UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PENSAMENTO MATEMÁTICO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ANÁLISE DE UM ENUNCIADO EM UM CURSO À DISTÂNCIA

Allan José

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PRPGEM

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

PENSAMENTO MATEMÁTICO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ANÁLISE DE UM ENUNCIADO EM UM CURSO À DISTÂNCIA

ALLAN JOSÉ

Orientador:
Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Julho de 2022

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

José, Allan
Pensamento matemático e pensamento computacional na resolução de problemas: análise de um enunciado em um curso à distância / Allan José. -- Campo Mourão-PR,2022.
96 f.: il.

Orientador: Sérgio Carrazedo Dantas.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2022.

1. Matemática-Estudo e Ensino. 2. Pensamento Computacional. 3. Curso à Distância. 4. EaD. I - Dantas, Sérgio Carrazedo (orient). II - Título.

Allan José

PENSAMENTO MATEMÁTICO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ANÁLISE DE UM ENUNCIADO EM UM CURSO À DISTÂNCIA

Comissão Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
SERGIO CARRAZEDO DANTAS
Data: 08/12/2022 11:12:06-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas – Presidente da Comissão ExaminadoraUniversidade Estadual do Paraná (Unespar) – campus de Apucarana

Prof. Dra. Maria Ivete Basniak – Membro da Banca Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – campus de União da Vitória

gov.br Documento assinado digitalmente
WILLIAM VIEIRA GONCALVES
Data: 08/12/2022 11:41:56-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Willian Vieira Gonçalves - Membro da Banca Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) – campus de Barra do Bugres

gov.br Documento assinado digitalmente
JOAO PEDRO ANTUNES DE PAULO
Data: 08/12/2022 10:58:35-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. João Pedro Antunes de Paulo - Membro da Banca Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (Unifesspa) – campus de Marabá

Resultado: Aprovado.

Campo Mourão
Julho de 2022

Dedico este trabalho aos meus pais, Carlos José e Neuza Alves Nequinha José, à minha irmã Larissa Aline José, aos meus sobrinhos Enrico Brusiani e Arthur Brusiani, ao meu cunhado Pedro Paulo Zamarian Brusiani, ao meu ilustríssimo orientador Profº Dr. Sérgio Carrazedo Dantas, ao meu grupo de pesquisa Autômato, e a todos os meus colegas e amigos que contribuíram direta ou indiretamente com dicas valiosas ou reconfortantes incentivos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de vida, donde emana a minha luz, fortaleza, força, sabedoria, beleza, paz e amor, pois tudo é possível para aquele que crê, por mais difícil que seja a caminhada.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e encorajaram, no desenvolvimento dos meus planos, aspirações e decisões, mostrando-me sempre que o esforço enobrece e dignifica a alma.

A minha irmã, que sempre me abrigou nos momentos mais difíceis, fornecendo aquele "ombro amigo" quando eu precisava.

A esta universidade, direção, administração, profissionais e campus de Campo Mourão/PR que oportunizaram uma janela para que hoje eu pudesse vislumbrar um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu ilustríssimo professor orientador Sérgio Carrazedo Dantas, que sempre esteve de prontidão para me auxiliar na elaboração deste trabalho, com maravilhosas correções e reconfortantes incentivos.

Aos nobres professores que participaram das bancas de qualificação e de defesa final pelas brilhantes contribuições para estruturação desta pesquisa.

Aos membros do grupo de pesquisa Autômato que em todas as reuniões auxiliaram com as incríveis discussões de admiráveis textos, esclarecimento de dúvidas, e abertura de caminhos nos momentos de dificuldade.

E, aos meus outros mestres, que não mediram esforços para me garantir acesso a um saber de qualidade, visto que o aprendizado é a base da minha inserção profissional de atuação nesse mundo contemporâneo cheio de competitividade e criticidade.

“Pensamentos valem e vivem pela observação exata ou nova, pela reflexão aguda ou profunda; não menos querem a originalidade, a simplicidade e a graça do dizer.”

(Machado de Assis)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar os vestígios de pensamento matemático e o pensamento computacional na resolução de problemas. Antes de adentrar na noção de Pensamento Matemático destacou-se o Modelo dos Campos Semânticos de Lins, e, após, a concepção deste mesmo autor sobre o pensamento algébrico. Referente a noção de Pensamento Matemático, esta foi pautada através dos seguintes processos mentais: Representar, Generalizar, Visualizar, Classificar, Analisar, Conjecturar, Induzir, Formalizar e Abstrair. Referente a noção de Pensamento Computacional, elencou-se quatro ações cognitivas não-hierárquicas: Decomposição, Reconhecimento de Padrões, Abstração e Produção de Algoritmo. O trabalho foi desenvolvido por uma pesquisa de cunho qualitativo interpretativo através das respostas fornecidas por participantes do Módulo 6 da 19ª Edição do Curso do GeoGebra perante o Enunciado 14. Foram analisadas as resoluções do autor e de 12 cursistas, respectivamente. A análise foi inspirada na perspectiva metodológica da *leitura plausível* de Lins. Frente aos vestígios analisados, concluiu-se que possivelmente ocorre um entrelaçamento do Pensamento Matemático e do Pensamento Computacional, um transcursa a partir do outro, não sendo necessariamente iguais. Este entrelaçamento pode ocorrer de forma perceptível ou semi-perceptível. Entender os processos mentais existentes nesse entrelaçamento pode contribuir em uma melhor identificação de problemas oriundos do cotidiano.

Palavras-chave: Pensamento Matemático; Pensamento Computacional; Resolução de Problemas.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo encuestar los rastros del pensamiento matemático y el pensamiento computacional en la resolución de problemas. Antes de ingresar en la noción de Pensamiento Matemático, se destacó el Modelo de Campos Semánticos de Lins y, posteriormente, la concepción de este mismo autor sobre el pensamiento algebraico. Referente a la noción de Pensamiento Matemático, este se orientó a través de los siguientes procesos mentales: Representar, Generalizar, Visualizar, Clasificar, Analizar, Conjeturar, Inducir, Formalizar y Abstraer. Referente a la noción de Pensamiento Computacional, se enumeraron cuatro acciones cognitivas no jerárquicas: Descomposición, Reconocimiento de Patrones, Abstracción y Producción de Algoritmos. El trabajo fue desarrollado por una investigación cualitativa interpretativa por medio de las respuestas presentadas por los participantes del Módulo 6 de la 19ª Edición del Curso de GeoGebra ante el Enunciado 14. Se analizaron las resoluciones del autor y de 12 participantes del curso, respectivamente. El análisis se inspiró en la perspectiva metodológica de la *lectura plausible* de Lins. Ante los rastros analizados, se concluyó que posiblemente existe un entrelazamiento del Pensamiento Matemático y del Pensamiento Computacional, uno procede del otro, no necesariamente siendo lo mismo. Este entrelazamiento puede ocurrir de forma perceptible o semiperceptible. Comprender los procesos mentales existentes en este entrelazamiento puede contribuir a una mejor identificación de los problemas que surgen de la vida cotidiana.

Palabras clave: Pensamiento Matemático; Pensamiento Computacional; Resolución de problemas.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS E QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	-	Base Nacional Comum Curricular
CAS	-	Cálculo Simbólico
CSBC	-	Congresso da Sociedade Brasileira de Computação
DNA	-	Ácido desoxirribonucleico
IFSP	-	Instituto Federal da Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
JVM	-	*Java Virtual Machine*
MCS	-	Modelo dos Campos Semânticos
OSI	-	*Open Source Iniciative*
PDF	-	*Portable Document Format*
SBC	-	Sociedade Brasileira de Computação
UNICAMP	-	Universidade Estadual de Campinas
UNESP	-	Universidade Estadual de São Paulo
WEI	-	Workshop sobre Educação em Computação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O tema da presente pesquisa surgiu de forma indireta durante as aulas dos professores Sérgio Carrazedo Dantas (orientador) e Maria Ivete Basniak na disciplina de Tecnologia na Educação Matemática do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática oferecido pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, campus de Campo Mourão e União da Vitória, isto no primeiro semestre de 2019.

Nesta época, o autor era aluno especial (não regular) do programa, e, portanto, ainda estava em fase de elaboração do seu pré-projeto de pesquisa. Após uma aula sobre pensamento computacional, este envolvido com o pensamento matemático na resolução de problemas, o autor encantou-se e iniciou suas pesquisas sobre o tema.

Durante a preparação do pré-projeto, várias dúvidas surgiram, estas baseadas na superficialidade – com necessidade de aprofundamento – de temas significativos para a pesquisa, tais como: O que é pensamento? O que é pensamento computacional? O que é pensamento matemático? O que é resolução de problemas?

Para tanto, aflorou-se o interesse em explorar estes questionamentos, com um aumento exponencial do fascínio pelo tema. Após a aprovação definitiva como aluno regular e algumas reuniões de orientação, definimos o título e os objetivos preliminares da pesquisa, isto para efetivar a organização do projeto de pesquisa e sua apresentação para a disciplina de Investigações em Educação Matemática, também do mesmo programa.

O primeiro movimento da pesquisa foi de levantar as lentes teóricas sobre Pensamento Matemático e Pensamento Computacional. Com isto, ponderou-se a proposição de noções para ambos os temas que coadunem aos argumentos apresentados pelas lentes e respeitem as convicções do pesquisador e seu orientador.

Relativo ao Pensamento Matemático, disposto no Capítulo 1, foram utilizados os constructos teóricos postulados por Lins (1994a)(1994b)(2012), Dreyfus (2002), Tall (2002), Van Hiele (2000) e Polya (2006). Já para o Pensamento Computacional, no Capítulo 2, utilizaram-se as produções de Papert (1980), Wing (2006)(2008)(2010)(2014), Kurshan (2016), Valente (1993)(1998)(2005), Dantas (2021) e Brackmann (2017).

Com isto, avaliou-se qual a forma com que estas noções seriam vislumbradas na prática, e, para tanto, adveio a ideia de produzir uma pesquisa de cunho qualitativo interpretativo que atendesse esta necessidade.

Assim, os critérios metodológicos adotados estão dispostos no Capítulo 3, tendo esta pesquisa o objetivo de: Investigar os vestígios de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional na resolução de problemas, isto através das respostas fornecidas por participantes do Módulo 6 da 19ª Edição do Curso do GeoGebra[1] frente o Enunciado 14.

O GeoGebra é um software gratuito, dinâmico e aberto (*Open Source*) de Matemática que relaciona: Geometria, Álgebra, Manipulação de planilhas, Construção de gráficos, Estatística, Realização de cálculos, Resolução de problemas, dentre muitas outras possibilidades; todas com engajamento na área educacional, isto para os mais variados níveis de ensino.

Houve a seleção do Módulo 6 do respectivo Curso por este apresentar como atividade a tarefa de tentar resolver um problema utilizando o software GeoGebra a partir de uma lista de 25 enunciados, todos apresentados aos cursistas.

O Enunciado 14 foi selecionado intencionalmente pelo fato de que comparado aos demais possivelmente influencia em maior intensidade o participante a utilizar uma mescla dos Pensamentos Matemático e Computacional durante a resolução.

Para a análise dos dados considerou-se uma perspectiva metodológica inspirada no que Lins (2002) nomeou como *leitura plausível*[2], em seu modelo teórico. Importante frisar que esta perspectiva não agrega todas as noções dispostas por Lins (2002), pois a análise considerou aspectos políticos intrínsecos às concepções pessoais minhas durante a classificação dos vestígios de Pensamento Matemático e/ou Pensamento Computacional.

Logo, o Capítulo 4 pauta a análise, primeiramente, da minha resolução para o Enunciado 14, isto a fim de servir apenas como parâmetro para uma compreensão necessária do problema, e, após, de cada uma das resoluções publicadas pelos cursistas, os quais possivelmente manifestaram vestígios de Pensamento Matemático e/ou Pensamento Computacional durante a produção de suas respostas postadas em fóruns de discussão. Salienta-

[1] Curso oferecido em parceria pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, campi de Apucarana/PR, e o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso – FAPEMAT, campi de Barra dos Bugres/MT. Já foram realizadas 19 edições, isto desde 2012, com a formação de mais de 5000 alunos brasileiros e estrangeiros.

[2] Lins diz que é "plausível porque "faz sentido", "é aceitável neste contexto", "parece ser que é assim" […] A *leitura plausível* se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e significado; ela indica um processo no qual o todo do que eu acredito que foi dito faz sentido." (LINS, 2012, p. 23)

se que para proteger a identidade de cada cursista foram adotados nomes fictícios no intercurso da análise.

Por fim, em sede de considerações finais ponderou-se a dinâmica existente destes vestígios de Pensamento Matemático e/ou Pensamento Computacional, a forma em que eles dialogam entre si, os momentos em que se aproximam ou se afastam, e o entrelaçamento oriundo de algumas características comuns ou diversas que estas modalidades de pensamento abrangem durante a resolução de problemas.

1 DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Um autor que escreveu acerca do pensamento matemático foi o Professor Doutor Romulo Campos Lins, nascido em 21 de agosto de 1955 e falecido em 17 de agosto de 2017. Trabalhou desde 1992 no Departamento de Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) em Rio Claro/SP.

Ele criou ao longo de sua caminhada acadêmica o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), o qual servirá aqui neste trabalho como uma importante lente teórica ao desenvolvimento e progresso deste capítulo e desta pesquisa.

Assim sendo, preliminarmente apresenta-se um breve compêndio do MCS, para, após, abordar a noção de pensamento matemático, isto com base também nos ensinamentos de Lins.

1.1 Do Modelo dos Campos Semânticos (MCS)

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) está enraizado no âmbito da Educação Matemática, contudo é perfeitamente possível aplicá-lo em diversas outras áreas. O MCS está atrelado às interações humanas.

O MCS não é estático, ele necessita ser aplicado em situações em que envolva movimento. Lins (2012) atesta que quando se está estudando o MCS, já está o utilizando; o MCS sempre está "em ação".

É possível relacionar o MCS com as ações interligadas ao pensamento, isto através das manifestações proferidas e compreendidas pelos sujeitos cognitivos de diferentes modos, estes abarcados pelos resíduos oriundos destas enunciações.

Analisar o pensamento de um aluno durante o processo de aprendizagem é uma tarefa complexa. Para tanto, apresenta-se as ideias sobre conhecimento sustentadas por Lins (2012) no MCS, *in verbis:*

> Um conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz). Um conhecimento não é nem mais, nem menos, que isto. Existe em sua enunciação e deixa de existir quando ela termina. A justificação é parte *constitutiva* de um conhecimento, assim como aquilo que é afirmado e a crença no que é afirmado [...] (LINS, 2012, p.12-13).

Para uma melhor compreensão dos termos utilizados por Lins (2012), apresenta-se abaixo um compêndio com os principais elementos abrangidos pelo MCS e relacionados a esta pesquisa:

a) **Conhecimento:** não é nada mais nada menos que uma crença-afirmação (o autor enuncia algo em que acredita), em conjunto a uma justificação (aquilo que legitima o autor realizar a enunciação). O conhecimento nasce com a enunciação e morre em seu término. Logo, são três elementos *constitutivos* do conhecimento: aquilo que é afirmado, a crença no que é afirmado, e a justificação do que é afirmado (LINS, 2012).

O conhecimento nasce e morre na enunciação, logo não se pode deduzir que um conhecimento constituído e enunciado por uma pessoa “A” para outra “B” (que o aceitou do seu próprio modo) seja igual a outro constituído e enunciado por “B” para outra pessoa “C”.

Não é crível determinar que um conhecimento seja superior ou inferior a outro. Para um sujeito realizar uma enunciação, este constitui legitimidades que o autoriza a enunciar. Nenhum conhecimento é ingênuo, o autor da enunciação sempre falará em uma *direção de interlocução*.

b) **Acreditar (crença):** a partir do nascimento do conhecimento através da enunciação, o autor afirma aquilo que acredita, logo ele age de forma coerente com aquilo que diz. Não é plausível ter uma afirmação sem a crença de que aquilo (para o autor) está correto. Obviamente mentir é possível, isto na tentativa de fazer o outro pensar que aquilo seja verdade, porém tanto “acreditar” quanto “mentir” não se relacionam com a noção de “verdade”. Para tanto, imagina-se a seguinte situação: o autor enuncia algo falso, entretanto ele não detém ainda as informações de que aquilo seja falso – sendo que se as tivesse vislumbrado antes, acreditaria que fosse falso e não realizaria a sua enunciação posterior da mesma forma – não está mentindo; todo conhecimento é verdadeiro em algum contexto, isto ao menos para seu autor (LINS, 2012).

Em outras palavras, a constituição do conhecimento é revelada por aquilo que se afirma. O autor produz uma enunciação em direção a um leitor. Já o leitor torna-se o “autor” daquilo que ele constitui a partir da leitura; e, portanto, produz significados resultantes de resíduos de enunciação por ele aceitos.

