que elas surgiriam nos resíduos de enunciação dos alunos, mas apresentamos a partir de discussões realizadas considerando-se o meio acadêmico, o meio não-acadêmico e o *software* GeoGebra.

Diante do cenário pandêmico provocado pela doença COVID-19 que aconteceu durante o período da pesquisa, a aplicação do questionário se deu por meio do compartilhamento do link da atividade via e-mail com alunos de Cursos de Graduação em Matemática, os quais poderiam responder por um computador dentro de suas residências ou quaisquer outros ambientes sem a necessidade de interação física entre os participantes e os pesquisadores. Isso possibilitou que alunos de todo o Brasil tivessem acesso ao questionário uma vez que esse foi compartilhado com professores do Curso de GeoGebra, os quais atuam de vários estados do país.

As análises dos dados produzidos podem ser observadas no Capítulo 5, onde buscamos então produzir os possíveis infinitos que os alunos apresentam em seus resíduos de enunciação.

CAPÍTULO 1
UM ESTUDO SOBRE O INFINITO

No momento em que começamos a escrever este capítulo, a primeira dificuldade que surgiu foi em como descrever um conceito tão complexo e intrigante como o infinito. Diante disso, não acreditamos que ao ler esse capítulo você possa alcançar um entendimento completo sobre todas as interpretações possíveis para este conceito, pois nós mesmos talvez não as tenhamos alcançado e seria ingênuo imaginar o contrário.

Durante algumas leituras concluímos que o infinito é algo que causa questionamentos desde o momento em que o homem o criou e, ironicamente, não conseguiu dar conta de sua própria invenção e é isso o que apresentamos nesse capítulo. Conforme mencionado, nossa intenção não é a de tentar mostrar algum domínio desse conceito, e sim a de relatar como os infinitos tem sido representados e tratados ao longo do tempo, desde Zenão e seu questionamento sobre a existência do movimento, passando por teorias sobre a infinidade ou não do Universo em que vivemos, a hospedagem em um hotel com infinitos quartos, chegando ao infinito expresso em forma de arte.

1.1 Questionando a existência do movimento

Zenão de Eleia foi talvez um dos primeiros a utilizar a ideia de infinidade ao propor seus famosos paradoxos. Como infelizmente os textos originais de Zenão foram perdidos, o único texto que torna possível o conhecimento de tais paradoxos são os textos de Aristóteles, o qual os apresentou com o objetivo de refutá-los posteriormente, gerando assim uma incerteza quanto a fidelidade entre os textos apresentados por Aristóteles e o original perdido de Zenão (MORRIS, 1999). Um desses paradoxos diz respeito a uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga, o qual foi formulado em meados do século V. a.C. por Zenão e pode ser apresentado da seguinte maneira:

Suponha que Aquiles, um veloz guerreiro, tenha decidido desafiar uma tartaruga para uma corrida. Sendo obviamente a tartaruga muito lenta, Aquiles decide dar uma chance a ela permitindo que esta comece a uma certa distância a sua frente. Segundo Zenão, partindo deste pressuposto, Aquiles nunca deverá alcançar a tartaruga uma vez que, assim que ele chegar ao ponto de onde a tartaruga partiu no início da corrida, essa por sua vez já estará em um ponto mais adiante. Assim que Aquiles chegar a esse novo ponto onde se encontra a tartaruga, mais uma vez ela já terá andado outra distância à frente de Aquiles, continuando esta série interminavelmente de modo que sempre haverá uma distância entre os dois por menor que seja.

Antes de discutirmos esse paradoxo mais detalhadamente, é interessante pensar quem foi Zenão, ou melhor, de quem Zenão foi discípulo.

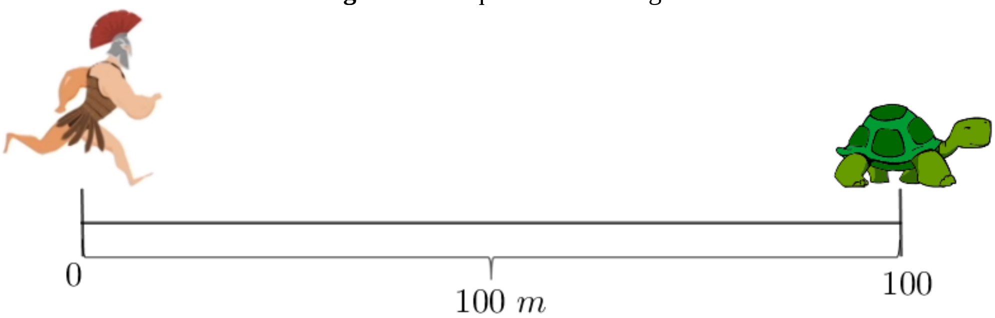
Zenão fazia parte da escola dos eleatas, a qual tinha como mentor o filósofo Parmênides. Sobre suas ideias

> A filosofia de Parmênides é conhecida por [...] conceber o mundo como imutável: não há movimento, não há mudança, não há nascimento nem morte, não há espaço nem tempo. Os eleatas defendiam, portanto, a unicidade do espaço, que deveria ser indivisível, e a permanência do ser no tempo, que corresponde à ausência de mudança (ROQUE, 2012, p. 133).

E ainda, quem acreditasse nessa realidade estaria sendo enganado pelos seus sentidos (MORRIS, 1999). Sendo assim, Zenão pode ter criado seus paradoxos para mostrar que o movimento é impossível, como descreve Aristóteles. Entretanto, não é possível saber se essa informação é correta. Outra ideia defendida por alguns filósofos sugere que Zenão tenha apresentado seus paradoxos a fim de mostrar que o espaço e o tempo eram indivisíveis, pois caso contrário uma situação como a de Aquiles e a tartaruga chegaria em conclusões que desafiavam o senso comum. Desse ponto de vista, o fiel seguidor de Parmênides estava defendendo seu mestre, pois naquela época uma quantidade infinita de partes não poderia de forma alguma se tornar uma entidade imutável (MORRIS, 1999).

Voltando ao paradoxo, hoje em dia temos recursos mais do que suficientes para tentar entender onde Zenão falhou (ou acertou, já que não sabemos ao certo suas intenções ao propor esses paradoxos) ao apresentar esse problema. Isso pode ser resolvido pensando da seguinte maneira: para facilitar os cálculos imaginemos que Aquiles e a tartaruga estão à uma distância de $100\ m$ um do outro, e que Aquiles corre dez vezes mais rápido do que a tartaruga. A situação é ilustrada na Figura 1.1.

Figura 1.1: Aquiles e a tartaruga



Fonte: Produzida pelo autor[6].

Conforme foi descrito, Aquiles é dez vezes mais rápido do que a tartaruga. Logo, quando ele alcançar o ponto em que a tartaruga iniciou a corrida, essa por sua vez terá corrido $1/10$ da distância que Aquiles percorreu, ou seja, $10\ m$. Quando esse por sua vez chegar ao novo ponto de onde se encontrava a tartaruga, ela ainda estará $1\ m$ a sua frente, e assim sucessivamente. Sendo Aquiles representado por P_1 e a tartaruga por P_2, a Tabela 1.1 é apresentada com uma relação entre cada uma dessas etapas e a distância entre os dois competidores.

Tabela 1.1: Distância entre Aquiles e a tartaruga

Etapa	0	1	2	3	4	5	6
Distância $\overline{P_1P_2}$ (m)	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001

Fonte: Produzida pelo autor.

Observando a Tabela 1.1, podemos ser enganados a ponto de chegarmos a mesma conclusão que Zenão talvez queria demonstrar, pois mesmo que o número de etapas tendesse ao infinito, a distância entre Aquiles e tartaruga apenas seria um número muito pequeno, mas nunca 0. O segredo para resolver o problema está em observar que os valores da distância $\overline{P_1P_2}$ seguem uma progressão geométrica infinita de razão $1/10$. Sendo assim, considerando a como o primeiro termo desta progressão e q a razão, podemos utilizar a expressão para se calcular a soma dessas distâncias, de onde obtemos:

$$\frac{a}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9}$$

[6] Produzido no GeoGebra a partir de adaptações de imagens retiradas do Google Imagens

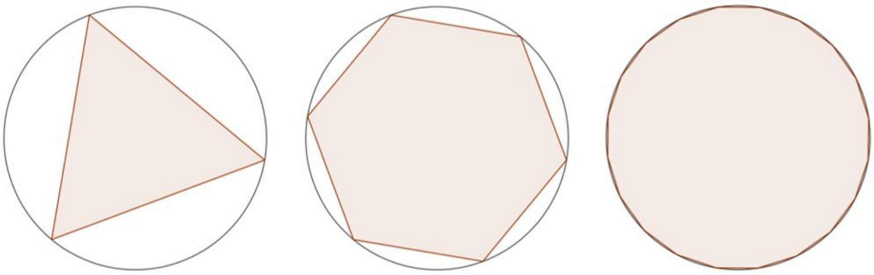
O resultado obtido parece estranho, mas não é. Apesar de a fração obtida representar uma dízima periódica infinita, o resultado dessa dízima é um número finito racional: $1000/9$. Este processo infinito que resulta em algo finito é chamado de *infinito real* (também conhecido como *infinito atual* ou *infinito em ato*) e mostra que, nesse caso, Aquiles alcançaria a "veloz" tartaruga quando atingisse aproximadamente $111{,}11\ m$ ou, precisamente, em $111,\overline{11}\ m$. Dessa forma, podemos imaginar que o possível significado produzido por Zenão foi imaginar que o tempo ou a distância podem ser particionados de forma discreta, o que sabemos que não é possível. O tempo e a distância entre os dois competidores ocorrem simultaneamente, possibilitando que Aquiles alcance e ultrapasse a tartaruga, e não deve ser tratado como um jogo de turnos em que uma das peças se move e somente então a outra realiza seu movimento.

O mesmo problema pode ser resolvido ao observar a passagem de tempo de cada etapa, a qual mesmo também tendendo ao infinito, resulta em um número finito. Outra alternativa é observar que a sequência de distâncias pode tender a 0 quando calculado seu limite com o número de etapas tendendo ao infinito, mas não detalharemos sobre essas abordagens nesse texto. O importante é mostrar que, se seguirmos o pressuposto de que Zenão tinha a intenção de provar a impossibilidade do movimento, concluímos que há uma incoerência em sua problematização, pois embora ele e muitos de sua época não acreditassem que um número infinito de etapas pudesse resultar em algo finito, sabemos que matematicamente isso é possível e já está bem estabelecido entre os matemáticos. No entanto, se sua intenção era provar a indivisibilidade do tempo e do espaço, uma vez que supor o contrário causaria coisas absurdas como uma pessoa nunca vencer uma tartaruga em uma corrida, talvez Zenão tenha sido feliz em seu paradoxo.

1.2 Eudoxo e o método da exaustão

Outro exemplo da utilização do conceito de infinito aparece quando começamos a discutir sobre Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.) o qual levou adiante as ideias de Zenão ao utilizar um número infinito de etapas para obter um resultado finito. O que ele fez foi utilizar a ideia de números infinitamente pequenos para calcular áreas e volumes. Para exemplificar e facilitar a demonstração, utilizamos a primeira opção ao aproximar a área de uma circunferência utilizando a área de um polígono regular inscrito nela. A Figura 1.2 mostra que à medida que se aumenta o número de lados do polígono, esse se aproxima cada vez mais do formato da circunferência.

Figura 1.2: Polígono com 3, 6 e 20 lados, respectivamente, inscritos na circunferência



Fonte: Produzida pelo autor.

Podemos mostrar que a área de um polígono regular de n lados tende à área da circunferência quando n tende a infinito. Para isto, lembremos da fórmula de área de um polígono regular de n lados, a qual é dada por:

$$A_{pol} = \frac{n \cdot a \cdot h}{2}$$

em que a e h representam as medidas do lado e da apótema do polígono, respectivamente. Intuitivamente, podemos observar pelos desenhos dados na Figura 1.2 que, a medida que o número de lados do polígono se torna suficientemente grande, a forma do polígono regular se aproxima da forma da circunferência. Assim o limite de h acaba tendendo à medida do raio r da circunferência, enquanto o perímetro do polígono $a \cdot n$ tende à medida do comprimento da circunferência, ou seja, $2\pi r$. Assim, a fórmula da área do polígono pode ser reescrita como:

$$A_{pol} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

sendo esta a área da circunferência que utilizamos atualmente.

1.3 A infinitude de Deus

No livro "O mistério do Alef" escrito por Aczel (2003), é mencionado um momento após a destruição do Templo de Jerusalém pelos romanos no ano 70 d.C. e a proibição do estabelecimento de judeus no local, fazendo com que esses tivessem que se dispersar pela Judeia, uma região que ficava ao redor de Jerusalém. Para substituirem os antigos sacerdotes do templo, surgiram os primeiros rabinos, os quais fundaram uma escola de estudos (ACZEL, 2003). Entre esses rabinos, destaca-se o rabi Iossef bem Akiva (50-132 d.C.).

Akiva foi o responsável por escrever uma série de tratados chamada “O caminho da Carruagem”, em nosso idioma. Segundo Aczel (2003)

> Seus escritos ensinavam aos fieis um novo tipo de espiritualidade, por meio de um método que consistia em criar imagens visuais de lugares celestiais, com o propósito de induzir à meditação e, através dela, à proximidade com o Divino (ACZEL, 2003, p. 30).

Tais práticas criadas por Akiva possibilitavam ser intensas a tal ponto que prometiam experiências fortes demais para a mente humana. Para se ter uma ideia, uma dessas experiências oferecidas por Akiva permitia a visualização dos discípulos de uma luz infinitamente brilhante, representando o manto que cobria Deus quando se encontrou com Moisés no monte Sinai (ACZEL, 2003). Aczel (2003) comenta sobre uma história em que durante uma das sessões de Akiva com mais três amigos, todos os quatro conseguiram atingir um desses locais celestiais. Ainda segundo o autor,

> A experiência foi tão intensa que o primeiro, o rabi Ben Azai, fitou a luz infinita e morreu: sua alma ansiou tanto pela fonte da luz que imediatamente desfez o corpo físico e deixou de existir. O segundo, o rabi Ben Abuia, fixou o olhar na luz divina e viu dois deuses em vez de um. Ele se tornou um apóstata. O terceiro, o rabi Ben Zoma, olhou de relance para a luz infinita do manto de Deus e perdeu a razão, pois não pode reconciliar a vida ordinária com a visão. Somente o rabi Akiva sobreviveu à experiência (ACZEL, 2003, p. 30).

No século seguinte essas práticas passaram a ser chamadas de Cabala, de modo que seus ensinamentos se espalharam de boca em boca de forma sigilosa uma vez que naquela época praticar o Cabala era considerado misticismo, além de que a experiência prometida pela prática do cabalismo era intensa e perigosa demais para uma pessoa comum. Em 1280, um cabalista espanhol reuniu tudo o que se conhecia sobre a Cabala para escrever um livro, o *Zohar*, que significa “esplendor” ou “luz intensa”, representando a luz da infinidade de Deus (ACZEL, 2003).

Com o tempo o *Zohar* foi se propagando e a prática da Cabala passou a ser permitida para mais pessoas. Tudo isso fez com que o cabalismo se tornasse mais refinado fazendo com que seus praticantes estabelecessem alguns elementos essenciais dentro dessa tradição.

Na Cabala foram estabelecidos dez *sefirot*, dez conjuntos de qualidades para o Divino. O número 10 surge das permutações do nome de Deus em hebraico, o qual possui quatro letras de modo que cada uma representa um mundo. Quem deseja se aproximar de

Deus, deve saber seguir esses preceitos, pois por trás das dez *sefirot* está Deus, tão vasto e tão supremo que os cabalistas não conseguem descrevê-lo, por esse motivo atribuindo-o o nome *Ein Sof*, que significa “infinito”. (ACZEL, 2003). Portanto, sendo impossível compreender a infinitude de Deus, os cabalistas criaram as dez *sefirot* como aspectos finitos de Deus, o que gerou certa polêmica. Os cabalistas passaram a ser acusados de polítéismo, pois como poderia Deus ser finito e infinito ao mesmo tempo? Sobre isso, Aczel (2003) afirma que, “segundo os cabalistas, Deus, o *Ein Sof*, é infinito, mas as *sefirot* são parte Dele, formando uma unidade ‘assim como a chama se junta ao carvão’. Embora as *sefirot* pareçam ter existência múltipla, todas são uma e fazem parte do Infinito” (ACZEL, 2003).

Hoje em dia é conhecido pelos matemáticos que se tratando de infinito o todo não é necessariamente maior que suas partes. No entanto, esse tipo de visão de infinito ainda passava longe da concepção que os cabalistas tinham sobre esse conceito.

1.4 Os transfinitos de Cantor

Georg Cantor (1845-1918) foi um dos matemáticos responsáveis por elevar o nível do conceito de infinito em seus trabalhos, e tanto a Cabala quanto a cultura judaica podem ter sido fontes de inspiração para ele durante a criação dos números transfinitos (ACZEL, 2003, passim), mas deixaremos esse assunto para um ponto mais à frente nessa seção. Por enquanto achamos interessante contar a jornada de Cantor com os números transfinitos partindo de um ponto mais anterior a esse.

Embora Cantor se destaque pelos seus estudos envolvendo o infinito, pode-se dizer que a recepção de suas ideias não eram das mais calorosas entre a maioria dos matemáticos, tanto que houve grande dificuldade para divulgar seus trabalhos em algumas revistas da época. A revista *Acta Mathematica* foi a única que permitiu a publicação de seus textos, pois contava com a ajuda do bom amigo, matemático e dono da revista Gösta Mittag-Leffer (1846-1927) (ACZEL, 2003).

Apesar de todas as dificuldades que Cantor teve com a resistência de grande parte da comunidade científica em aceitar suas ideias, ele foi o primeiro a não visualizar o infinito como um obstáculo e sim como um novo caminho. Ele passou a lidar com o conceito de infinito real propriamente dito, produzindo assim um novo significado, diferente de qualquer outro produzido pela comunidade matemática daquela época.

Diferentemente do conceito de *infinito potencial*[7], o infinito real é o nome dado para um processo que apesar de ser infinito resulta em algo finito, como por exemplo a série infinita $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = 1$. Sua definição de infinito partia de ideias presentes em sua teoria dos conjuntos, como números em uma linha que convergiam para um ponto-limite. Segundo Aczel (2003, p. 97), “o ponto-limite de um conjunto é um ponto arbitrariamente próximo aos membros do conjunto [...] Por exemplo, o conjunto de números irracionais em um intervalo é o conjunto de pontos-limite de números racionais no intervalo”. Aczel (2003) continua e escreve que a partir deste ponto, Cantor passou a imaginar como seria então o conjunto de pontos-limite dos pontos-limite, e a partir disto, definiu o primeiro conjunto de P, sendo o conjunto de pontos-limite desse conjunto de P', o conjunto de pontos-limite de pontos-limite seria, então, P''. Desta maneira, seguindo seu raciocínio, seria possível obter infinitos conjuntos deste tipo, fazendo com que Cantor passasse a perceber um novo mundo dos números, além de qualquer número finito: os números transfinitos.

A princípio, Cantor supôs os números transfinitos como “um número que fosse infinito, porém o menor número maior do que todos os números finitos” (ACZEL, 2003). Um exemplo do que Cantor quis dizer com essa suposição são os números naturais, os quais são gerados ao acrescentar 1 ao número antecessor: $4 = 3 + 1$, $12 = 11 + 1$, $276 = 275 + 1$. Dessa forma, apesar de não haver o maior número, há sempre a possibilidade de se obter um número maior somando-se 1 a este número, ou seja, assim obtemos um número maior do que qualquer número finito.

Utilizando o conceito de enumerabilidade, ele conseguiu distinguir duas ordens de transfinitos: a primeira sendo a ordem dos números racionais e a segunda dos números reais. No entanto, pensava-se se essa segunda ordem era a próxima direta depois da primeira ordem, ou se havia uma ou mais ordens de infinito intermediária entre as duas. Com o tempo, Cantor chegou a encontrar três ordens de infinito sendo a primeira a ordem dos números inteiros, racionais e algébricos (raízes de equações do segundo grau de coeficientes inteiros), a segunda ordem dos números transcendentais (números irracionais que não são raízes de equações do segundo grau de coeficientes inteiros, como π e e) e a terceira ordem como a ordem das funções contínuas e descontínuas na reta real (ACZEL, 2003).

---

[7] Também chamado de *infinito em potência*, basicamente é um processo infinito que não tem fim, como por exemplo a sequência dos números naturais

O próximo passo de Cantor foi então tentar identificar a cardinalidade de um conjunto infinito. A cardinalidade de um conjunto nada mais é do que a quantidade de elementos que aquele conjunto possui. No entanto, descobrir a cardinalidade de um conjunto infinito não era tão fácil, e Cantor sabia que precisaria de uma notação especial para denominar seus inúmeros infinitos. Para isso, utilizou a notação $\aleph$ (alef). A notação é pertinente, pois Aczel (2003) comenta sobre alguns historiadores que investigaram a vida de Cantor mais a fundo e dizem que ele pertencia a uma família de ascendência judaica. Sendo assim, mesmo sem um conhecimento muito aprofundado da Cabala, talvez Cantor conhecesse algumas tradições e discussões sobre o Deus infinito *Ein Sof*, e por isso associou seus números transfinitos com a primeira letra desse nome em hebraico.

1.5 A concepção de tempo

Apesar de hoje em dia ser mais comum pensar na passagem de tempo como uma linha reta, de modo que em um determinado ponto podemos voltar ao passado ou ir para o futuro, uma outra interpretação se torna possível quando olhamos o tempo como um evento cíclico. Morris (1999) comenta sobre alguns filósofos da antiguidade que acreditavam que o Universo estaria destinado a passar pelos mesmos eventos de tempos em tempos infinitas vezes. Essa ideia está ligada a um conceito diferente de tempo, pois dessa forma não existiria o conceito de linha reta com um início e um fim, mas sim como sendo circular.

Essa ideia foi bastante defendida por Aristóteles e se baseava no que muitos acreditavam naquela época sobre a existência de ciclos cósmicos, o que não é impossível de se conceber nos dias de hoje. Basta observarmos que certos fenômenos naturais são cíclicos, como o dia e a noite, os meses e estações do ano e as fases da lua, por exemplo. Até mesmo determinadas ações realizadas por nós no dia a dia são feitas de forma cíclica. Sobre isso, Morris (1999, p. 36) afirma que “talvez devamos lembrar que por vezes nós mesmos falamos dessa maneira. Falamos frequentemente de levantar da cama na ‘mesma hora’ todas as manhãs, ou de ir para o trabalho, ou de jantar, ou de ir para a cama em algum momento particular”.

Muitas civilizações acreditavam ou ainda acreditam no conceito de ciclos cósmicos, como os hindus, maias, astecas, antigos povos chineses e gregos. Apenas detalhando algumas delas, os hindus acreditam que o mundo está destinado a ser destruído e recriado de tempos em tempos de ampla duração, e alguns sábios indianos chegaram a conceber ciclos dentro de ciclos, sendo o menor deles um período de 360 anos e o maior de 300 trilhões de anos, sendo esse último referente ao período de vida dos deuses (MORRIS, 1999).

Outro exemplo talvez bastante conhecido do século XXI seja o ocorrido com a preocupação que se teve ao perceber que o calendário maia chegaria ao fim no dia 21 de dezembro de 2012, resultando no fim eminente dos tempos. No entanto, tudo não passou de uma informação mal interpretada por parte da população, uma vez que a civilização maia é uma das quais, conforme citamos anteriormente, acreditava em ciclos cósmicos. A NASA (National Aeronautics and Space Administration) naquela época foi obrigada a tranquilizar a população e explicar o fenômeno que estava ocorrendo, o qual foi divulgado por meio de um vídeo e uma matéria no site da instituição intitulada "Além de 2012: Por que o mundo não acabou[8]". No vídeo em questão é explicado que os maias conceberam o mundo há 5125 anos, isso em 2012, o que seria o ano 3114 a.C. Como os maias mediam o tempo por meio de 13 blocos chamados *Bak'tuns*, o fim de uma era é marcado ao fim do tempo marcado nesses blocos, iniciando-se, portanto, uma nova era, um novo ciclo de 13 *Bak'tuns*.

Outra doutrina que defendia o tempo cíclico é o estoicismo, o qual foi fundado por Zenão de Cítio por volta de 300 a.C. Suas crenças tomavam forma através de afirmações de que "os mesmos eventos estavam fadados a se repetir em ciclos interminavelmente recorrentes. Ao fim de cada ciclo, todo o cosmo seria destruído num imenso incêndio, para depois nascer outra vez" (MORRIS, 1999, p. 37). Outra crença pregada era a da impossibilidade do ser humano modificar o curso de eventos, estando destinados a viverem a mesma vida incontáveis vezes. No entanto, o mais interessante de se comentar sobre o estoicismo está relacionado a sua concepção de tempo.

Segundo os estoicos o tempo era cíclico e finito, mas o cosmo visível (Terra e céu) estava dentro do vazio infinito. A fim de provar essa ideia, os estoicos utilizavam o seguinte argumento

> Suponha que uma pessoa se poste na borda do cosmo e estique o braço para fora. Que vai acontecer? Ela o esticará para dentro do vazio. Agora imagine que essa pessoa se poste um pouco mais para fora e estique o braço de novo. Obviamente esse processo pode ser continuado indefinidamente. Isso, diziam os estoicos, prova que o vazio é infinito (MORRIS, 1999, p. 40).

---

[8] "Beyond 2012: Why the World Didn't End" Disponível em https://www.nasa.gov/topics/earth/features/2012.html

Em contrapartida, como havíamos comentado no início dessa seção, a ideia mais comum é a de uma linha do tempo retilínea se estendendo tanto para trás (passado) quanto para frente (futuro). As religiões judaico-cristãs acreditam nesta concepção baseadas nos ensinamentos e textos deixados no Antigo e Novo Testamento, os quais pregam que Deus criou o Universo a partir de um vazio sem forma e, depois de seis dias, descansou no sétimo. Outras passagens também indicam que determinados eventos não se repetiriam novamente, como é o caso do Dilúvio, o Êxodo e a paixão de Cristo (MORRIS, 1999).

Entretanto, tal concepção ainda gera alguns questionamentos que valham a pena serem feitos: o que havia antes do ponto em que Deus criou o Universo? Quanto tempo se passou antes desse ponto? Se havia passado um tempo infinito antes desse ponto, porque a Criação não ocorreu antes? Agostinho tinha uma resposta para essas perguntas, e era mais simples do que se podia imaginar: nada. O tempo não existia antes da criação do mundo, pois nasceu junto com ele. Sendo assim, "perguntar o que fazia Deus antes da Criação não tinha sentido. Não houve nenhum antes" (MORRIS, 1999, p. 43).

1.6 O Universo é mesmo infinito?

Durante muito tempo até o início do século XX os astrônomos acreditavam que o Universo não poderia ser outra coisa além de estático e imaginar algo que fosse além disso era realmente uma ideia inconcebível até então (MORRIS, 1999). No entanto, Einstein chegou em um resultado diferente: o Universo estaria se expandindo ou se contraindo.

Einstein não acreditou na sua própria conclusão, tentando inclusive provar o contrário por meio de uma teoria que permitia a existência de um Universo estático ao acrescentar um termo criado especificamente para isto: a constante cosmológica. Assim,

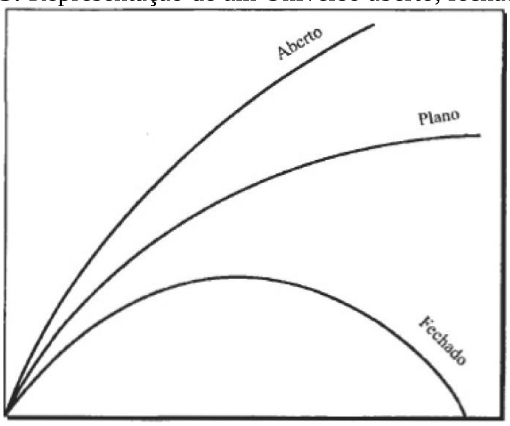
> A constante cosmológica correspondia a uma força repulsiva que iria contrabalançar a força da gravidade em grandes distâncias. Na verdade, teria de ser uma força muito estranha, diferente de todas as demais conhecidas pela física. Uma vez acrescentada, porém, ela forneceu o resultado que Einstein queria: um universo que não mudava ao longo do tempo (MORRIS, 1999, p. 176).

Há quem pense que Einstein tentou forçar um resultado apenas para não ir contra a ciência mais aceita naquela época e, alguns anos mais tarde o matemático russo Alexander Friedmann provou que os cálculos de Einstein ainda não descartavam a ideia de um Universo em expansão ou contração. Mais alguns anos a frente Hubble apresentou sua descoberta sobre a recessão das galáxias juntamente com fortes indícios de um

Universo em expansão. Einstein relutou pelos próximos dois anos depois desses acontecimentos até finalmente aceitar sua derrota e declarar sua constante cosmológica como a maior tolice de sua carreira (MORRIS, 1999).

Para determinar a que ponto o Universo está expandindo e a partir de que ponto esta expansão seria detida, é preciso saber a densidade de massa do Universo. Essa densidade de massa é chamada de “densidade crítica” e, se fosse possível calculá-la com precisão, os cientistas poderiam determinar se nosso Universo é *aberto*, *fechado* ou *plano*, o que é apresentado na Figura 1.3.

Figura 1.3: Representação de um Universo aberto, fechado e plano



Fonte: Morris, 1999.

Um Universo fechado é resultado de sua densidade de massa ser maior do que a densidade crítica. Nesse caso, isso significa que não só a expansão do Universo cessaria um dia, como também se tornaria finito, curvando o espaço sobre si mesmo, tornando-se semelhante a superfície da Terra. No entanto, isto não passa de uma teoria impossível de se visualizar, e esse universo em contração chegaria um dia em uma reação contrária ao que aconteceu no *Big Bang*, chamado de *Big Crunch* (MORRIS, 1999).

Por outro lado, a ideia de um Universo aberto é gerada quando a densidade de massa é menor do que a densidade crítica. Morris (1999) comenta que tal característica sugere a curvatura do Universo semelhante ao de uma sela, expandindo-se para cima de frente para trás, e para baixo de lado a lado, tornando-se infinito caso suas curvaturas sigam uma direção de mesmo grau. Enquanto um Universo fechado possui uma curvatura positiva, dizemos que um Universo aberto possui sua curvatura negativa.

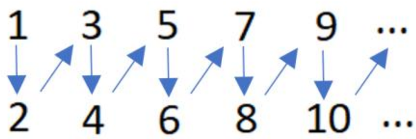
Outra possibilidade é a de que a densidade de massa do Universo seja igual a densidade crítica, gerando então um Universo semelhante a um plano que se estende para fora em todas as suas direções. De forma parecida a um Universo aberto, este também seria infinito, porém, com uma taxa de expansão bem próxima de zero, mas nunca chegando a zero (MORRIS, 1999).

O interessante de tudo isso é que não é possível, pelo menos por enquanto, admitir uma resposta para o questionamento se o Universo é realmente infinito. O que podemos fazer é esperar que o avanço da pesquisa científica bem como o da tecnologia possa finalmente, um dia, resolver esse mistério.

1.7 Estamos sempre lotados, mas sempre cabe mais um

Certa noite, um viajante decidiu fazer uma parada em um hotel para descansar e poder continuar sua viagem no dia seguinte. Chegando na recepção, foi informado pelo atendente que todos os quartos estavam ocupados, mas como o hotel tinha infinitos quartos, talvez fosse possível deixar um deles livre para o viajante. Foi então que o recepcionista fez o seguinte arranjo: pediu para que o hóspede do quarto 1 se mudasse para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 se mudasse para o quarto 3, o ocupante do quarto 3 fosse para o quarto 4, e assim sucessivamente, como é ilustrado na Figura 1.4.

Figura 1.4: Arranjo dos hóspedes



Fonte: Produzida pelo autor.

Matematicamente, podemos dizer que o hóspede que ocupava o quarto n se mudou para o quarto $(n + 1)$. Como o hotel possuía infinitos quartos, nenhuma das pessoas já hospedadas ficaria sem um quarto, e ainda mais, o quarto 1 ficaria livre para o viajante se hospedar.

A história contada acima é bastante conhecida no meio matemático, principalmente entre aqueles que se dedicam a estudar sobre o infinito. A mesma ainda poderia se estender mais se considerássemos um ônibus com infinitos passageiros, de modo que o rearranjo dos hóspedes se daria de forma que aquele que ocupasse o quarto de número n deveria se mudar para o quarto de número $2n$. Como existem infinitos números pares, nenhum hóspede ficaria sem quarto, e ainda, teríamos os infinitos quartos de número ímpar sobrando para os novos hóspedes. Outros arranjos são possíveis, como por exemplo, para infinitos ônibus com infinitos passageiros, mas deixaremos esta discussão de lado por não ser o foco da pesquisa[9].

O famoso Hotel de Hilbert, conhecido pelos seus infinitos quartos, leva esse nome em homenagem ao matemático alemão David Hilbert (1862-1943), o qual durante uma de suas aulas em Göttingen no semestre entre 1924 e 1925 apresentou esse hotel como um de seus exemplos para diferenciar conjuntos finitos e infinitos. No entanto, como é descrito por Kragh (2014), a história contada por Hilbert nunca chegou a ser publicada por ele, sendo essa apenas apresentada pela primeira vez em um livro por George Gamow em 1947, descrevendo o hotel como "um exemplo tirado de uma das histórias do famoso matemático alemão David Hilbert" (Gamow, 1961, p. 17, tradução nossa). Como nota de rodapé, ele ainda escreve "do volume inédito e nunca escrito, mas amplamente divulgado: 'A coleção completa de histórias de Hilbert', de R. Courant" (Gamow, 1961, p. 17, tradução nossa) referenciando o assistente e colega de Hilbert e também matemático Richard Courant.

Kragh (2014) escreve que não há evidências de que Gamow tenha se encontrado com Courant ou Nordheim (outro de seus assistentes) em Göttingen, o que o levou a crer que a história do Hotel de Hilbert tenha partido originalmente dele mesmo, e sendo apenas atribuído o nome ao matemático alemão em sua homenagem, uma vez que o livro foi publicado após sua morte. No entanto, Kragh comenta no mesmo texto que essa ideia foi refutada, pois foi informado por outra pessoa que essa história foi contada de fato por Hilbert em uma de suas aulas, porém nunca publicada, chegando somente ao conhecimento público em 2013, no livro "*Davis Hilbert's: Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic*" publicada pela Springer, a qual reúne várias de suas anotações entre os anos de 1917 e 1933. Por esse livro, vemos como Hilbert descreve o hotel quando fala sobre conjuntos infinitos.

> Vamos tomar como exemplo mais simples o conjunto dos números inteiros. Aqui a frase "o todo é maior do que a parte" não se aplica mais. Podemos facilmente esclarecer este fato importante usando nosso exemplo de hotel ocupado. Agora, assumimos que o hotel possui um número infinito de quartos numerados $1, 2, 3, 4, 5$ ... em que apenas um hóspede mora e, assim que um novo hóspede chega, o proprietário apenas precisa providenciar para que cada um dos antigos hóspedes se mude para um quarto de número mais alto em 1, e o quarto 1 é desocupado para o hóspede recém-chegado[10] (HILBERT, 2013, p. 730, tradução nossa).

[9] Caso se interesse, mais informações podem ser encontradas em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1117.

[10] "Nehmen wir als einfachstes Beispiel die Menge der ganzen Zahlen. Hier gilt nun schon der Satz: „Der Teil ist kleiner als das Ganze" nicht mehr. Diese wichtige Tatsache konnen wir leicht an unserem Beispiel

No artigo de Kragh (2014) é escrito que o Hotel de Hilbert remete a uma velha questão sobre a possibilidade da existência de um infinito atual no mundo real, o qual Cantor acreditava ser possível sob o argumento de que

> [...] os números e outras conjecturas matemáticas tinham uma existência permanente tão real quanto (ou mais real do que) as impressões dos sentidos efêmeros nas quais a existência dos objetos e fenômenos físicos se baseia. Deste ponto de vista, não importava se o universo continha ou não um número infinito de estrelas[11] (KRAGH, 2014, p. 3-4, tradução nossa).

Apesar de Hilbert não acreditar que o infinito atual descrito por Cantor podia ser possível no mundo real, ele foi um dos poucos simpatizantes com a teoria dos conjuntos proposta por ele. Como vimos anteriormente, Cantor trouxe uma grande contribuição para os estudos sobre o infinito, mostrando que "ninguém pode nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós[12]" (Hilbert, 1925, p. 170, tradução nossa).

1.8 O infinito e a Arte

A Arte em diversos momentos utiliza a Matemática como fonte de inspiração em busca da perfeição, seja utilizando simetrias, razões e proporções, figuras geométricas e tantos outros objetos de estudo matemático. A chamada "proporção áurea" ou "número de ouro", representado pela letra grega ϕ (*phi*) já foi muito utilizada em construções e pinturas, e até hoje está ligada a questões estéticas de modo que, quanto mais próximo algo está dessa razão, mais belo pode ser considerado.

Dessa forma, é de se imaginar que algo tão fascinante como o infinito não passaria despercebido da Arte em algum momento da história, e não passou. Segundo Machado *et al*. (2013), foi entre os séculos XV e XVI no período do Renascimento, que a busca pela representação realista da perfeição e beleza humana criou a necessidade de um conhecimento mais aprofundado sobre a anatomia humana bem como o surgimento da

---

von dem besetzten Hotel deutlich machen. Wir nehmen jetzt an, dass das Hotel unendlich viele numerierte Zimmer 1, 2, 3, 4, 5 . . . haben soll, in denen je ein Gast wohnt. Sobald nun ein neuer Gast hinzukommt, braucht der Wirt nur zu veranlassen, dass jeder der alten Gaste das Zimmer mit der um 1 hoheren Nummer bezieht, und es wird fur den Neuangekommenen das Zimmer 1 frei. Natürlich kann für jede endliche Anzahl von neuen Gästen auf die angegebene Weise Platz geschaffen werden, und in einer Welt mit unendlich vielen Häusernund Bewohnern gäbe es also keine Wohnungsnot.".

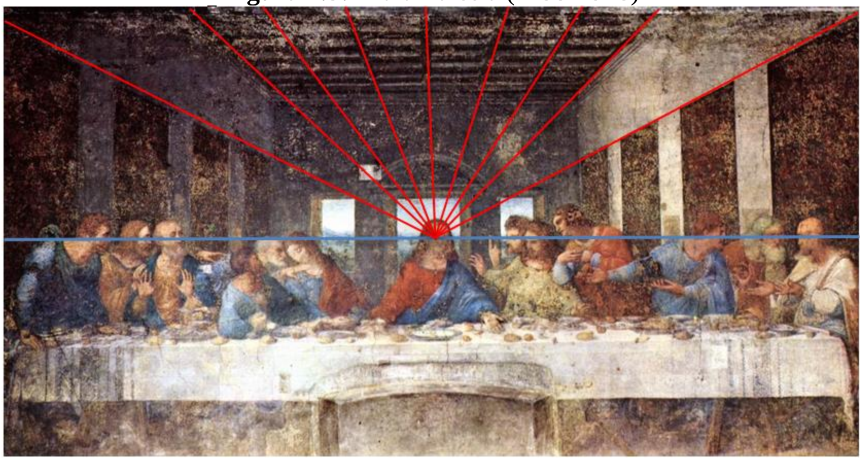
[11] "numbers and other mathematical constructs had a permanent existence and were as real as – nay, were more real than – the ephemeral sense impressions on which the existence of physical objects and phenomena are based. From this position it was largely irrelevant whether or not the physical universe contains an infinite number of stars.".

[12] "Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.".

técnica de perspectiva. De um modo geral, esta técnica é também uma das geometrias não-euclidianas conhecidas hoje e utiliza a ideia de *ponto de fuga* e retas paralelas entre si que convergem para esse ponto. Os desenhos criados sobre essas retas tendem ao mesmo ponto e se "encontram" no infinito, criando a sensação de profundidade e afastamento das imagens.

Um exemplo do uso dessa técnica é representado na Figura 1.5 na obra *A Última Ceia* pintada por Leonardo da Vinci entre 1945 e 1948. Nessa pintura podemos notar a linha do horizonte na altura dos olhos de Cristo, enquanto as demais imagens convergem para o ponto de fuga sob seus olhos.

Figura 1.5: A última ceia (1495-1948)



Fonte: Adaptado de Web Gallery of Art[13].

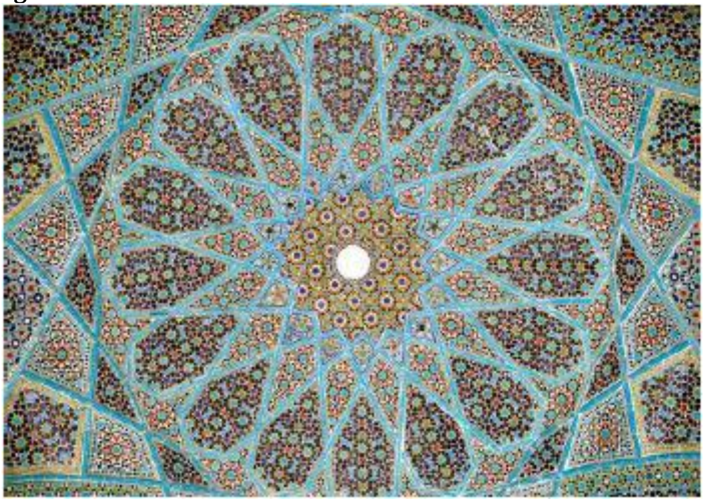
Essa e outras pinturas e obras criadas durante esse período deram a primeira prova visual de um infinito atual, uma vez que os desenhos criados se estendiam infinitamente até se "encontrarem" no ponto de fuga, localizado no fim desse processo. No entanto, mesmo que os artistas renascentistas utilizassem essa técnica, não significava que eles tinham compreensão do infinito representado por esse ponto de fuga, uma vez que a geometria que eles utilizaram para criar essa técnica ainda era euclidiana, grega e finitista (MACHADO *et al.*, 2013).

Outra forma de se representar o infinito tanto atual quanto potencial por meio da pintura encontra-se na arte islâmica, rica em representações geométricas. Diferentemente das pinturas do Renascimento, as obras apresentadas na arte islâmica não buscavam representar homens ou animais, pois a representação de imagens era terminantemente proibida. Isso fez com que a arte deles se desenvolvesse por meio de padrões e formas

[13] Disponível em www.wga.hu.

(GOMBRICH, 2009). A pintura muçulmana apresentada na Figura 1.6 causa uma impressão de ir e vir no olhar de quem observa a imagem.

Figura 1.6: Mosaico Arabesco do túmulo de Hafez em Xiraz no Irã



Fonte: Machado *et al*., 2013, p. 306.

Sendo assim, Machado *et al*. (2013) afirma que

> Estes padrões e formas simétricas sugerem a possibilidade de sua repetição infinita, gerando contrastes através de uma visão que ora se expande, ora se contrai, ora emerge, ora converge. É a unidade manifestando-se na multiplicidade e a multiplicidade convergindo para um ponto de unidade. Para os muçulmanos estas formas constituem padrões infinitos que se estendem para além do mundo visível e material. O infinito simboliza, assim, a natureza abrangente da criação de um Deus único (MACHADO *et al*., 2013, p. 307).

Observando a Figura 1.6, notamos um infinito atual que se revela ao observarmos os padrões que se repetem em tamanhos cada vez menores por meio de uma progressão geométrica, enquanto o infinito em potência surge ao observamos a pintura de dentro para fora, percebendo um padrão que tende a aumentar cada vez mais indefinidamente.

Um pouco mais a frente, durante o período da arte moderna do século XX, encontramos outro artista que se dedicou a representar o infinito em suas obras. Seu nome era Maurits Cornelius Escher.

Tendo nascido em 1898 e falecido 74 anos mais tarde, Escher possuía uma identidade única na forma que concebia o mundo. Em uma de suas fases, o pintor se dedicou a representar a subjetividade da realidade, confundindo as percepções de qualquer um que observasse suas obras neste período, como é o caso das pinturas *Convexo e Côncavo* (1955) e *Belvedere* (1958) que seguem nas Figuras 1.7 e 1.8, respectivamente

Figura 1.7: Convexo e Côncavo (1955)

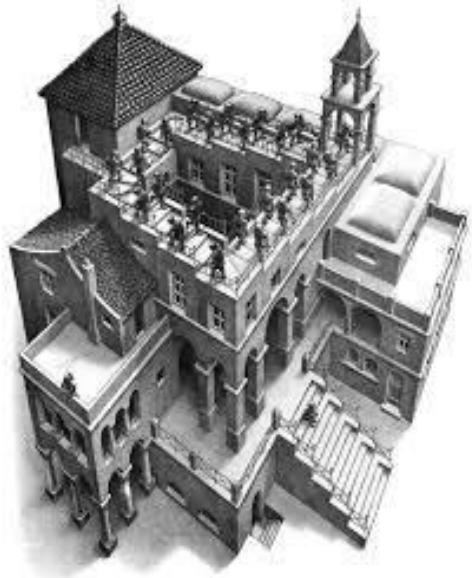
Fonte: M.C. Escher – The Official Website[14].

Figura 1.8: Belvedere (1958)

Fonte: M.C. Escher – The Official Website.

Apesar de suas obras sempre conterem elementos que conversam entre si, o infinito só passou a ser mais notado alguns anos mais tarde, porém com o mesmo objetivo de sustentar a subjetividade da realidade. Tais representações podem ser divididas em três perspectivas: os *ciclos sem fim*, *preenchimentos de superfície* e *limites*. As obras que seguem nas Figuras 1.9 e 1.10 fazem parte de pinturas em que Escher explorava a ideia de ciclos sem fim.

Figura 1.9: Subindo e Descendo (1960)



Fonte: M.C. Escher – The Official Website.

Figura 1.10: Cascata (1961)

Fonte: M.C. Escher – The Official Website.

[14] Disponível em www.mcescher.com.

Nas Figuras 1.9 e 1.10 podemos notar a representação do infinito em potência ao notar que tanto os monges subindo e descendo as escadas quanto a água que corre pelos canais até cair em uma cascata parecem nunca atingir um objetivo final nesse processo que continua infinitamente. Em *Subindo e Descendo* (1960) os monges confundem os olhares do espectador ao provocarem a impossibilidade dos movimentos de descida e subida da escada em coexistência no mesmo espaço. Já em *Cascata* (1961), podemos visualizar a corrente de água que segue seu caminho até descer em uma cascata, alimentando o moinho. No entanto, o caminho que a água segue pelos canais parece desafiar as leis da natureza, pois causa a impressão de estar subindo pelos canais.

Já nas obras voltadas ao preenchimento da superfície, Escher busca realizar desenhos sobre um plano dividindo-o e preenchendo-o infinitamente. Nas palavras do artista

> Um plano, que podemos imaginar estendendo-se sem fronteiras em todas as direções, pode ser preenchido ou dividido até ao infinito, de acordo com um número limitado de sistemas, em figuras geométricas similares, contíguas, sem deixar qualquer espaço livre[15] (ESCHER, 1989, p. 93 apud SAMPAIO, 2006, p. 54, tradução nossa).

A Figura 1.11 apresenta uma de suas artes apresentando o preenchimento da superfície por meio de lagartos, tema bem recorrente em várias de suas obras.

Figura 1.11: Aquarela 25 (1939)

Fonte: M.C. Escher – The Official Website.

[15] "A plane, which one must imagine as extending without boundaries in all directions, can be filled or divided into infinity, according to a limited number of systems, with similar geometric figures that are contiguous on all sides without leaving empty spaces"

Após a fala de Escher, o artista notou que suas obras de preenchimento eram apenas um fragmento do infinito, e afirmou que se alguém algum dia quisesse ter uma visualização total do desenho, o qual se estende indefinidamente, bastaria reduzir o desenho gradualmente até um tamanho infinitamente pequeno (SAMPAIO, 2006). Assim, pelas características dessas obras preencherem todo o plano, não se limitando as bordas de onde foram retratadas, podemos dizer que as artes feitas em preenchimento do espaço são outra representação de infinito em potência.

O matemático canadense Coxeter foi um grande admirador dos trabalhos de Escher, o que o levou a produzir um artigo em 1957 voltado a explorar a Geometria com os desenhos do pintor. De acordo com Barcellos (2019), esse artigo tratava de representações geométricas que se repetiam em padrões cada vez menores. Ainda segundo o autor, Escher já tinha o interesse em tais representações, apesar de ter dificuldades por não conhecer os princípios matemáticos envolvidos. Assim, após receber uma carta de Coxeter explicando os princípios matemáticos básicos para realizar as representações gradativas cada vez menores, Escher conseguiu concluir a sua série de obras intituladas de *Limite Circular*, representando as ideias de limite propostas pelo artista. Dentre essas obras, Barcellos (2019) destaca a obra *Limite Circular IV* (1960), a qual representa a coexistência eterna entre anjos e demônios. Além disso, é possível notar também as imagens que seguem em maior destaque ao centro e vão diminuindo infinitamente sem que haja uma borda, característica presente na geometria hiperbólica. Tudo isso pode ser observado na Figura 1.12.

Figura 1.12: Limite Circular IV (1960)

Fonte: M.C. Escher – The Official Website.

Escher ainda tentou aprimorar sua técnica criando uma nova obra, intitulada *Limite Quadrado* em 1964. O motivo era a exigência demandada pelo formato das paredes das casas. Após apresentar uma prova de seu feito para Coxeter, o mesmo o respondeu com uma carta, e Escher comenta sobre o ocorrido.

> Depois desta satisfação relativa do meu anseio por um símbolo perfeito do infinito (no melhor realizado em Limite circular III) tentei compor uma forma quadrada em vez do círculo - porque as paredes rectilíneas das nossas casas assim o exigem. Um tanto orgulhoso pela minha descoberta do Limite quadrado, enviei uma prova ao Professor Coxeter. O comentário dele foi: trata-se de um desenho 'muito bonito, mas bastante banal e euc1idiano, por conseguinte não considero isto especialmente interessante. Os limites circulares são mais interessantes porque são não euclidianos' (ERNST, 1991 [1978], p. 105, apud. SAMPAIO, 2006, p. 56).

Por fim, podemos afirmar que Escher foi um artista que se fundamentou em diversos conceitos matemáticos para criar um novo significado para o infinito em suas obras. Dessa forma, somos questionados sobre a subjetividade das coisas e convidados a pensar se o que vemos em nosso dia a dia é real ou apenas mais uma das diversas distorções da realidade, como aquelas criadas pelo artista.

1.9 Mais significados

Esse capítulo poderia se estender mais do que o planejado se pretendêssemos abordar tantas outras coisas que foram deixadas de fora: o surgimento dos números irracionais e um segredo que teria supostamente causado a morte de um homem jogado ao mar; outros paradoxos de Zenão e suas consequências para os estudos sobre o infinito ou então; a prova de Cantor de que em um plano há tantos pontos quanto em uma reta, mesmo vendo e não acreditando. Dessa forma, consideramos o infinito um tema quase inesgotável.

No entanto, o que foi apresentado nesse capítulo talvez já seja a base suficiente para entendermos como o infinito, apesar de ter sido em certos momentos tão complexo e confuso, se tornou tão importante em diversos momentos da história, sendo até mesmo crucial para o avanço de certas teorias. Sendo um conceito importante, achamos necessário um levantamento acerca das pesquisas desenvolvidas sobre o infinito na educação. Tal levantamento será abordado na próxima sessão.

CAPÍTULO 2
LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Nesse capítulo apresentamos um levantamento bibliográfico de trabalhos voltados ao estudo sobre o infinito nas áreas de Educação e Ensino. Para isso, buscamos tais trabalhos em revistas brasileiras, olhando para aquelas de *qualis* B1 ou superior, sendo que algumas das revistas consultadas tinham no momento desse levantamento *qualis* diferentes para Educação e para o Ensino, alguns sendo até inferiores ao mínimo escolhido para análise, sendo então desconsiderados para esse estudo bibliográfico. O levantamento foi realizado no dia 28 de Novembro de 2019 e as plataformas consultadas para a busca das revistas foram a Sucupira e SBEM[16]. Foram encontrados 21 periódicos e 98 artigos no total a partir da busca pela palavra-chave "infinito", de modo que, em alguns periódicos não foram encontrados artigos. Ainda, dois dos periódicos encontrados durante o levantamento foram desconsiderados devido a problemas com o campo de busca ou não apresentar o mesmo, tornando-se inviável a busca por artigos nestas revistas. O Quadro 1.1 apresenta somente as revistas em que foram encontrados artigos, bem como o *qualis* e o total de resultados para cada uma delas.

Quadro 2.1: Relação de periódicos considerados

Revistas	Qualis	Resultados
Educação Matemática em Revista	A2 (Ensino) B1 (Educação)	2
Educação Matemática Pesquisa	A2 (Ensino) B1 (Educação)	3
Bolema	A1 (Ensino e Educação)	74
Perspectivas da Educação Matemática	B1 (Ensino)	1
Revista Paranaense de Educação Matemática	B1 (Ensino)	1
Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia	A2 (Ensino)	13
Revista Eletrônica de Matemática	A2 (Ensino)	1
Alexandria	A2 (Ensino)	1
Boletim Online de Educação Matemática	B1 (Ensino)	1
Revista de Ensino de Ciências e Matemática	A2 (Ensino)	1
Total de Periódicos Considerados	10	
Total de Artigos Encontrados	98	

Fonte: Produzida pelo autor.

[16] O site consultado se encontra em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/95-periodicos/117-periodicos

Após o primeiro corte considerando o *qualis* dos periódicos, passamos a analisar os artigos encontrados em cada revista considerada como consta no Quadro 1.1. O segundo corte foi considerar somente os artigos que apresentavam o título em português, seguido por um terceiro corte feito após a leitura do resumo buscando textos que apresentassem uma proposta de acordo com nossos interesses de pesquisa. Os textos que se mostraram pertinentes nessa leitura preliminar passaram por mais um corte a partir da leitura da introdução com o mesmo objetivo idealizado durante a leitura do resumo. Os trabalhos que restaram após a leitura da introdução seguem no Quadro 1.2.