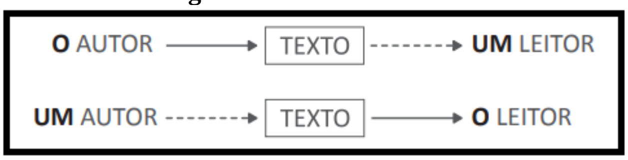
c) **Resíduo de enunciação:** É o que fica/sobra de uma enunciação. Está compreendido na produção de significados, isto, pois, o leitor pode, ao seu critério, tomar para si como resíduo de enunciação aquilo produzido por um autor. Por exemplo, tomar um café pode ser um ato enunciativo; e uma xícara suja sobre a mesa pode ser um resíduo da enunciação constituído pelo leitor (LINS, 2012).

O leitor compõe para si os resíduos de enunciação oriundos de, por exemplo, um texto, para a sua produção de significados. Não necessariamente o resíduo de enunciação constituído por um leitor seja igual ao de outro.

d) **Autor-leitor:** O autor é aquele que produz a enunciação; sendo esta, lançada em direção a um leitor, em que este é constituído pelo o autor durante a enunciação. Já o leitor produz significados pela enunciação a ele disposta por um autor, falando na direção deste um autor, em que este é constituído pelo o leitor. A partir deste momento o leitor "desaparece", "morre", isto no sentido de instituir-se apenas como o autor da produção de significados a partir da leitura, pelo fato de que ele toma como legítimos os significados que lhe convém (LINS, 2012).

Abaixo, um esquema gráfico para melhor elucidar o/um autor e o/um leitor, isto segundo Lins (2012):

Figura 1: Autor-texto-leitor



Fonte: (LINS, 2012, p. 14)

e) ***Interlocutor*:** Não é um sujeito biológico, e, sim, um sujeito cognitivo. É a direção na qual o autor realiza a sua enunciação. Durante o nascimento do conhecimento, o autor constitui uma *direção de interlocução* (LINS, 2012).

Lins (2012) adota algumas nomenclaturas, para ele, usuais durante suas obras para elucidar elementos do processo de comunicação. Por exemplo, ele utiliza os termos “eu” e *interlocutor* para destacar que: “eu” – o autor comunicante – enuncio na direção de um *interlocutor*.

Não se deve considerar que o *interlocutor* seja uma pessoa, materializá-lo como algo, ou alguém – mesmo que seja imaginário existente apenas na mente do autor –, mas, sim, que ele (*interlocutor*) determina uma *direção de interlocução*, um caminho que o autor acredita ser válido, isto de modo que “eu” adoto determinado posicionamento por ter uma justificação pertinente, a qual é demonstrada durante minha enunciação e que me legitima (como o autor) a, por exemplo, “dizer o que estou dizendo”.

f) **Justificação:** Elemento fundamental do conhecimento que indica aquilo que o autor acredita a fim de autorizá-lo a realizar a enunciação, e tomando para si como legítimo (LINS, 2012).

A justificação não é uma *justificativa*. Desta maneira, ela não deve ser considerada como uma explicação para a enunciação. Existem diferenças entre a justificação e a legitimidade. A primeira é apenas aquilo em que o autor acredita e o autoriza a realizar sua enunciação, já a segunda é um atributo do conhecimento produzido, sendo constituída, ou não, por modos de produção de significado.

Assim sendo, a justificação “empresta” legitimidade(s) de algo ou alguém, autorizando (legitimando) o autor a realizar sua enunciação.

g) **Legitimidade/verdade:** Todo conhecimento é verdadeiro – para o autor, pois ele “se autoriza” (se legitima) a realizar sua enunciação por aspectos que ele adota como verdadeiros. Estes aspectos são relacionados: a carga cultural do autor, as suas experiências vividas, ao contexto em que a enunciação foi realizada, as suas paixões, dentre outros formas de influência. A legitimidade é um atributo do próprio conhecimento e da convicção do autor, dotada de toda sua carga valorativa (cultural) e influências advindas da enunciação. (LINS, 2012).

Esta legitimidade na produção da enunciação é diretamente vinculada ao *interlocutor*, visto que a própria existência deste *interlocutor* – direção da enunciação – já propicia ao leitor a experiência necessária para constituir legitimidades, as quais deliberam a justificação que propicia autoridade a seguir esta direção (*direção de interlocução*).

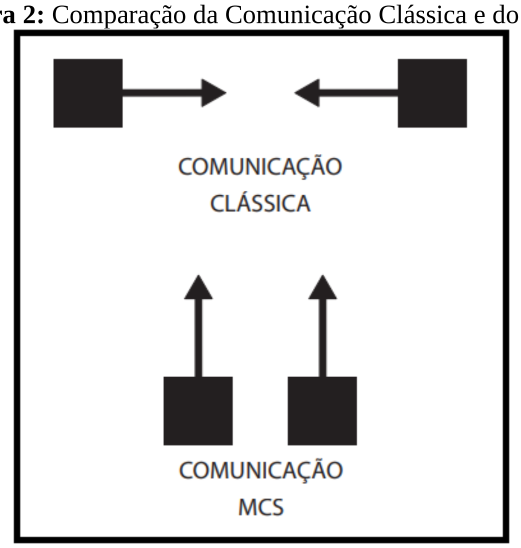
Na perspectiva do MCS, a centralidade da legitimidade está na cultura e não nos sujeitos; logo, o autor se sente autorizado a realizar sua enunciação ou seguir determinada *direção de interlocução*; ou seja, a cultura autoriza o sujeito e ele assim se sente por acreditar que pertence à esta uma cultura.

h) **Significado/objeto:** Significado de um objeto é o que efetivamente é dito sobre algo. Ao realizar a constituição de objetos, automaticamente se obtêm a produção de significados. A produção de significados ocorre simultaneamente à produção de conhecimentos, e vice-e-versa. A existência de resíduo de enunciação já demanda a produção de significado (LINS, 2012).

Assumindo como base os princípios do MCS, atribui-se que não detém respaldo no Modelo dizer que o significado é *para* o objeto, ou que é *por meio* do objeto. Coaduna com o Modelo dizer que o significado é *do* objeto, e estritamente dele durante a enunciação e produção de conhecimento.

As direções de interlocução ocorridas na comunicação clássica são distintas da apresentada pelo MCS. Abaixo, apresenta-se um esquema gráfico trazido por Lins (2012) que melhor elucida esta dinâmica de direcionamento da interlocução:

Figura 2: Comparação da Comunicação Clássica e do MCS



Fonte: (LINS, 2012, p. 24)

Para tanto, Lins (2012, p. 24) relata que a comunicação atribuindo como base os princípios norteadores do MCS é derivada de “dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo *interlocutor*”.

Destarte, faz-se necessário que o professor *leia*[3] o aluno. Lins (2012, p. 25) traz um exemplo desta interação:

Figura 3: Um Exemplo “Exemplar”

Professor: Muito bem, temos a equação 3x+10=100. Podemos concluir, então, que 3x=90, certo?
Alunos: Certo.
Professor: E disto podemos concluir que x=30, certo?
Alunos: Certo.

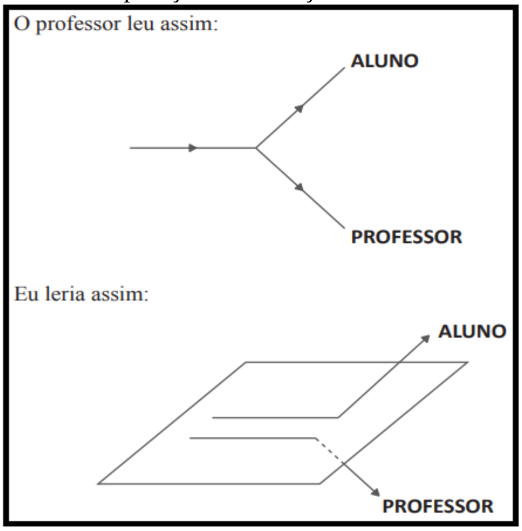
Na lição de casa, entre outras, a equação 3x+100=10.
Os alunos já sabiam operar com inteiros negativos. No dia seguinte a maioria das equações resolvidas sem problemas, mas na hora da 3x+100=10...
Alunos: Professor, esta não dá...

Fonte: (LINS, 2012, p. 25)

Neste exemplo, para a equação $3x + 100 = 10$, é perceptível que o professor imaginou que os alunos resolveriam pensando de forma algébrica, isto realizando operações matemáticas com números inteiros; contudo, os alunos pensaram em uma *balança de dois pratos*, logo, tornando-se impossível a resolução, visto que *não dá* para realizar a operação 10 – 100 unidades de massa (quilogramas, por exemplo).

Esta discrepância entre o professor e os alunos é descrita por Lins (2012, p. 25) através da visão do professor sem o MCS, e do autor utilizando o MCS, conforme a seguinte imagem:

Figura 4: Comparação das Direções Com e Sem o MCS



Fonte: (LINS, 2012, p. 25)

[3] Realizar uma leitura de modo plausível. Este tema será abordado adiante na seção metodológica.

Percebe-se que na concepção de Lins (2012) o tal distanciamento entre o aluno e o professor não ocorreu exatamente durante a resposta dos alunos dizendo "*não dá*", ele foi originado antes disso. As *direções de interlocução* já eram distintas e a diferença adveio do modo de constituir significado realizado por ambos – professor e alunos – enquanto realizavam a constituição do pensamento matemático para equações.

Consequentemente, eis uma questão a ser pautada através do enredo até aqui exposto: é plausível a constituição de um único modo de produção de significado com aversão a outros? Lins (2012) mostra que não. Se a *direção de interlocução* dos alunos é diferente daquela apresentada pelo professor no exemplo "exemplar" não significa que a dos alunos deva ser completamente afastada.

Lins (1994b) ensina que o pensamento algébrico atribuído pelo professor não é definitivamente suficiente para ser utilizado em qualquer situação em que envolva equação. Assim como o pensamento acerca da "balança de dois pratos" realizado pelos alunos também não é.

A título exemplificativo, o pensamento algébrico não é suficiente para, sozinho, determinar a(s) raiz(es) de equações envolvendo termos trigonométricos como seno, cosseno e tangente. Lins (1994b) aborda que a equação $2sen\ x = 1$ realmente *não dá* para ser resolvida apenas com o pensamento algébrico, mais modos de produção de significados são exigidos, tais como: o *pensamento trigonométrico, pensamento geométrico* e o *pensamento angular.*

Por fim, Lins (1994b, p. 38) descreve que o MCS não coaduna com a frase: "todo conhecimento é contextualizado"; pelo contrário, ele atribui que: "todo contexto é '*conhecimentizado*'[4]". O conhecimento vem antes do contexto, o autor de uma enunciação expõe um conhecimento durante a sua produção, a forma em que o leitor recebe e "contextualiza" a enunciação, é somente dele, é um novo conhecimento, uma nova forma de pensar, sendo uma nova forma de produção de significado.

1.2 Das Ideias Gerais do Pensamento Matemático

O pensamento matemático está inserido nas diferentes formas de manipulação do que pode, ou não, ser feito (e dito) "dentro" da própria Matemática (esta considerada como um texto).

[4] Termo usado por Lins (1994, p. 38) para atribuir o caráter de primariedade do conhecimento sobre o contexto.

Quando se pensa com números, formas, grandezas, propriedades, postulados, teoremas, abstrações, generalizações, particularizações, ou quaisquer outros elementos que possam elucidar algo pertencente à Matemática (texto); o sujeito cognitivo já está automaticamente inserido na perspectiva do pensamento matemático.

Logo, para a constituição de objetos matemáticos há o estabelecimento de pensamentos que produzem significados *dos* objetos, sendo estes, desta forma, pensamentos matemáticos.

A partir disto, o pensamento matemático é: o pensamento algébrico, o pensamento geométrico, o pensamento trigonométrico, o pensamento angular, o pensamento matricial, enfim, qualquer espécie ou categoria de pensamento que se relaciona aos textos vinculados da área da Matemática.

Relacionar todas as diferentes formas de se pensar matematicamente não é o enfoque desta pesquisa, até porque seria algo extremamente desafiador e com grandes chances de ocorrer omissões e inconsistências. Assim sendo, apresenta-se, neste momento, uma breve sinopse sobre o pensamento algébrico exposto por Lins (1994b).

Lins (1994b, p. 30) esclarece que “o *pensamento algébrico* é caracterizado por: (i) pensar *aritmeticamente*; (ii) pensar *internamente*; e, (iii) pensar *analiticamente*.”

Pensar *aritmeticamente* (i) diz respeito a vislumbrar os objetos exclusivamente como números e operações aritméticas, ou com uma relação de igualdade. É realizar um tratamento da informação decompondo-a apenas com a utilização de elementos aritméticos (LINS, 1994b).

Pensar *internamente* (ii) implica que as propriedades dos objetos que sustentam a utilização destes em consequentes operações, não fazem referência a objetos externos a este domínio. Logo, propriedades externas a *lógica das operações* (em um sentido mais amplo) não compreendem a forma de pensar *internamente*. Por exemplo, ao se tratar de números naturais, não há referência de “coleções de pedrinhas” ou “cubinhos de madeira” sobre os quais é possível sustentar a propriedade comutativa da multiplicação de números naturais (LINS, 1994b).

Pensar *analiticamente* (iii), por fim, constitui que números genéricos (incógnitas) detêm as mesmas características e propriedades de números comuns. Os símbolos são distintos, mas nesta análise as incógnitas se comportam como “dados”, sendo vistas e manipuladas como números (LINS, 1994b).

Lins (1994b) afirma que estas três características do pensamento algébrico não são completamente independentes, elas fornecem um determinado modo de produção de significado, não sendo jamais o único.

Fideliza-se neste sentido a existência de várias formas de composição de pensamentos para a álgebra, tais que propiciam a distinção da álgebra em, por exemplo: a álgebra *algébrica*[5] – dotada exclusivamente do pensamento algébrico; e, a álgebra *não-algébrica*[6] – dotada de uma mescla do pensamento algébrico com alguma outra espécie de pensamento.

Dessa maneira, utilizando os aspectos preponderantes do MCS a álgebra e o pensamento algébrico não são iguais. A álgebra é um texto; e o pensamento algébrico é um modo de produzir significado para a álgebra, o qual não é o único, podendo diversos outros tipos de pensamento também constituírem significados para a álgebra.

Neste sentido, utilizando a mesma abordagem realizada por Lins (1994b) frente o pensamento algébrico é plausível ampliar este entendimento para o pensamento matemático, e, para tanto, Lins (1994a) esclarece as diferenças entre a Matemática e o conhecimento matemático:

> [...] a Matemática é um texto, e não conhecimento; tem-se conhecimento apenas na medida em que pessoas se dispõem a enunciar este texto. A um conhecimento que fala deste texto − a Matemática − chamaremos, naturalmente, de conhecimento matemático (LINS, 1994a, p. 29).

Desta forma, sendo a Matemática um texto; o pensamento matemático é um modo de produção de significados para a Matemática, o qual não é exclusivo, podendo diversos outros tipos de pensamento também produzem significados ligados direta ou indiretamente com a Matemática.

Portanto, faz-se necessário compreender que o pensamento matemático detém suas características próprias e distintas de outras espécies de pensamento, mas isto não significa que esta independência é absoluta; pelo contrário, o pensamento matemático pode, ou não, estar vinculado a outros tipos de pensamento, isto com as mais diversas intencionalidades.

1.3 Da Noção de Pensamento Matemático

Através de todo exposto, a noção de pensamento matemático – este compreendido tanto pelo pensamento matemático *matematizado* quanto pelo pensamento matemático *não-*

---

[5] Termo usado por Lins (1994a, p. 30) para caracterizar textos com elementos exclusivos da álgebra.
[6] Termo usado por Lins (1994a, p. 30) para caracterizar textos que possuem elementos da álgebra e de outras áreas.

matematizado – é disposta por Dreyfus (2002) através de uma série de processos mentais, quais sejam de: representação, generalização, visualização e outros, isto com o intuito de classificar, analisar, conjecturar, induzir, formalizar ou abstrair.

Dreyfus (2002) também destaca que estes processos são características de uma classificação específica de pensamento matemático, qual seja o Pensamento Matemático Avançado (PMA). Tall (2002) complementa que o PMA faz parte do desenvolvimento cognitivo de qualquer pessoa, mesmo que ela não tenha ciência disto, ocorrendo através de um processo de transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o PMA.

O PME, segundo Tall (2002), possui uma linha de transição muito tênue com o PMA. Por exemplo, a visualização de uma matriz pode desenvolver no observador o pensamento algorítmico, mecânico e visual-espacial, os quais – possivelmente em um primeiro momento – fazem parte do PME; já o processo verbal-dedutivo normalmente ocorrido em sequência aos anteriores pendem mais para o PMA.

Saber o exato limite entre o PME e o PMA é algo muito complexo; isto pois envolve compreender os processos mentais desenvolvidos por cada indivíduo. Logo, o que é “elementar” ou “avançado” para alguém, pode não ser para outra pessoa. Há autores que negam a existência desta separação, como Van Hiele, citado em Schalkwijk e outros (2000), o qual relata que não existe uma transição gradual dicotômica entre o PME e o PMA.

Dentre os processos mentais, Dreyfus (2002) descreve que a representação está alinhada a compreensão matemática do objeto. Assim, uma adequada compreensão implica em uma ampla representação de exemplos, conceitos, contraexemplos, operações, aplicações, derivações, dentre outros.

Polya (2006) elenca que a compreensão do problema funciona como um pilar, uma coluna, sendo essencial para a estruturação de qualquer resolução. É ilógico continuar uma resolução sem compreender o problema, visto que apenas seguir tentativas aleatórias tende ao fracasso.

Neste sentido, o ato de compreender está diretamente relacionado ao de pensar ou raciocinar, e, consequentemente, ao de representar. A representação mental está diretamente relacionada com a imaginação. Uma pessoa pode representar de forma diversa de outra, não há garantias de que os alunos representam da mesma forma que o professor.

A generalização é descrita por Dreyfus (2002) como um pré-requisito da abstração. Ela propicia ao ser pensante uma expansão no processo de identificar aspectos comuns, trazendo argumentos para serem utilizados em outros exemplos, muitas vezes agrupando situações relevantes.

Referente a visualização, ela ocorre a partir do ato de mentalizar imagens, esquemas, fatos, dentre outros, os quais necessariamente não estavam à vista anteriormente. Se a representação é diretamente vinculada com a imaginação, a visualização detém vital relação com ela, isto aliada à criatividade.

O intuito de classificar é disposto pelo ato de distribuir elementos em classes ou grupos de acordo com um sistema ou método determinado pelo usuário. Esta divisão detém o objetivo de auxiliar no entendimento de um problema. A identificação de caminhos para a solução pode ser facilitada pela classificação.

Já o ato de analisar é derivado de uma procura, a qual demanda de maior atenção, mais cautela. Polya (2006) argumenta que o processo de análise na busca do estabelecimento de um plano na resolução de um determinado problema ocorre, dentre outras etapas, na tentativa de identificação de problemas correlatos, sendo estes com semelhança total ou parcial.

Por conseguinte, a ação de conjecturar está relacionada à propositura de suposições que realizam uma estruturação mental para originar, de fato, um caminho. Muitas vezes, durante a resolução de problemas o ato de conjecturar propicia o surgimento de hipóteses. A conjectura pode decorrer a partir de meios ou métodos específicos de resolução atribuídos pelo usuário.

O processo de induzir é obtido através da condução total ou parcial da situação para se obter(em) resposta(s) experimental(ais). A indução pode decorrer da utilização do raciocínio lógico e igualdades implícitas à resolução.

Quanto ao ato de formalizar, este ocorre pela criação de regras, modelos, ou procedimentos padronizados, os quais podem estabelecer projetos sequenciais e sistemáticos. Durante a resolução de problemas, é possível formalizar a adoção de símbolos que identificam elementos e acabam por facilitar a esquematização e execução do plano para a resolução.

Por fim, a abstração está relacionada ao processo de extrair aquilo que seja importante, isto de forma total ou momentânea. A abstração pode contribuir diretamente para a fidelização de um caminho para a resolução, pois após a retirada de elementos desnecessários ocorrem maiores chances do usuário conseguir manipular dados, condicionantes ou incógnitas não percebidos anteriormente.

2 DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL

2.1 Das Ideias Gerais do Pensamento Computacional

O Pensamento Computacional (PC) é um tema recente e com noções e ideias que se aproximam e se distanciam entre vários pesquisadores. Começou a ser mencionado com pouco destaque na década de 1980 pelo pesquisador Seymour Papert na obra *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*.

Nesta obra, Papert (1980) relaciona o computador com uma "nova" cultura computacional, a qual promove o desenvolvimento de habilidades exclusivas para diversas áreas, o que inclui a esfera educacional e a Matemática.

A partir da ideia apresentada por Papert (1980), as propostas para atribuir uma noção para o PC são amplas. No Brasil, até a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017 incluiu o pensamento computacional como uma habilidade necessária a ser desenvolvida pelo aluno.

Thiago Schumacher Barcelos e Ismar Frango Silveira, pesquisadores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) e da Universidade Cruzeiro do Sul, respectivamente, publicaram o artigo titulado "Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica" nos anais do XXXII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação (CSBC), especificamente no 20º Workshop sobre Educação em Computação (WEI), ocorrido em julho de 2012, na cidade de Curitiba, Estado do Paraná. Neste artigo os autores relatam acerca da noção do PC a partir das palavras de Jeannette Marie Wing, professora de Ciência da Computação e chefe do Departamento de Ciência da Computação na Universidade de Carnegie Mellon, na cidade de Pitsburgo, Estado da Pensilvânia, nos Estados Unidos.

Wing (2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012) conceitua o PC através de um agrupamento de competências específicas da área da Computação que influenciam também outras áreas.

As competências específicas do pensamento computacional para os autores são estabelecidas em seis características, as quais serão abaixo expostas:

> ● **Conceituar ao invés de programar**. Resolver um problema aplicando o pensamento computacional significa reduzir problemas grandes e aparentemente insolúveis em problemas menores e mais simples de resolver. Isso exige a capacidade de pensar de forma abstrata e em múltiplos níveis, e

> não a mera aplicação de técnicas de programação (WING, 2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 3, grifo nosso);
>
> ● **É uma habilidade fundamental e não utilitária**. O pensamento computacional não é uma habilidade mecânica ou utilitária, mas algo que permite a resolução de problemas diversos utilizando um recurso ubíquo na sociedade atual – os computadores – e por isso deveria ser desenvolvido por todos os estudantes (WING, 2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 4, grifo nosso);
>
> ● **É a maneira na qual pessoas pensam, e não os computadores**. A resolução de problemas através do pensamento computacional é um tratamento especifico do problema de forma que ele possa ser resolvido por computadores, e não uma redução do raciocínio para simular o processamento do computador (WING, 2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 4, grifo nosso);
>
> ● **Complementa e combina a Matemática e a Engenharia**. A definição de Wing considera o aporte da Matemática e da Engenharia para a Computação, conforme mencionamos anteriormente, e reconhece as particularidades trazidas pelo enfoque computacional (WING, 2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 4, grifo nosso);
>
> ● **Gera ideias e não artefatos**. O pensamento computacional não deve ter necessariamente como resultado final a produção de software e hardware e reconhece que os conceitos fundamentais da Computação estarão presentes para resolver problemas em vários contextos do cotidiano (WING, 2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 4, grifo nosso);
>
> ● **Para todos, em qualquer lugar**. Por fim, o pensamento computacional pode ser útil para todas as pessoas, em diversas aplicações (WING, 2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 4, grifo nosso).

A partir desta perspectiva, verifica-se que para Wing (2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, 2012) as competências específicas do PC extrapolam a própria área da Computação, insurgindo positivamente na complementação de diversas outras áreas.

Depreende-se que PC já se tornou mais que uma habilidade básica, ele já é uma habilidade fundamental e essencial para a constituição e desenvolvimento das mais variadas competências.

A programação e produção de softwares ou hardwares não são focos ou objetivos do PC. É preciso vislumbrar de forma clarividente a ampliação do PC para além de uma "dependência" do homem da máquina.

Para tanto, Wing (2010) aduz que o PC não envolve apenas conceitos da área da Computação para a resolução de problemas, ele introduz diversas habilidades que agregam, por exemplo, a prática de projetar sistemas, entender o comportamento humano, o pensamento crítico, dentre outras.

Wing (2008, s/p) elenca uma série de habilidades desenvolvidas durante o PC, são elas:

- Identificar, analisar e implementar as soluções possíveis com o objetivo de conseguir a combinação mais eficiente e eficaz de etapas e recursos;
- Reformular um problema de grande dificuldade para que se possa resolvê-lo (redução, incorporação, transformação ou simulação);
- Escolher a representação ou modelagem apropriada com aspectos importantes do problema para facilitar sua manipulação;
- Interpretar o código como dados e dados como código;
- Usar abstração e decomposição na solução de uma tarefa complexa;
- Avaliar a simplicidade e elegância de um sistema;
- Pensar de forma recursiva;
- Verificar o padrão, utilizando generalização da análise dimensional;
- Prevenir, detectar e recuperar das piores situações com a utilização de redundância, contenção de danos e correção de erros;
- Modularizar antecipadamente e pré-carregar necessidades dos usuários;
- Prevenir congestionamentos e impasses (deadlocks), além de evitar condições de corrida ao sincronizar reuniões;
- Utilizar a Inteligência Artificial para a resolução de problemas específicos ou complexos;
- Formular problemas de modo que seja possível usar o computador e outras ferramentas para ajudar a resolvê-los;
- Organizar e analisar dados de forma lógica;
- Automatizar soluções através do pensamento algorítmico;
- Generalizar e transferir esse processo de resolução de problemas para uma grande variedade de problemas.

Neste sentido, Wing (2014, s/p) conclui que o PC compreende "processos de pensamento envolvidos na formulação de um problema e que expressam sua solução ou soluções eficazmente, de tal forma que uma máquina ou pessoa possa realizar", isto sendo uma "automação da abstração" e "o ato de pensar como um cientista da Computação".

Alinhada aos argumentos de Wing (2014), a pesquisadora Barbara Kurshan (2016, s/p) apresentou na revista americana Forbes o texto *Thawing from a Long Winter in Computer*

Science Education (Descongelamento após um Longo Inverno no Ensino de Ciência da Computação) com a seguinte concepção:

> [...] o Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente (KURSHAN, 2016, s/p).

Logo, segundo Kurshan (2016) depreende-se que pensar computacionalmente consiste em ação as habilidades de conceituar, recursar, abstrair, criar, imaginar, resolver, aplicar, analisar, reconhecer, dentre outras; todas relacionadas a aspectos cognitivos do sujeito, demostrando a versatilidade e relevância do tema nas mais diversas esferas da sociedade atual.

2.2 Da Noção de Pensamento Computacional segundo o autor e seu orientador

Ao vislumbrar o Pensamento Computacional através da noção trazida por Wing (2006, apud BARCELOS e SILVEIRA, (2012)(2008)(2010)(2014), Kurshan (2016), e demais pesquisadores com produções na mesma perspectiva, o autor e seu orientador, durante reuniões sobre o tema, debateram algumas competências estruturantes e habilidades que são desenvolvidas a partir do PC.

Julgou-se perceptível ponderar que ao utilizar o PC estabelece uma forma de **organização de pensamento**, a qual desenvolve e sistematiza (mesmo que seja involuntariamente) importantes habilidades para a vida, tais como: decompor problemas, pensar recursivamente, realizar o reconhecimento de padrões, perceber regularidades/irregularidades, abstrair elementos, generalizar processos, desenvolver estratégias algorítmicas, construir modelos explicativos e representativos, utilizar elementos de áreas além da Computação, articular símbolos e códigos, dentre outras.

Desta forma, a **organização do pensamento** vislumbrado através do PC pode ser descrita a partir de quatro ações não-hierárquicas, isto nas palavras de Dantas (2021), são elas: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e produção de algoritmos.

- **Decomposição:** “consiste em obter problemas menores a partir de um problema maior ou mais complexo. Com isso, é possível concentrar a atenção na resolução de partes específicas do problema, obtendo ao fim a solução do problema (DANTAS, 2021, p. 6).”

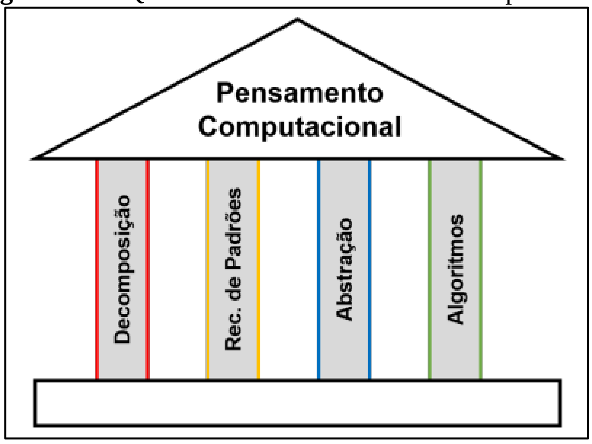
- **Reconhecimento de Padrões:** "pode surgir a partir da decomposição, quando problemas menores podem ser solucionados com base em experiências anteriores ou via repertórios matemáticos/computacionais, ou ainda, acontece ao perceber o que é constante ou variável nos dados ou formas associadas ao problema (DANTAS, 2021, p. 7)."

- **Abstração:** "é o processo de concentrar a atenção no que é necessário e suficiente para a resolução de um problema ou subproblemas, desconsiderando dados ou informações irrelevantes (DANTAS, 2021, p. 8)."

- **Produção de Algoritmo:** "é o processo de obtenção de passos ou regras de ação desenvolvidos e efetivados durante a resolução de subproblemas ou problemas. Esses algoritmos podem ser (d)escritos em códigos da língua materna, códigos matemáticos, códigos de computação/programação, entre outros (DANTAS, 2021, p. 9)."

Christian Puhlmann Brackmann (2017) aduz que estas ações são pilares vitais e fundamentais para o PC, isto conforme a imagem abaixo:

Figura 5: Os Quatro Pilares do Pensamento Computacional



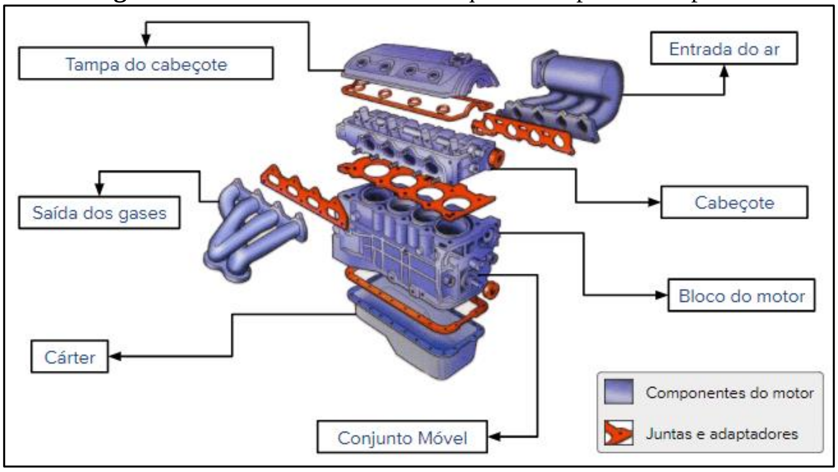
Fonte: (BRACKMANN, 2017, p. 33)

A **Decomposição** compreende um processo que não é utilizado apenas no pensamento computacional, ela também pode ocorrer durante a resolução de qualquer problema. Decompor algo em partes menores contribui significativamente em uma melhor visualização dos elementos do problema, além de facilitar no estabelecimento de um plano para traçar um caminho até a solução.

Brackmann (2017) relata que o encontro da solução de um problema torna-se mais difícil se ele não está decomposto, visto que ao trabalhar com diversos elementos, estágios e processos diferentes ao mesmo tempo ocorrem grandes chances de esquecer determinado aspecto fundamental para a resolução, atrapalhar-se com o número grande caminhos para executar, ou ainda não ocorrer a compreensão clara do problema.

A análise de um motor de combustão de quatro tempos se torna extremamente dificultosa caso ocorra de forma genérica, sem vislumbrar os componentes e suas devidas funções. E, com a decomposição, o cenário é outro, conforme a imagem a seguir.

Figura 6: Motor de combustão de quatro tempos decomposto



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Principais-partes-de-um-motor_fig1_335988002

Assim, a análise de um problema em um motor se torna extremamente dificultosa caso ocorra de forma geral, sem vislumbrar os componentes e suas devidas funções. E, ao utilizar a decomposição, o cenário é outro, a identificação de um defeito ocorrerá com maior facilidade e eficiência.

O **Reconhecimento de Padrões** abrange a capacidade de identificar semelhanças entre a totalidade do problema ou partes do problema – podendo ser oriundas da decomposição – com outras já anteriormente experimentadas pelo sujeito.

Estas atitudes de comparar e utilizar as experiências anteriores integram o pensamento computacional por estarem envoltas no âmbito das habilidades fundamentais de qualquer pessoa, vinculadas na resolução de problemas, sendo algo voltado ao pensamento do usuário e não intrínseco à máquina, assim como o descrito por Wing (2006, apud BARCELOS E SILVEIRA, 2012) no tópico anterior.

Identificar padrões faz parte da natureza humana, o ato de comparar está presente de forma consciente – e também muitas vezes inconsciente – em nossos pensamentos. Similaridades podem contribuir positivamente durante a resolução de problemas, visto que ao se deparar com algo complexo em que existem particularidades já anteriormente enfrentadas, o encontro da solução poderá fluir mais facilmente.