Quadro 2.2: Relação de artigos selecionados

Artigo	Autores	Ano de Publicação
Aporética do Infinito: [des]caminhos na matemática e na pintura	Rosilene Beatriz Machado Débora Regina Wagner Cláudia Regina Flores Cássia Aline Schuck	2013
Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais	Maria Alice Vasconcelos Feio Messias João Cláudio Brandemberg	2015
Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário	Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro Sampaio	2009
Metáforas, Aforismos e Reflexões: Aproximações entre Matemática, Educação Matemática e Arte	Valdir Damázio Júnior	2015
Discussão das noções de Limite e Infinito	Marilaine de Fraga Sant'Ana Priscila Tadesco	2011
Uma resposta da Matemática Moderna para os Paradoxos de Zenão: dicotomia e Aquiles e a Tartaruga	Inocêncio Fernandes Balieiro Filho Marcelo Reicher Soares	2013
Os "espinhos" da álgebra para Lacroix	Circe Mary Silva da Silva	2011
O Conceito de Limite: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos	Maria Betânia Sardeiro dos Santos Saddo Ag Almoloud	2014
Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo	André Luiz Trevisan	2013
Números Irracionais na escolaridade básica: as contribuições didático-epistemológicas advindas da História da Matemática	Wagner Marcelo Pommer	2018
Crises e Incompletudes, Multi-histórias Matemáticas	Isabel Cafezeiro Ricardo Krubusly Ivan da Costa Marques	2016

	Narrira Lemos da Souza Sicleidi Valente dos Santos Britto	
A contribuição do GeoGebra para a compreensão do conceito de convergência	Claudete Cargnin Rui Marcos de Oliveira Barros	2015

Fonte: Produzida pelo autor.

É possível notar pelo Quadro 1.2 que, apesar de no momento de o levantamento não ter sido aplicado filtros de período de publicação, a maioria dos artigos selecionados datam de no máximo 10 anos, nos levando a questionar se tal característica se deve ao fato de que os estudos sobre o tema adquiriram maior relevância dentro desse período ou se trata apenas de uma coincidência após os cortes durante o levantamento.

Outra característica notada no Quadro 1.2 é a quantidade de artigos voltados ao conceito de Limite e Continuidade quando se busca pesquisas relacionadas ao conceito de Infinito, de modo que o mesmo não chega a ter o destaque que desejávamos durante a leitura dos artigos, nos levando a considerar que o infinito é tratado em tais pesquisas apenas por ser um tema inevitável quando se trata do estudo de determinados conceitos voltados ao Cálculo.

A fim de organizar a discussão dos artigos destacados, dividimos os trabalhos em quatro categorias: História, Artes e Filosofia; Análise de Livro Didático; Pesquisa de Campo; e Tecnologias.

2.1História, Artes e Filosofia

Nessa categoria, buscamos enquadrar os trabalhos caracterizados por uma abordagem sobre o infinito ou que remetem ao infinito por meio de discussões mais teóricas sobre o mesmo. No trabalho intitulado “Aporética do Infinito: [des]caminhos na matemática e na pintura” de Machado *et al*. (2013), por exemplo, busca-se realizar um diálogo entre matemática e artes com o objetivo de mostrar como a produção de um determinado conceito (no caso desse trabalho, o infinito) não é limitado apenas a um campo de saber e como o pensamento científico é modificado ao longo do tempo em diversos meios culturais (MACHADO *et al*., 2013). Partindo dessa intenção, as autoras realizam inicialmente uma exploração acerca da trajetória histórica e epistemológica do infinito por meio de discussões que perpassam o surgimento do universo, a abominação ao infinito pelos gregos e principalmente pela escola pitagórica, os Paradoxos de Zenão, o método da exaustão de Eudoxo e Arquimedes, entre outros temas que se estendem até a matemática moderna.

Em seguida, as autoras tratam do infinito no campo das artes, começando pelo Renascimento entre os séculos XV e XVI e o surgimento da técnica de desenho e pintura em perspectiva a qual já foi comentada brevemente no capítulo anterior, passando pelo Barroco, movimento em que o ponto de fuga antes centralizado passa a se tornar menos fixo, expressando mais movimento nas pinturas. As discussões também perpassam a arte egípcia e islâmica até chegarem na arte moderna com as pinturas de Escher, o qual também já foi discutido no capítulo anterior, e se encerra no cubismo como representação de múltiplos espaços no plano bidimensional.

No artigo “Metáforas, Aforismos e Reflexões: Aproximações entre Matemática, Educação Matemática e Arte” de Júnior (2015) há o objetivo por parte do autor em apresentar novas discussões entre diversos temas voltados a matemática (linguagem e escrita), poesia, literatura, infinito, entre outros temas evocados durante as discussões levantadas. Tal abordagem vai ao encontro do artigo de Machado *et al*. (2013) no sentido de que, ao levantar estes temas, os mesmos são relacionados com as artes de modo a gerar novas reflexões e metáforas acerca do que é discutido. A justificativa para apresentar este trabalho parte de experiências do autor ao afirmar não se lembrar de demonstrações na Matemática por meio de metáforas ou aforismos na ciência, ou então por reflexões “talvez às vezes até num sentido pejorativo, aos filósofos, sendo para a ciência apenas como um complemento ao experimento, ao rigor e a demonstração” (JÚNIOR, 2015, p. 52).

Ao deixar o rigor e o método de lado, o autor apresenta o caráter humano das artes e da ciência (uma vez que foram criadas por humanos) e parte em busca de novas possibilidades de discussão sobre conceitos voltados a Arte, a Matemática e a Educação Matemática.

Um deles é o infinito, o qual segundo o autor, com o desenvolvimento da Matemática e da linguagem lógica formal, possibilitou novos olhares para esse conceito, resolvendo diversos problemas de incoerência e paradoxos. No entanto, ainda segundo o autor, tal formalização da linguagem desautoriza e às vezes até mesmo impede as diversas formas de tratar alguns assuntos, sendo o infinito um deles. Uma das formas destacadas pelo autor que possibilita outros diálogos para o infinito é a literatura, especificamente um conto do escritor argentino Jorge Luis Borges de 1941. Júnior (2015) comenta sobre o conto, o qual compara o universo com uma grande biblioteca, a qual conta com um número indefinido, senão infinito, de galerias hexagonais. A biblioteca ainda conta com andares inferiores e superiores intermináveis. A apresentação segue por meio de um detalhamento minucioso do espaço, tudo para apresentar o infinito de uma forma mais sutil e mais possível.

O artigo “Uma resposta da Matemática Moderna para os Paradoxos de Zenão: dicotomia e Aquiles e a Tartaruga” de Filho e Soares (2013) resume em poucas páginas dois dos Paradoxos de Zenão mais conhecidos: a *Dicotomia* e *Aquiles e a Tartaruga*. Tais paradoxos são apresentados e discutidos em sua forma original obtida por fontes históricas de Simplício de Cilícia, levando em consideração as concepções da época de tempo, espaço, infinito, entre outros temas, tanto para os eleatas quanto para os pitagóricos.

Após essas discussões, os autores apresentam uma resolução para os dois problemas utilizando ferramentas da matemática moderna, como limites, séries e sequências. O objetivo ao apresentar este artigo é servir como motivação para alunos e professores, bem como a utilização como recurso didático em cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Análise Matemática, História ou Filosofia da Matemática.

Por fim, o artigo “Crises e Incompletudes, Multi-histórias Matemáticas” de Cafezeiro *et al*. (2016) busca discutir a crise nos fundamentos da matemática, iniciada em meados do século XIX. Para realizar tal discussão, os autores realizam uma comparação do tema proposto por meio de cantos da Ilíada, retratando também diversos momentos controversos que compõem o poema.

Um exemplo inicial apresentado é o desentendimento entre Agamenon e Aquiles gerado por uma troca de moças prometidas aos dois: ao primeiro foi dado como prêmio durante a Guerra de Troia a filha de Crises, Criseida, enquanto ao segundo coube como prêmio Briseida. No entanto, Crises reivindica Criseida de volta, o que foi recusado por Agamenon, levando Crises a rogar ao deus Apolo por uma interferência. Atendendo ao pedido, Apolo lança uma peste sobre o povo grego, forçando Agamenon a devolver a moça, mas não sem antes reivindicar Briseida. Ao perder seu prêmio, Aquiles se enfurece e abandona a guerra, deixando a Grécia em perigo (CAFEZEIRO *et al*., 2016).

Segundo os autores, tal crise cantada neste trecho de Ilíadas retrata um momento que não é possível ser compreendido sem levar em consideração algumas questões referentes a dinâmica da sociedade naquela época, o que também ocorre na crise dos fundamentos da matemática, uma vez que durante a metade do século XIX já havia muitas evidências de que a racionalidade moderna já não era o suficiente para resolver os problemas que se apresentavam para a Matemática, como a compreensão e a representação da linguagem (CAFEZEIRO *et al.*, 2016). No entanto, por mais que os matemáticos não se interessassem por isso naquela época, outras áreas de conhecimento já discutiam esse tema, como as artes por exemplo. Isso, para os autores já demonstra que a crise nos fundamentos da matemática ia muito além de abordar as questões puramente matemáticas que se discutiam naquele momento.

Uma das relações feitas entre as crises nos cantos de Ilíada e a crise nos fundamentos da matemática é que, assim como na Ilíada em que ao fim de uma crise outra se inicia, o mesmo acontece nas ciências. Segundo os autores, é preciso que, mesmo não havendo uma resolução definitiva para um problema posto naquele momento, sua própria existência abre espaço para novos debates, possibilitando assim o desenvolvimento da ciência.

2.2 Análise de Livro Didático

Começamos esta seção com o trabalho de Silva (2011) intitulado "Os 'espinhos' da álgebra para Lacroix". A autora tem por objetivo apresentar o livro didático "Elementos de Álgebra" de Sylvestre Lacroix (1757-1833), utilizado na Academia Real Militar do Rio de Janeiro e por décadas em outras escolas militares do século XIX no Brasil, e discutir qual foi o papel desempenhado pela obra. Tal discussão foi feita por meio de uma análise documental, como jornais da época, ofícios, Carta Régia da criação da Academia Militar, atas e programas. Com isso, a autora busca compreender como conceitos polêmicos como o zero, o infinito, números negativos e números imaginários eram tratados no livro de Lacroix e no ensino de álgebra da instituição.

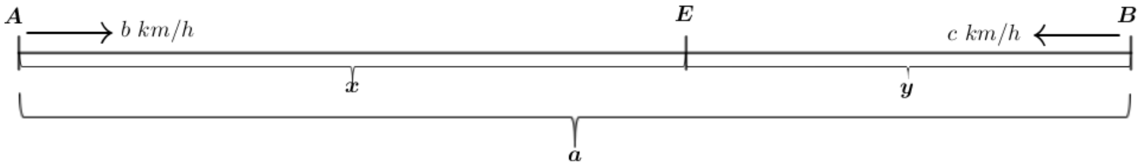
Apesar de todo o trabalho escrito por Silva (2011) ser bem interessante, o que nos interessa apresentar aqui é o tratamento de infinito por Lacroix. Dessa forma, Silva (2011) comenta que o infinito surge no livro didático com a apresentação do problema dos carteiros o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

> Para irem ao encontro um do outro, dois carteiros partem ao mesmo tempo de duas cidades cuja distância é fornecida. Nós sabemos quantos quilômetros cada carteiro faz por hora, e perguntamos em que ponto da estrada que une as duas cidades esses carteiros se encontram[17] (LACROIX, 1804, p. 94, tradução nossa).

[17] Deux couriers, pour aller à la rencontre l'un de l'auntre partent en même temps de deux villes dont la distance est donnée; on sait combien de kilomètres chaque courierfait par heure, et on demande à quel point de la route qui joint les deux villes, ces couriers se rencontreront.

A situação proposta pode ser ilustrada como segue na Figura 2.1.

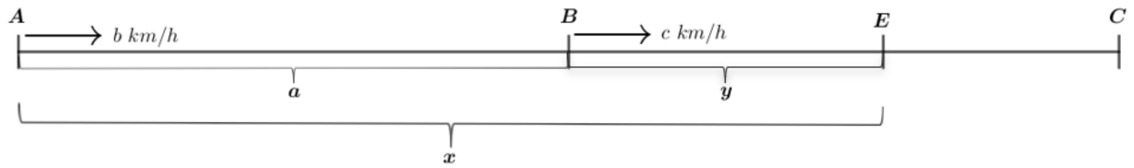
Figura 2.1: Ilustração do problema dos carteiros



Fonte: Produzida pelo autor.

O problema do infinito surge de uma variação do problema, quando Lacroix supõe que agora os carteiros partem das cidades A e B em direção a uma outra cidade C localizada mais à frente de B. Supondo então que o carteiro que parte de A é mais rápido do que aquele que parte de B, então eles irão se encontrar em um ponto entre B e C. A situação também é ilustrada na Figura 2.2.

Figura 2.2: Variação do problema dos carteiros



Fonte: Produzida pelo autor.

Após algumas explicações desenvolvidas pelo autor, ele apresenta as equações $x = ab/(b - c)$ e $y = ac/(b - c)$ como sendo o ponto onde os carteiros irão se encontrar. Tal equação é decorrente de manipulações algébricas de um sistema de duas equações, sendo elas $x - y = a$ a distância $\overline{AB}$ e $x/b = y/c$ o tempo decorrido para cada carteiro percorrer as distâncias x e y, respectivamente.

Lacroix considera então um absurdo que as velocidades dos carteiros sejam iguais, ou seja, $b = c$, pois isto resultaria em $x = ab/0$ ou $y = ac/0$, o que não existe. Segundo o autor, não se percebe com facilidade o quociente de tal divisão, e podemos apenas considerar valores muito próximos para b e c, tornando então os valores de x e y muito grandes, mas nunca a ponto de se obter $b = c$. Lacroix ainda afirma que

> Estes últimos [números muito grandes] não podem ser representados por nenhum número, por maior que se possa supor, e são considerados infinitos; e qualquer expressão da forma $m/0$, cujo denominador é zero, é considerado o símbolo do infinito.

> Este exemplo mostra que o infinito matemático é uma ideia negativa, uma vez que chegamos a isso apenas pela impossibilidade de atribuir uma quantidade que resolva a questão[18] (LACROIX, 1804, p. 101, tradução nossa).

Em outras palavras, Lacroix associava o infinito a uma “ideia negativa” devido ao fato da impossibilidade de se obter o quociente de qualquer divisão do tipo $m/0$, de modo que quando se pensava em valores tão próximos de 0 quanto se quisesse, o infinito surgia como um número tão grande quanto se quisesse, e isso para ele não era legítimo pois não resolvia o problema.

O próximo artigo dessa categoria é intitulado “O Conceito de Limite: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos” de Santos e Almoloud (2014). Nesse artigo os autores fazem uma análise de como alguns autores de livros para o Ensino Superior apresentam o conceito de limite com foco na abordagem (intuitiva ou direta e formal), bem como tratam de formas indeterminadas, limites infinitos, limites no infinito, e infinito como não sendo um número. Para Santos e Almoloud (2014) as ideias de limites no infinito e limites infinitos geram diversas dificuldades nos alunos, começando pela terminologia, pois enquanto no primeiro o “limite é”, no segundo o “limite tende”. Além disso, enquanto no primeiro caso a variável pode tender a um valor finito e gerar o crescimento ou decrescimento indeterminado de uma função, quando tratamos de limites infinitos, a variável tende ao infinito e pode gerar um resultado infinito ou não. São detalhes que se não forem bem explorados podem acabar se resumindo apenas a aprendizagem de técnicas de resolução (SANTOS; ALMOLOUD, 2014).

Como resultado das análises dos livros feita por Santos e Almoloud (2014), eles apontam que, apesar de em alguns casos os autores apresentarem no prefácio suas intenções de que o livro é voltado a alunos, calouros ou qualquer iniciante em Cálculo, durante o discurso do livro não é possível identificar evidências de tal intenção, uma vez que há diversos trechos densos de sentido, porém carecidas de aprofundamento, deixando assim o público a quem os autores diziam inicialmente serem voltados ficar de lado e alheio de sentidos e significados que o público mais especializado no assunto pode possuir.

---

[18] Ces dernières ne pouvant être représentées par aucun nombre, quelque grand qu'on le suppose, sont dites infinies; et toute expression de la forme m/0, dont le dénominateur est zéro, est regardée comme le symbole de l'infini.
Cet exemple montre que l'infini mathematique est une idée négative, puisqu'on n'y paryient que par l'impossibilité d'assigner une quantité qui puisse résoudre la question

O último trabalho desta categoria é intitulado “Números Irracionais na escolaridade básica: as contribuições didático-epistemológicas advindas da História da Matemática” de Pommer (2018), o qual teve por objetivo analisar os aspectos pragmáticos e teóricos dos números irracionais em dois livros acadêmicos, “As Ideias Fundamentais da Matemática” de Manuel Amoroso Costa e “Conceitos Fundamentais da Matemática” de Bento de Jesus Caraça, levando em consideração os contextos e contribuições histórico-epistemológicos destes números.

O autor parte do pressuposto da importância que os números representam para a ciência, e mais especificamente no campo da Matemática. Tal afirmação se baseia no fato de a Matemática ter tido início pela Aritmética, ou a teoria Elementar dos Números, fazendo com que os números ocupassem uma posição privilegiada, formando-se uma necessidade de se criar símbolos adequados para a representação de grandezas cada vez mais complexas, além de outros símbolos que pudessem dar sentido às operações aritméticas.

Apesar do esforço, Pommer (2018) aponta que os currículos de Matemática tendem a abordar as leis que regulam os números de uma forma totalmente pragmática. Assim,

> Este tipo de escolha tendenciosa, privilegiando aspectos relacionados ao exato, finito, funcional, determinístico e previsível, realizado para o ensino dos números, encobre aspectos significativos e imprescindíveis ao estudo dos números e, em particular, representam um obstáculo didático para a introdução dos números irracionais e, em decorrência, dos números reais (POMMER, 2018, p. 185).

Pommer (2018) descreve inicialmente o livro de Manuel Amoroso Costa, o qual apresenta os números irracionais ligado à “crise nos incomensuráveis” surgida ao relacionar a diagonal de um quadrado e seu lado de 1 unidade de medida. Crise a qual poderia ser evitada se os pitagóricos tivessem conhecimento dos conceitos de infinito e de continuidade.

Pommer (2018) ainda comenta que, segundo o autor, os gregos nunca chegaram a ter uma concepção clara do que eram os números irracionais, e que o responsável por dar uma pequena noção destes números naquela época foi Arquimedes, o qual construiu duas sequências de números racionais, com valores inferiores e superiores ao número irracional considerado, com uma diferença desse tão pequena quanto se queira. Dessa forma, Arquimedes criava a noção de número irracional como o limite de uma sequência de números racionais.

Pommer (2018) esboça outras ideias apresentadas por Manuel Amoroso Costa em seu livro e encerra as análises acerca do autor como "uma possibilidade de narrativa baseada em argumentação e dedução simples e direta, implicando que a Matemática é uma área passível de ser acessível por meios qualitativos" (POMMER, 2018, p. 195). Em seguida, inicia a apresentação do livro escrito por Bento de Jesus Caraça, o qual também parte da "crise nos incomensuráveis", mas argumenta que a incomensurabilidades poderia surgir através da comparação entre dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de tal modo que $\overline{AB} > \overline{CD}$, e do questionamento da possibilidade de medir $\overline{AB}$ utilizando $\overline{CD}$ como unidade de medida. Se a resposta fosse sim, haveria duas possibilidades: ou o segmento $\overline{CD}$ caberia um número exato de vezes em $\overline{AB}$ e, assim, teríamos uma representação desse segmento em termos de números naturais; ou seria necessário dividir $\overline{CD}$ em um número finito de partes de iguais de modo que fosse possível fazer caber um número exato de partes deste segmento em $\overline{AB}$. Nos dois casos citados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos comensuráveis.

No entanto, caso a resposta para esse questionamento fosse negativa, não seria possível nem mesmo dividir o segmento $\overline{CD}$ em finitas partes iguais de modo que uma parte coubesse em $\overline{AB}$, e nesse caso os dois segmentos seriam incomensuráveis. Para Pommer (2018) a análise feita pelo autor do livro é muito mais profunda, uma vez que em livros didáticos tradicionais a definição dos números irracionais é feita logo em sua introdução, como números que não podem ser escritos na forma a/b, ou seja, é irracional aquele que não é racional.

2.3 Pesquisa de campo

Nessa seção apresentamos quatro artigos. O primeiro intitula-se "Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais" de Messias e Brandemberg (2015). Nesse artigo os autores apresentam um questionário e uma entrevista realizados com alunos de licenciatura em Matemática com o objetivo de investigar as imagens conceituais geradas acerca do conceito de limite de uma variável real. Ainda, justifica-se a necessidade da pesquisa através de outras pesquisas que evidenciam o cálculo de limites muitas vezes resumido a substituição do valor de uma variável na função, sem a necessidade de evitar inconvenientes denominadores nulos, bem como a dificuldade em relacionar as ideias intuitiva e formal deste conceito (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2015).

Dentre os resultados obtidos no questionário, destacamos a relação entre a existência do limite com a continuidade da função. Em diversos casos, os sujeitos da pesquisa afirmaram que determinado limite não existia (quando na verdade existe) pelo fato de a função não ser contínua em todo o seu domínio. Outra relação estabelecida por alguns alunos era de a existência do limite depender da não existência de saltos no gráfico da função. Os autores observaram uma maior presença de respostas relacionadas a limite e continuidade, realizando então um segundo estudo mais focado nestas relações por meio de uma entrevista com um dos alunos participantes da etapa anterior.

Ao apresentar um gráfico com saltos e outros pontos destacados, foi evidenciado pelos autores as mesmas percepções que esse aluno havia realizado durante a aplicação do questionário. Sendo assim, para o sujeito de pesquisa em questão, a existência de um limite dependia da não existência de saltos em seu gráfico. Do mesmo modo, o fato da presença de saltos ou buracos no gráfico, implica para ele obrigatoriamente na descontinuidade da função. No entanto, é sabido que apesar de no primeiro caso ficar evidente a descontinuidade de uma função por apresentar limites laterais diferentes, no segundo caso, o "buraco" em uma função ainda pode implicar na continuidade desta, desde que o limite no ponto em questão exista (calculado neste caso por limites laterais) e coincida com a função avaliada neste ponto.

O segundo artigo dessa seção é intitulado "Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário" de Sampaio (2009). A pesquisa foi realizada com alunos do 10º, 11º e 12º anos do ensino secundário de sete escolas públicas do norte de Portugal com o objetivo de identificar as concepções de infinito desses alunos, bem como as diferenças entre as variáveis ano de escolaridade e interpretação da noção de infinito. O questionário elaborado abordava seis questões, cada uma com um tema diferente: infinito potencial, noção de infinito, concepções aprendidas no 3º ciclo, limites e séries, número de elementos de um conjunto e cardinal de um conjunto.

Vamos expor apenas a segunda questão relacionada às noções de infinito que os alunos expressaram por meio de diversas palavras relacionadas ao conceito. Sampaio (2009) destaca inicialmente as três mais utilizadas: "sem fim", "universo" e "muito grande". Outras palavras relacionadas ao infinito pelos alunos são "números", pois eles aprenderam que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são infinitos e, por este motivo, outra palavra associada ao infinito por eles é "incontável". No entanto, evidenciamos no trabalho de Sampaio (2009) que, embora 44 palavras tenham sido levantadas pelos alunos, a autora destaca em um quadro 25 destas e mais 19 fora do quadro por terem surgido menos de dez vezes. Dentre todas estas palavras destacamos algumas que também nos interessaram, como "além", "eternidade", "todo", "amor", "circunferência", "sabedoria", "vida" e "invisível".

O próximo artigo a ser discutido se intitula "Discussão das noções de Limite e Infinito" de Sant'Ana e Tadesco (2011). As autoras apresentam neste curto artigo um relato de experiência em uma oficina pedagógica com professores do Ensino Fundamental e Médio, desenvolvendo atividades que estimulam a discussão de limite e infinito.

Duas atividades foram propostas aos professores: a primeira explora os conceitos de limite a fim de se obter a maior e a menor área possível para um retângulo de perímetro fixo. Apesar de a discussão dessa atividade ser bem interessante, acreditamos ser ainda mais a segunda atividade proposta pela professora que coordenou a oficina, uma vez que esta apresenta uma proposta diferente da habitual exposta na primeira atividade. A professora buscou com a segunda atividade propor um mesmo retângulo inicial, mas agora com área fixa e variando-se seus lados a fim de se obter o maior e o menor perímetro para a figura.

Nesse momento a autora apresenta a construção de várias figuras construídas pelos professores mantendo-se a área, mas com perímetros cada vez maiores, o primeiro sendo um quadrado de lado 6 cm e perímetro 36 cm, outro com lados 12 cm e 3 cm e perímetro 30 cm, e assim por diante até chegarem em um retângulo de lados 36 cm e 1 cm e perímetro igual a 74 cm. Observando-se que a figura com menor perímetro seria um quadrado, a professora pediu que os participantes provassem o resultado e assim o fizeram utilizando a derivada da função $P = 2x + 72/x$ a qual surge das funções $A = xy = 36$ (com x e y sendo os lados da figura) e $P = 2x + 2y$.

Dessa forma, foi constatado então pelos participantes que, de fato, a figura com menor perímetro era um quadrado de lado 6 cm e perímetro 36 cm. No entanto, qual seria a figura que apresenta o maior perímetro? Essa foi a pergunta feita por uma das autoras aos professores, os quais expressaram diversas possibilidades, desde uma figura com lados 72 cm e 0,5 cm e perímetro 145 cm até outra cujos lados mediam 36000 cm e 0,001 cm e resultava em um perímetro de 72000,002 cm. O que esta atividade expõe é que não seria possível encontrar uma figura que apresentasse o maior perímetro conservando-se a área, pois a medida que um dos lados tendesse a 0, um dos lados tenderia ao infinito e, consequentemente, seu perímetro também. O resultado desse processo seria uma figura com um dos lados medindo 0 e outros dois lados de comprimento infinito (duas retas) sobrepostos.

Sant'Ana e Tadesco (2009) concluem que, durante a atividade proposta, foi constatado uma grande dificuldade por parte dos professores em relacionar as disciplinas cursadas no Ensino Superior com as atividades profissionais desenvolvidas no Ensino Básico, o que pode resultar em dificuldades para os alunos que saem desse nível de ensino para um curso da Universidade que muitas vezes exige uma forma diferente de pensar matematicamente se comparado a forma como estudavam anteriormente. Por esse motivo, as autoras consideram necessário a utilização de tarefas como as propostas no artigo apresentado.

2.4 Tecnologias

Nesta seção enquadramos um único artigo, intitulado "A contribuição do GeoGebra para a compreensão do conceito de convergência" de Cargnin e Barros (2015). Os autores apresentam uma abordagem do conceito de convergência em séries e sequências, mais especificamente na integral de Riemann, utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta para a construção e compreensão do conceito. Para isso, os autores elaboraram uma sequência didática que permitisse o desenvolvimento do conceito por alunos do curso de graduação que já passaram pela disciplina de Cálculo I. A sequência foi dividida em cinco etapas, cada uma contemplando um conceito diferente. São eles: Convergência de sequência e sua notação, notação de somatório, convergência de séries e sua notação, cálculo de área de uma região sob uma curva em um intervalo e, finalmente, integral definida.

Durante o desenvolvimento das questões, os autores comentam que os alunos foram questionados acerca da possibilidade de convergência de uma sequência construída de modo que cada termo fosse resultado da soma de seus termos anteriores. A resposta obtida de todos os alunos foi negativa com a justificação de que sempre que somassem uma quantidade positiva a outra quantidade, estariam aumentando este valor indefinidamente.