Por exemplo, ao analisar diferentes espécies de gatos é possível atribuir características semelhantes e diferentes, veja-se a imagem abaixo:

Figura 7: Gatos em fila

Fonte: https://www.purina.pt/gatos/ter-um-novo-gato/questionario-se-fosse-um-gato-qual-seria

Pelo PC é possível avaliar as similaridades (padrões) e ao se deparar com novos eventos em que estas características se repetem, o usuário poderá mobilizá-las para propor a estratégia de ação. Isto como ao visualizar a imagem de um leão, ou fantasiar uma criança desenhando bigodes nas bochechas, pintando a ponta do nariz, colocando orelhinhas de formato triangular na parte superior da cabeça; reconhece-se, assim, os padrões existentes na família dos felinos.

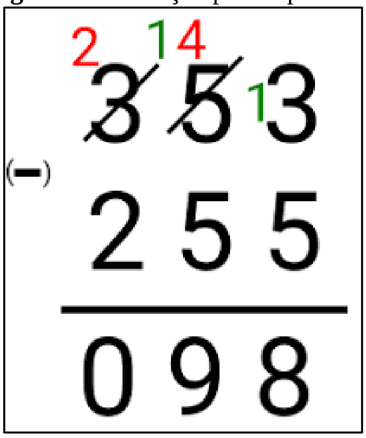
Para tanto, Brackmann (2017, p. 37) relata que "através do reconhecimento de padrões, é possível simplificar a solução de problemas e replicar esta solução em cada um dos subproblemas, caso haja semelhança. Quanto mais padrões se consegue encontrar, mais dinâmico e rápido a macro solução é encontrada."

Em sequência, ao utilizar a **Abstração** o sujeito pondera a relevância dos elementos em sua análise e afasta os considerados irrelevantes. Desta forma, pode-se obter expressivo benefício na identificação de caminhos para encontrar a solução, além de uma melhor compreensão do problema.

Logo, a aplicação do processo de abstração abrange a realização de uma filtragem dos elementos que estão à disposição, retirando as informações desnecessárias para o momento e focando apenas naquelas que contribuem para a resolução. É uma forma de classificação que facilita a concentração e consequentemente contribui na busca de soluções.

O ato de abstrair está presente na essência humana, desde a infância somos provocados a desenvolver este processo, mesmo que de forma inconsciente. Alunos possivelmente podem utilizar a abstração quando realizam operações básicas com números naturais, assim como a subtração disposta na imagem abaixo:

Figura 8: Subtração por empréstimo



Fonte: https://matematicabasica.net/subtracao/

Ao visualizar pela primeira vez a subtração pelo método de "empréstimo" o aluno pode acabar não compreendendo a proposta de que é preciso focar em cada classe numérica em ordem crescente – unidades, dezenas, centenas, em sequência – abstraindo as demais para não ocasionar confusão. Esta abstração decorre de forma progressiva, isto até o aluno ser capaz de resolver subtrações com mais classes no minuendo e subtraendo.

Em um outro exemplo, elenca-se a possibilidade de extração de informações em fatos históricos utilizando a abstração, isto como disposto no seguinte questionamento: O que evoluiu no Brasil após o fim do estado emergencial da pandemia ocasionada pela "Covid-19"[7]? É difícil responder esta pergunta sem abstrair todo impacto lesivo propiciado pela doença.

Por fim, a **Produção de Algoritmo** abrange o processo de codificação, o qual não está estritamente vinculado à área da computação. Salienta-se que o pensamento computacional não ocorre na máquina, e, sim, na mente do usuário; logo, a linguagem algorítmica abarca um conjunto de regras definidas por códigos (d)escritos em qualquer área.

Wing (2004, apud BRACKMANN, 2017, p. 40) destaca que a produção de algoritmo agrega todos os outros processos, pois o algoritmo "é um plano, uma estratégia ou um conjunto de instruções claras necessárias para a solução de um problema".

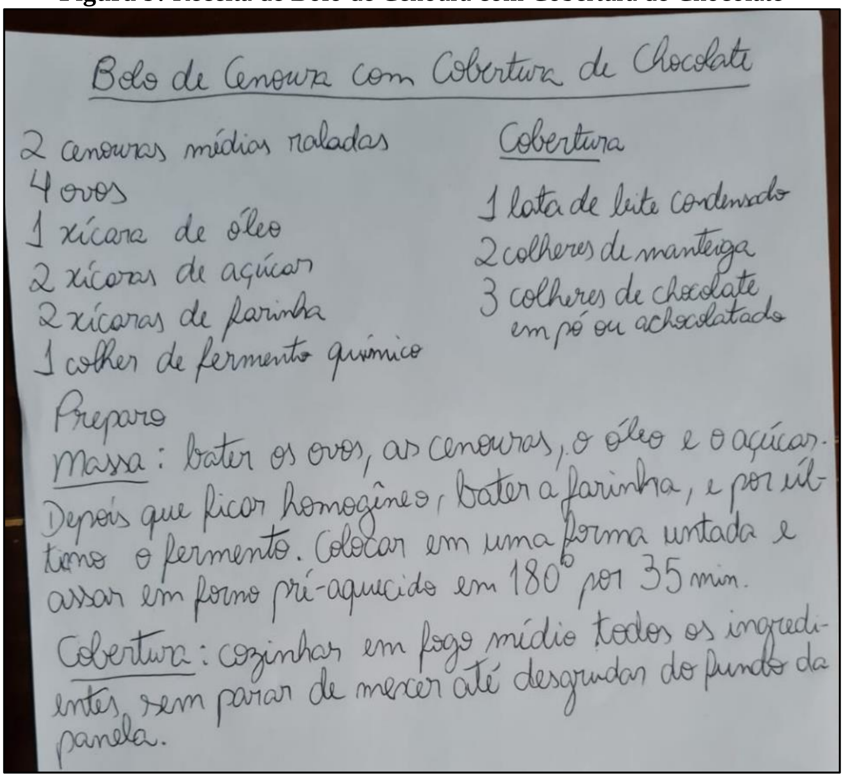
[7] Doença ocasionada pelo vírus "SARS-CoV-2" que até junho de 2022 ceifou a vida de mais de 680mil brasileiros, modificou a dinâmica de circulação de pessoas, obrigou a adoção de medidas para diminuir as formas de contágio como: uso de máscaras, higienização das mãos, objetos de uso pessoal, distanciamento social, dentre outros.

Brackmann (2017, p. 40) aduz que “em um algoritmo, as instruções são descritas e ordenadas para que o seu objetivo seja atingido e podem ser escritas em formato de diagramas ou pseudocódigo (linguagem humana), para depois serem escritos códigos em uma linguagem de programação.”

Desta forma, a produção de algoritmos introduz um conjunto de regras a serem seguidas para a resolução de problemas, sistematiza métodos, fórmulas, elementos, opções, limites; tudo de maneira sequencial para determinada finalidade.

Assim, a produção de algoritmos está presente, por exemplo, em uma receita culinária de um bolo, a qual possui ingredientes e etapas descritos de forma sequencial para a obtenção do resultado almejado. Abaixo a “receita secreta” de bolo de cenoura com cobertura de chocolate deste autor:

Figura 9: Receita de Bolo de Cenoura com Cobertura de Chocolate



Bolo de Cenoura com Cobertura de Chocolate

2 cenouras médias raladas
4 ovos
1 xícara de óleo
2 xícaras de açúcar
2 xícaras de farinha
1 colher de fermento químico

Cobertura
1 lata de leite condensado
2 colheres de manteiga
3 colheres de chocolate em pó ou achocolatado

Preparo
Massa: bater os ovos, as cenouras, o óleo e o açúcar. Depois que ficar homogêneo, bater a farinha, e por último o fermento. Colocar em uma forma untada e assar em forno pré-aquecido em 180° por 35 min.
Cobertura: cozinhar em fogo médio todos os ingredientes, sem parar de mexer até desgrudar do fundo da panela.

Fonte: Autor

Neste sentido, a produção de algoritmos provoca uma automatização da resolução do problema, criando uma ordem sequencial de etapas que almejam a solução. Estas etapas podem abarcar livremente os processos de decomposição, reconhecimento de padrões e/ou abstração. O algoritmo é o mapa final pronto que se extrai da resolução, isto com o intuito de aplicado em situações futuras que o demandem.

Outro aspecto importante a ser ponderado é a relação do PC com outras categorias de pensamento, por exemplo, o matemático. Para tanto, o autor baseou-se na ideia apresentada por Lins (1994a) sobre o pensamento algébrico, e já utilizada pelo autor no capítulo anterior acerca da noção de pensamento matemático.

Desta forma, pode-se analisar a área da Computação como um texto; assim, o PC é um modo de produção de significados para a área da Computação, o qual não é exclusivo, podendo diversos outros tipos de pensamento também constituírem significados computacionais ligados direta ou indiretamente com a área da Computação.

3 DO MÉTODO DA PESQUISA

Desde as conversas iniciais sobre o tema desta pesquisa entre o autor e seu orientador, a ideia preponderante permeava na investigação dos vestígios que evidenciassem manifestações do Pensamento Computacional e do Pensamento Matemático durante a resolução de problemas. Para tanto, concluiu-se, em hipótese, que a melhor forma de efetivar esta investigação seria vislumbrá-la na prática, isto através de resoluções reais.

Assim, pautou-se o presente procedimento metodológico por meio de uma pesquisa de cunho qualitativo interpretativo.

Denzin e Lincoln (2005, p. 3) descrevem que a pesquisa de cunho qualitativo:

> [...] é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve uma postura interpretativa e naturalística diante do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem.

Logo, como a pesquisa de cunho qualitativo pode ser dotada de um conjunto de práticas interpretativas, este autor buscará ter esta postura, buscando interpretar os vestígios de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional nas resoluções apresentadas pelos participantes.

3.1 Do Objetivo

Esta pesquisa possui como objetivo: Investigar os vestígios de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional na resolução de problemas, isto através das respostas fornecidas por participantes do Módulo 6 da 19ª Edição do Curso do GeoGebra[8] frente o Enunciado 14.

[8] Site do Curso: https://www.ogeogebra.com.br/.

3.2 Do Método de Obtenção dos Dados

O Curso do Geogebra é oferecido em parceria pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *campi* de Apucarana, Estado do Paraná, e o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso – FAPEMAT; já foram realizadas 19 edições, isto desde 2012, com a formação de mais de 5000 alunos brasileiros e estrangeiros.

O programa GeoGebra, conforme disposições expostas em seu site oficial[9] (c2022), é um software gratuito, dinâmico e aberto (*Open Source*[10]) de Matemática que envolve: Geometria, Álgebra, Manipulação de planilhas, Construção de gráficos, Estatística, Realização de cálculos, Resolução de problemas, dentre muitas outras possibilidades; todas com grande engajamento no campo educacional, isto para os mais variados níveis de ensino.

Sobre o software GeoGebra, o Instituto GeoGebra – UESB (c2014) relata os seguintes dados:

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e **multiplataforma** para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA. [...] foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de **300000** downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo (INSTITUTO GEOGEBRA - UESB, c2014, s/p, grifos do autor).

A versão do software GeoGebra recomendada no início do Curso para todos os integrantes é a 5.0. O autor usou durante esta pesquisa a versão Classic 5.0.694.0-d, com download e instalação realizados a partir do site oficial do GeoGebra[11] e das informações nele dispostas. Frisa-se que para o correto funcionamento do programa é necessária a instalação de uma *Java Virtual Machine*[12] (JVM) compatível com o sistema operacional utilizado. Apresenta-se, abaixo, o layout inicial do software:

---

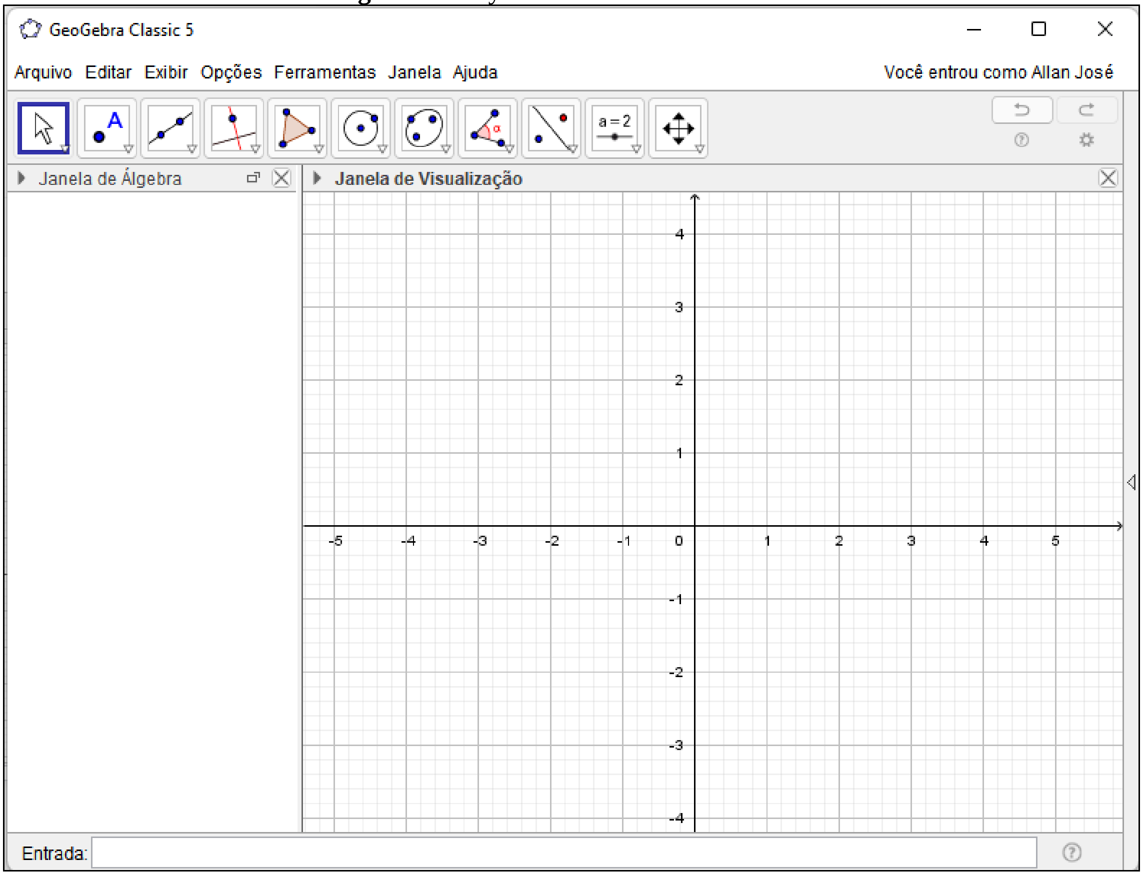
[9] Site do GeoGebra: https://www.geogebra.org/.

[10] Termo criado pela *Open Source Initiative* (OSI) para softwares com código-fonte aberto, ou seja, podem ser adaptados para diferentes fins, isto em um modelo colaborativo em que cada usuário pode contribuir para melhorias no programa com um sistema de distribuição livre.

[11] Site de download da versão Classic 5.0.694.0-d: https://www.wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation?p=win/.

[12] Em português, Máquina Virtual Java. É possível obtê-la gratuitamente através do download e instalação do software Java, disponibilizado por ®*Oracle International Corporation* para diversas plataformas, isto no site: https://www.java.com/.

Figura 10: Layout do GeoGebra Classic 5.0



Fonte: Autor

O Curso é voltado para qualquer pessoa que deseja aprender ou aperfeiçoar suas habilidades com o GeoGebra. As vagas são preenchidas, em grande parte, por professores atuantes na Educação Básica; logo, como esta pesquisa possui lentes teóricas compreendidas por autores da área da Educação Matemática, o curso contribui na utilização do GeoGebra no ambiente escolar, e na formação de professores frente à área computacional, tema este pautado com relevância na atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Na 19ª Edição do Curso do GeoGebra houve a colaboração voluntária de mais de 150 professores, com a participação de mais de 500 alunos, dentre o período de 16 de setembro de 2021 à 14 de novembro de 2021. A Edição teve ao todo oito Módulos. O autor atuou como professor-colaborador na edição, supervisionando, em média, quatro alunos por Módulo, além de que ocorreu a distribuição de novos alunos para cada professor na mudança para cada Módulo.

Foi selecionado o Módulo 6 pelo fato de que nele é proposta, ao final do Módulo, uma tarefa, qual seja, a resolução de um problema dentre uma lista de 25 enunciados, isto a partir do GeoGebra, e, com a recomendação para utilizar uma ferramenta do software chamada Janela de Sistema de Álgebra Computacional (Janela CAS).

Esta tarefa do Módulo 6 ocorreu em duas partes. Na primeira parte houve a disposição de duas opções de escolha para os participantes:

Figura 11: Enunciado da Tarefa 6

Realize esta tarefa em duas partes.

Parte 1

Escolha uma das opções a seguir:

OPÇÃO 1: Ao clicar no link abaixo será aberto um arquivo com 25 enunciados de problemas. Escolha um deles e resolva-o utilizando seus conhecimentos sobre o GeoGebra. Recomendamos fortemente que utilize a Janela CAS sozinha ou a Janela CAS integrada com outros recursos.
Qual é a diferença para você entre resolver no GeoGebra e resolver de forma manuscrita?

www.ogeogebra.com.br/arquivos/enunciados.pdf

OPÇÃO 2: Escolha um problema apresentado por um colega no módulo anterior e resolva-o utilizando a Janela CAS.