O que os autores fizeram então foi propor outra atividade com o GeoGebra utilizando o comando *Soma(Sequência[<expressão>,<variável>,<valor inicial>,<valor final>])* conjuntamente com um controle deslizante, objetivando-se a visualização gráfica da convergência ou divergência de duas séries: $S_n = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{t}\right)$ e

$S_n = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{t^2}\right)$. O comando *Result=(a,0)* criava o ponto das somas parciais obtidas pelo comando *Soma* que resultaria em a.

Dessa forma, Cargnin e Barros (2015) apontam que os alunos afirmaram então que as duas séries tendiam para um valor limite, sendo as duas então convergentes quando na verdade apenas a segunda é convergente. Os autores atribuem essa persistência na dificuldade dos alunos à limitação do *software* com o controle deslizante, pois apesar de ser possível colocar valores muito grandes, a visualização do ponto é prejudicada em decorrência de se utilizar valores tão altos. A segunda série por exemplo, por ser convergente, chegou em um ponto em que mesmo valores muito grandes (os autores comentam $n = 30.000$) não aparentavam movimento no ponto observado, o que incomodou os alunos.

No entanto, essa atividade possibilitou aos alunos aceitarem que uma sequência cujos termos são dados pela soma dos termos anteriores poderia convergir.

2.5 Conclusão

Por fim, após a leitura de todos os artigos expostos neste capítulo, observamos que são poucas as contribuições desses para a nossa proposta de trabalho. Muitos dos artigos apresentados aqui tratam da ideia de infinito apenas por ser um assunto inevitável quando os autores tratam de outros temas como limites, sequências, séries ou números irracionais. Por mais que as propostas sejam interessantes e valham a discussão feita nesses trabalhos, pareceu que o infinito em alguns casos ainda era um assunto nebuloso e pouco evidenciado nas discussões, o que é compreensível uma vez que, como salientamos, o infinito não é o assunto principal tratado nos trabalhos.

Já alguns autores que trataram do infinito como assunto principal de seus trabalhos, como aqueles realizados em pesquisas de campo, não satisfizeram a nossa necessidade em encontrar discussões no Ensino Superior, esse que será o nosso campo de estudo. Porém, outros autores nos ajudaram a entender como o infinito pode ser explorado sob diversas perspectivas, como o artigo de Machado *et al* (2013), o qual nos ajudou na elaboração do capítulo anterior e que nos apresenta um infinito sob o olhar das artes, seja ele um infinito potencial ou atual. E o artigo de Júnior (2015) ainda reforça a nossa ideia de que, por mais que seja preciso em alguns momentos se utilizar de um certo rigor seja na escrita ou durante a fala, ainda assim podemos recorrer a outras interpretações para o infinito sem necessariamente depender de uma matemática que não se abre a outras discussões e definições.

Dessa forma encerramos esse capítulo e apresentamos no Capítulo 3 algumas ideias principais acerca do Modelo dos Campos Semânticos, bem como nossa justificativa pela adoção deste referencial na presente pesquisa.

CAPÍTULO 3
O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

Quando assumimos o papel de pesquisador, é importante que deixemos claro para o leitor qual a nossa posição epistemológica, pois somente assim é possível tentar compreender o posicionamento do autor em relação à sua pesquisa, desde seus objetivos até mesmo os seus resultados. Caso contrário, qual seria a relevância em uma discussão entre dois pesquisadores sobre se o conhecimento é transmitido ou se o conhecimento é construído se não conhecêssemos o que cada um considera ser “conhecimento”?

Quando dizemos que devemos assumir uma posição epistemológica, assumimos como epistemologia a definição de Lins (1993) em que “epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?” (LINS, 1993, p. 77).

Diante disto, Lins (1992) propõe em sua tese um modelo epistemológico a fim de responder tais perguntas, sendo esse o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). As primeiras ideias relacionadas ao MCS por Rômulo Campos Lins surgiram por volta de 1986, resultado de suas inquietações ao querer saber o que os alunos estavam pensando quando “erravam”, no entanto, sem recorrer a ideia de erro (LINS, 2012). Porém, foi somente em 1992 que Lins começou a dar forma ao seu modelo, o qual com o passar do tempo se desenvolveu e se aprimorou. Tal modelo parte de discussões de Piaget e Vygotsky onde ora o *outro* é secundário e ora o *objeto* é secundário. No MCS, o sujeito, o objeto e o outro são elementos básicos, e não podem ser reduzidos uns aos outros (LINS, 1993).

Ao apresentar esse modelo, pretendemos promover um estudo epistemológico com o objetivo de compreender *de onde o outro está falando*. Com isto, apresentamos no decorrer desse capítulo algumas noções que consideramos essenciais tanto para o MCS quanto para esse trabalho, baseando-se em leituras feitas de trabalhos produzidos por Lins (1993, 2012) e também por discussões realizadas em grupos de estudos.

No entanto, antes de discutir essas noções, apresentamos um exemplo para contextualizar e justificar a necessidade de um modelo como o MCS.

3.1 Um exemplo inicial

Imaginemos a seguinte situação. A professora de matemática está ensinando o conteúdo de dízimas periódicas a seus alunos após terem iniciado frações decimais e, em uma de suas aulas inicia o seguinte diálogo:

Professora: Como podemos escrever 1,23 (e escreve o número no quadro) em forma de fração?

Classe: 123/100! (respondem em coro)

Professora: E o número 0,2323 ...? (escreve novamente)

Classe: 23/99! (respondem sem dificuldades)

Por fim, a professora pergunta

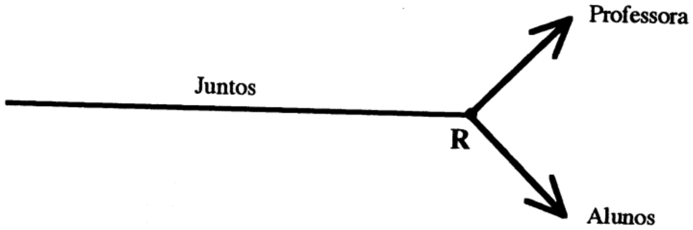
Professora: E o número 0,999 ...?

O silêncio toma conta da classe. A professora não entende. Ela ensinou corretamente seus alunos a representar dízimas periódicas como frações. O que há de errado então? Finalmente um dos alunos toma coragem.

Aluno 1: Professora, eu acho que dá 1, mas acho que está errado.

O que podemos retirar desse diálogo? Primeiramente, vamos tomar a professora e esse aluno representando a classe como dois sujeitos cognitivos distintos, de modo que no início da conversa podemos afirmar que estão conversando um com o outro e se entendendo, até o momento em que não se entendem mais. Essa situação, de acordo com Lins (1993), poderia ser representada pela Figura 3.1.

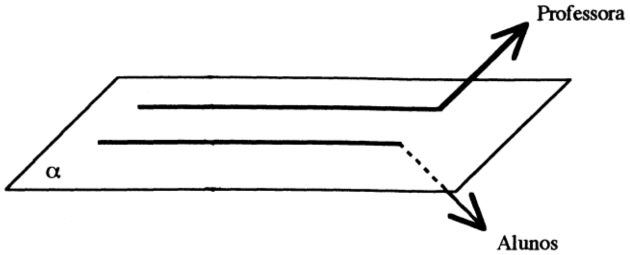
Figura 3.1: Diálogo em sala de aula



Fonte: Lins, 1993, p. 82.

O ponto *R* na Figura 3.1 indica a ruptura que houve durante o diálogo. No entanto, podemos supor que os alunos não estão com dificuldades em utilizar as técnicas ensinadas pela professora, uma vez que um deles disse achar que a dízima periódica $0{,}999\ldots = 1$ (apesar de não acreditar em si mesmo). Sendo assim, Lins (1993) sugere que olhemos a Figura 3.1 por outra perspectiva. Para isso, imaginemos que essa figura na verdade está sob um plano α, de modo que ao invés dos diálogos irem para dois lados diferentes, na verdade estão indo para cima e para baixo. Assim chegamos à Figura 3.2.

Figura 3.2: Outra perspectiva para a Figura 3.1



Fonte: Lins, 1993, p. 83.

O modelo apresentado na Figura 3.2 sugere que na verdade desde o início, tanto a professora quanto os alunos já estavam seguindo caminhos diferentes em seus diálogos. Isso poderia ser justificado se pensarmos que enquanto os alunos se baseiam nas técnicas que sua professora ensinou para representar as dízimas periódicas como frações, a professora se baseia no conceito de infinito atual (onde um processo infinito pode resultar em um número finito), e por isso o desencontro em seus diálogos.

Essa mudança de perspectiva nos permite compreender um pouco melhor de onde cada um dos sujeitos está falando, quais são as crenças que os permitem dizer o que dizem e o que os autorizam a dizer o que dizem. Em outras palavras, o MCS nos permite uma maneira diferente de se analisar a produção de conhecimento de um sujeito cognitivo. Mas se estamos falando de produção de conhecimento, o que seria conhecimento então no MCS?

3.2 Algumas noções do MCS

3.2.1 Conhecimento

Conhecimento é um par-ordenado em que a primeira coordenada é dada por uma crença-afirmação, e a segunda coordenada é a justificação. Em outras palavras, conhecimento é quando o sujeito enuncia algo em que acredita, baseando-se em algo que o autoriza a dizer o que disse. Neste sentido a justificação não precisa ser explicitada, mas é essencial quando pensamos neste modelo, pois isso pode diferenciar o conhecimento de um adulto e de uma criança quando ambas afirmam que $2 + 4 = 4 + 2$, uma vez que enquanto um pode se basear em propriedades aritméticas da soma, a outra pode se basear apenas pelos dedos em suas mãos que quando trocadas de lugar ainda resultam em 6. Portanto, o que diferencia um conhecimento do outro é a justificação que cada sujeito assume para a sua crença-afirmação.

Por exemplo, vamos supor que após o diálogo apresentado entre a professora e seus alunos, a professora pediu para que seus alunos se dividissem em dois grupos a fim de pesquisarem e discutirem a afirmação $0{,}999\ldots = 1$, a qual deveria ser justificada na próxima aula por eles mesmos. No dia seguinte, são escolhidos um representante de cada grupo, de modo que o grupo 1 justifica a igualdade da seguinte maneira no quadro:

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1.$$

O representante do segundo grupo diz terem encontrado uma justificação diferente, e escreve no quadro:

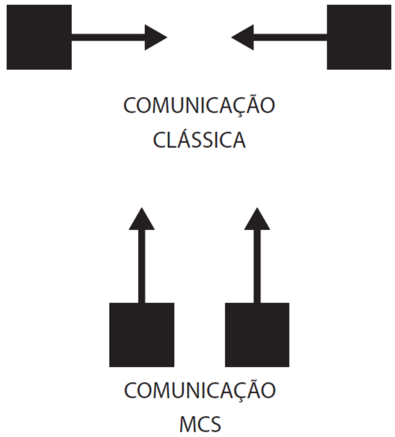
$$x = 0{,}999\ldots \implies 10x = 9{,}999\ldots \implies 10x = 9 + 0{,}999\ldots \implies 10x = 9 + x$$
$$10x - x = 9 \therefore x = 1$$

Em ambos os casos foram apresentadas justificações diferentes para a mesma enunciação, pois enquanto o primeiro grupo se baseou em progressões geométricas infinitas, o segundo grupo utilizou operações algébricas. Seguindo a definição de epistemologia de Lins (1993), cada caso representa um conhecimento diferente que se deve à diferença de suas justificações, e ambas são válidas dentro do contexto em que estão inseridas. É possível afirmar que ambos os sujeitos constituíram um objeto “dízima periódica” atribuindo um significado diferente para cada objeto constituído. Quando dizemos alguma coisa sobre *algo*, o que estamos fazendo é produzindo um (ou mais) significados para este *algo*. Dessa forma, este *algo* se torna um *objeto* dentro de um campo semântico no qual somos produzidos e instituídos de modo que nossos significados sejam legítimos. Sendo assim, não podemos dizer que existe “o” significado para um objeto, uma vez que este dependerá do contexto em que se fala do objeto.

3.2.2 Interlocutor

"O interlocutor é uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo" (LINS, 2012, p. 19). Este interlocutor não é necessariamente um ser biológico, mas sim um sujeito cognitivo instituído por quem enuncia. Apesar de ser comum imaginarmos que no diálogo inicial existe uma conversa entre a professora e alunos, o MCS admite que na verdade o diálogo acontece de acordo com a Figura 3.3.

Figura 3.3: Comunicação no MCS



Fonte: Lins, 2012, p. 24.

Na perspectiva do MCS "'comunicação' não corresponde mais a algo do tipo 'duas pessoas falando uma para a outra', e sim a 'dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor'" (LINS, 2012, p. 24).

Sendo assim, o que podemos extrair daquele diálogo é que o que inicialmente parecia ser a professora e os alunos falando na direção de um mesmo interlocutor, no final acabou se mostrando que desde o início os interlocutores eram diferentes, e o que diferenciou isso foi a justificação que cada um deles atribuiu para a afirmação $0{,}999\ldots = 1$. Por esse motivo, na perspectiva do MCS podemos dizer que não houve comunicação, mas sim apenas uma interação entre os sujeitos.

3.2.3 Autor-texto-leitor

Ao produzir um enunciado, assumimos o papel de o autor, o qual fala na direção de um leitor criado/instituído pelo o autor. Quem produz significado para o enunciado é o leitor, que fala na direção de um autor, o qual foi criado pelo o leitor. Ambos um autor e um leitor podem ser associados à papeis que os interlocutores podem assumir.

Um exemplo pode ser dado quando digo que, assumindo o papel de o autor, escrevo esse texto para um interlocutor (um leitor) que instituí, o qual seria capaz de legitimar e reproduzir as mesmas coisas que enunciei durante a escrita. Sendo assim, o que escrevi se torna um resíduo de enunciação, ou seja, algo que quem lê acredita ter sido dito por alguém. Essa pessoa que lê está assumindo o papel de o leitor ao mesmo tempo em que institui um autor, a fim de tentar entender de onde o autor estava falando quando produziu estes enunciados. Qual era o contexto cultural, social e pessoal que lhe fizeram dizer o que ele disse?

Após este conceito, parece viável apresentar o conceito de legitimidade.

3.2.4 Legitimidade/Verdade

Na perspectiva do MCS, não tomamos a palavra "verdadeiro" no sentido de atributo para algo que foi dito, mas sim como um atributo do conhecimento produzido. Já as legitimidades podem ou não serem atribuídas aos modos de produção de significado. Como consequência podemos dizer que todo conhecimento é verdadeiro, mas não necessariamente é legítimo (LINS, 2012).

Podemos pensar em um exemplo bem simples que expresse o significado destes dois termos. Se a professora escreve no quadro que $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$, um dos alunos pode querer dizer que $3 \times 3 = 3 + 3 = 6$. Isto porque o conhecimento que produziu está associado a justificação de que um número vezes ele mesmo é o mesmo que o dobro desse número. Esse conhecimento é verdadeiro para o interlocutor que o aluno criou, ou em outras palavras, dizemos que esse conhecimento é verdadeiro localmente. Agora, o que aconteceria se esse aluno contasse seu pensamento para sua professora? Certamente que ela acharia tal raciocínio um absurdo e diria que seu apontamento não é verdadeiro, ou seja, o conhecimento que produziu é verdadeiro localmente, mas não é legítimo para a cultura que está inserido naquele momento: a Matemática. Cabe então à professora apresentar a sua justificação do porquê associou a multiplicação com a soma, e cabe a esse aluno tornar essa justificação da professora sua também, para que possa fazer parte dessa cultura.

Por conta disso, talvez você possa imaginar que o que determina o que é ou não legítimo são seres biológicos que em um certo período do tempo instituíram um interlocutor comum que determina a Matemática como ela é, de modo que "absurdos" do tipo $3 \times 3 = 6$ não são permitidos. E se o desejo desse aluno é ser aceito por esta cultura, cabe a ele seguir as regras do grupo. No entanto, tais situações como a descrita sobre esse aluno são necessárias para que ocorra o avanço, caso contrário a Matemática ainda seria feita apenas com desenhos em paredes de pedra. Isso pode ser um dos gatilhos para se pensar sobre a importância da "diferença" como oportunidade de aprendizagem.

Todos os termos apresentados anteriormente nos fornecem a base para apresentar Campo Semântico.

3.2.5 Campo Semântico

Quando o aluno disse que $3 \times 3 = 6$, ele o fez porque no mundo que criou existe um interlocutor que permitiu tal afirmação baseando-se nos enunciados de sua professora. Nesse mundo foi instituída uma regra em que "$a \times a = 2a$" e isso é verdadeiro localmente. Já o interlocutor da professora está em um mundo criado por ela em que a afirmação $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$ se baseia na regra instituída localmente por ela (e globalmente pela cultura Matemática) sendo esta "$a \times b$ igual a soma de a, b vezes" ou vice-versa. Sendo assim, esse "mundo" criado pela professora e aluno são chamados de campos semânticos. De um modo mais conceitual

> Um campo semântico, de modo geral, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores dentro de limites; que limites são estes, só sabemos a posteriori: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (LINS, 2012, p. 17).

Outra "definição" dada ao campo semântico é "um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (LINS, 2012, p. 17). O núcleo do campo semântico são as estipulações locais que fazemos e não necessariamente precisam de uma justificação. Por exemplo, em uma comunidade de matemáticos não seria necessária a explicação do porquê $9 + 7 = 8 + 8$, diferente do que aconteceria com uma criança que está começando a aprender adição. Já o termo atividade assume um significado diferente do usual.

O termo atividade utilizado no MCS parte do significado atribuído por Leontiev e utilizado aqui de forma muito mais superficial do que a discutida pelo autor em seus trabalhos. De forma simples, dizemos que uma atividade é quando uma necessidade se encontra em um objeto, tornando-se então um motivo. Por exemplo, no momento em que a professora fez perguntas aos seus alunos, ela criou uma necessidade neles a qual podemos dizer que seria "responder a pergunta". O objeto é a resposta dessa pergunta e, ao aceitarem essa proposta, transformam esse objeto em um motivo o qual movimenta a interação entre os sujeitos.

Com isso, o modelo parece viável e pertinente quando buscamos uma maneira de entender o que leva um sujeito a dizer ou afirmar determinadas coisas, mas sem depender da ideia de “erro”. Em outras palavras, o MCS apresenta um ponto de vista em que, querendo saber de onde o outro está falando, levantamos as possíveis motivações de determinados comportamentos que aparentemente parecem não ter justificativa ou até mesmo “absurdos” levando-se em consideração uma comunidade científica em questão. Como é o caso da afirmação feita pelo aluno quando diz que $3 \times 3 = 6$. Por mais que a professora soubesse que o aluno estava errado, é interessante que ela também saiba o porquê de ele ter dito isso.

Por fim, lembramos novamente da importância de se posicionar epistemologicamente. É preciso saber quem você é como pesquisador, suas crenças e motivações, para somente depois desenvolver uma pesquisa. Caso contrário, sem saber quem você é como o leitor saberá?

CAPÍTULO 4
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Durante o início de nossa conversa (pesquisador e orientador) sobre quais estratégias poderíamos utilizar para produzir os dados para essa pesquisa, tínhamos em mente que deveríamos fazer tal coleta por meio de um questionário realizado com alunos do 3º ano do Ensino Médio, a fim de avaliar como noções sobre infinito eram tratadas nas escolas e como os alunos produziam significado para infinito. No entanto, após reavaliarmos algumas questões, decidimos mudar o nosso sujeito de pesquisa para alunos de Graduação em Matemática, seja Licenciatura ou Bacharelado, por acreditarmos que o conhecimento e os significados produzidos para infinito por esses alunos, por hipótese, nos trariam resultados mais relevantes para serem analisados por meio do Modelo dos Campos Semânticos.

A partir disso, optamos por elaborar um formulário em formato de questionário com algumas questões exploratórias de resposta aberta acerca do conceito de infinito. Tal questionário seria aplicado a estudantes nos *campi* da Unespar de Apucarana e Campo Mourão presencialmente e mediado pelo pesquisador e pelo orientador.

No entanto, durante o desenvolvimento desse questionário, entramos em um período de pandemia causado pela doença COVID-19, o qual criou a necessidade de remodelar a estratégia de produção de dados, uma vez que, devido às orientações de distanciamento para prevenção de infecção pelo vírus, não poderíamos mais nos reunir presencialmente. A solução encontrada foi elaborar o questionário e aplicá-lo aos sujeitos de pesquisa de maneira *on-line*, enviando o link para que esses pudessem responder em suas casas.

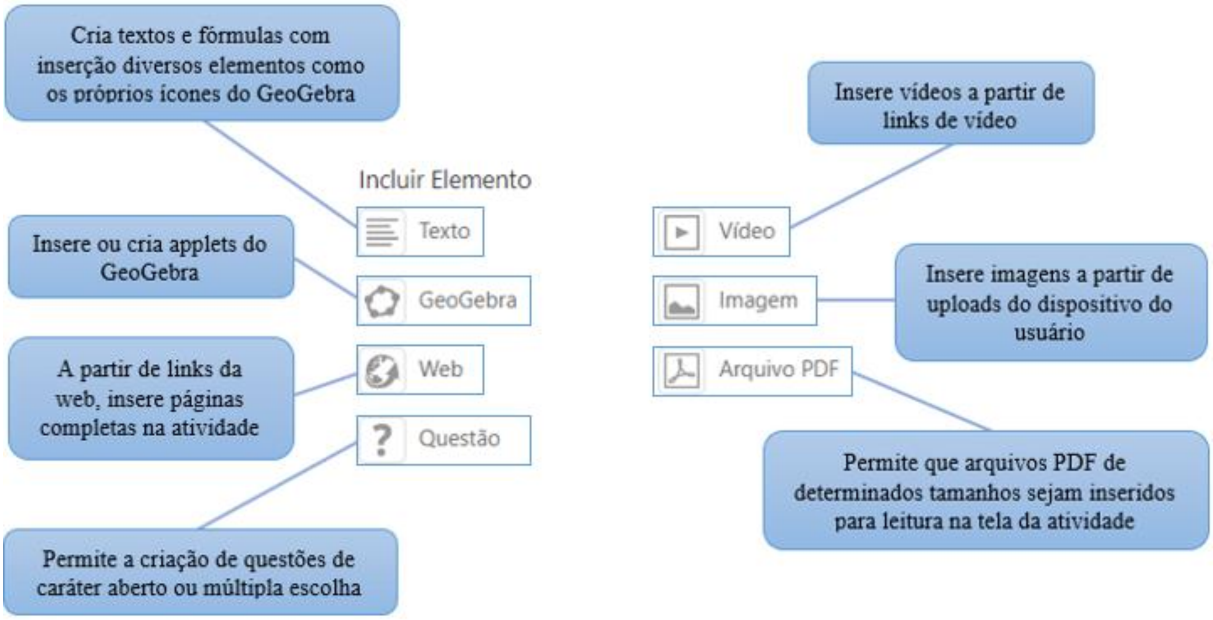
Tal mudança foi considerada por nós algo novo e diferente, pois fugia do formato que esperávamos para o desenvolvimento da pesquisa. Contudo, em relação ao questionário não precisamos realizar alterações em sua estrutura, uma vez que o formulário que criamos foi feito com a intenção de aplicá-lo utilizando o computador.

4.1. FERRAMENTAS ADOTADAS PARA A PRODUÇÃO DE DADOS

Em posse de um conhecimento mais aprofundado sobre o infinito e também de uma fundamentação teórica (MCS) que nos permite analisar *de onde o outro está falando* quando produz significado para algo, elaboramos um questionário que nos permitisse unir esses dois elementos a fim de saber quais são os possíveis conhecimentos produzidos sobre o objeto infinito. Decidimos abordar esse conceito utilizando elementos gráficos e algébricos por meio do *software* GeoGebra e, em seguida, criamos uma atividade no site da plataforma.

Apesar de o recurso *Atividade* no site permitir inserir elementos comuns presentes em outras plataformas de formulários (como os formulários do Google, por exemplo), a principal vantagem deste recurso para o nosso caso foi a possibilidade de integrar as construções realizadas no GeoGebra (ou simplesmente criar novas construções) na atividade, de modo que os usuários que realizam as tarefas (no nosso caso o questionário) também pudessem modificar estas construções, as quais ficavam salvas somente na instância do questionário que aquele usuário respondeu. Os recursos presentes na atividade do GeoGebra aparecem na Figura 4.1

Figura 4.1: Elementos do recurso Atividade do GeoGebra



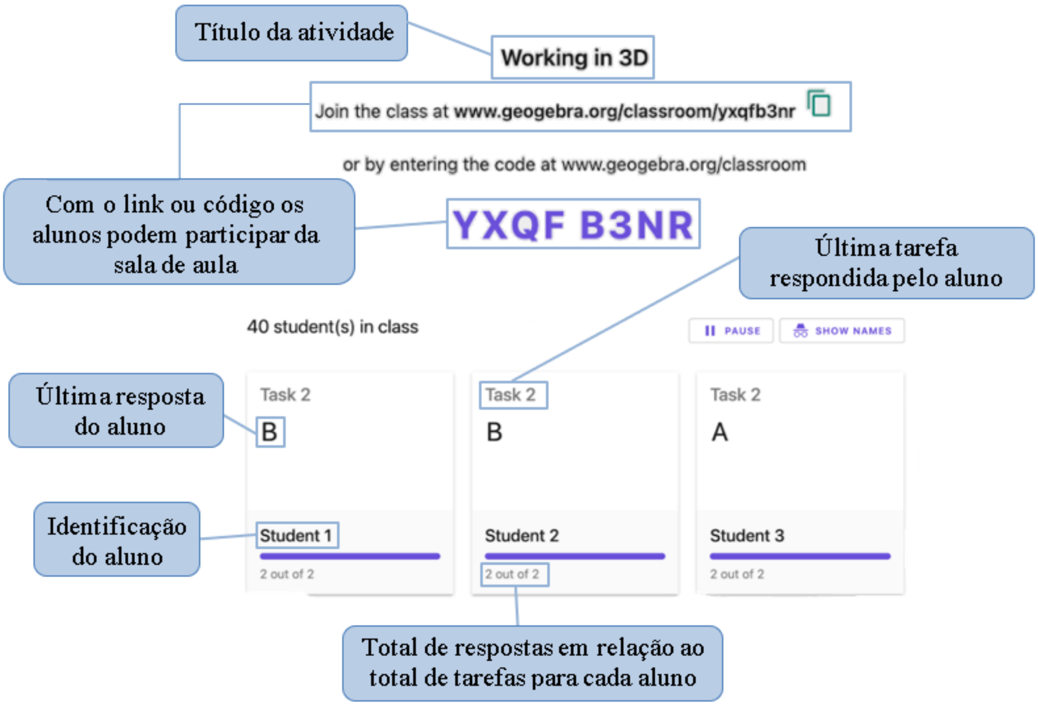
Fonte: Adaptado do ambiente Atividade do GeoGebra[19].