Após resolver o problema, poste o arquivo que construiu acompanhado de um passo a passo da construção e uma descrição de como o GeoGebra foi utilizado por você em sua resolução. Qual é a diferença para você entre resolver no GeoGebra e resolver de forma manuscrita?

Parte 2

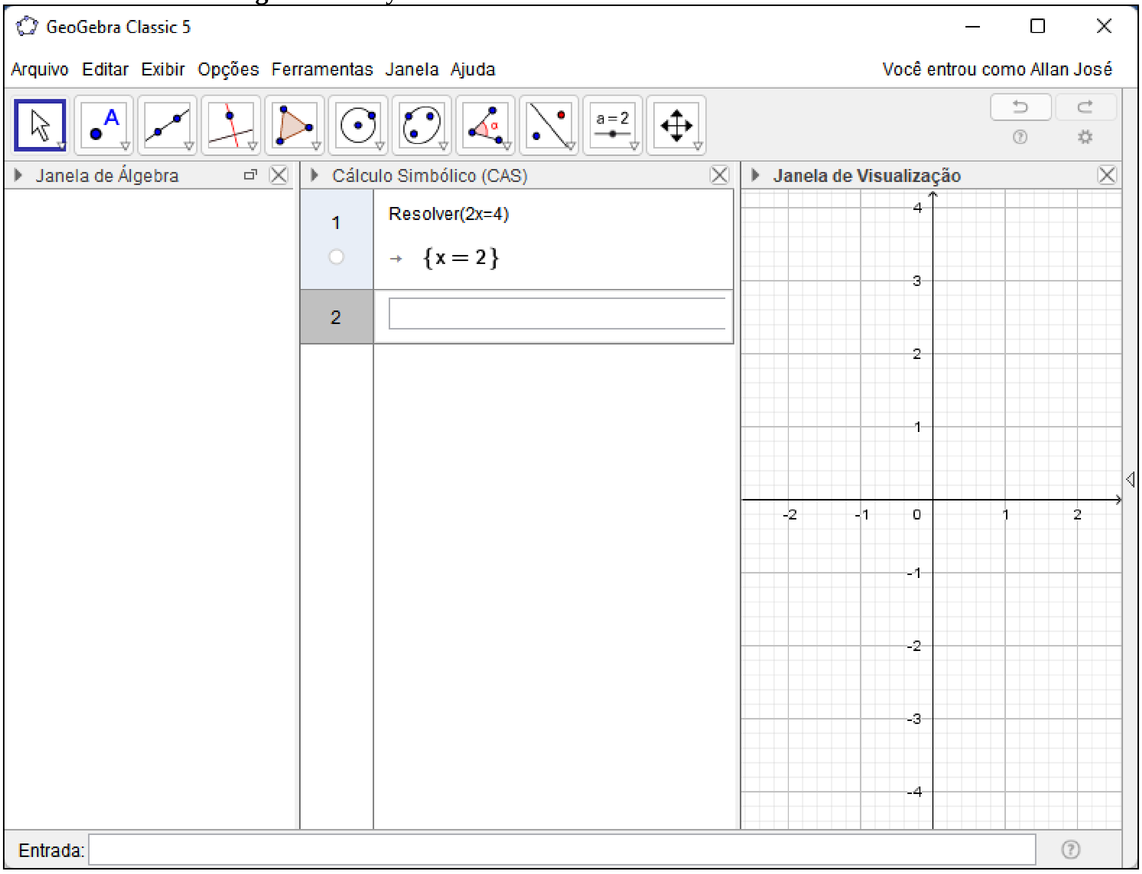
Escolha postagens realizadas por, no mínimo, dois colegas que resolveram dois problemas **diferentes** entre si e **diferentes** daquele que você escolheu e interaja com os autores dessas postagens, apresentando outras formas de resolução, fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos **sobre** suas resoluções.

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Quanto a Janela CAS, ela compreende uma ferramenta do GeoGebra capaz de realizar cálculos simbólicos através de células, tendo cada uma destas campos de entrada na parte superior e sequências de etapas na parte inferior após a inserção de cada comando de entrada. Assim, na janela é possível resolver expressões numéricas, realizar cálculos, encontrar soluções para equações ou inequações, utilizar comandos específicos do GeoGebra, dentre outras possibilidades.

A seguir, demonstra-se o layout da Janela CAS – abaixo identificada pelo nome “Cálculo Simbólico (CAS)”. Nela, a título exemplificativo, foi realizada a inserção da equação “2x = 4” no campo de entrada através do comando “Resolver(2x=4)”, e o programa exibiu a solução “{x = 2}”:

Figura 12: Layout do GeoGebra Classic 5.0 com a Janela CAS



Fonte: Autor

Para os participantes do Módulo 6 foi disponibilizado com um link[13] com 25 enunciados, assim como já descrito pela Figura 11, o qual remete a um arquivo de formato ".pdf"[14].

Nesta presente pesquisa de cunho qualitativo interpretativo houve a seleção do Enunciado 14, isto pelo fato de que em conversa do autor com seu orientador destacou-se que este enunciado comparado aos demais possivelmente influencia em maior intensidade o participante a utilizar uma mescla dos Pensamentos Matemático e Computacional durante a resolução.

Abaixo, apresenta-se, na íntegra, este enunciado:

[13] Disponibilizado apenas aos participantes da 19ª Edição do Curso.
[14] Formato desenvolvido pela ®*Adoble Systems* desde 1993 para representar documentos de maneira independente. A sigla PDF vem da expressão *Portable Document Format*. É possível abrir arquivos ".pdf" pelo download e instalação do software *Adobe Acrobat Reader* no site: https://get.adobe.com/br/reader/.

Figura 13: Enunciado do 14º problema

14. A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja FUVEST, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, respectivamente. A matriz em que se escreve a mensagem é $M=\begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix}$, que numericamente, corresponde a $M=\begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto das matrizes

$$N=A\cdot M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida:

$$M=B\cdot N=\begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

a) Se a matriz codificadora é $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e a mensagem a ser transmitida é ESCOLA, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

b) Se a matriz codificadora é $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $N=\begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?

c) Nem toda matriz A é uma matriz eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se $A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$, encontre 4 sequências de 4 letras que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Outro fator que influenciou a escolha deste enunciado foi das experiências adquiridas pelo autor e seu orientador em Edições anteriores do Curso – o orientador em todas as Edições; e, o autor, nas três últimas (17ª como cursista; e, 18ª e 19ª como professor-colaborador). Por estas experiências verificou-se que as respostas fornecidas ao Enunciado 14 possivelmente teriam mais vestígios dos Pensamentos Matemático e Computacional comparado aos outros 25 enunciados.

As postagens dos participantes aconteceram na plataforma do Curso por meio de fóruns de discussão. Estes fóruns possuem recursos que permitem a interação entre os usuários, tanto com professores, como com os outros participantes. Na tarefa do Módulo 6, cada participante realiza uma nova postagem no fórum, e tanto os professores quanto os outros alunos podem interagir na postagem. Quando é realizada uma mensagem em uma postagem no fórum, automaticamente se dispara comunicados para todos os usuários engajados na postagem, facilitando mais ainda a interação. No início do Curso é explicado como realizar a postagem nos fóruns e como interagir nas postagens de outros participantes.

O Curso também privilegia a interação entre os participantes por meio do ritmo tradicional atribuído na parte dois de todas as tarefas, incluindo a Tarefa 6, na qual são solicitadas duas interações em postagens de dois colegas diferentes.

Frisa-se que no Módulo 6 do Curso os alunos já conhecem muitas outras ferramentas do GeoGebra além da Janela CAS, as quais foram temas dos Módulos anteriores, são algumas delas: Ponto, Ponto em Objeto, Intersecção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro, Reta, Semirreta, Segmento, Caminho Poligonal, Vetor, Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz, Reta Tangente, Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido, Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo: Centro & Raio, Compasso, Círculo definido por Três Pontos, Semicírculo, Arco Circular, Setor Circular, Elipse, Hipérbole, Parábola, Ângulo, Área, Volume, Plano, Pirâmide, Prisma, Cilindro, Cone, Planificação, Esfera, Controle Deslizante, Texto, Botão, Campo de Entrada, Mover, Ampliar, Reduzir, dentre outras.

Também é demonstrado, durante os Módulos anteriores, uma série de comandos para serem inseridos no campo de "Entrada:" (disposto na parte inferior das Figuras 10 e 12), os quais agregam praticidade e multifuncionalidade na propositura de construções com comandos como: Sequência, ListaDeIteração, Resolver, Girar, Cisalhamento, Esticar, Homotetia, Reflexão, Transladar, Concatenar, Se (condição), Repetir, Assíntota, LadoDireito, LadoEsquerdo, Simplificar, Normalizar, Empacotar, EscolherElementoAleatoriamente, Nivelar, CaixaDeSeleção, DefinirCamada, Executar, Tartarugga, IniciarAnimação, IniciarGravação, dentre outros. Comandos formados por duas ou mais palavras possuem a grafia unida (sem espaço) de forma padronizada no GeoGebra.

Quanto às resoluções do enunciado, foi realizada uma catalogação de todas as resoluções. Abaixo, apresenta-se um quadro que indica a quantidade de resoluções sucedidas no enunciado escolhido para esta pesquisa:

Quadro 1: Quantidade de resoluções para o enunciado 14º:

Enunciado	Quantidade de Resoluções
14º	12

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Em suma, estas resoluções são formadas por: um passo-a-passo que demonstra as etapas em que foi produzida a resolução; um arquivo salvo no formato ".ggb"[15] que confirma a construção da resolução no GeoGebra; os comentários dos colegas e do(s) professor(es)-colaborador(es); e, as respostas do aluno às interações feitas na sua postagem.

Por fim, nesta pesquisa ponderou-se pautar a investigação sobre todas as resoluções para o enunciado escolhido. Além disso, a título de segurança e idoneidade foi preservada a identificação dos participantes, logo os nomes atribuídos durante a análise são fictícios.

3.3 Do Método de Análise

Os dados obtidos na presente pesquisa de cunho qualitativo interpretativo foram avaliados frente os seguintes critérios: a) compreender quais as etapas e ferramentas desenvolvidas pelo cursista para apresentar a sua resolução; b) investigar os vestígios de Pensamento Matemático e/ou Pensamento Computacional presentes no intercurso da resolução; c) avaliar os resíduos de enunciação elencados a critério deste pesquisador que justificam tais vestígios.

Esta análise de dados considerou uma perspectiva metodológica inspirada no que Lins (2002) nomeou como *leitura plausível*, termo esse trazido em sua tese de livre docência e em seu modelo teórico.

Lins (2012) aborda que a *leitura plausível* é:

> Plausível porque "faz sentido", "é aceitável neste contexto", "parece ser que é assim" […] A *leitura plausível* se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e *significado*; ela indica um processo no qual o *todo* do que eu acredito que foi dito faz sentido. Outra maneira de dizer que faz sentido em seu todo, é dizer que o *todo* é coerente (nos termos de quem eu constituo como <u>um</u> autor do que estou lendo). (LINS, 2012, p. 23, grifo nosso).

Assim sendo, em outras palavras, a leitura plausível é um exercício de ponderar plausibilidade para a enunciação, isto em uma busca de compreender o que está sendo enunciado sem realizar comparações, sem dizer que falta algo, ou que o autor da enunciação não compreendeu determinado aspecto.

Paulo (2020, p. 15) aborda que o exercício da leitura plausível, em suma, é "estabelecer um espaço comunicativo com o um autor daquele resíduo a partir do qual se produz significado,

---

[15] Formato padrão de arquivos salvos no programa GeoGebra. Para abrir arquivos ".ggb", faz-se necessário ter o software regularmente instalado na máquina, ou abri-lo utilizando a plataforma online no site oficial do GeoGebra, qual seja: https://www.geogebra.org/.

lembrando que esse estabelecimento se refere a um espaço no qual interlocutores são compartilhados, onde um enuncia coisas que outro enunciaria, com as justificações que o outro adotaria".

Lins (2012) aborda que frente a leitura plausível, para o MCS, a ideia de comunicação é substituída por espaço comunicativo. A Figura 4 expressa no Capítulo 1 demonstra a diferença entre a comunicação clássica e a sob a ótica do espaço comunicativo.

A comunicação clássica pauta a presença do enunciador ativo e receptor passivo, isto, por exemplo, como acontece em uma conversa entre duas pessoas estando uma de fronte a outra. E, o espaço comunicativo advém da ideia de que os sujeitos cognitivos podem enunciar na direção de um mesmo interlocutor.

Logo, ler plausivelmente compreende instituir um espaço comunicativo de produção de significados, sendo estes advindos de legitimidades que se acredita terem sido utilizadas pelo um autor no momento da enunciação. É uma tentativa de se compreender este um autor, colocar-se na sua perspectiva, apropriando-se de forma coerente das legitimidades que ele utilizou, isto através de resíduos de enunciação (constituídos pelo leitor) a partir dos quais se produzem os significados. Vale ressaltar que se existe a composição de resíduos de enunciação, já se tem a produção de significados.

Frisa-se que a análise interpretativa realizada foi inspirada na perspectiva metodológica da *leitura plausível*, visto que a análise não coaduna diretamente com todos os preceitos trazidos por Lins (2012). A interpretação realizada está dotada de caráter político, intrínseco às convicções pessoais do presente pesquisador que julgou através de cognição própria quais vestígios de Pensamento Matemático e/ou Computacional foram manifestados durantes as resoluções.

4 DA ANÁLISE DOS DADOS

A análise será estreada pelo Enunciado 14, isto através da seguinte ordem: resolução manuscrita do autor, resolução utilizando o GeoGebra do autor, e resoluções dos cursistas no GeoGebra. Ressalta-se que as resoluções do autor serviram apenas de parâmetro para uma compreensão necessária do problema, conforme dispõe Polya (2006).

4.1 Da Análise do Enunciado 14

4.1.1 Da Análise da resolução do Autor

A seguir apresenta-se a resolução realizada de forma manuscrita pelo autor referente ao item “a”:

Figura 14: Resolução Manuscrita do Autor – Enunciado 14 “a”

14 a) $M = \begin{pmatrix} E & S & C \\ O & L & A \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$N = A_{(2\times2)} \cdot M_{(2\times3)}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1.5+1.15 & 1.19+1.12 & 1.3+1.1 \\ 1.5+2.15 & 1.19+2.12 & 1.3+2.1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 5+15 & 19+12 & 3+1 \\ 5+30 & 19+24 & 3+2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$$

Fonte: Autor

Nesta resolução ocorreu a codificação da palavra “ESCOLA” na forma matricial com a respectiva substituição das letras pelos algarismos correspondentes, após foi realizada a multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz mensageira, resultando a matriz “N”, sendo esta a mensagem codificada que o destinatário receberá.

Referente ao item “b”, exibe-se a seguinte resolução:

Figura 15: Resolução Manuscrita do Autor – Enunciado 14 "b"

(14) b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, então $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$

$$M = B \cdot N$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2.33+(-1).47 & 2.9+(-1).13 & 2.8+(-1).9 & 2.48+(-1).75 \\ -1.33+1.47 & -1.9+1.13 & -1.8+1.9 & -1.48+1.75 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 66-47 & 18-13 & 16-9 & 96-75 \\ -33+47 & -9+13 & -8+9 & -48+75 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} S & E & G & U \\ N & D & A & * \end{pmatrix}$$

Fonte: Autor

Descobriu-se por primeiro qual era a matriz decodificadora "B", isto alterando a ordem dos elementos nas diagonais principal e secundária, além de inverter os sinais dos elementos da diagonal secundária. Por conseguinte, foi realizada a multiplicação da matriz decodificadora "B" com a matriz "N" expressa no enunciado, resultando na matriz "M", a qual decodificada originou a mensagem "SEGUNDA*".