A fim de poder aplicar este questionário com os alunos, tivemos que integrar a atividade criada a outro recurso do site do GeoGebra: o *Classroom*. Com isso, outra vantagem aparece. Os sujeitos que acessam o link da sala de aula associada a atividade precisam digitar seus nomes para realizar a tarefa, e esses ficaram salvos na *Classroom*

[19] Disponível em https://www.geogebra.org/worksheet/new

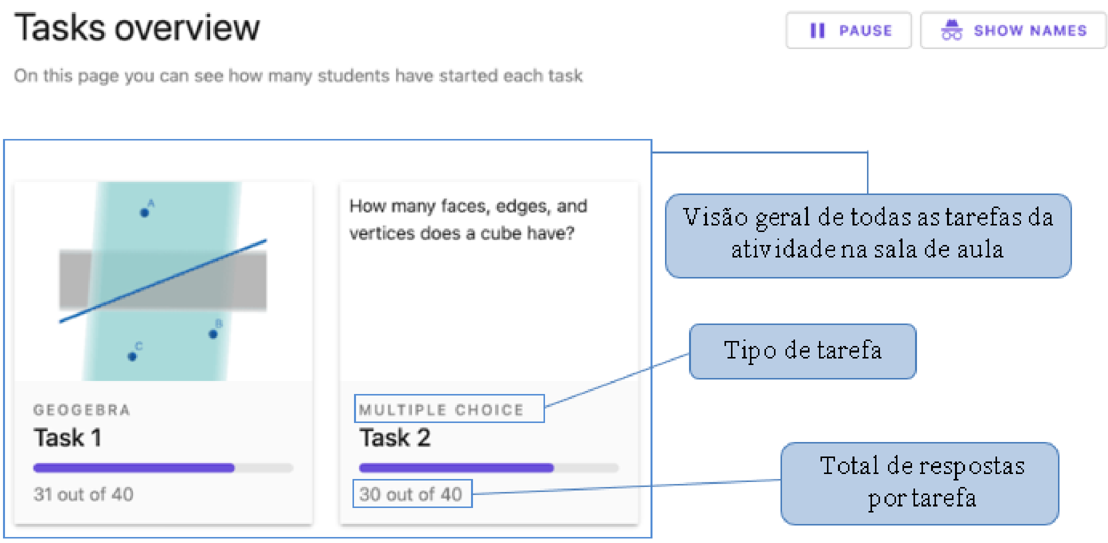
associada ao nome digitado. Assim, podemos não somente visualizar todas as respostas de todos os que interagiram com a atividade, mas também as marcas de suas interações nas construções, como é mostrado nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente.

Figura 4.2: Alunos cadastrados na sala de aula



Fonte: Adaptado de GeoGebra[20].

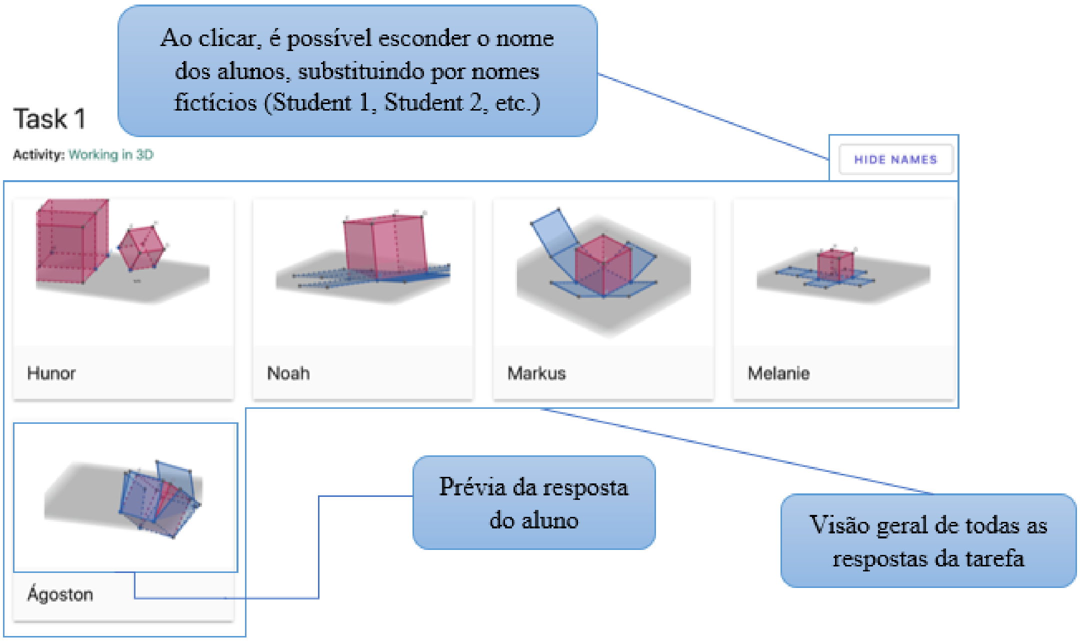
Figura 4.3: Visualização das atividades



Fonte: Adaptado de GeoGebra..

[20] Disponível em https://www.geogebra.org/m/hncrgruu

Figura 4.4: Visualização das respostas por tarefa



Fonte: Adaptado de GeoGebra.

Em posse de todo este conjunto de possibilidades ofertados pelo recurso de *Atividade* e *Classroom* do GeoGebra, os resíduos de enunciação dos sujeitos tornam-se muito mais acessíveis e ricos na hora de se produzir e analisar esses dados.

4.1 ELABORAÇÃO E APRESENTAÇÃO DAS QUESTÕES

4.1.1 Estabelecendo o nosso interlocutor

Quando começamos a elaborar as questões que deveriam fazer parte do questionário, assumimos o nosso papel de o autor e estabelecemos um leitor capaz de atribuir as mesmas legitimidades que nós atribuímos sobre o infinito. No entanto, a fim de estabelecer diversas possibilidades de interlocução, precisamos entender o nosso interlocutor não somente como alguém cujas legitimidades e significados são produzidos por um estudante de um Curso de Graduação em Matemática, mas também como alguém cujas legitimidades e significados são produzidos como alguém integrante de uma sociedade e uma cultura em que falar sobre infinito não é tão comum como no meio acadêmico. Em nosso dia a dia, nossa mente tende a fazer relações com coisas finitas: nosso corpo é finito, os recursos são finitos e até mesmo grãos de areia são finitos. Desse modo, já achamos plausível afirmar que parece que em um meio é mais legítimo falar sobre infinito do que no outro.

Sendo assim, as atividades elaboradas para o questionário tendem a receber respostas nessas duas vertentes, permitindo uma análise mais aguçada por meio do MCS em que não leremos o aluno pela falta, caracterizando o que o MCS chama de leitura positiva, mas sim analisaremos os possíveis motivos de um aluno fazer determinadas afirmações, levando em consideração esses dois ambientes, acadêmico e não-acadêmico. Isso é o que o MCS caracteriza como leitura plausível.

Após introduzir os recursos utilizados para a produção de dados e traçarmos um perfil para o nosso interlocutor, vamos apresentar as questões que escolhemos abordar no questionário[21] e mostrar possíveis direções de interlocução que o aluno pode ter ao responder à questão. Entretanto, omitiremos a primeira e a última questão por se tratarem apenas de questões voltadas a identificação do aluno e sua avaliação em relação às questões que respondeu.

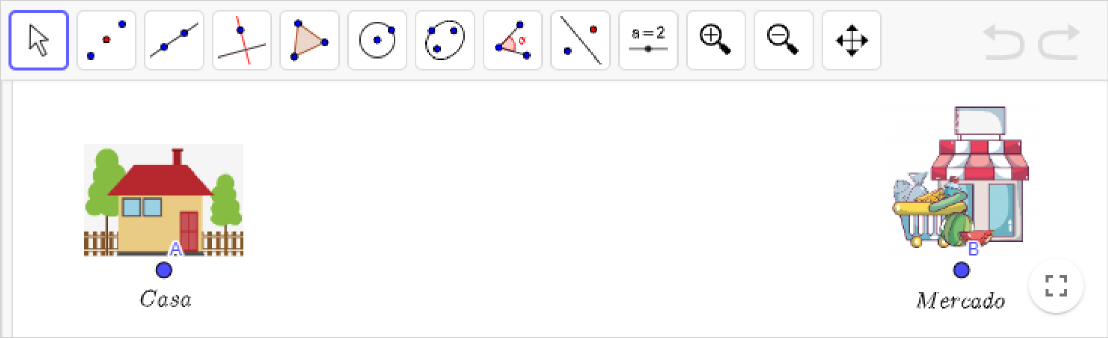
4.1.2 A existência do movimento

Essa questão é baseada em um dos clássicos Paradoxos de Zenão, nesse caso o Paradoxo da Dicotomia. Esse paradoxo segue a lógica de que partindo de um ponto A para um ponto B primeiro deve-se passar pelo ponto médio e que, para ir desse ponto médio ao ponto B, deveremos passar por outro ponto médio novamente. Zenão conclui que seria impossível ir do ponto A ao ponto B, pois para isso seria necessário passar por um número infinito de pontos médios. Tal discussão sobre os argumentos de Zenão já foi tratada no Capítulo 1, portanto, o que vamos tratar aqui é como a questão foi apresentada em nosso questionário.

No entanto, antes de apresentar o enunciado dessa questão, devemos informar que esta precisou ser reformulada devido à interpretação errônea que estávamos causando aos alunos. O enunciado inicialmente estava escrito da seguinte forma: "Certa vez, um filósofo e matemático chamado Zenão fez uma afirmação: 'o que se move deve sempre encontrar o ponto médio antes do ponto final'. Partindo desse pressuposto, vamos imaginar que você queira ir da sua casa (ponto A) até o mercado (ponto B), conforme mostra o esquema abaixo" (Figura 4.5).

[21] O questionário completo pode ser acessado em https://www.geogebra.org/m/xjyewaqy

Figura 4.5: Construção da questão “a existência do movimento”



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de imagens do Google Imagens.

Em seguida é solicitado ao aluno que ele utilize a ferramenta *Ponto Médio* no GeoGebra para encontrar o ponto médio entre *Casa* e *Mercado*, criando o ponto médio C. Novamente, pedimos que ele utilize a ferramenta *Ponto Médio*, mas desta vez entre C e *Mercado*, criando um novo ponto médio D. O aluno é incentivado a realizar esse processo quantas vezes ele considerar necessário a fim de responder se concorda ou não com a afirmação feita por Zenão e justificar a sua resposta[22].

Diante disto, percebemos que muitos alunos estavam respondendo que Zenão estava correto, o que na verdade não é de forma alguma uma conclusão difícil de se chegar. No entanto, o significado produzido pelos alunos não estava sugerindo que esse processo infinito de sempre passar pelo ponto médio resultaria na impossibilidade de se chegar ao mercado, mas sim que para seguir de um ponto a outro necessariamente é preciso passar por um ponto médio entre os dois, uma vez que esta era a afirmação feita pelo filósofo e sua veracidade foi questionada aos alunos.

Ressaltamos que nosso objetivo nessa questão não era simplesmente verificar se os alunos concordam ou não com esta afirmação e sim ver quais eram os significados produzidos como consequência dessa afirmação. Sendo assim, reformulamos a questão como uma tentativa de levar os alunos para essa direção de interlocução.

Diante disso, solicitamos que os alunos que participaram do questionário respondessem a essa questão novamente por meio de um novo link enviado a eles via e-mail. O enunciado agora segue da seguinte forma: “Certa vez, um filósofo e matemático chamado Zenão fez uma afirmação: ‘o que se move deve sempre encontrar o ponto médio antes do ponto final’. Seu objetivo com esta afirmação, era mostrar que é impossível sair de um ponto e chegar ao outro se tivermos que passar por infinitos pontos médios no meio

[22] Apesar da justificação não precisar ser explícita para o MCS, optamos por pedir que o aluno apresentasse a mesma a fim de evitar respostas apenas do tipo “sim”, “não” e afins.

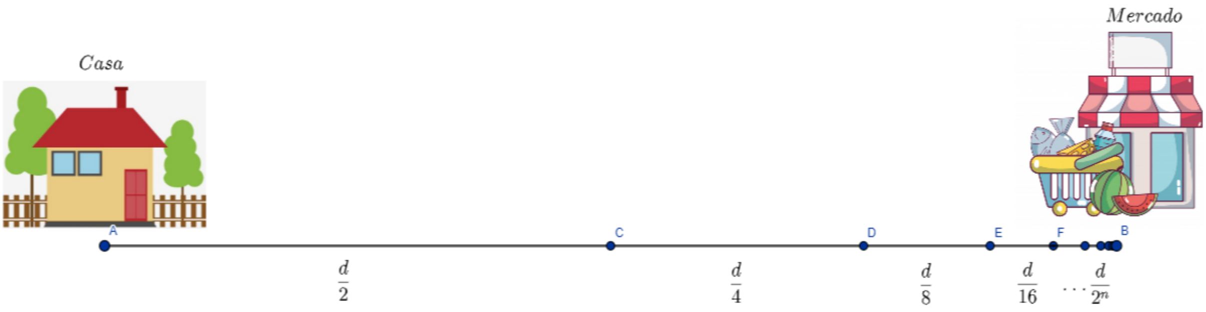
deste trajeto. Partindo desse pressuposto, vamos imaginar que você queira ir da sua casa (ponto A) até o mercado (ponto B), conforme mostra o esquema abaixo" (Figura 4.5).

Após apresentar a mesma imagem que seguiu na Figura 4.5, utilizamos uma linha de narrativa semelhante a como estava anteriormente, pedindo ao aluno que utilizasse a ferramenta *Ponto Médio* para criar o ponto médio C entre os pontos A e B e novamente utilizando a mesma ferramenta para criar o ponto médio D entre os pontos C e B. A diferença nessa parte do enunciado foi que enfatizamos que, sempre que a ferramenta *Ponto Médio* é utilizada surgirá um novo ponto entre os dois pontos selecionados, sugerindo então que, como o enunciado propõe, sempre estaremos passando por um ponto médio antes de chegar ao fim (se isso for mesmo possível).

Acreditamos que com isso os alunos tiveram uma direção de interlocução diferente do que a que tiveram da primeira vez, o que notamos pelos resíduos de enunciação deixado por eles e que serão devidamente discutidos e detalhados no Capítulo 5. Por enquanto, queremos explorar quais seriam algumas das possibilidades de direção de interlocução para esta questão.

A primeira delas ocorre ao relacionar o conteúdo do enunciado com o conteúdo de séries e sequências, os quais são tratados em disciplinas de Cálculo e posteriormente em Análise Real. Como não foi dada a distância, podemos tomar um valor genérico $d \in \mathbb{R}_+^*$. Deste modo, a distância entre *Casa* (ponto A) e *Mercado* (ponto B) é $\overline{AB} = d$. Encontrando o ponto médio C entre A e B, temos que $\overline{AC} = d/2$. Continuando o processo indefinidamente, obtemos outras distâncias como é mostrado na Figura 4.6

Figura 4.6: Partições da distância $\overline{AB} = d$



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de imagens do Google Imagens.

Essas distâncias constituem a sequência d_n dada por:

$$d_n = \left\{\frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \frac{d}{8}, \dots, \frac{d}{2^n}\right\}$$

a qual se trata de uma PG infinita cujo termo geral é $d/2^n$. Sendo assim, temos então a série geométricas s_n dada por:

$$s_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \cdots + \frac{d}{2^n} + \cdots$$

cujo primeiro termo é $a = d/2$ e a razão é $r = 1/2$. Logo, pelo critério de convergência de séries geométricas, como $|r| < 1$, temos que s_n converge, e sua soma é expressa por:

$$s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{d/2}{1-1/2} = \frac{d/2}{1/2} = d$$

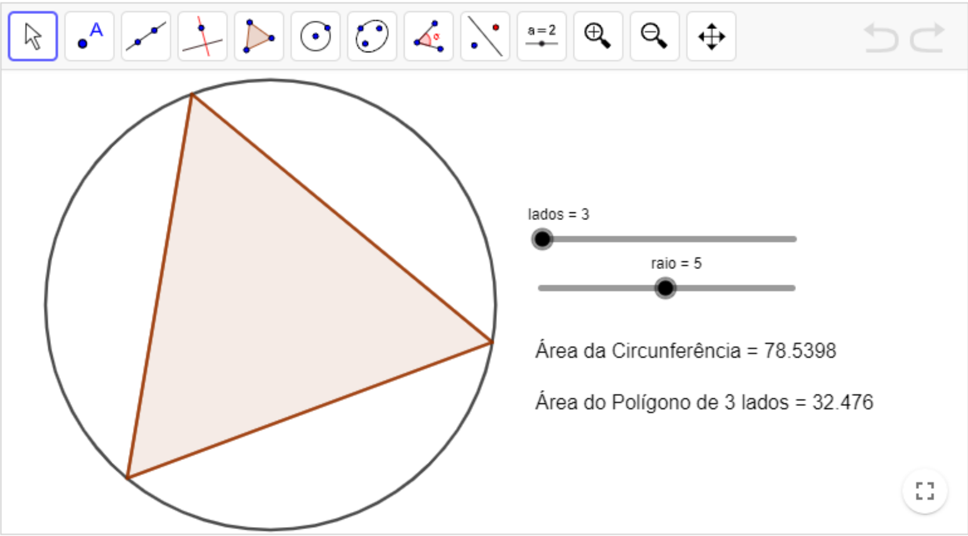
Zenão fazia parte de uma cultura de pensamento em que era plausível pensar na impossibilidade do movimento dado certos pressupostos. Se sua intenção era legitimar estas crenças-afirmações então seus Paradoxos podem ter sido a forma que ele encontrou de fazer isso. No entanto, tal pensamento não é legitimado dado a cultura matemática que temos hoje, e provamos que $s_n = d = \overline{AB}$, ou seja, provamos que um processo infinito de etapas pode resultar em algo finito. De modo semelhante, outro significado interessante que podemos produzir para essa série geométrica é que, por ser convergente, então $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, ou seja, por mais que tivéssemos que passar por infinitos pontos médios entre nossa casa e o mercado, essa distância se tornaria 0 no final deste processo.

O GeoGebra oferece ferramentas para o usuário verificar, nessa questão, para onde os pontos médios estão tendendo à medida que a ferramenta *Ponto Médio* é utilizada várias vezes. No entanto, o mesmo artifício pode levar o aluno a produzir significados em uma direção de interlocução diferente ao observar que esses pontos médios criados podem ser feitos indefinidamente, o que é possível com apenas um *zoom* e a construção de um ponto médio após o outro *ad infinitum*. Com isso, é plausível concluir a impossibilidade de se partir de um ponto A e chegar em um ponto B, produzindo os mesmos significados que Zenão produziu.

4.1.3 Aproximando as áreas

Essa questão aborda o Método da Exaustão de Eudoxo para aproximar a área de um polígono regular inscrito a uma circunferência de raio r qualquer. Tal questão foi apresentada da seguinte maneira: “Imagine que você precise calcular a área de uma circunferência sem utilizar a fórmula usual. Foi então que você teve uma ideia: desenhar um polígono regular inscrito na circunferência e calcular a sua área. A situação descrita pode ser observada no desenho abaixo” (Figura 4.7).

Figura 4.7: Construção da questão “aproximando as áreas”



Fonte: Produzida pelo autor.

Após a apresentação da construção, o aluno é orientado a aumentar o valor do controle deslizante destinado ao número de lados do polígono regular a fim de responder três perguntas: **(a)** O que você pode dizer em relação à área do polígono regular quando o número de lados é aumentado cada vez mais?; **(b)** Arraste o ponto do controle deslizante para o máximo permitido. Mesmo com 100 lados a área do polígono regular ainda não é a mesma área da circunferência, embora estejam bem próximas. Seria possível aproximar ainda mais essas áreas? Como?; **(c)** É possível tornar as duas áreas iguais, ou elas apenas serão muito próximas independentemente do número de lados que o polígono tenha? Por quê?

As perguntas foram criadas em uma sequência de tal forma que tornasse plausível uma reflexão sobre a área do polígono que se aproximava da área da circunferência a medida que o número de lados no controle deslizante se tornasse cada vez maior, bem como a verificação de que o número de lados máximo para o controle não seria suficiente, de modo que, para tornar as áreas cada vez mais próximas, seria necessário um número de lados suficientemente grande. Por fim, pretendemos com a última pergunta verificar se o aluno produz significados no sentido de que, tendendo o número de lados ao infinito, a área do polígono seria igual a área da circunferência.

Uma das maneiras de se chegar a esta conclusão é imaginando outro polígono regular, mas desta vez circunscrito a circunferência, de modo que

$$A_{pol(i)} \leq A_c \leq A_{pol(c)}$$

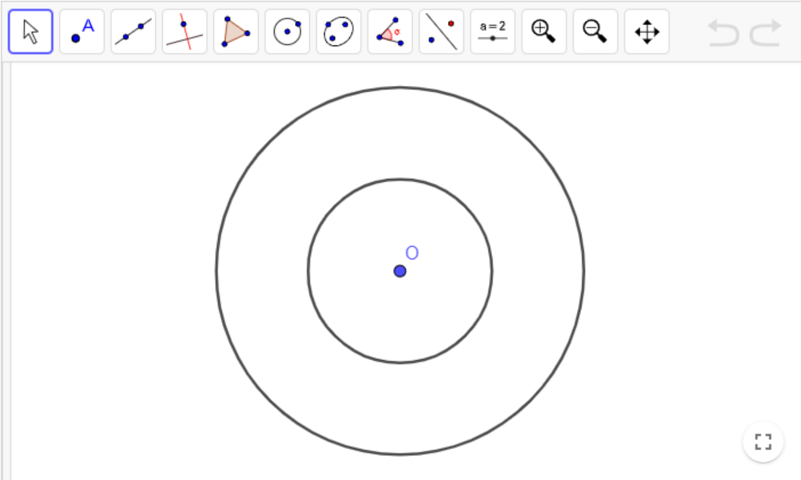
Tal relação indica as áreas dos polígonos inscrito e circunscrito nas extremidades esquerda e direita, respectivamente, bem como a área da circunferência em si no centro desta relação. Não detalharemos a resolução por meio desta abordagem, uma vez que outra mais simples e intuitiva foi apresentada no Capítulo 2. No entanto, para chegar ao resultado, basta mostrar que $\lim_{n\to\infty} A_{pol(i)} = \lim_{n\to\infty} A_{pol(c)} = L$ e, pelo Teorema do Confronto, $A_c = L$.

Uma possível direção de interlocução também esperada para esta questão está voltada ao conceito de limites, pois a construção feita no GeoGebra pode causar uma falsa impressão de que, por mais lados que o polígono possa ter, basta apenas um *zoom* para verificar que ainda irá existir um espaço em branco entre o lado do polígono e o comprimento da circunferência. No entanto, quando trabalhamos com limites, devemos nos lembrar que n está tendendo a um número tão grande quanto se queira, e assim, por definição, o limite da área do polígono de n lados *é* (e não *tende*) a área da circunferência.

4.2.3 Comparando segmentos

Com esta questão pretendíamos utilizar a noção de relação biunívoca para comparar infinitos de densidades diferentes. Para isso inicialmente foi apresentada a construção de duas circunferências de raios $1cm$ e $2cm$, concêntricas e uma interna a outra, como é possível notar na Figura 4.8.

Figura 4.8: Construção da questão "comparando segmentos"



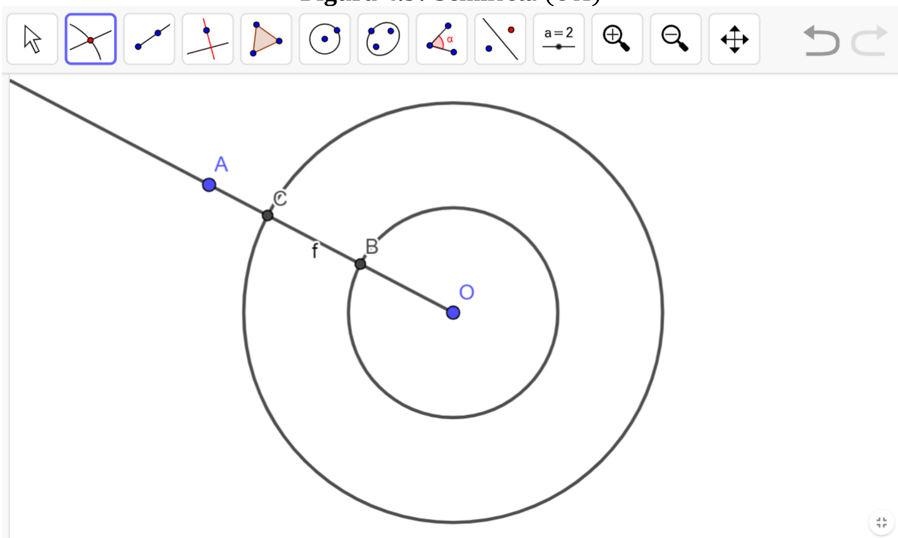
Fonte: Produzida pelo autor.

As perguntas elaboradas a partir desta construção foram as seguintes: **(a)** Considerando que o comprimento das circunferências é formado por pontos, quantos pontos você diria que possui a circunferência menor? **(b)** E a circunferência maior, quantos pontos possui em seu comprimento? **(c)** É possível dizer que a circunferência maior possui mais pontos em seu comprimento do que a menor? Por quê?

Pretendemos com essas questões verificar se o aluno considerava legítimo pensar que, apesar de uma das circunferências ter um comprimento maior do que a outra, as duas possuem a mesma quantidade infinita de pontos, de modo que o que se pode dizer é apenas que uma delas é apenas mais (ou menos) densa do que a outra.

Conforme comentado anteriormente, podemos provar que as duas circunferências possuem a mesma quantidade de pontos em seu comprimento da seguinte forma. Tomemos uma semirreta que parte do centro O para alguma outra direção, como no exemplo da Figura 4.9.

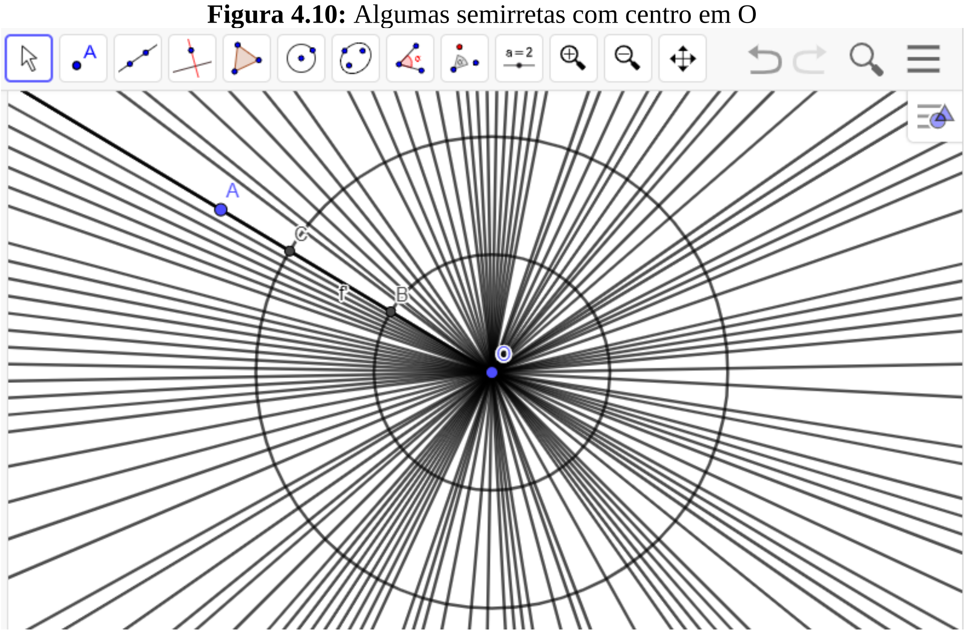
Figura 4.9: Semirreta $\overrightarrow{(OA)}$



Fonte: Produzida pelo autor.

Pela Figura 4.9, verificamos que a semirreta criada passa por dois pontos únicos da circunferência, B e C, respectivamente. Deste modo, é possível criar várias outras semirretas de modo que os pontos de intersecção entre elas e as circunferências também seriam únicos e distintos dos demais, como mostra a Figura 4.10.

Figura 4.10: Algumas semirretas com centro em O



Fonte: Produzida pelo autor.

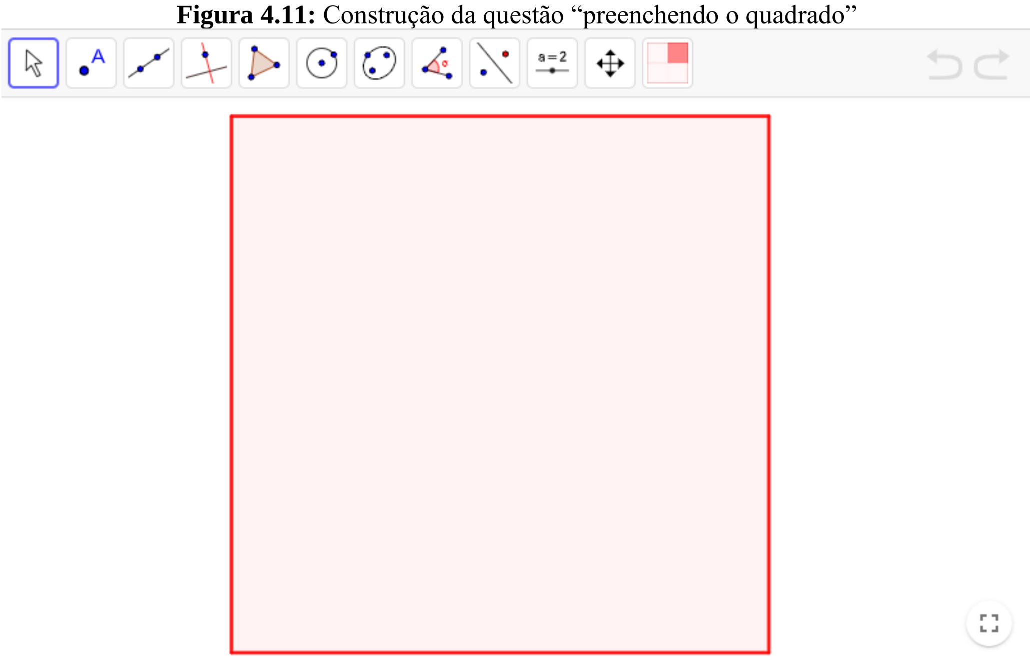
Com isto mostramos que, para cada ponto da circunferência menor, existirá um único ponto para a circunferência maior e, deste modo, a relação biunívoca mostra que não sobrará pontos em nenhuma das circunferências, provando que os dois comprimentos possuem a mesma quantidade de pontos.

No entanto, podemos levar em consideração uma possível produção de significado dos alunos ao responderem que, apesar dos dois comprimentos terem infinitos pontos, o comprimento da circunferência maior possui mais pontos do que a menor justamente devido ao comprimento ou o raio da primeira ser maior que o comprimento ou o raio da segunda.

4.2.4 Preenchendo o quadrado

Esta questão foi elaborada a partir de um dos paradoxos geométricos propostos por Eli Maor em seu livro *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite* (Ao Inifnito e além: Uma História Cultural do Infinito). A construção feita no GeoGebra é apresentada na Figura 4.11.

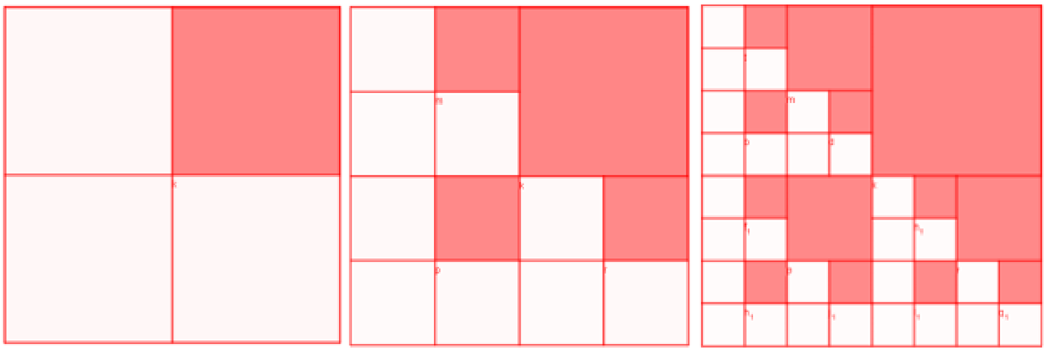
Figura 4.11: Construção da questão "preenchendo o quadrado"



Fonte: Produzida pelo autor.

A partir da construção apresentada ao aluno, ele deve utilizar a ferramenta *Preenchimento* criada e apresentada na última ferramenta da barra de ferramentas, como pode ser vista na Figura 4.11. Essa ferramenta divide o quadrado em quatro novos quadrados de modo que um fique preenchido e os outros três não. Ainda com a ferramenta, é possível realizar quantas iterações o aluno achar necessário a fim de responder as questões elaboradas. A Figura 4.12 apresenta o quadrado com uma iteração, duas iterações e três iterações, respectivamente.

Figura 4.12: Quadrado com uma, duas e três iterações, respectivamente



Fonte: Produzida pelo autor.

Com as manipulações feitas pelo aluno, elaboramos a seguinte questão: é possível pintar o quadrado totalmente utilizando este processo? Por quê?

Nosso objetivo com esta questão é verificar os enunciados apresentados pelos alunos sobre a viabilidade de se preencher o quadrado utilizando o recurso que lhes foi apresentado. No entanto, vale ressaltar que a conclusão não é tão trivial quanto parece, uma vez que há a possibilidade de interlocução do aluno ao responder que o quadrado não será preenchido, pois por mais que a ferramenta fosse utilizada sempre restaria um espaço em branco sobrando.

Uma das possíveis direções de interlocução para essa questão e que vai ao encontro da cultura matemática é resolver esta questão da seguinte maneira: consideremos a área total do quadrado sendo 1 unidade de área. Assim, na primeira iteração temos 1 quadrado preenchido de um total de 4, representando então $1/4$ da área total preenchida. Já na segunda iteração temos 3 quadrados não preenchidos de um total de 16, representando então $3/16$ da área preenchida e, na terceira iteração, temos 9 quadrados não preenchidos de um total de 64, representando $9/64$. Dessa maneira, percebemos que a área total preenchida segue uma sequência p_n expressa por

$$p_n = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \dots, \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

cuja soma s é

$$s = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado para resolver o Paradoxo da Dicotomia, temos que s é uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1/4$ e razão $r = 3/4$. Logo, sua soma s é dada por

$$s = \frac{a}{1 - r} = \frac{1/4}{1 - 3/4} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

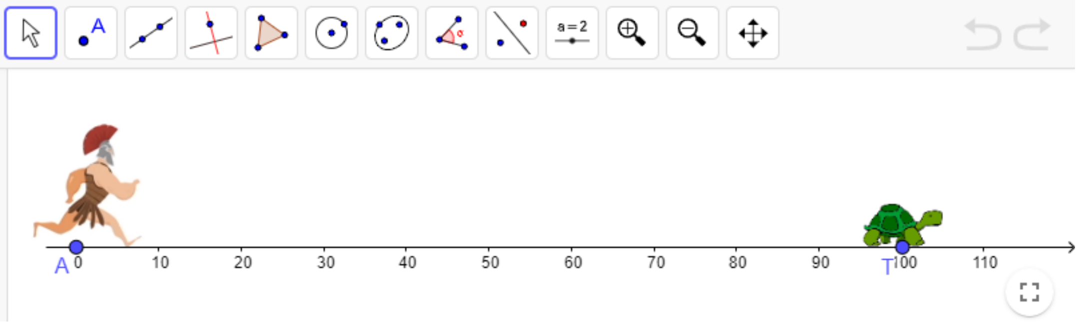
ou seja, a soma das áreas dos quadrados pintados é igual a área total do quadrado.

Outro possível significado para a questão surge ao analisar a área total de quadrados em branco na construção: na primeira iteração temos 3 quadrados não preenchidos de um total de 4, representando então $3/4$. Já na segunda iteração temos 9 quadrados não preenchidos de um total de 16, representando então $(3/4)^2$ e, na terceira iteração, temos 27 quadrados não preenchidos de um total de 64, representando $(3/4)^3$. Desta maneira, percebemos que o número de quadrados não preenchidos segue a relação $(3/4)^n$, cujo limite quando calculado para $n \to \infty$ é 0. Ou seja, a área de quadrados em branco tende a 0.

4.2.5 A corrida do século

Esta última questão também foi elaborada a partir de outro Paradoxo de Zenão, o qual já foi devidamente apresentado e discutido no Capítulo 2. Tal questão foi apresentada da seguinte forma: “Certa vez uma tartaruga desafiou o veloz Aquiles para uma corrida. Aquiles, sabendo que é dez vezes mais rápido do que a tartaruga, aceitou o desafio, deixando até mesmo uma vantagem de 100m para a tartaruga antes de iniciar a corrida. O desenho abaixo ilustra esta história” (Figura 4.13).

Figura 4.13: Construção da questão "a corrida do século"



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de imagens do Google Imagens.

Em seguida, o enunciado continua: "Segundo Zenão, Aquiles nunca venceria esta corrida, pois quando ele alcançasse o ponto de onde a tartaruga partiu, esta já teria avançado uma certa distância a sua frente, e quando Aquiles alcançasse este novo ponto onde a tartaruga estava, ela já teria avançado mais um pouco a sua frente. Zenão afirma que obviamente esta série seria interminável, pois a tartaruga sempre estaria alguma distância a frente de Aquiles por menor que seja esta distância".

Após o enunciado, o aluno é questionado sobre sua crença em relação ao argumento apresentado por Zenão e convidado a apresentar uma justificação para sua resposta.

Apesar da possibilidade de o aluno saber que é impossível que Aquiles não alcance a tartaruga (pois isso iria contra qualquer racionalidade de seu dia a dia), também é plausível que este seja levado a acreditar que a afirmação feita por Zenão é legítima por pelo menos dois motivos: (i) o resultado encontrado para a distância em que Aquiles alcança e logo após ultrapassa a tartaruga é $1000/9$, ou seja, uma dízima periódica. Isso pode levar à conclusão de que não é possível representar uma distância com infinitas casas decimais em uma reta, o que mesmo sendo impossível a olho nu, hoje em dia existem recursos tecnológicos suficientes que facilitam a representação desses valores na reta numérica e até mesmo manualmente por construção. (ii) A forma como o enunciado é apresentado por Zenão (e também na questão) pode provocar a falsa conclusão de um movimento não contínuo, em que os personagens Aquiles e Tartaruga se movem de forma independente, o que sabemos não ser verdadeiro.

Ao apresentar todas as questões abordadas nos questionários e determinar possíveis caminhos de interlocução associadas ao *software* GeoGebra e a cultura do sujeito (acadêmica e não-acadêmica). Podemos afirmar que estamos criando um novo e possível Campo Semântico para o objeto infinito de onde é possível fazer determinadas afirmações (estipulações locais) as quais são legitimadas pela união *software*-cultura acadêmica-cultura não-acadêmica.

No próximo capítulo, apresentaremos alguns dados referente à quantidade de respostas obtidas no questionário, bem como as análises dos resíduos de enunciação produzidos pelos interlocutores.

CAPÍTULO 5
ANÁLISE DOS RESULTADOS

Retomando o que foi apresentado no capítulo anterior destacamos que, devido ao cenário ocorrido durante o desenvolvimento dessa pesquisa, a estratégia pensada para a aplicação do questionário precisou ser remodelada. Ao entrarmos em contato com alguns professores de universidades de todo o Brasil que lecionassem em cursos de Graduação em Matemática, estes se disponibilizaram à enviar o nosso e-mail convidando os alunos a responderem ao questionário, o qual seguia com o link sem maiores esclarecimentos sobre o tema abordado nas questões. Nossa intenção era que os alunos não soubessem que o questionário envolvia questões sobre o infinito, o que tomamos cuidado para não ser exposto no e-mail e tão pouco durante o desenvolvimento das questões.

Após algum tempo de espera, precisamos pedir para esses professores reforçarem o convite aos seus alunos, pois o número de respostas ainda era insuficiente para a análise (três ou quatro respostas). Fizemos o mesmo ao buscar mais professores que pudessem nos ajudar a espalhar esse convite por e-mail, além de convites pessoais feitos para alunos da Unespar nos *campi* de Apucarana e Campo Mourão.

O resultado final após um tempo maior de espera foram 12 alunos que responderam integralmente o questionário, e 3 alunos que responderam parcialmente, sendo que dois deles pararam de responder nas questões de identificação e outro parou na metade da segunda questão. Entrando em contato com esses alunos via e-mail, obtivemos resposta de apenas um deles, o qual comentou não ter respondido o questionário totalmente devido a atividades da faculdade e outros afazeres, de modo que ao tentar resolver o questionário por *smartphone*, acabou tendo dificuldades que impossibilitaram a finalização deste.

De fato, o questionário que elaboramos não é totalmente compatível para ser realizado via *smartphone*, devido às construções do GeoGebra que necessitam de um espaço maior de tela para serem devidamente manipuladas e exploradas. No entanto, não nos atentamos a isto ao enviarmos o convite aos professores e alunos e, por este motivo, ficamos abertos a este tipo de resultado.

Quanto aos alunos que responderam ao questionário totalmente, obtivemos respostas de três Universidades: a Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

(UFRJ), a Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) e a Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR).

Conforme o MCS sugere, buscaremos analisar todas as respostas dos alunos que responderam o questionário completamente, as quais serão apresentadas no decorrer desse capítulo questão a questão. Para omitir o nome dos alunos, utilizaremos abreviações do tipo *A1*, *A2*, e assim sucessivamente, para representar *Aluno1*, *Aluno2*, e assim por diante.

5.1 Produzindo significados: A existência do movimento

Apesar desta questão ter necessitado de reformulação, isso nos permitiu verificar quais foram as mudanças de direção de interlocução (se houveram) da questão como estava sendo posta anteriormente, para o modo como foi apresentada posteriormente. No entanto, fazemos isso mais como uma forma de verificar se a mudança do enunciado realmente foi efetiva para o direcionamento na fala dos alunos e não como uma tentativa de destacar possíveis mudanças de crença-afirmação por parte deles. Sabemos que houve mudanças, principalmente nas justificações, pois as duas formas como os enunciados foram postas exigem direções de interlocução diferentes.

Outro destaque que damos está na quantidade de resíduos de enunciação obtidos da segunda aplicação dessa questão, sendo um total de 5, o que acreditamos ser uma quantidade suficiente para a investigação. Sendo assim, apresentaremos os resíduos de enunciação que esses 5 alunos produziram, deixando de lado as demais respostas obtidas de outros alunos da primeira aplicação do questionário.

Comecemos com os resíduos produzidos por *A3*, o qual realizou algumas iterações com a ferramenta *Ponto Médio* e apresentou os dois resíduos de enunciação que seguem nas Figuras 5.1 e 5.2, sendo aqueles produzidos no primeiro e no segundo questionário[24], respectivamente. Destacamos que na primeira aplicação a questão era somente se o aluno concordava com a afirmação de Zenão e na segunda aplicação foi questionado sobre a possibilidade ou não de se chegar ao mercado considerando-se a afirmação do filósofo.

[24] Com “primeiro e segundo questionário” estamos nos referindo a primeira aplicação e a segunda aplicação após a reformulação da questão.

Figura 5.1: Resíduo de enunciação de *A3* na primeira aplicação

Sim, concordo. Pois, cada vez que íamos colocando os pontos médios cada vez mais nos aproximávamos de onde queriamos chegar.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.2: Resíduo de enunciação de *A3* na segunda aplicação

Concordo, pois mesmo que criássemos um número muito alto de pontos médios, nunca iremos conseguir chegar ao final pois, por mais próximo que chegue o ponto final nunca será um ponto médio.

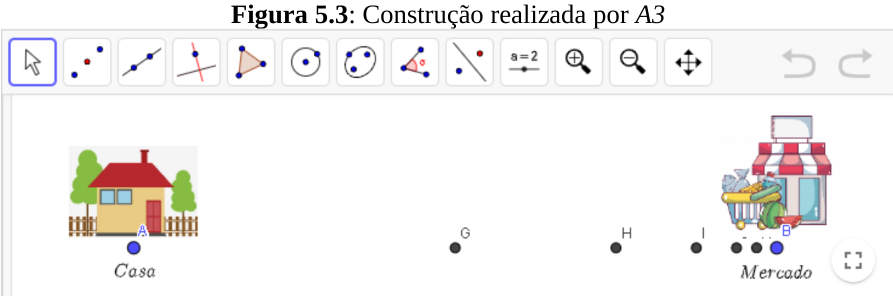
Fonte: Produzida pelo aluno.

Diante dos resíduos de enunciação deixados por *A3*, acreditamos que ambos são complementares. Na Figura 5.1 ficamos em dúvida sobre suas intenções ao afirmar que a cada iteração os pontos médios se aproximavam de seu destino (mercado). A partir de sua afirmação, não sabemos se sua direção de interlocução parte para a conclusão de que o ponto médio em algum momento chegará ou se tornará o ponto B, ou se a palavra “aproximávamos” indica a impossibilidade de o ponto médio alcançar este ponto.

Entretanto, o resíduo exposto na Figura 5.2 indica que sua direção de interlocução vai de encontro ao segundo caso, pois ele deixa claro que o ponto médio pode chegar muito próximo do ponto B, mas nunca serão iguais. Assim, o interlocutor criado por ele legitima o pensamento não-acadêmico por não se apegar a conteúdos matemáticos como séries geométricas, por exemplo, o que é plausível dentro do que criamos como possibilidade de interlocução no início deste capítulo.

Não identificamos em sua construção uma indicação da utilização do recurso do *zoom* que possivelmente justificaria sua crença-afirmação, mas não descartamos a possibilidade de que esse aluno tenha atingido essa conclusão da mesma forma ao criar diversos pontos médios entre os dois pontos até produzir este significado, como podemos observar na Figura 5.3, a qual apresenta a construção feita por ele na segunda aplicação da questão e não se diferencia daquela feita na primeira aplicação.

Figura 5.3: Construção realizada por *A3*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Já o aluno *A5* apresentou uma direção de interlocução totalmente diferente entre as duas aplicações da questão, deixando ainda mais evidente que a reelaboração do enunciado contribuiu na exposição da nossa verdadeira intenção com a questão.

As construções realizadas por ele não se diferem muito entre si: na primeira construção a ferramenta *Ponto Médio* foi utilizada 5 vezes, enquanto na segunda construção foi utilizada 6 vezes. Sendo assim, omitiremos tais construções e apresentaremos somente seus resíduos de enunciação, os quais seguem nas Figuras 5.4 e 5.5.

Figura 5.4: Resíduo de enunciação de *A5* na primeira aplicação

Sim, se você estiver caminhando em uma linha reta, saindo de um ponto inicial para um ponto final, necessariamente você irá passar pelo ponto médio.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.5: Resíduo de enunciação de *A5* na segunda aplicação

Não. Obviamente chegaremos ao mercado. O problema resulta numa progressão geométrica e a soma dos termos de uma PG infinita resulta em um número, logo não é necessário um tempo infinito para alcançarmos o mercado.

Fonte: Produzida pelo aluno.

O resíduo de enunciação deixado por *A5* e apresentado na Figura 5.4 aponta de forma mais clara como essa questão necessitava de reelaboração, pois a direção de interlocução do aluno, apesar de estar correta (obviamente seguindo em linha reta entre dois pontos sempre haverá um ponto médio entre eles), a resposta não satisfazia nossa real intenção, o que é resolvido ao observar o significado produzido por ele na Figura 5.5. Nesse caso, o aluno estabelece um interlocutor que legitima suas crenças-afirmações pela utilização de conceitos relacionados ao conteúdo de séries geométricas.

Outro significado que produzimos e se assemelha a esse último pode estar presente no resíduo deixado por *A6* e segue na Figura 5.6. Optamos por omitir o resíduo de enunciação de *A6* na primeira aplicação da questão por se assemelhar ao resíduo apresentado na Figura 5.4. Então o que segue é apenas o resíduo da segunda aplicação.

Figura 5.6: Resíduo de enunciação de *A6* na segunda aplicação

Não concordo, a medida de um ponto a outro não é infinita, logo Zenão chegaria ao mercado, o que se torna infinito é a quantidade de pontos e pontos médios que conseguimos encontrar matematicamente em um segmento de reta criado a partir dois pontos.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Como já evidenciamos, o interlocutor criado por esse aluno parece compartilhar da mesma crença-afirmação do interlocutor apresentado na Figura 5.5: é possível chegar ao mercado por mais pontos médios que surjam durante o trajeto. A diferença é que, enquanto o aluno *A5* apresenta uma justificação baseada em progressões geométricas, o aluno *A6* parte do senso comum de que, sendo o segmento $\overline{AB}$ finito, não é possível que não chegássemos ao mercado.

Já o aluno *A7* realizou as construções com 5 e 6 pontos médios, respectivamente. Seguem nas Figuras 5.7 e 5.8 os seus resíduos de enunciação nas duas aplicações.

Figura 5.7: Resíduo de enunciação de *A7* na primeira aplicação

Sim, imaginando que entre os dois pontos temos um seguimento de reta composto por infinitos pontos, sempre haverá um ponto médio entre dois pontos, desde que estes não sejam iguais.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.8: Resíduo de enunciação de *A7* na segunda aplicação

Seguindo essa lógica, sim. Não seria possível chegar ao mercado considerando o esse conceito, pois se temos um seguimento formado por infinitos pontos entre a casa e o mercado, independente de quantas vezes dividimos esse seguimento inicial pela metade, sempre existirão infinitos pontos entre a pessoa e o mercado.

Fonte: Produzida pelo aluno.

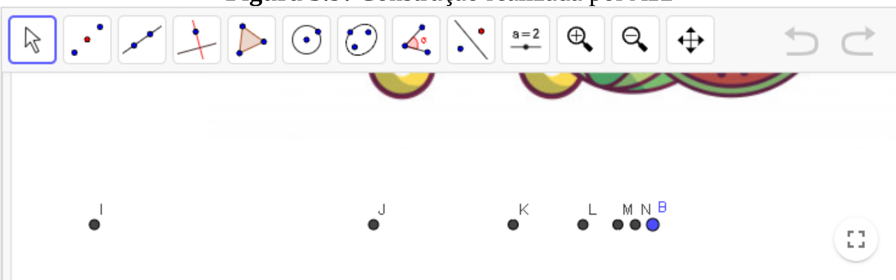
Em relação ao resíduo de enunciação da Figura 5.7, percebemos que *A7* parece direcionar sua interlocução na mesma direção do enunciado, já que este também considera legítimo que entre dois pontos sempre haverá um ponto médio considerando que entre os pontos A e B existem infinitos pontos e que os pontos A e B não sejam iguais.

Na Figura 5.8 o aluno *A7* apresenta em seu resíduo de enunciação um interlocutor que provavelmente segue a mesma direção de interlocução que talvez Zenão seguiu naquela época, a impossibilidade do movimento. Sua crença-afirmação é legitimada pela quantidade infinita de pontos existentes entre o ponto da casa e o ponto mercado, e pela divisão infinita deste segmento que sempre fará surgir um novo ponto médio. Consideramos plausível acreditar que seu resíduo de enunciação exposto na Figura 5.7 serve como complementação desta produção de significado, apesar de as duas aplicações terem objetivos distintos. Nesse resíduo ele enuncia que entre dois pontos há infinitos pontos e, dessa forma, sempre haverá um ponto médio entre dois pontos “desde que estes não sejam iguais” (palavras dele). Isto nos faz crer que, para ele, o processo infinito de criar pontos médios nunca resultará em um destes pontos ser igual ao ponto B, o que matematicamente conseguimos provar ser possível.

Em outras palavras, achamos possível que o aluno *A7* tenha produzido um significado na direção de um infinito em potência, ou seja, um processo infinito que nunca acaba.

Por fim, o aluno *A12* utilizou o recurso do *zoom* para produzir suas enunciações nas duas aplicações da questão. A Figura 5.9 que segue é a construção feita por ele na segunda aplicação.

Figura 5.9: Construção realizada por *A12*



Fonte: Produzida pelo aluno.

O resíduo de enunciação da primeira aplicação também considera legítimo o que a atividade propôs: em um segmento formado por dois pontos, se temos o objetivo de sair de um extremo para o outro, necessariamente passaremos por um ponto médio entre os dois.

O que nos interessa mais neste caso é o resíduo de enunciação produzido por ele na segunda aplicação, o qual segue integralmente na Figura 5.10.

Figura 5.10: Resíduo de enunciação de *A12* na segunda aplicação

Concordo, pois por mais próximo que esteja um ponto médio do ponto B,
sempre irá existir um outro ponto médio, de modo que tenderá a B,
mas não chegará no próprio B.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Produzimos significado para esse resíduo no sentido de que o aluno, ao afirmar que o ponto médio não será o ponto B por mais próximo que esse ponto médio possa ficar, ele também produziu significado na mesma direção de interlocução dos alunos *A3* e *A7*. A diferença é que aqui temos o recurso do *zoom* como uma possível justificação mais evidente para a sua crença-afirmação.

A partir de todos os resíduos obtidos podemos destacar alguns pontos: para a maioria dos alunos considera-se legítima a impossibilidade de partir de um ponto A e chegar ao ponto B devido aos infinitos pontos médios que temos que passar no meio desse caminho. Esses alunos falam na mesma direção partindo de um interlocutor que se baseia em elementos de fora da cultura acadêmica, mas que ao mesmo tempo acreditamos que não chegaram a considerar que muitas vezes eles mesmo vão e voltam do mercado e de alguma forma estão cursando um trajeto semelhante ao apresentado hipoteticamente nesta atividade. Se pensaram, qual seria a diferença entre as duas situações?

Acreditamos que a resposta seja o fato de que no dia a dia eles não pensam que durante o percurso que traçam de um ponto a outro eles estão passando por um ponto médio, o que concordamos a maioria das pessoas não o faz. Essas pessoas são o que Lins (2008) chama de pessoas *normais*, pois vivem o seu dia a dia sem considerar, por exemplo, a força da gravidade agindo sobre o pão com manteiga caindo ao chão, ou o milagre da transformação de energia elétrica em térmica provocada pelo seu micro-ondas na hora de esquentar o leite. Talvez até mesmo quem tenha a matemática como parte de sua rotina também seja *normal* a maior parte de seu tempo.

Em relação aos demais resíduos, conseguimos perceber que o aluno *A5* parece produzir significados na mesma direção de interlocução da matemática acadêmica, pois sua justificativa utilizava o recurso da progressão geométrica infinita que convergia para um número finito, significando então o fim deste processo.

Já aluno *A6* também acreditava na convergência desse processo, mesmo que não tenha explicitado como *A5* o fez. No entanto, sua justificação deixa claro que o fato de o segmento formado entre os pontos ser finito, por mais que surjam infinitos pontos entre os segmentos isso não o impede de chegar ao mercado. Podemos notar que aqui ele considera legítimo a possibilidade dos infinitos pontos, mas ainda mais legítimo é a informação de que esse segmento é limitado entre dois pontos.