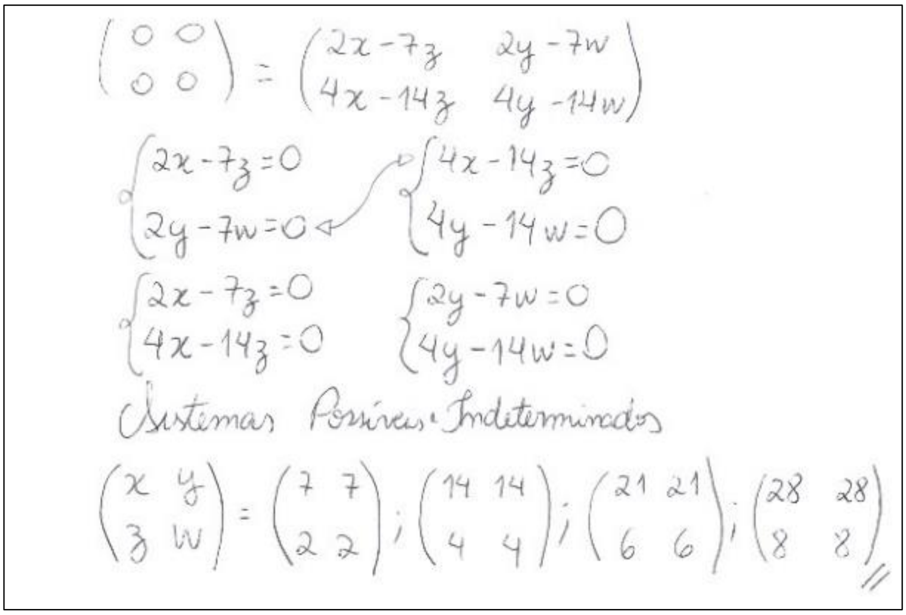
Já quanto ao item "c", apresentar-se:

Figura 16: Resolução Manuscrita do Autor – Enunciado 14 "c"

(14) c) $N = A . M$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.x+(-7).z & 2y+(-7).w \\ 4.x+(-14).z & 4y+(-14).w \end{pmatrix}$$



Fonte: Autor

Aqui ocorreu a substituição dos elementos da matriz “M” pelas incógnitas x, y, z e w na mesma ordem da mensagem “FUVEST” exposta pelo enunciado, em seguida foi realizada a multiplicação das matrizes “A” e “M” com o estabelecimento de dois sistemas de equação através da igualdade presente com a matriz “N”.

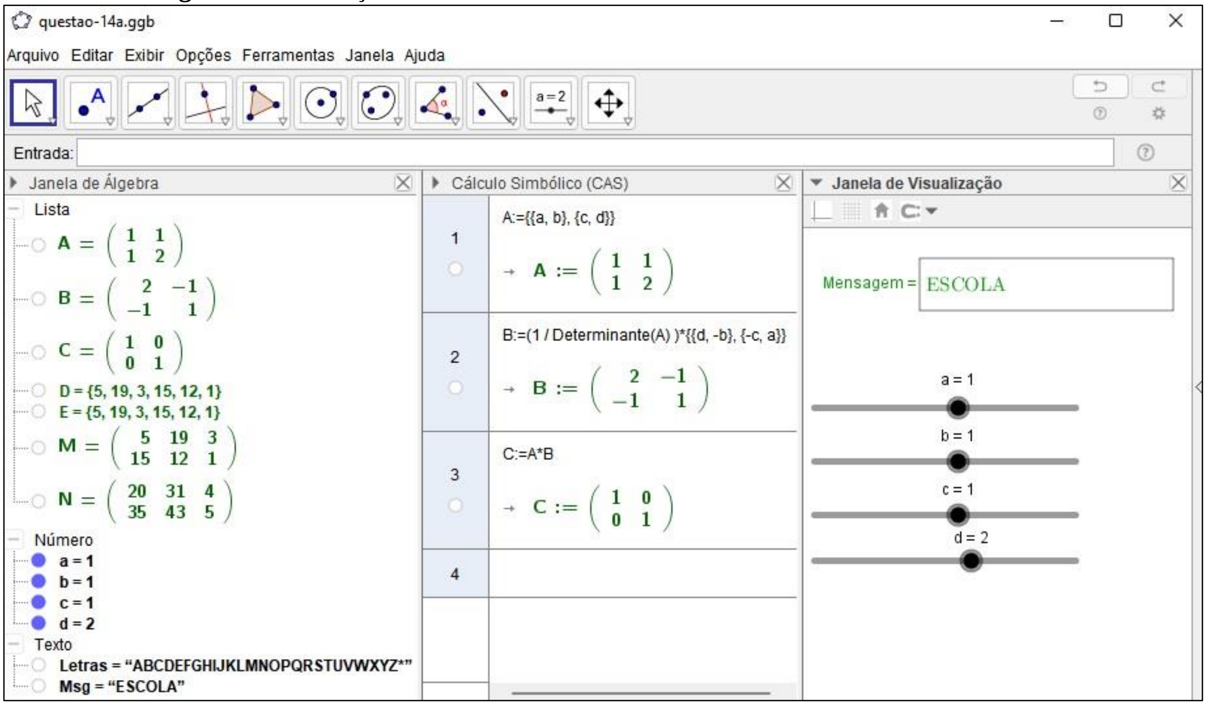
Percebeu-se que os sistemas são possíveis e indeterminados, isto pois caso a primeira equação seja dobrada gera-se a segunda equação. Assim, a inconsistência da matriz codificadora “A” está justamente no fato da segunda linha ser o dobro da primeira. Desta forma, as matrizes expostas na última etapa originam a matriz nula de ordem dois, caso sejam multiplicadas pela matriz codificadora “A”.

Outro aspecto vislumbrado na resolução foi a congruência entre os valores das linhas e das colunas nas soluções, tal fato foi derivado em uma tentativa de demonstrar apenas valores compreendidos no conjunto dos números naturais, isto para que após decodificada a matriz resulte em uma mensagem válida, em que os valores estejam dispostos na tabela da “numeração das letras do alfabeto” – como relata o enunciado.

Após a resolução manuscrita, o autor e orientador produziram uma nova resolução utilizando o software GeoGebra. Enquanto era realizada a resolução, outros pensamentos e conhecimentos eram constituídos, ampliando aspectos intrínsecos do enunciado para além do que foi solicitado, isto relativo a outros questionamentos.

Abaixo a resolução do enunciado 14 item “a” através da interface do software GeoGebra:

Figura 17: Resolução utilizando o software GeoGebra do Autor – Enunciado 14 "a"



Fonte: Autor e Orientador

Na Janela de Visualização foram criados os controles deslizantes "a", "b", "c" e "d", presentes na matriz "A" – na Janela CAS – que definem os elementos da matriz codificadora. É possível alterar os valores destes elementos ao deslizar os controles e verificar as mudanças ocorridas em toda a estrutura da resolução.

O item 2 da Janela CAS demonstra a matriz decodificadora "B", a qual possui a inversão dos elementos da diagonal principal e inversão dos sinais dos elementos na diagonal secundária.

A partir da resolução manuscrita do item "c", percebeu-se a existência da inconsistência caso os elementos das matrizes codificadoras ou decodificadoras formem Sistemas Possíveis e Indeterminados através da proporcionalidade entre linhas ou colunas. Para tanto, a fim de vislumbrar quais matrizes não conterão a inconsistência, foi desenvolvido o item 3 da Janela CAS, no qual a matriz "C" oriunda da multiplicação das matrizes "A" (codificadora) e "B" (decodificadora) precisa ser uma matriz identidade.

Entretanto, apenas com estas configurações outro problema surgiu: ao modificar um dos controles deslizantes a matriz identidade perdia sua característica de possuir a diagonal principal composta de algarismos "1". Assim, para corrigir este erro foi adicionada a multiplicação da matriz codificadora "A" por "(1/Determinante A)", a qual mantém a consistência da matriz identidade.

Logo, caso as modificações dos controles deslizantes apontem a matriz “C” como nula, haverá possíveis valores para a mensagem que transmitirão matrizes codificadas nulas, tornando impossível sua decodificação, indicando, portanto, a dita inconsistência.

Após isto, no campo de entrada da Janela de Álgebra criou-se o texto “Letras = "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ*"” e a caixa de texto com título “Mensagem” e no campo de digitação “ESCOLA”.

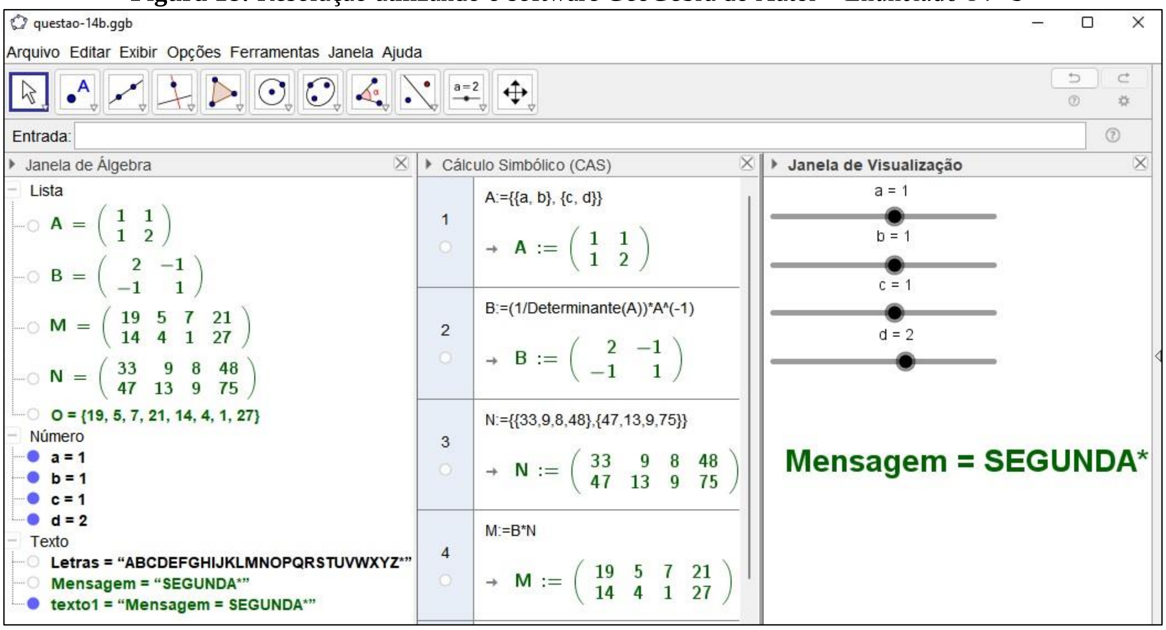
Para vincular o texto “Letras” com a caixa de texto “Mensagem”, adentrou-se com os seguintes comandos: “D=Sequência(ÍndiceDe(Elemento(Mensagem,i),Letras),i,1, Comprimento(Mensagem))”; e, “E=Se(Resto(Comprimento(D),2)≟0,D,Concatenar({D,{27} }))”. Desta forma, pelo primeiro comando qualquer mensagem digitada no campo de entrada “Mensagem” automaticamente desencadeará a lista de elementos algébricos das letras correspondentes, e o segundo comando adiciona ao final o símbolo “*” (item 27 da lista) caso a quantidade de letras da mensagem seja ímpar, isto para que a matriz com duas linhas e “n” colunas exista.

Em seguida, para criar as matrizes “M” (codificada) e “N” (decodificada) foram utilizados os respectivos comandos: “M={ParteDaLista(D,1,Comprimento(E)/2),ParteDaLista (E,Comprimento(E)/2+1,Comprimento(E))}”; e, “N=A*M”. Logo, a matriz “N” é a mensagem codificada que o destinatário recebe.

Observa-se que com esta construção qualquer mensagem digitada na caixa de texto “Mensagem”, desde logo se obtém as matrizes codificadas e decodificadas.

Perante o item “b” do enunciado 14, apresenta-se a seguinte resolução:

Figura 18: Resolução utilizando o software GeoGebra do Autor – Enunciado 14 “b”



Fonte: Autor e Orientador

A matriz codificadora “A” foi desenvolvida da mesma forma como ocorreu no item “a” anteriormente descrito, isto com os controles deslizantes que proporcionam liberdade em alterar os elementos da matriz “A” e vislumbrar as mudanças na codificação.

Já para se obter a matriz decodificadora “B” houve a multiplicação de “(1/Determinante A)” com a matriz inversa de “A”. O primeiro fator da multiplicação foi adicionado a fim de não ocorrer a inconsistência já mencionada na resolução manuscrita de não se obter a matriz identidade na multiplicação das matrizes “A” e “B”; e, o segundo fator foi obtido justamente pelo fato de que uma matriz somente é inversível se, e somente se, a multiplicação dela com sua inversa produzir uma matriz identidade, e se caso ela não for inversível deverá ser considerada uma matriz singular.

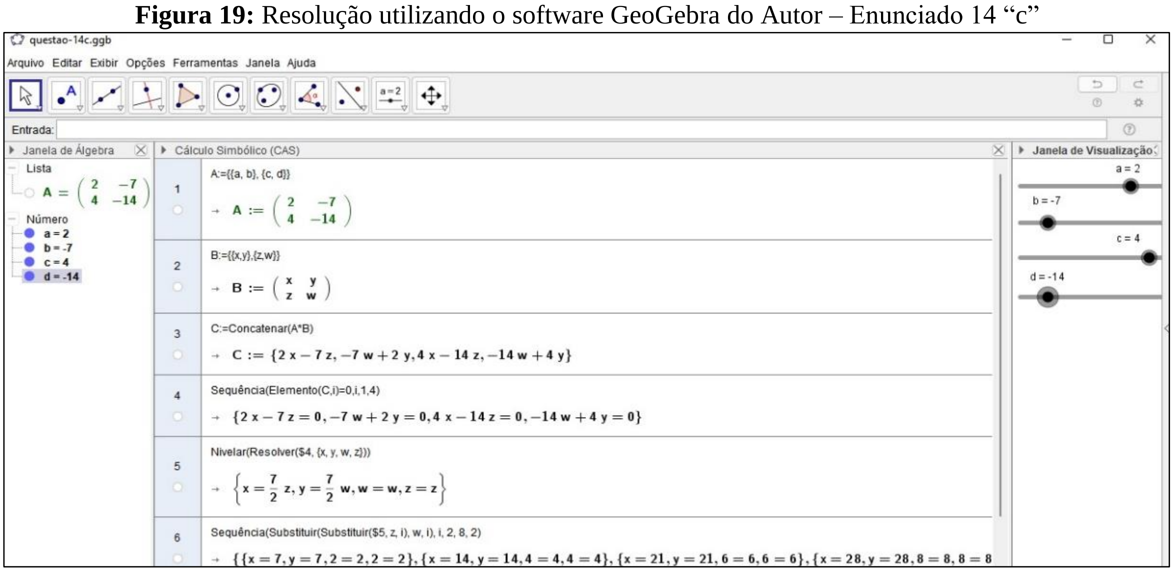
Na linha 3 da Janela CAS foi adicionada a matriz codificada “N” exposta no enunciado. E, por conseguinte, na linha 4 adicionou-se a matriz “M” decodificada que o destinatário recebe a partir da multiplicação da matriz “B” com a matriz “N”.

Para encontrar a mensagem adentrou-se com os seguintes comandos: “Concatenar(M)” – criou-se o item “O” na Janela de Álgebra; “Letras= "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ*"”; “Mensagem=Soma(Sequência(Elemento (Letras,O(i)),i,1,Comprimento(O)))” – determinando as letras referentes a cada algarismo de “O”; e, com o auxílio da ferramenta texto adicionou-se “Mensagem = Objeto(Mensagem)”.

Portanto, é possível modificar a matriz codificada “M” com quaisquer valores obtendo-se mensagens diferentes, além da possibilidade de movimentar os controles deslizantes alterando a matriz codificadora “A”, verificando se ela é inversível ou singular.

Frente a resolução do item “c” do enunciado 14:

Figura 19: Resolução utilizando o software GeoGebra do Autor – Enunciado 14 “c”



Fonte: Autor e Orientador

A matriz codificadora “A”, presente na linha 1 da Janela CAS, foi inserida da mesma maneira que ocorreu nas resoluções anteriores, isto com os valores dispostos no enunciado.

Para a matriz “M” a ser codificada houve a substituição de seus elementos pelas incógnitas x, y, z e w, assim como aconteceu na resolução manuscrita. Após, concatenou-se a multiplicação da matriz “A” com a matriz “M”, obtendo os elementos em uma lista.

Em seguida, adentrou-se com os seguintes comandos na Janela CAS: “Sequência(Elemento(C,i)=0,i,1,4)”; “Nivelar(Resolver($4,{x,y,w,z}))”; e, “Sequência(Substituir(Substituir($5,z,i),w,i),i,2,8,2)”.

Importante destacar que os símbolos $4 e $5 indicam respectivamente a quarta e quinta linhas da sequência estabelecida na Janela CAS. Logo, a sequência de comandos precisa ser colocada na exata ordem disposta no parágrafo anterior.

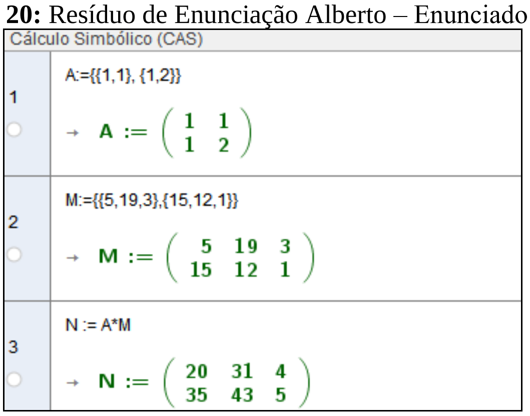
Desta forma, a sexta linha da Janela CAS indica as quatro possíveis soluções que propiciam a inconsistência da matriz “N” – oriunda da multiplicação da matriz “A” com a matriz “M” – ser uma matriz nula, concluindo que a matriz “A” é singular.