Ressaltamos que, apesar de nesse caso ser verdade que a sequência limitada ser convergente, isso não é verdade em todos os casos. O que sabemos é que uma sequência monótona e limitada é convergente (o que ocorre nesse caso) e também que uma sequência convergente é limitada e não o contrário. A sequência $(-1)^n, n \in \mathbb{N}$ é um bom exemplo de sequência limitada divergente, uma vez que ela não é monótona e seus termos se alternam entre -1 e 1.

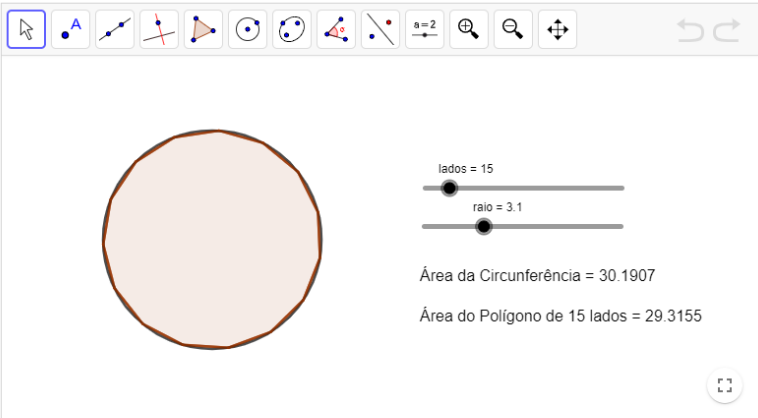
Apesar disso, os resíduos de enunciação dos alunos *A5* e *A6* evidenciam que, mesmo tendo as mesmas crenças-afirmações, suas justificações diferentes produzem conhecimentos diferentes. O que mostra a importância de termos solicitado uma justificação em todas as questões que elaboramos, pois queríamos justamente evidenciar esses diferentes conhecimentos produzidos por eles, o que nem sempre seria possível se suas justificações fossem omitidas.

5.2 Produzindo significados: Aproximando as áreas

Nessa questão os alunos foram orientados a manipularem o controle deslizante referente aos lados do polígono a fim de estabelecerem uma possível direção de interlocução que relacionasse a área do polígono regular circunscrito à circunferência e a área da circunferência quando o número de lados do polígono é aumentado cada vez mais. Também optamos por deixar na construção um controle deslizante para o raio da circunferência com o objetivo de verificar quais significados os alunos poderiam produzir nas questões referentes a esta construção.

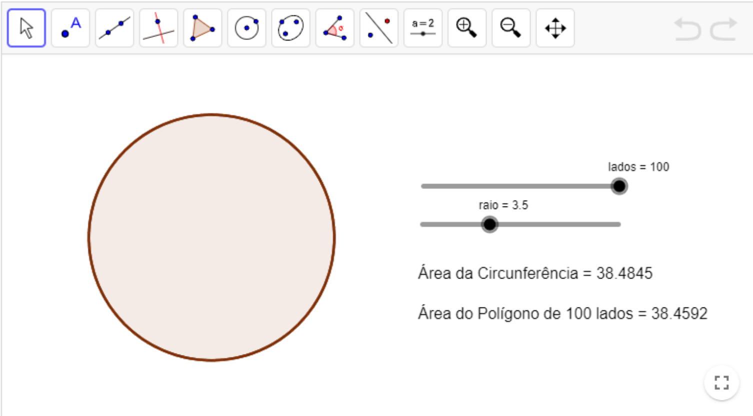
Em relação aos resíduos de enunciação obtidos, notamos que na primeira questão alguns alunos estabeleceram um interlocutor de onde é possível legitimar esta proximidade entre as áreas do polígono regular inscrito e a área da circunferência quando o número de lados se tornasse cada vez maior. É possível que essa crença-afirmação tenha sido justificada pelo *software* GeoGebra, conforme se pode notar pelas Figuras 5.11 e 5.12.

Figura 5.11: Construção produzida por *A5*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.12: Construção produzida por *A6*



Fonte: Produzida pelo aluno.

No entanto, notamos que apesar dessa direção de interlocução dos alunos, nenhum deles parece ter legitimado a ideia de que as áreas do polígono e circunferência seriam iguais em algum momento. Alguns dos alunos já deixaram isso claro desde o primeiro item da questão, como podemos notar nos resíduos de enunciação de *A5* e *A7* e seguem nas Figuras 5.13 e 5.14.

Figura 5.13: Resíduo de enunciação de *A5* no item (a)

Que a área do polígono regular se aproxima da área da circunferência, mas nunca será igual.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.14: Resíduo de enunciação de *A7* no item (a)

Que ela tende a área da circunferência, embora nunca será igual tal área.

Fonte: Produzida pelo aluno.

A partir do que foi produzido por *A5* na primeira questão sobre a existência do movimento, notamos uma mudança de interlocutor daquela para essa. Na primeira questão era legítimo para ele a sequência convergir para um número, apesar dos infinitos elementos desta sequência. Considerando que a área do polígono regular também é uma sequência monótona e limitada por estar inscrita na circunferência, ela também é convergente mesmo com um número infinito de lados. No entanto, acreditamos que o aluno *A5* não considera as duas situações semelhantes neste sentido.

O resíduo produzido por *A7* indica uma possível direção de interlocução para o conteúdo de Limites, no entanto, com a crença de que apesar de a área do polígono regular tender a área da circunferência, as duas nunca serão iguais, o que segue a mesma direção de interlocução apresentada por ele na Seção 5.1. A mesma crença-afirmação é notada no resíduo de enunciação de *A3* também no primeiro item da questão, a qual segue na Figura 5.15.

Figura 5.15: Resíduo de enunciação de *A3* no item (a)

Que quando o número de lados tender ao infinito,
a área do polígono chegará muito próxima à da circunferência.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Notemos que nessa resposta o aluno utilizou a expressão "chegará muito próxima", apesar de ter dito que o número de lados do polígono tende ao infinito, o que nos faz imaginar um possível conflito entre os interlocutores estabelecidos por ele. Na primeira parte do enunciado existe um interlocutor que legitima a possibilidade de se criar um polígono de infinitos lados inscrito na circunferência, se tornando então uma circunferência também. Já na segunda parte do enunciado, um outro interlocutor surge e desautoriza o primeiro ao estabelecer como verdadeiro que as duas figuras nunca serão iguais mesmo que o número de lados do polígono seja infinito. Essa direção de interlocução também é coerente com o que ele já havia exposto na Seção 5.1 ao afirmar que o ponto médio nunca seria igual ao ponto B (mercado).

É interessante acompanhar os resíduos de enunciação desse aluno nos itens (b) e (c) desta questão. No item (b) questionamos a possibilidade de se aproximar ainda mais estas áreas, embora o controle deslizante *lados* permita que atribuamos somente 100 lados ao polígono. Neste item, o resíduo produzido por ele segue na Figura 5.16.

Figura 5.16: Resíduo de enunciação de *A3* no item (b)

Sim, poderíamos utilizar a ideia de limite, utilizando limite da área do polígono,
quando o número de lados tende ao infinito é igual a área da circunferência

Fonte: Produzida pelo aluno.

Dessa vez, notamos que o resíduo de enunciação de *A3* segue a direção do primeiro interlocutor que assumimos ter sido estabelecido por ele na Figura 5.15, pois é ele quem o autoriza a acreditar que é possível utilizar a ideia de Limites para a área do polígono de modo que as duas áreas se tornassem iguais.

Por fim, no resíduo de enunciação do último item dessa questão, acreditamos que este aluno aponta de forma indireta o que sabemos ser uma das limitações do GeoGebra para esse tipo de abordagem. O resíduo produzido por ele segue na Figura 5.17.

Figura 5.17: Resíduo de enunciação de *A3* no item (c)

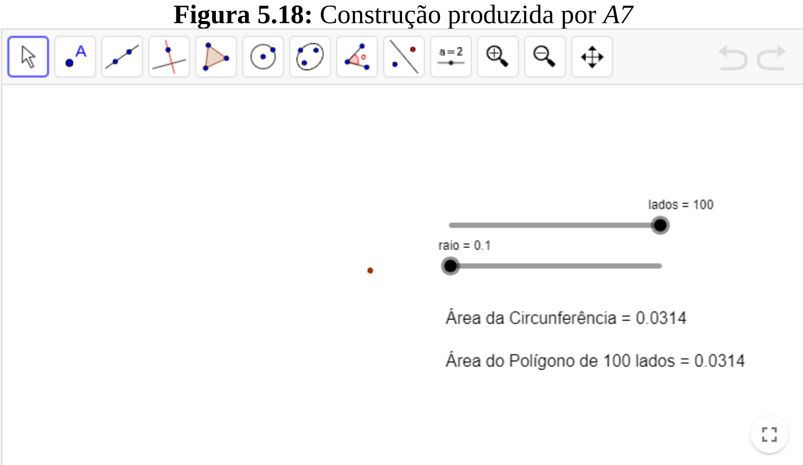
Serão apenas muito próximas, pois, não podemos atribuir um número de lados, pois o número de lados está tendendo ao infinito.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Em uma análise inicial, parece novamente que seus dois interlocutores assumidos por nós estão em conflito, mesmo após aparentemente ter produzido um significado no item (b) que parecesse ter resolvido esse impasse. Entretanto, no decorrer de sua enunciação ele mostra que sua justificação não se baseia mais no conceito em Limites e sim a uma limitação do controle deslizante *lados*, o qual por possuir uma quantidade finita de valores que ele pode assumir, nunca será possível fazer o número de lados ser igual a infinito, apesar de infinito não ser um número.

No item (b) as demais direções de interlocução seguiram, em sua maioria, um padrão: é possível aproximar as áreas ainda mais aumentando o número de lados do polígono. Apenas o aluno *A7* apresentou uma direção de interlocução diferente no item (b) ao afirmar que, embora a primeira opção fosse aumentar o número de lados para um valor superior a 100, o controle deslizante *lados* não permitia tal atribuição, sendo então necessário diminuir o raio da circunferência (com o controle deslizante *raio*) para diminuir mais essa diferença entre o valor das duas áreas. O que o autorizou a dizer o que disse é a construção produzida por ele, a qual segue na Figura 5.18.

Figura 5.18: Construção produzida por *A7*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Notemos que na construção apresentada na Figura 5.18, as áreas da circunferência e polígono são iguais quando o número de lados é igual a 100 e o raio da circunferência é igual a 0,1. Isto acontece devido ao número de casas decimais do GeoGebra ser limitado e muitas vezes arredondado, causando neste caso a falsa impressão de que as áreas podem se tornar iguais com esta configuração de valores para os controles deslizantes, o que sabemos não ser legítimo matematicamente. Seria plausível se esse aluno produzisse um significado no item (c) dessa questão ao afirmar que as áreas seriam iguais desde que os controles deslizantes assumissem esses valores, pois a construção como está posta no GeoGebra autoriza tal justificação. Isso acontece quando olhamos o seu resíduo de enunciação nesse item, com a diferença de que ele deixa claro que isso só é legitimo na construção devido ao número de casas decimais adotado. O resíduo de enunciação produzido por ele segue integralmente na Figura 5.19.

Figura 5.19: Resíduo de enunciação de *A7* no item (c)

Não, pois a formula que utilizamos para calcular a área de um polígono regular de n lados é diferente da formula de área de uma circunferência. Na construção apresentada é possível, porém isso é devido apenas ao número de casas decimais adotado.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Outra possível justificação apresentada por *A7* em seu resíduo de enunciação é o de que as áreas não serão iguais devido às fórmulas para se calcular a área de um polígono de n lados e a fórmula para se calcular a área de uma circunferência são diferentes. No entanto, conforme mostramos no Capítulo 2, é possível mostrar que podemos partir da fórmula da área do polígono de n lados e utilizar o conceito de Limite para intuitivamente chegarmos à fórmula da área da circunferência.

Outro significado que produzimos a partir dos resíduos deixados por *A4* vai em direção à impossibilidade de tornar as duas áreas iguais, porém com uma justificação no “raso conhecimento que possui sobre o infinito” (palavras dele). Outros alunos justificaram a mesma impossibilidade por se tratarem de duas figuras diferentes, um polígono e uma circunferência, de modo que é impossível a primeira se tornar a segunda por mais lados que um polígono possa ter. Isso é evidenciado nos resíduos de enunciação de *A5*, *A10* e *A12* apresentado nas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22, respectivamente.

Figura 5.20: Resíduo de enunciação de *A5* no item (c)

Apenas serão muito próximas. Independente de quanto maior for o número de lados, ainda assim será um polígono e não uma circunferência.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.21: Resíduo de enunciação de *A10* no item (c)

Visualmente, elas se igualam. Mas, por ser um poligono inscrito em um círculo. As areas nunca serão a mesma.

Fonte: Produzida pelo aluno.

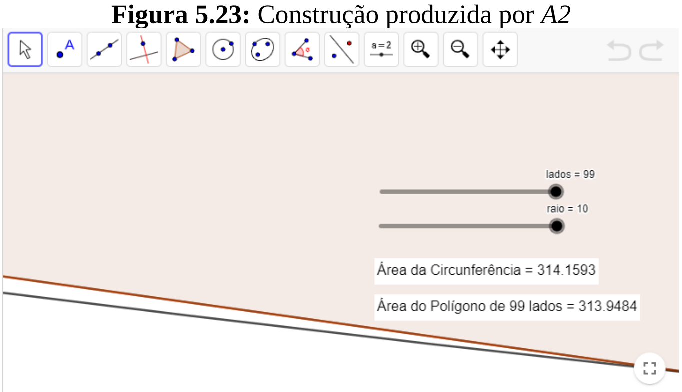
Figura 5.22: Resíduo de enunciação de *A12* no item (c)

Eles apenas serão muito próximas, caso calculássemos o limite tendendo o LADO, para o infinito. Não seriam iguais, pois estamos tratando de um polígono regular e de uma circunferência.

Fonte: Produzida pelo aluno.

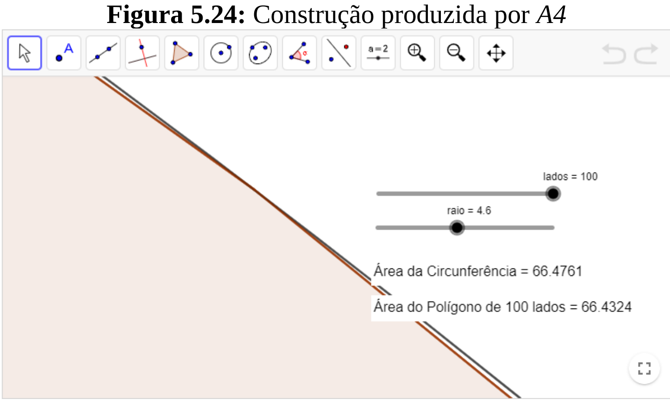
Essas enunciações também estão associadas a outras direções de interlocução identificadas nas quais os alunos justificam suas afirmações dizendo que, utilizando o *zoom* do GeoGebra, é possível notar que sempre haverá um espaço vazio entre o polígono e a circunferência, conforme podemos notar nas construções de *A2* e *A4* nas respectivas Figuras 5.23 e 5.24.

Figura 5.23: Construção produzida por *A2*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.24: Construção produzida por *A4*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Apesar de a construção feita por *A2* autorizar essa justificação, sua direção de interlocução no item (c) parece tomar um sentido um pouco diferente ao afirmar que a área do polígono *tende* ao *limite da área da circunferência*.

Com isso conseguimos produzir dois significados diferentes para seu resíduo de enunciação. O primeiro é a possibilidade de que quando ele fala de “limite da área da circunferência” ele quer se referir a área da circunferência em si já que nessa questão não é legítimo matematicamente tratar de “limite da área da circunferência” uma vez que esta não é variável para se ter um limite. Nesse caso, ao assumirmos que o significado que ele quis produzir foi de que a área do polígono *tende* a área da circunferência assumimos que, para ele, o limite *tende*, mas nunca *é*, e isso parece ser legitimado pela sua construção na Figura 5.23.

Outro significado que produzimos vai na direção de que o raio da circunferência sendo manipulável produz áreas diferentes para a circunferência, e que o raio máximo permitido pelo controle deslizante produz a área máxima para a circunferência, sendo essa o “limite da área da circunferência”. Nesse caso, apesar de partir de pontos diferentes, acreditamos que o fato de ter utilizado a palavra *tende* para se referir as áreas ainda produz a mesma conclusão a que chegamos no significado produzido anterior: o limite *tende*, mas nunca *é*.

O que conseguimos notar em geral nessa questão é que embora tal justificação não fique evidente em todas as respostas, os alunos têm a crença-afirmação de que quando calculamos um limite, seu resultado sempre *tende* a algo e nunca *é* este algo.

5.3 Produzindo significados: Comparando segmentos

Conforme descrito no Capítulo 4, a intenção com essa questão é investigar quais são os significados produzidos para o objeto infinito pelos alunos quando se deparam com segmentos de comprimentos diferentes, mas a mesma densidade infinita de pontos. Tal questão não exigia que os alunos manipulassem a construção como nas questões anteriores, mas sim que apenas produzissem significados para a figura que era apresentada a eles.

No primeiro item dessa questão os alunos precisavam enunciar quantos pontos formavam a circunferência menor, considerando que esta é constituída por pontos. Muitos alunos produziram resíduos em uma direção legitimada pela matemática-acadêmica afirmando que a circunferência contém infinitos pontos. Outros alunos tiveram uma direção de interlocução diferente, como o aluno *A2* que respondeu “π pontos”. Para tentar produzir significados para essa resposta, destacamos a resposta desse mesmo aluno para o segundo item que questionava a quantidade de pontos da circunferência maior, desta vez com a resposta “$2\mathrm{x}(\pi)$ pontos” (escrito como no original). Dessa forma, achamos plausível dizer que *A2* possivelmente associou π ao comprimento da circunferência de modo que, ao verificar que visivelmente a circunferência maior tem o dobro do raio da menor (apesar de não termos tido esta intenção ao construir a figura), o comprimento dessa outra seria 2π.

Também notamos essa possível direção de interlocução nos resíduos de enunciação de *A10* o qual respondeu “aproximados... $6{,}28$” (escrito como no original) para a circunferência menor e “aproximados... $12{,}56$” (escrito como no original) para a maior. A mesma justificação que *A2* talvez tenha utilizado pode ser também a justificação de *A10*, mas com crenças diferentes: enquanto *A2* acreditaria que o comprimento da circunferência menor é π, *A10* acreditaria ser 2π e, por este motivo, novamente notando visualmente que a circunferência maior tem o dobro do raio da menor, esta teria então 4π pontos ou “aproximados... $12{,}56$” como ele enunciou ao tomar o valor aproximado de $3{,}14$ para π.

Os resíduos de enunciação que os alunos *A2* e *A10* produziram quando questionados se era possível dizer que a circunferência maior possui mais pontos que a menor, no terceiro item, segue nas Figuras 5.25 e 5.26

Figura 5.25: Resíduo de enunciação de *A2* no item (c)

Porque o raio possui o dobro da medida do menor.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.26: Resíduo de enunciação de *A10* no item (c)

Sim, pois seu diâmetro é maior

Fonte: Produzida pelo aluno.

Apesar de terem apresentado somente as justificações, acreditamos que estas partam da crença de que a circunferência maior possui mais pontos do que a menor devido aos resíduos de enunciação produzidos por eles nos itens anteriores. A partir das análises, verificamos que os significados que produzimos sobre as direções de interlocução dos alunos *A2* e *A10* parece correta apenas para o aluno *A2*. Sua justificação utiliza a ideia de o raio da circunferência maior possuir o dobro da medida da menor e, portanto, o número de pontos das duas circunferências são π (menor) e $2x(\pi)$ (maior). No entanto, *A10* apresenta a sua justificação a partir do diâmetro da circunferência, tornando possível que a fórmula do comprimento $(2\pi r)$ o tenha levado a produzir o resíduo apresentado anteriormente nos itens (a) e (b).

Além dos alunos *A2* e *A10*, outro aluno apresentou uma direção de interlocução diferente da esperada por nós. Seu resíduo de enunciação para os itens (a) e (c) são apresentados nas Figuras 5.27 e 5.28[25].

Figura 5.27: Resíduo de enunciação de *A6* no item (a)

Eu ainda não aprendi a calcular a quantidade de pontos de um segmento de reta e acho que também não é possível, mesmo se eu soubesse seria muito relativo, pois, o que consideremos um ponto? 1 é um ponto? 0,01? 0,00000001? 0,0000000000000000001?

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.28: Resíduo de enunciação de *A6* no item (c)

A grosso modo podemos pensar que sim, já que uma reta é maior que a outra.

Fonte: Produzida pelo aluno.

A princípio, tivemos certa dificuldade em produzir qualquer significado para os resíduos de enunciação de *A6*, pois sua direção de interlocução se mostrou totalmente diferente do que considerávamos plausível de se produzir. No entanto, com um pouco mais de observação pensamos em algumas possibilidades.

Primeiramente podemos considerar que *A6* enxerga o comprimento da circunferência como um segmento de reta, o que é exposto na Figura 5.27, mas também como uma reta conforme se pode notar no resíduo de enunciação da Figura 5.28. Consideramos plausível que, apesar de podermos imaginar a possibilidade de “cortar” a linha da circunferência e “esticá-la” a fim de se obter um segmento de reta, o aluno *A6* não conseguiu produzir significados para o objeto “circunferência” no sentido em que propomos na questão. Na Figura 5.27, percebemos que o aluno trata de ponto não como coordenadas no plano cartesiano, mas como um ponto na reta real, tornando plausível tratar destes como números individuais ao invés de pares ordenados.

A partir disso, podemos dividir o resíduo de enunciação em dois: “Eu ainda não aprendi a calcular o número de pontos de um segmento de reta e acho que também não é possível, mesmo se possível seria muito relativo” e “o que consideremos um ponto? 1 é um ponto? 0,01? 0,00000001? 0,0000000000000000001?”. Dessa forma, ao

---

[25] O resíduo de enunciação do item (b) será omitido por se tratar do mesmo resíduo apresentado no item (a).

produzirmos significados para a segunda parte desse resíduo, podemos compreender melhor quais são as possíveis legitimidades de *A6* na primeira parte.

Conforme expomos antes, é possível que *A6* tenha tratado os pontos em sua enunciação como pontos sobre a reta real. Em posse dessa premissa, ele questiona o que seria um ponto e dá alguns exemplos a fim de argumentar sobre a subjetividade desse objeto para o qual está produzindo significados. Portanto, percebemos que antes mesmo de constituir objetos como circunferência ou infinito ele tenta constituir o objeto ponto para só então dar prosseguimento na questão.

Pensando na reta real, podemos responder que todos os números que *A6* citou são de fato pontos, mas qual era o seu objetivo ao levantar este questionamento? O significado que produzimos para isso é ele pensar em números cada vez mais próximos de zero justamente como argumento de que nunca conseguiremos encontrar o número mais próximo da origem da reta numérica e, portanto, pensando agora na primeira parte de seu resíduo de enunciação, encontrar o número de pontos do segmento de reta seria muito relativo já que sempre haverá um ponto mais próximo de 0 para se considerar nesta contagem. Desta forma, apesar de não ter ficado evidente em seu resíduo, podemos concluir que por ser possível sempre encaixar mais um ponto nesta contagem devido a sua "relatividade", essa quantidade de pontos aumentará indefinidamente.

No entanto, podemos perceber como o visual exerce poder de legitimação sobre *A6* ao verificar que mesmo com toda a argumentação de que os pontos em ambas as circunferências são "relativos" e consequentemente infinitos (partindo dos significados que produzimos a partir de seu resíduo de enunciação), ele afirma na Figura 5.28 que "a grosso modo", a quantidade de pontos da circunferência maior é maior do que quantidade de pontos da circunferência menor, isto devido ao "tamanho das retas".

5.4 Analisando: Preenchendo o quadrado

Quando elaboramos essa questão, esperávamos que o GeoGebra seria o principal responsável por legitimar os possíveis significados produzidos pelos alunos. Diante dos resíduos de enunciação deixados por eles verificamos que isso aconteceu e que apenas um dos alunos disse ser possível pintar todo o quadrado, apesar de não saber quantas vezes tal comando deveria ser utilizado para isso. A resposta deste aluno segue integralmente na Figura 5.29.

Figura 5.29: Resíduo de enunciação de *A11*

Sim é possível pintar pois me parece que a ferramenta divide o quadrado maior em outros quadrados menores,mas teríamos que repetir muitas vezes esse comando.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Os demais alunos tiveram uma direção de interlocução que vai de encontro com uma das possibilidades de interlocução exposta no Capítulo 4, associando a impossibilidade de preencher o quadrado com os espaços em branco que sempre vão existir por mais que a ferramenta seja utilizada várias vezes. Como exemplo, utilizamos os resíduos de enunciação de *A5* e *A8*, as quais seguem nas Figuras 5.30 e 5.31.

Figura 5.30: Resíduo de enunciação de *A5*

Não é possível. Mesmo que falte apenas um quadrado para pintar, quando você for pintar, vai surgir outro quadrado que será necessário pintar e assim por diante, infinitamente nesse processo.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.31: Resíduo de enunciação de *A8*

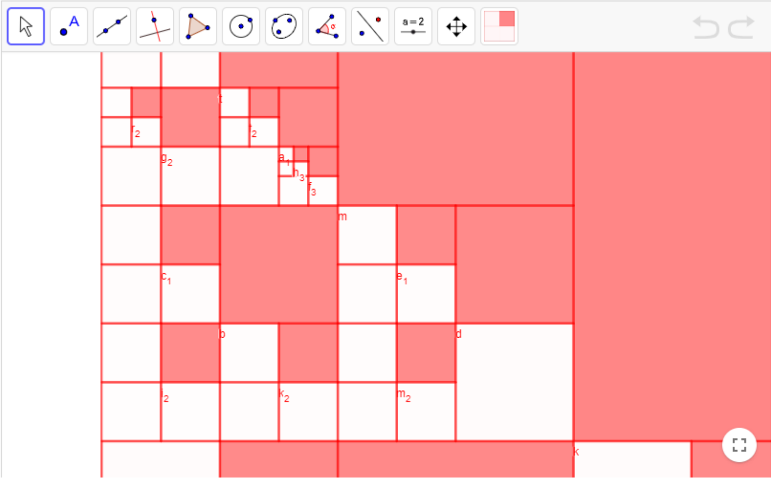
Não, pois com a ferramenta utilizada sempre ficará quadrados sem pintar, mesmo aproximando a figura sempre veremos os quadrados não pintados.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Podemos notar que o resíduo de enunciação de *A5* parece seguir uma direção de interlocução legitimada na ideia de infinito em potência uma vez que para ele esse processo de pintar os quadrados em branco que surgirem nunca terá fim. Não sabemos se o recurso do *zoom* foi utilizado por esse aluno, o que já fica mais claro no resíduo de enunciação de *A8*, o qual cita o recurso como uma justificação para indicar que este processo de pintar os quadrados em branco seria infinito.

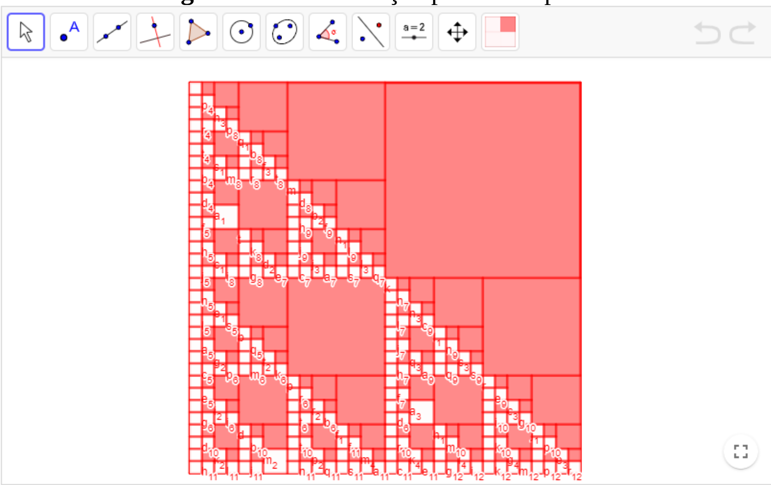
O mesmo tipo de justificação também foi apresentada por A9 e A12, cujas construções legitimam suas crenças-afirmações e são apresentadas juntamente com a construção realizada por A8 nas Figuras 5.32, 5.33 e 5.34.

Figura 5.32: Construção produzida por *A8*



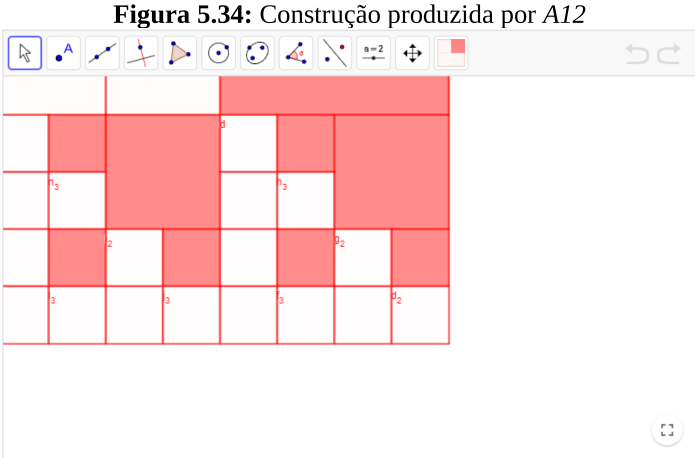
Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.33: Construção produzida por *A9*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.34: Construção produzida por *A12*



Fonte: Produzida pelo aluno.

Observando as construções de *A8* e *A12*, notamos que o *zoom* foi utilizado muito possivelmente para legitimar os significados produzidos por esses alunos, o que já não é possível afirmar ao observar a construção produzida por *A9*. No entanto, o significado que produzimos para o seu resíduo de enunciação segue uma direção de interlocução que torna plausível as sucessivas iterações que realizou até concluir o que se segue em seu resíduo de enunciação exposto na Figura 5.35.

Figura 5.35: Resíduo de enunciação de *A9*

Não, pois sempre haverá divisões, e podemos apenas aumentar o quanto quisermos a área pintada, porém não chegaremos a área total.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Outro significado que produzimos para o resíduo de um dos alunos está associada a impossibilidade de se pintar toda a figura com fractais. Seu resíduo de enunciação é apresentado na Figura 5.36.

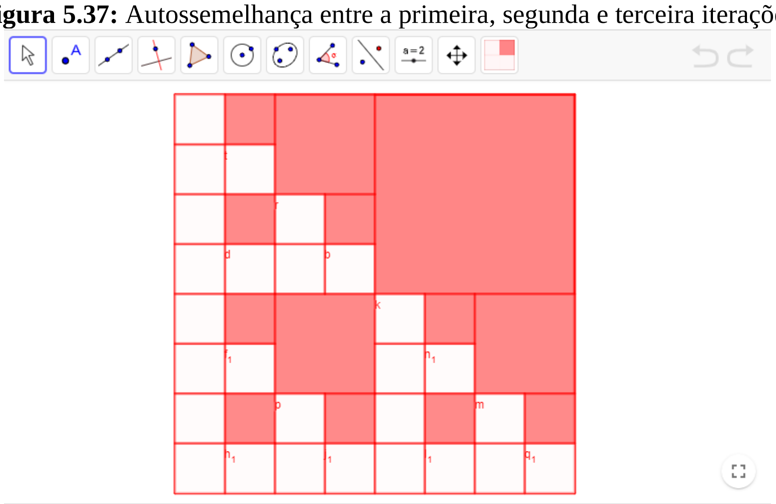
Figura 5.36: Resíduo de enunciação de *A7*

Não, pois aqui podemos observar um padrão fractal de preenchimento, logo em decorrência desta autosemelhança e desta complexidade infinita, nunca iremos atingir a área igual á área da figura inicial.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Quando estudamos a geometria dos fractais, duas das características que vemos sobre esta geometria são a *autossemelhança* e a *complexidade infinita* dos fractais. Basicamente, a primeira está associada ao padrão que as figuras tomam forma de modo que seja possível olhar para pequenas partes da mesma e verificar o mesmo padrão da figura toda, e isso pode ser visto na figura dessa questão quando analisamos uma parte da figura em qualquer iteração com a primeira iteração realizada. Um exemplo pode ser dado ao observarmos a construção realizada por *A1* em que a terceira iteração (quadrados pintados menores) se assemelha a segunda e a primeira iteração. Tal construção é apresentada na Figura 5.37.

Figura 5.37: Autossemelhança entre a primeira, segunda e terceira iterações



Fonte: Produzida pelo aluno.

Já a *complexidade infinita* está ligada ao fato de o processo gerador do fractal poder ser repetido indefinidamente, como nesse caso, a ferramenta criada a qual gera a próxima figura a cada iteração e poder ser usada *ad infinitum*.

Devemos observar que a direção de interlocução de *A8* é legítimo do ponto de vista do cotidiano, uma vez que seria impossível realizar infinitas iterações dentro de qualquer espaço de tempo (a não ser que fossem passadas de geração em geração indefinidamente, o que não parece muito viável). No entanto, a cultura matemática não legitima esse significado, uma vez que o matemático utiliza outros recursos de modo a mostrar que o limite da soma de todas as áreas é uma unidade (como abordamos no Capítulo 4), estabelecendo um fim a esse processo infinito.

5.5 Produzindo significados: A corrida do século

Exploramos esta questão em dois capítulos nesse texto. No Capítulo 1 apresentamos um dos enunciados do paradoxo de Aquiles e a tartaruga e também as possíveis legitimidades de Zenão bem como alguns contextos da época em que esse paradoxo foi proposto. Ainda, discutimos uma das possíveis soluções para essa questão hoje em dia, a qual segue uma abordagem por meio da soma dos termos da progressão geométrica formada pelos valores das distâncias entre os dois competidores, além de discutirmos brevemente outras formas de abordar o problema sem nos aprofundarmos nos cálculos envolvidos.

No Capítulo 4 discutimos sobre possíveis direções de interlocução que os alunos poderiam seguir nessa questão levando em consideração o interlocutor que instituímos tanto para a elaboração quanto para a análise dos dados produzidos.

Podemos dizer que as direções de interlocução foram bem divididas nessa questão de modo que alguns alunos consideraram Zenão correto ao afirmar que Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, enquanto outros afirmaram incorreta tal afirmação. As justificações de ambos os casos serão devidamente exploradas agora.

Partindo daqueles cuja crença-afirmação segue uma direção de interlocução contrária à afirmação de Zenão, conseguimos identificar três possíveis justificações presentes nos resíduos de enunciação dos alunos: a grandeza *tempo*, a grandeza *velocidade* e o senso comum. Alguns desses resíduos de enunciação seguem nas Figuras 5.38, 5.39 e 5.40.

Figura 5.38: Resíduo de enunciação de *A1*

Eu acho que nesta situação está implícito outras grandezas que devem ser consideradas. Dado um intervalo qualquer de tempo, Aquiles sempre irá percorrer uma distância maior do que a tartaruga, o que demonstra que Aquiles irá alcançar a tartaruga em algum momento.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.39: Resíduo de enunciação de *A8*

Acho que Aquiles alcançaria a tartaruga sim, porque no enunciado disse que ele é 10 vezes mais rápido que a tartaruga.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.40: Resíduo de enunciação de *A11*

Penso que ele alcançaria dependendo da velocidade.

Fonte: Produzida pelo aluno.

A enunciação de *A1* é abrangente no início e expressa bem o que dissemos anteriormente sobre as justificações para não concordarem com Zenão: outras grandezas podem ser consideradas nesse cenário de modo a validar a vitória inevitável de Aquiles sobre a tartaruga. Ele mesmo cita uma dessas grandezas, tempo, somado ao fato de que o enunciado deixa claro que o veloz campeão é 10 vezes mais rápido do que sua adversária independente da velocidade exata que cada um possa correr e, portanto, não importa o intervalo de tempo tomado, isso é o suficiente para provar que Aquiles é mais veloz e em algum momento ultrapassaria a tartaruga.

Já *A11* recorre a grandeza velocidade. De acordo com o seu resíduo de enunciação acreditamos que ele parece não ter observado (ou simplesmente não considerou) que a relação de velocidade entre os dois competidores já está posta, pois não importa qual seja a velocidade de um, o outro sempre será 10 vezes mais rápido ou 10 vezes mais lento se pensarmos em uma relação contrária da tartaruga para Aquiles. No entanto, *A11* provavelmente sabe que se a tartaruga corresse a $10\ m/s$ então Aquiles correria a $100\ m/s$ e seria notável que em algum ponto do trajeto a tartaruga seria ultrapassada. Os valores destas grandezas são insignificantes quando só queremos saber se é possível pensar na vitória de Aquiles, mas são importantes quando desejamos saber em que ponto da corrida haveria uma ultrapassagem, o que fizemos no Capítulo 1.

Por fim, *A8* não parece ter uma direção de interlocução voltada a grandezas matemáticas, cálculos de limites ou progressões geométricas para saber que a derrota da pobre tartaruga é inevitável já que o enunciado deixa claro que seu adversário corre 10 vezes mais rápido do que ela. Conforme já dissemos anteriormente, a chave é não pensar que os dois personagens se movem como peças em um tabuleiro onde uma precisa se movimentar primeiro para só então a outra se mover. Só assim o senso comum faz sentido nessa direção de interlocução e parece que *A8* não pensou em nenhum momento nessa possibilidade.

Agora, dentre os alunos que concordaram com Zenão, temos o resíduo de enunciação de *A6*, o qual parece apresentar duas direções de interlocução: em uma delas ele afirma que dadas as condições impostas por Zenão, Aquiles não venceria a tartaruga pois essa sempre estará a sua frente. No entanto, em outras condições de uma corrida justa com um ponto de partida e um ponto de chegada e os dois partindo do mesmo ponto, se Aquiles for mais rápido ele venceria a corrida. Seu resíduo de enunciação segue integralmente na Figura 5.41.

Figura 5.41: Resíduo de enunciação de *A6*

Zenão está afirmando que Aquiles não venceria e impôs condições para que isso aconteça, se a tartaruga sempre está a frente Aquiles não vencerá. Mas se não levaremos em conta as condições estabelecidas por Zenão Aquiles vencerá por ser mais rápido que a tartaruga, já que para uma corrida acontecer deve ter um ponto de partida e um ponto de chegada e se Aquiles for rápido o suficiente para ultrapassar a tartaruga ele vencerá.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Dessa forma, podemos afirmar que para *A6* o único motivo de Aquiles não vencer a tartaruga é porque Zenão impôs condições para que isso não aconteça, independentemente da velocidade de Aquiles.

Outras possíveis justificações identificadas por nós nessa questão se dividiram entre a divisão infinitamente do espaço, o próprio enunciado e o movimento alternado entre os personagens. Comecemos pelos resíduos de enunciação de *A2* e *A3* os quais seguem nas Figuras 5.42 e 4.43.

Figura 5.42: Resíduo de enunciação de *A2*

Concordo,ele não alcançaria,pois o espaço entre eles se divide infinitamente, tendenciando a uma eterna derrota para aquiles.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.43: Resíduo de enunciação de *A3*

Concordo, Zenão se referia a noção do ponto médio, cada vez que ele estivesse percorrendo o trecho, a tartaruga já teria uma certa distância a sua frente, então não conseguiria alcancá-lo.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Analisando os resíduos das duas últimas figuras, podemos notar uma direção de interlocução semelhante em certo ponto, pois ambos acreditam que a vitória de Aquiles é impossível com a justificação da divisão do espaço percorrido e *A2* é enfático ao dizer que tal divisão é infinita, provavelmente sendo esta uma outra justificação para a afirmação seguinte: “uma eterna derrota para Aquiles”. Já o significado que produzimos para o resíduo de *A3* segue uma direção de interlocução semelhante àquela da primeira questão em que ele respondeu, apesar de ter respondido aquela questão posteriormente conforme já explicamos, mas é notável que as direções de interlocução se assemelham.

Relembrando, na primeira questão *A3* parecia ter a crença de que nunca chegaríamos ao mercado levando-se em consideração que sempre teríamos que passar por um ponto médio antes de chegar ao ponto final, sendo impossível um ser igual ao outro. Tal direção de interlocução se repete nessa questão, de modo que sua justificação parte do mesmo pressuposto de ponto médio para provar que Aquiles sempre ficaria atrás da tartaruga, provavelmente sendo essa o ponto final (destino) do primeiro personagem.

Notamos que *A3* utiliza o conceito de ponto médio apesar do enunciado deixar claro que a velocidade de Aquiles é 10 vezes maior do que a velocidade da tartaruga e não 2 vezes. No entanto, acreditamos que isto é indiferente para o significado que provavelmente *A3* produziu, de modo que 2 vezes ou 10 vezes mais rápido não alterariam a crença-afirmação do aluno.

Os próximos resíduos de enunciação seguem nas Figuras 5.44 e 5.45.

Figura 5.44: Resíduo de enunciação de *A4*

Não. Pq sempre a tartaruga estaria a frente de de Aquiles à medida que Aquiles se próximas se dele.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 5.45: Resíduo de enunciação de *A12*

Concordo com a afirmação de Zenão. Pois, matematicamente, por mais próximo que Aquiles chegue perto da tartaruga, nunca exatamente estará no mesmo ponto que ela.

Fonte: Produzida pelo aluno.

O resíduo de enunciação de *A4* expressa uma possível justificação pelo próprio enunciado. Enquanto alguns alunos apresentaram uma justificação pautada na velocidade de Aquiles ser maior do que a tartaruga resultando na vitória do primeiro sobre o segundo, *A4* segue uma direção de interlocução voltada às consequências de todo o contexto da corrida. Se a tartaruga está a frente desde o início então não há como Aquiles ultrapassá-la, pelo menos é isso que o texto tenta induzir o leitor a concluir. É justamente isso que parece influenciar *A12* em sua direção de interlocução também, pois ele apresenta em sua justificação o que parece ser a premissa do próprio enunciado da questão quando afirma que "por mais próximo que Aquiles chegue perto da tartaruga, nunca exatamente estará no mesmo ponto que ela.".

Outra possível justificação é o movimento alternado entre os competidores, sendo plausível que se a tartaruga se movesse primeiro para só então Aquiles se mover, sempre haveria uma distância entre os dois, por menor que seja, mas haveria. E isso é o que *A7* expressa matematicamente em seu resíduo de enunciação, podendo ser observado na Figura 5.46.

Figura 5.46: Resíduo de enunciação de *A7*

Não, nestas condições Aquiles nunca vencerá a corrida pois a tartaruga sempre estará a uma distancia afrente de seu oponentes, sendo a distância igual a um décimo da diferença entre os competidores, ou algo como (T-A)/10

Fonte: Produzida pelo aluno.

Vamos analisar como a expressão apresentada por *A7* opera no enunciado da questão. Supondo que no primeiro momento da corrida Aquiles esteja no ponto 0 e a tartaruga $100m$ à sua frente, teríamos $(100 - 0)/10 = 10$, ou seja, a distância entre os dois seria de $10m$, mas isso no segundo momento da corrida quando a tartaruga percorrer $10m$ e Aquiles $100m$. Nesse momento, teríamos Aquiles na posição $100m$ e a tartaruga na posição $110m$ e, portanto, $(110 - 100)/10 = 1$ seria a distância entre os dois no terceiro momento da corrida. Logo, o que a expressão de *A7* está representando é a distância entre os dois sempre no momento seguinte dessa competição. Sendo assim, a sequência das distâncias $\{10, 1, 0{,}1, ...\}$ nunca teria fim.

Tal direção de interlocução também é apresentada por ele na primeira questão, conforme expomos na Seção 5.1 desse capítulo, quando ele afirma que nunca chegaríamos ao mercado devido às divisões infinitas do espaço uma vez que entre os dois pontos há infinitos pontos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante as nossas análises, verificamos que alguns alunos apresentavam direções de interlocução diferentes em questões que aparentemente exploram conceitos semelhantes. Nesse caso, podemos explorar um pouco mais os resíduos de enunciação de *A5*.

Na questão “A existência do movimento” *A5* segue uma direção de interlocução que parece legitimar um processo infinito resultar em algo finito. No entanto, na questão “Aproximando as áreas” parece que sua enunciação segue outra direção quando afirma que as áreas da circunferência e do polígono regular se tornam próximas, mas nunca serão iguais. Destacamos essa resposta e não apresentamos a seguinte no item (b) dessa questão, mas achamos propício nesse momento apresentar o resíduo de enunciação de *A5* nesse item, o qual questiona se é possível aproximar as áreas ainda mais, uma vez que quando o controle deslizante dos lados está em 100 as áreas ainda são diferentes apesar de estarem mais próximas. Nesse ponto o aluno responde que é possível “aumentando o número de lados do polígono tanto quanto se queira” (palavras dele), apresentando o que parece ser uma direção de interlocução que tenta seguir o mesmo raciocínio exposto na questão sobre os pontos médios. No entanto, o que predomina nos itens (a) e (c) conforme já apresentamos é a crença-afirmação de que as duas áreas nunca serão iguais e que “independente de quanto maior for o número de lados, ainda assim será um polígono e não uma circunferência” (palavras dele).

Essa mesma direção de interlocução parece estar presente na questão “Preenchendo o quadrado” uma vez que, para ele, o processo infinito de pintar o quadrado com a ferramenta criada não será o suficiente para pintá-lo totalmente. Não conseguimos notar o uso do recurso do *zoom* em sua construção, o que seria uma possível justificação para sua enunciação, mas percebemos que a ferramenta foi utilizada diversas vezes o que pode ser um indício desse processo infinito que sempre gera outro quadrado para ser pintado conforme citado em seu resíduo de enunciação.

Outros alunos apresentaram direções de interlocução que seguiram uma certa semelhança em mais de uma questão, como por exemplo o aluno *A3*, o qual assumimos ter instituído um interlocutor que não legitima um infinito em ato. Temos evidências desse interlocutor em diversos resíduos de enunciação deixados por ele como na primeira questão em que ele afirma que mesmo criando um número muito alto de pontos médios, este ainda nunca seria um ponto final. Já na segunda questão, ele afirma no item (a) que quando o número de lados tende ao infinito, as duas áreas se tornam muito próximas, enquanto no item (b) apresenta que as duas áreas serão iguais se calcularmos o limite da área do polígono fazendo o número de lados tender ao infinito. Por fim, acreditamos que ele expõe uma das limitações do GeoGebra no item (c) ao afirmar que as duas áreas seriam apenas muito próximas pois não era possível atribuir infinitos lados ao controle deslizante.

Já na última questão ele parece retomar a direção de interlocução dos pontos médios, pois para ele as questões parecem se assemelhar de modo que, substituindo Aquiles pelo ponto A e a tartaruga pelo ponto B, o primeiro nunca alcançaria o segundo. Importante ressaltar aqui que mesmo que as duas questões não explorem o movimento da mesma forma[26], talvez *A3* tenha imaginado que por se tratarem de espaços limitados em que um ponto se movimenta em direção ao outro as duas questões poderiam ser tratadas com a mesma abordagem.

Destacamos novamente outro ponto que nos chamou a atenção durante as análises, que é como o recurso *zoom* e o próprio enunciado aparecem nas direções de interlocução dos alunos em algumas questões. No primeiro caso, vemos claramente como o *zoom* é determinante na primeira, segunda e quarta questão, nas quais já esperávamos uma maior utilização do recurso. Na primeira questão, o *zoom* foi utilizado como verificador de que é possível sempre adicionar mais um ponto médio entre dois pontos, enquanto na segunda questão para validar a afirmação de que sempre haveria um espaço entre a área do polígono e a circunferência por mais lados que o primeiro possa ter. Já na quarta questão, o *zoom* parece ter sido mais determinante uma vez que se quiséssemos utilizar a ferramenta tanto quanto se queira seria inevitável e necessário aplicar o *zoom* na figura para continuar esse processo.

Já no caso da justificação pelo próprio enunciado, notamos que a questão de Aquiles e a tartaruga foi aquela em que essa direção de interlocução foi utilizada mais de uma vez. É interessante como o enunciado da questão influenciou direções de interlocução em dois sentidos: um afirmando que Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a tartaruga, encerrando discussão de quem venceria a corrida não importando quanto a tartaruga começasse a frente, e outro que partia da conclusão de Zenão de que dadas as condições impostas por ele, Aquiles sempre estaria um pouco atrás da tartaruga e, assim, nunca venceria a corrida.

No entanto, achamos válido afirmar que tanto o *zoom* quanto o enunciado, apesar de termos afirmado que foram determinantes em alguns casos, não podemos dizer que estes influenciaram a direção de interlocução de algum aluno, justamente por não termos dados o suficiente para isso. O que podemos imaginar é que, por exemplo, o *zoom* pode ter sido utilizado em um momento por um aluno e ter mudado a direção de interlocução que ele estava tomando

[26] Na primeira questão podemos imaginar o ponto A se movimentando de $1/2$ em $1/2$ até o ponto B, enquanto na segunda questão Aquiles e a tartaruga se movem em uma relação de dependência entre as suas velocidades.

anteriormente, direção essa a qual se chegou a existir nunca chegaremos a conhecê-la. Ao mesmo tempo o *zoom* pode ter servido como mais uma maneira de legitimar o que o aluno já estava pensando em um determinado momento. Como só tivemos acesso ao que achávamos que os alunos estavam dizendo quando falavam de infinito, certas afirmações se tornam impossíveis de serem feitas.

Contudo, acreditamos que a pesquisa realizada responde a nossa curiosidade de verificar quais são os infinitos que surgem nas enunciações dos alunos quando são colocados frente à situações que envolvem o infinito, e o processo de leitura plausível foi determinante para tornar isso possível, pois evitamos priorizar modos de pensar infinito e nos abrimos às possibilidades de interlocução acerca desse objeto. Uma decisão que consideramos ter sido importante nesse processo de leitura foi considerar o aluno como alguém cujas legitimidades e significados são produzidos dentro de duas culturas, acadêmica e não-acadêmica, onde certas direções de interlocução são mais possíveis do que outras. Outra possibilidade para se estabelecer esse interlocutor para o qual direcionamos nossa pesquisa seria considerar o ambiente em que o aluno está inserido, mas deixamos essa consideração em forma de um questionamento para futuras pesquisas: as direções de interlocução poderiam ser diferentes se esses alunos tivessem respondido ao questionário durante uma aula de Cálculo ou Análise Real, por exemplo?

Ressaltamos que o que apresentamos aqui não são as produções de infinito dos alunos, mas as produções de infinito que acreditamos que os alunos produziram quando falaram sobre infinito. No entanto, isso não diminui a importância que consideramos dessa pesquisa para a área da Educação Matemática, e esperamos que essa possa ajudar pesquisadores que desejem falar sobre infinito e GeoGebra ou infinito e Modelo dos Campos Semânticos, ou então que possa servir como orientação para professores que estejam buscando alternativas para se tratar de infinito em aulas de cursos de Graduação em Matemática ou qualquer outro curso cujas disciplinas venham a tratar sobre o tema.

Acreditamos que uma entrevista com esses ou outros grupos de sujeitos possa contribuir para essa pesquisa no sentido de complementar os resíduos de enunciação expostos aqui. Ao conversar com as pessoas, temos a liberdade de questionar as coisas que não conseguimos compreender devidamente somente pelos resíduos de enunciação observados, tornando possível uma maior proximidade com o interlocutor criado por ele no momento da enunciação, embora talvez nunca seja possível conhece-lo totalmente.

REFERÊNCIAS

ACZEL, A. D. **O mistério do Alef:** A matemática, a Cabala e a procura do infinito. Tradução: Ricardo Gouveia. São Paulo: Globo, 2003.

BARCELLOS, A. L. V. A Obra de M. C. Echer: Um Matemático Surrealista. **Resgates**, São Paulo, n. 9, p. 23-36, dez. 2019.

CAFEZEIRO, I. *et al*. Crises e Incompletudes, Multi-histórias matemáticas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 162-177, 2016.

CARGNIN, C.; BARROS, R. M. A Contribuição do GeoGebra para a Compreensão do Conceito de Convergência. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v. 4, n. 6, p. 215-232, jan-jun. 2015.

FILHO, I. F. B.; SOARES, M. R. Uma resposta da Matemática Moderna para os Paradoxos de Zenão: dicotomia e Aquiles e a Tartaruga. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 13, n. 24, p. 40-45, jun. 2008.

GAMOW, G. **One two three…infinity:** Facts and speculations of science. New York: Viking Press, 1961.

GOMBRICH, E. H. J. **A História da Arte**. 16. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2000.

HILBERT, D. **David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917-1933.** Heidelberg: Springer, 2013.

JÚNIOR, V. D. Metáforas, Aforismos e Reflexões: Aproximações entre Matemática, Educação Matemática e Arte. **BoEM**, Joinville, v. 3, n. 5, p. 51-68, ago./dez. 2015.

KRAGH, H. **The true (?) history of Hilbert's infinite hotel.** Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1403.0059>. Acesso em: jul, 2020.

LACROIX, S. F. **Élémens D'Algébre, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations**. 4. ed. Paris: Chez Courcier, 1804.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 75-91, set. 1993.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. *et al.* (Orgs.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, v. 1, p. 11-30.

MACHADO, R. B. *et al*.; Aporética do Infinito: [des]caminhos na matemática e na pintura. **Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 1, p. 283-317, abr. 2013.

MAOR, E. **To infinity and beyond:** a cultural history of the infinite. New Jersey: Princeton University Press, 1991.

MESSIAS, M. A. V. F.; BRANDEMBERG, J. C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1224-1241, dez. 2015.

MORRIS, R. **Uma breve história do infinito:** dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

POMMER, W. M. Números Irracionais na escolaridade básica: as contribuições didático-epistemológicas advindas da História da Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 183-199, abr./jun. 2018.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAMPAIO, P. A. S. R. **Concepções de infinito de alunos do ensino secundário: contributo da webquest *Escher e a procura pelo infinito***. Mestrado em Educação (dissertação). Gualtar: Universidade de Minho, 2006. 202 f.

SAMPAIO, P. A. S. R. Infinito: uma realidade a parte dos alunos do Ensino Secundário. **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123-146, abr. 2009.

SANT'ANA, M. F.; TADESCO, P. Discussão das noções de limite e infinito. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 11, n. 17, p. 47-51, dez. 2004.

SANTOS, M. B. S.; ALMOULOUD. S. Ag. O Conceito de Limite: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. 15, p. 537-572, 2014.

SILVA, C. M. S. Os "espinhos" da álgebra para Lacroix. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 219-237, 2011.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 6, n. 1, p. 129-138, jan./abr. 2013.