Nos próximos tópicos serão apresentadas as análises de cada um dos 12 cursistas que propuseram resoluções para o enunciado 14. Vale salientar que as identidades deles foram preservadas com a disposição de nomes fictícios.

4.1.2 Da Análise da resolução de Alberto

Alberto apresentou sua resolução a partir de dois arquivos “.ggb”. O primeiro contém as respostas para os itens “a” e “b”, e, o segundo, para o item “c”. Abaixo, expõe-se a parte do primeiro arquivo que compreende a resposta ao item “a”:

Figura 20: Resíduo de Enunciação Alberto – Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

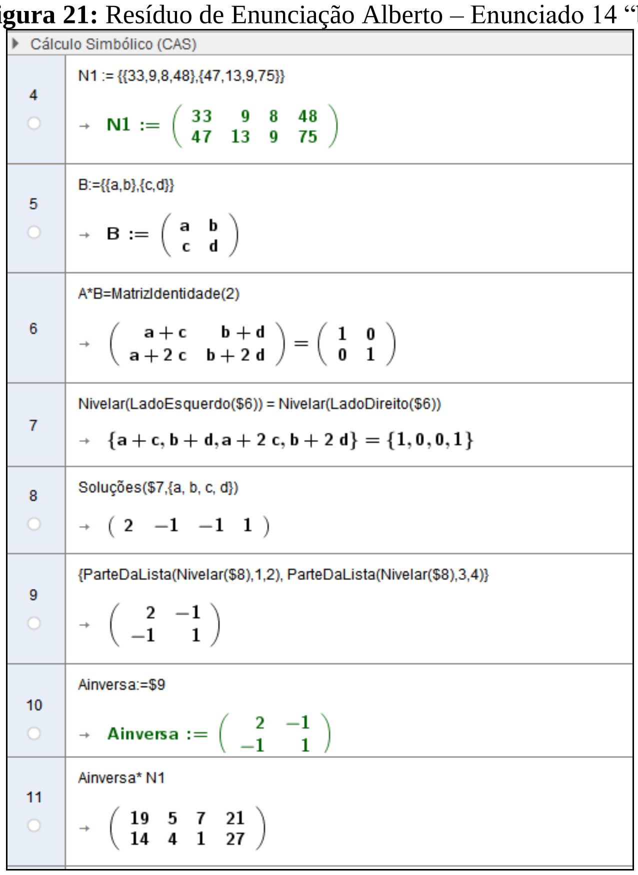
Investigou-se que Alberto introduziu diretamente os valores das matrizes “A” (codificadora) e “M” (mensageira) na Janela CAS, solicitando ao software, em seguida, a matriz codificada “N” através da multiplicação das matrizes “A” e “M”.

Para tanto, verifica-se que o GeoGebra foi utilizado nesta resolução como um facilitador da multiplicação entre as matrizes “A” e “M”.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de conjecturar (Pensamento Matemático) pelo estabelecimento das etapas previamente definidas em cada sequência de comandos dispostos nas linhas da Janela CAS; de decomposição (Pensamento Computacional) ao separar cada matriz em uma linha específica; e, do reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) a partir da forma em que as matrizes foram dispostas e também com uso dos símbolos “:=” para direcionar a identificação da matriz ao comando apresentado e “*” para indicar a multiplicação na terceira linha – padrões estes abordados durante o curso.

Abaixo, a segunda parte do primeiro arquivo referente ao item “b”:

Figura 21: Resíduo de Enunciação Alberto – Enunciado 14 “b”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Na linha 4, Alberto criou a matriz “N1” a qual representa a matriz codificada “N” expressa no enunciado. As linhas 5 a 9 demonstram as etapas para obtenção da matriz decodificadora “B”, isto utilizando vários comandos do GeoGebra com o conceito da matriz identidade. A linha 10 compreende que ele identificou a matriz “B” como matriz inversa de

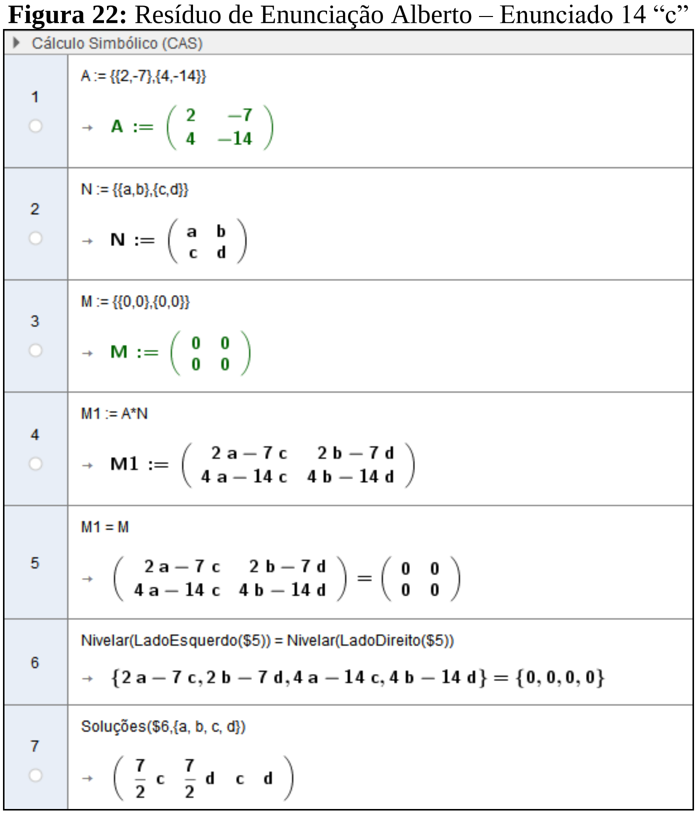
"A" pela propositura do nome "Ainversa". E, a linha 11 apresenta a solução do enunciado pela multiplicação da matriz "B" ("Ainversa") com a matriz "N" ("N1").

Verifica-se que Alberto ao inserir o comando da linha 6 já detinha a convicção de que a matriz codificadora "A" multiplicada pela matriz decodificadora "B" produzia uma matriz identidade de ordem 2, além de que a matriz "B" é derivada da inversão da matriz "A". Isto corrobora vestígios de que possivelmente o participante inseriu os comandos nas linhas 6 a 9 para comprovar estas hipóteses, principalmente pelo fato da utilização do nome "Ainversa" para a matriz "B".

Referente às modalidades de pensamento existem vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) está presente pelo uso dos termos "N1" e "Ainversa"; analisar (Pensamento Matemático) através da substituição dos elementos da matriz "B" por incógnitas a serem analisadas após a multiplicação da linha 6; decomposição (Pensamento Computacional) e reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – nos mesmos termos da resolução do item "a", além da utilização do símbolo "$" para compreender a linha pretendida, e dos diferentes comandos específicos do GeoGebra, tais como: "Nivelar", "LadoEsquerdo", "LadoDireito", e "ParteDaLista"; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) durante as etapas de obtenção da matriz "B", isto pelo caminho traçado pelas linhas 5 a 10.

Por conseguinte, a resolução do item "c" do enunciado 14 por Alberto:

Figura 22: Resíduo de Enunciação Alberto – Enunciado 14 "c"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Alberto inseriu a matriz codificadora “A” nas configurações descritas no enunciado, substituiu os elementos da matriz a ser codificada “M” (no caso chamada por Alberto de “N”) pelas incógnitas a, b, c e d, colocou a matriz codificada “N” (no caso chamada por Alberto de “M”)

O cursista na linha 4 fez a multiplicação das matrizes “A” e “M” (chamada por ele de “N”), originando uma nova matriz chamada por ele de “M1”. Na linha 5 ele igualou a matriz “M1” a matriz nula “N” (chamada por ele de “M”).

Perante a etapa 6, Alberto utilizou o comando “Nivelar(LadoEsquerdo($5))= Nivelar(LadoDireito($5))” para ordenar e igualar os elementos em mesmas posições nas matrizes descritas na linha 5. E, na linha 7, o cursista inseriu o comando “Soluções($6,{a,b, c,d})”, encontrando uma solução para a linha 6 em função das incógnitas “c” e “d”.

Para tanto, na publicação do fórum Alberto estabeleceu as seguintes respostas para o item “c”:

Figura 23: Resíduo de Enunciação Alberto – Solução ao Enunciado 14 “c”

c) a = 7/2*c ; b = 7/2*d ; c ; d;

Sequencias : {7,7,2,2}, {14,7,4,2}, {7,14,2,4}, {14,14,7,7}

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Verifica-se que Alberto seguiu etapas sequenciais oriundas de uma resolução anterior, possivelmente uma resolução manuscrita, isto pelos comandos descritos nas linhas: 1 a 3 – inserção das matrizes; 4 a 6 – operações com elementos do GeoGebra; e, 7 – demonstração genérica da solução.

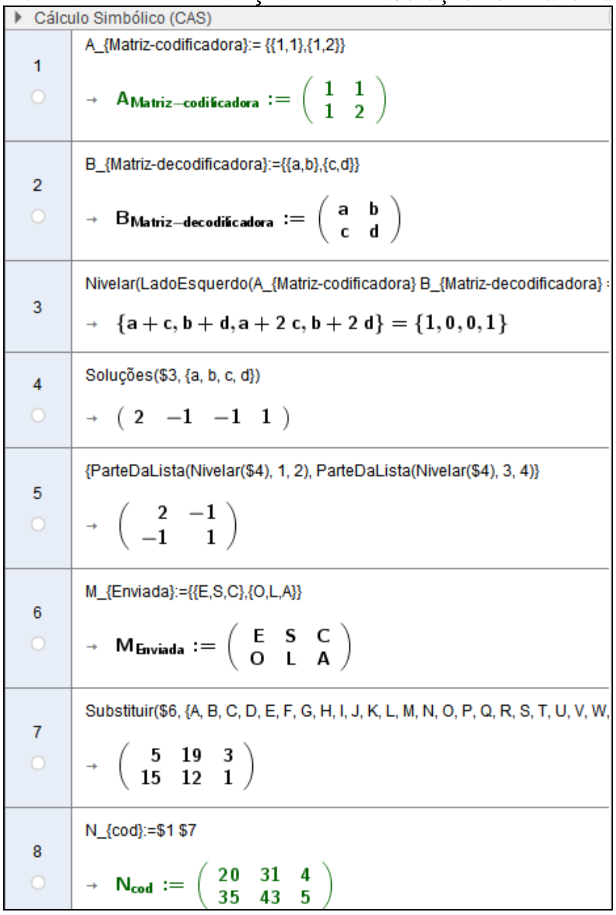
Neste sentido, referente às modalidades de pensamento há vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pelas nomenclaturas adotadas para as matrizes “A”, “N”, “M”, e “M1”; generalizar (Pensamento Matemático) – pela resposta atribuída na linha 7, e, após, decifrada na publicação do fórum; formalizar (Pensamento Matemático) – pela adoção das incógnitas “a”, “b”, “c” e “d” na linha 2; decomposição (Pensamento Computacional) e reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – nos mesmos termos das resoluções dos itens “a” e “b”, além da propositura da multiplicação das matrizes “A” e “M” (chamada pelo cursista de “N”) com a igualdade frente a matriz “N” (chamada pelo cursista de “M”); e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela estrutura disposta nas linhas 4 a 7, tal fato também é estabelecido através da utilização sequencial e preordenada dos comandos “Nivelar”, “LadoDireito”, “LadoEsquerdo”, e “Solução”.

4.1.3 Da Análise da resolução de Bruno

Bruno realizou a postagem de apenas um arquivo no formato ".ggb", e informou na sua publicação que encontrou dificuldades e não realizou o item "c" do enunciado, contudo durante as interações com colegas mostrou vestígios de suas tentativas para resolver este item, os quais também serão analisados.

A seguir, apresenta-se a parte do item "a" da resolução de Bruno para o enunciado 14:

Figura 24: Resíduo de Enunciação Bruno – Solução ao Enunciado 14 "a"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

O cursista utilizou as nomenclaturas: "A_{Matriz-codificadora}" para a matriz "A"; "B_{Matriz-decodificadora}" para a matriz "B"; "M_{Enviada}" para a matriz "M"; e, "N_{cod}" para a matriz "N".

Após inserir os elementos da matriz "A" conforme o enunciado, Bruno adotou as incógnitas "a", "b", "c", e "d" para os elementos da matriz "B", e utilizou os seguintes códigos para encontrar seus valores: "Nivelar(LadoEsquerdo(A_{Matriz-codificadora}B_{Matriz-decodificadora} = MatrizIdentidade(2))) = Nivelar(LadoDireito(A_{Matriz-codificadora} B_{Matriz-decodificadora} = MatrizIdentidade(2)))" – para realizar a multiplicação das matrizes “A” e “B”, igualando o produto à matriz identidade de ordem 2; “Soluções($3,{a,b,c, d})” – para determinar os resultados da igualdade dos elementos; e, “{ParteDaLista(Nivelar ($4), 1, 2),ParteDaLista(Nivelar($4), 3, 4)}” – para transformar a linha anterior na matriz “B”.

Para conseguir encontrar a matriz numérica que representa a mensagem “ESCOLA”, o cursista inseriu os seguintes comandos: “M_{Enviada}:={{E,S,C},{O,L,A}}” – elementos na forma de uma matriz; e “Substituir($6, {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, "*"}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27})” – para trocar as letras pelos números correspondentes.

E, por fim, a solução surgiu pelo comando “N_{cod}:=$1 $7”, isto pela multiplicação da linha 1 (matriz “A”) com a linha 7 (matriz “M”). Ressalta-se que o cursista não utilizou o símbolo “*” para ocorrer a multiplicação, visto que a sequência “$1 $7” já detém uma multiplicação oculta entre os termos, tendo como produto a matriz “N”.

Verifica-se que Bruno buscou estruturar sua resolução de modo que contemplasse intensamente os recursos disponíveis no GeoGebra, isto, pois, a disposição da sequência de comandos faz referência a termos e operações específicas do GeoGebra, e não para partes da resolução feitas de forma manuscrita, conforme se depreende do seguinte trecho de uma interação dele com um cursista: “[...] Não encontrei valores. Eu também não fiz os cálculos manualmente, estava tentando fazer somente usando a janela CAS.” Além disso, as nomenclaturas adotadas aproximam-se das utilizadas na área educacional, apresentando vestígios de métodos didáticos.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de conjecturar (Pensamento Matemático) – pelo estabelecimento das etapas previamente definidas em cada sequência de comandos dispostos nas linhas da Janela CAS; representar (Pensamento Matemático) – pela adoção dos termos “A_{Matriz-codificadora}”, “B_{Matriz-decodificadora}”, “M_{Enviada}” e “N_{cod}”; induzir (Pensamento Matemático) – pela conclusão por raciocínio lógico de que a matriz “B” é a inversa da matriz “A” como disposto nas linhas 2 a 5; de decomposição (Pensamento Computacional) ao separar cada matriz em uma linha específica; e, do reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – a partir da forma em que as matrizes foram dispostas e pela não utilização do símbolo “*” para indicar uma multiplicação na linha 8.

Por conseguinte, apresenta-se a parte final do arquivo disponibilizado por Bruno, referente ao item “b” da resolução para o enunciado 14:

Figura 25: Resíduo de Enunciação Bruno – Solução ao Enunciado 14 “b”

9	$5 {{33, 9, 8, 48}, {47, 13, 9, 75}} $\rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$
10	R := {{s, e, g, u},{n, d, a, "*"}} $\rightarrow$ R := $\begin{pmatrix} s & e & g & u \\ n & d & a & * \end{pmatrix}$

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Ao inserir o comando “$5{{33,9,8,48},{47,13,9,75}}” na linha 9, Bruno realizou rapidamente a multiplicação da matriz “B” com a matriz codificada “N”, produzindo a matriz decodificada “M”, a qual já é a solução para o enunciado, bastando converter os números frente à tabela expressa no enunciado.

Na linha 10 houve a tradução da mensagem sem a adoção de algum comando que vinculasse a tabela correspondente às letras e aos números dispostos na linha 7, apenas ocorrendo a inserção da resposta direta.

Verifica-se que Bruno estruturou anteriormente a sua resposta, afastou elementos considerados por ele desnecessários para a resolução, e, provavelmente, encontrou dificuldades na adoção de comandos no GeoGebra que trocassem os elementos da matriz numérica “N” pelas letras dispostas na tabela da relação entre as letras do alfabeto e os números disposta no enunciado, isto pela reduzida forma da resolução (somente duas etapas) comparada com a resolução do item “a” e pelo comando inserido na linha 7, o qual possui a relação da tabela de forma expressa.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de abstrair (Pensamento Matemático e Computacional) – pela simplicidade em determinar a solução com apenas duas etapas, afastando outros dados desnecessários expressos no enunciado; analisar (Pensamento Matemático) – pela substituição dos elementos encontrados na linha 9 utilizando a tabela da relação entre as letras do alfabeto e números conforme a linha 10; e, do reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – pela não utilização do símbolo “*” na multiplicação da linha 9, assim como ocorreu na linha 8.

Bruno confirma esta dificuldade em substituir os números pelas letras durante o texto de sua postagem:

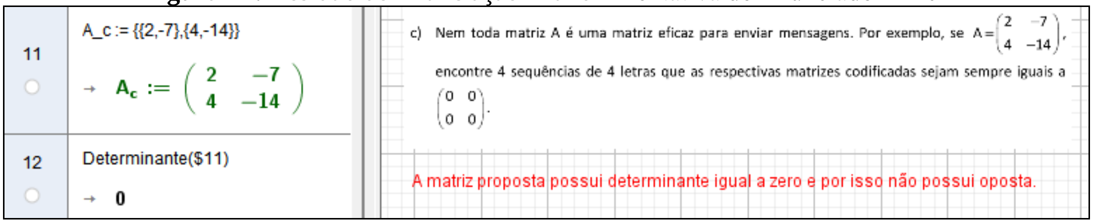
Figura 26: Resíduo de Enunciação Bruno – Trecho da Postagem no Fórum - 1

- Vocês poderão perceber que na linha 7 do meu código, na janela cas, consegui utilizar o comando Substituir para trocar cada letra por seu valor numérico correspondente. Mas não consegui fazer o inverso (substituir número por letra).

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Não houve resolução frente ao item “c” do enunciado 14, entretanto Bruno enunciou os seguintes trechos no arquivo “.ggb” e na publicação, respectivamente:

Figura 27: Resíduo de Enunciação Bruno – Tentativa do Enunciado 14 “c”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 28: Resíduo de Enunciação Bruno – Trecho da Postagem no Fórum - 2

- A resolução da letra c do problema também ficou um pouco difícil. Me pareceu que deveria encontrar soluções inteiras e não consegui achar algum comando que faria isso, se é que existe no geogebra. Ficarei grato se algum de vocês, colegas do curso ou professores puderem me ajudar!

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Verifica-se que Bruno identificou a inconsistência da matriz codificadora “A” pelo seu determinante valer zero e supostamente não possuir “oposta”.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de abstrair (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento dos dados, para ele, desnecessários à resolução, com foco na invalidade da matriz “A”; e, produção de algoritmo – (Pensamento Computacional) – pela utilização da ferramenta e propriedade matemática “Determinante” para definir que a matriz “A” não possui, supostamente, uma “oposta”.

Pela disposição do cursista, analisou-se que a inconsistência da matriz codificadora “A” não detém relação com a existência ou inexistência da matriz oposta de “A”, e, sim, com sua inversibilidade, assim como disposto na resolução realizada pelo autor.

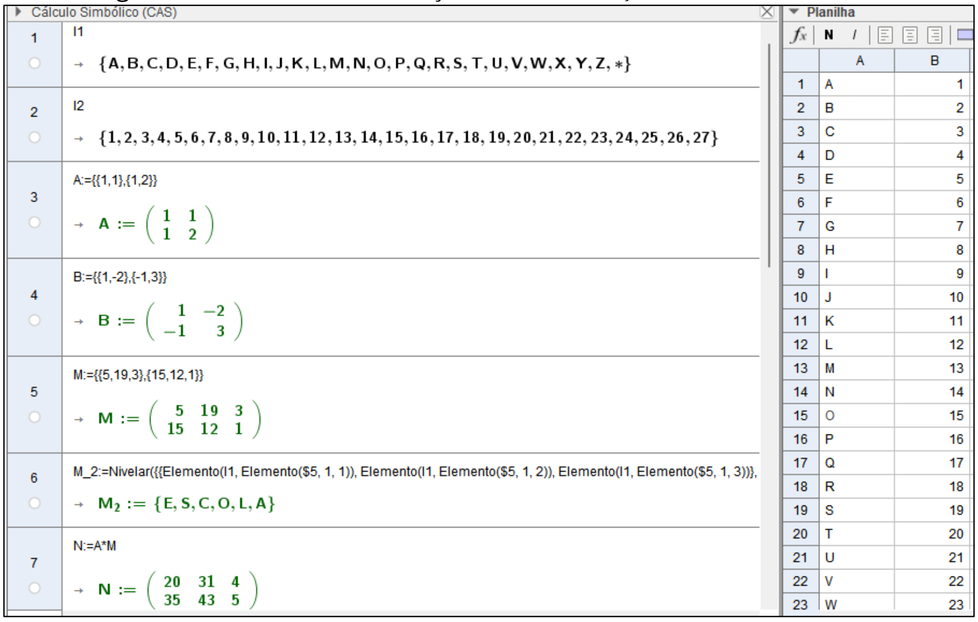
Contudo, foi através desta última análise que um erro foi localizado na resolução expressa pelo autor na Figura 16, qual seja, o número 28 não compreende um símbolo da tabela de letras expressa do enunciado, logo a última matriz indicada como solução não é uma resposta válida. Para tanto, elimina-se esta falha com a substituição da primeira e segunda colunas pelos valores “7, 2” e “14, 4” respectivamente.

4.1.4 Da Análise da resolução de Carlos

Carlos apresentou sua resolução a partir de um arquivo “.ggb”, isto contendo a resolução para os itens “a” e “b” do enunciado 14. Quanto ao item “c”, o cursista solicitou ajuda aos colegas em sua postagem e não demonstrou uma resolução.

Abaixo a primeira parte de sua construção referente ao item “a” do enunciado 14:

Figura 29: Resíduo de Enunciação Carlos – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Preliminarmente, o cursista criou uma planilha para representar a relação entre as letras e os números expressa no enunciado, na imagem está disposto até a letra W, porém a construção detém os 27 símbolos até “*” que corresponde a um espaço, não foi possível apresentar todos na imagem pela limitação de espaço do layout do GeoGebra.

Após a inserção da planilha, Carlos vinculou a coluna das letras em uma lista, chamando-a de “l1”; e, a dos números, como “l2”, dispostas nas linhas 1 e 2 da Janela CAS.

Em seguida, ele inseriu as matrizes codificadora “A” e decodificadora “B” em sequência, além da matriz a ser codificada “M” expressa pela mensagem “ESCOLA” já substituídas suas letras pelos respectivos valores da planilha.

Na linha 6 foi inserido pelo cursista o comando “M_2:=Nivelar({{Elemento (l1,Elemento($5,1,1)), Elemento(l1, Elemento($5,1,2)), Elemento(l1, Elemento($5,1,3))}, {Elemento(l1, Elemento($5,2,1)), Elemento(l1, Elemento($5,2,2)), Elemento(l1, Elemento($5,2,3))}})”, vislumbra-se a intenção de confirmar o disposto pela mensagem “ESCOLA” com a matriz exibida na linha 5.

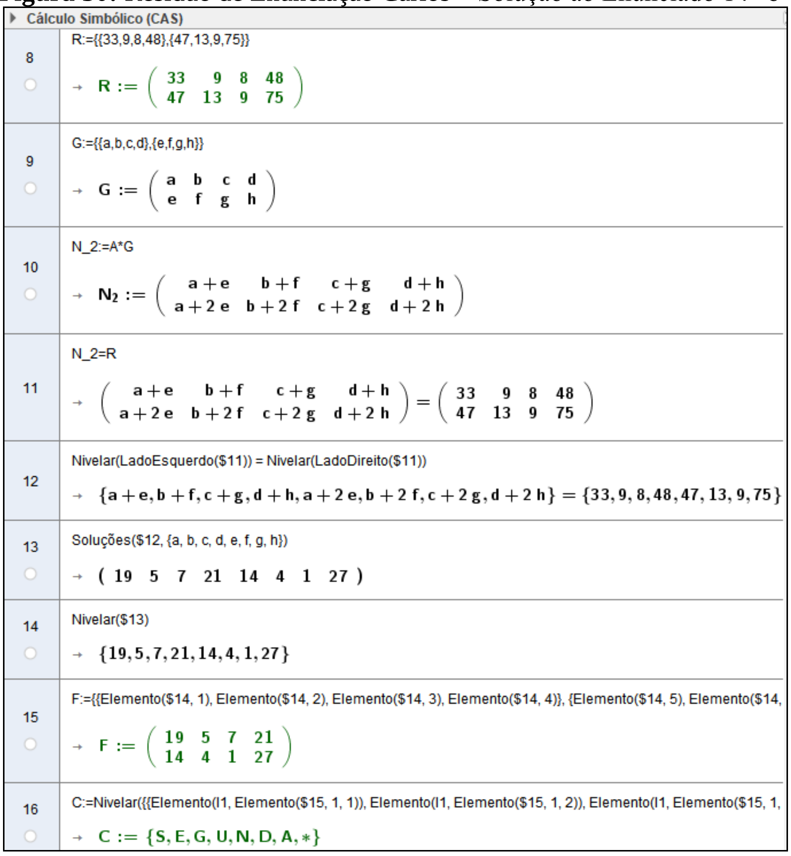
Por fim, a matriz codificada “N” é determinada na linha 7 pela multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz a ser codificada “M”.

Verifica-se que Carlos utilizou o GeoGebra como uma ferramenta para demonstrar uma outra forma de visualização dos dados dispostos no enunciado e facilitador da multiplicação das matrizes “A” e “M”.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de visualizar (Pensamento Matemático) – pela inserção da planilha da relação entre as letras e números e da disposição do comando da linha 6 para possível conferência da mensagem "ESCOLA" com os números expressos na planilha; classificar (Pensamento Matemático) – pela inserção das listas "l1" e "l2"; e, reconhecimento de padrões – (Pensamento Computacional) – pela utilização sequencial da ferramenta "Elemento" várias vezes na linha 6, revelando um padrão possivelmente advindo de experiências adquiridas durante o curso.

Para o item "b" do enunciado 14, Carlos propôs a seguinte resolução:

Figura 30: Resíduo de Enunciação Carlos – Solução ao Enunciado 14 "b"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

O cursista inseriu a matriz codificada "N" (chamada por ele de "R") na linha 8, assim como exposto no enunciado. Após, atribuiu as incógnitas "a", "b", "c", "d", "e", "f", "g" e "h" para os elementos da matriz a ser codificada "M" (chamada por ele de "G") na linha 9 . Para tanto, realizou a criação da matriz "N_2", sendo o resultado da multiplicação da matriz a ser codificada "M" (chamada por ele de "G") com a matriz codificadora "A", isto conforme o exposto na linha 10.

Em seguida, igualou os elementos da matriz "N_2" com os da matriz codificada "N" (chamada por ele de "R") na linha 11. Depois, inseriu os comandos "Nivelar(LadoEsquerdo ($11))=Nivelar(LadoDireito($11))" e "Soluções($12,{a,b,c,d,e,f,g,h}) ", nesta ordem, para calcular os valores das incógnitas atribuídas na linha 9.

E, por fim, para organizar e demonstrar a mensagem enviada, Carlos utilizou os comandos “Nivelar($13)”; “F:={{Elemento($14, 1), Elemento($14, 2), Elemento($14, 3), Elemento($14, 4)}, {Elemento($14, 5), Elemento($14, 6), Elemento($14, 7), Elemento($14, 8)}}”; e, “C:=Nivelar({{Elemento(l1, Elemento($15, 1, 1)), Elemento(l1, Elemento($15, 1, 2)), Elemento(l1, Elemento($15, 1, 3)), Elemento(l1, Elemento($15, 1, 4))}, {Elemento(l1, Elemento($15, 2, 1)), Elemento(l1, Elemento($15, 2, 2)), Elemento(l1, Elemento($15, 2, 3)), Elemento(l1, Elemento($15, 2, 4))}})” produzindo a mensagem “C:={S,E,G,U,N,D,A,*}”.

Verifica-se que Carlos constituiu uma direção de interlocução diferente da estabelecida no enunciado com a utilização da matriz decodificadora “B”, isto através da inversão dos elementos da matriz codificadora “A”, pelo fato de que o cursista inseriu esta matriz de forma direta na linha 4 da resolução do item “a”. Logo, pela existência desta nova direção, o caminho percorrido na resolução do item “b” não contemplou a matriz decodificadora “B” como ocorreu no exemplo trazido pelo enunciado com a mensagem “FUVEST”.

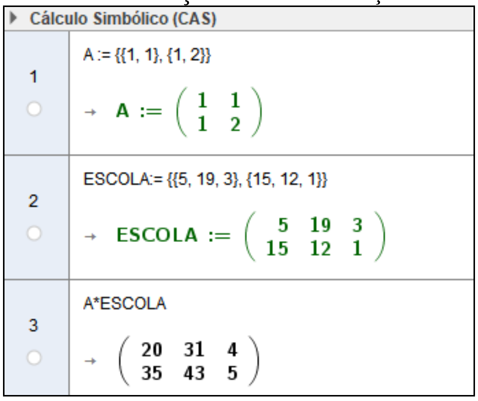
Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção dos símbolos “R”, “G” e “N_2” nas linhas 8 a 10; generalizar (Pensamento Matemático) – pela inserção das incógnitas na linha 9 para serem utilizadas de forma genérica a outros casos semelhantes; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pela desconsideração da matriz decodificadora “B” durante a resolução; e, reconhecimento de padrões – (Pensamento Computacional) – pela utilização sequencial da ferramenta “Elemento” várias vezes nas linhas 15 e 16, revelando um padrão possivelmente advindo de experiências adquiridas durante o curso, corroborando com o exposto na análise do item “a”.

4.1.5 Da Análise da resolução de Danilo

Assim como Alberto, Danilo também apresentou sua resolução a partir de dois arquivos “.ggb”, o primeiro com a resolução dos itens “a” e “b”, e, o segundo, com a resolução do item “c”. O cursista demonstrou também um passo-a-passo da sua construção e de suas ideias estruturantes das resoluções em sua publicação no fórum.

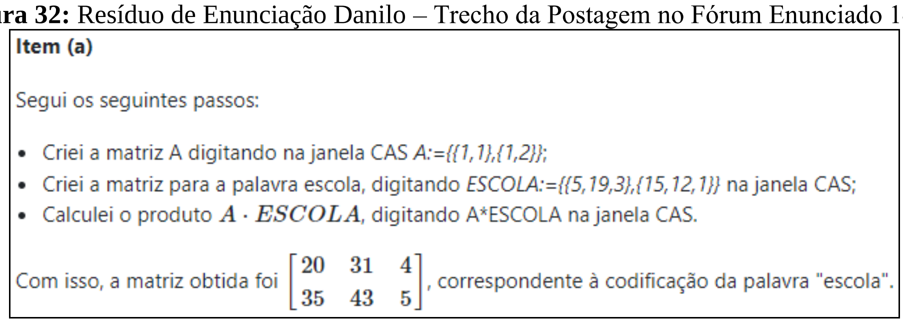
Abaixo a primeira parte de sua construção referente ao item “a” do enunciado 14 e o passo-a-passo demonstrado na publicação do cursista no fórum:

Figura 31: Resíduo de Enunciação Danilo – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 32: Resíduo de Enunciação Danilo – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 “a”



Item (a)

Segui os seguintes passos:

- Criei a matriz A digitando na janela CAS *A:={{1,1},{1,2}}*;
- Criei a matriz para a palavra escola, digitando *ESCOLA:={{5,19,3},{15,12,1}}* na janela CAS;
- Calculei o produto $A \cdot ESCOLA$, digitando A*ESCOLA na janela CAS.

Com isso, a matriz obtida foi $\begin{bmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{bmatrix}$, correspondente à codificação da palavra "escola".

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

O cursista inseriu a matriz codificadora “A” na linha 1 e adotou a mensagem “ESCOLA” como nome para a matriz a ser codificada “M” na linha 2.

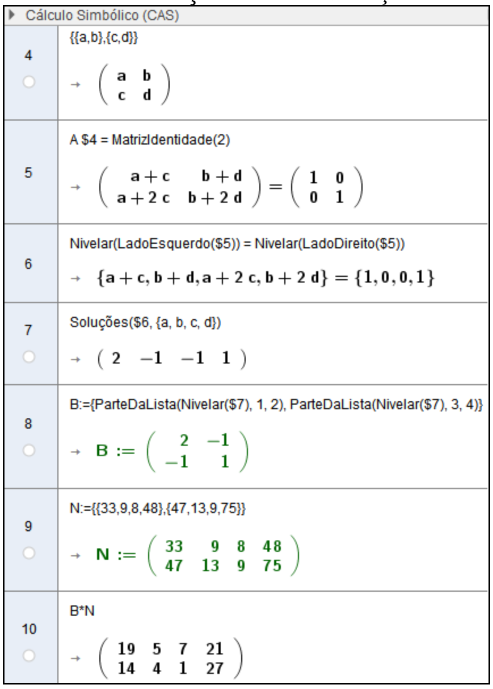
E para encontrar a matriz codificada “N”, apenas realizou a multiplicação das matrizes “A” e “M” (chamada por ele de “ESCOLA”) na linha 3.

Verifica-se que o GeoGebra foi utilizado por Danilo como ferramenta facilitadora na multiplicação das matrizes “A” e “M” (chamada por ele de “ESCOLA”) para a obtenção da matriz codificada “N”.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção da mensagem “ESCOLA” como título da matriz a ser codificada “M”; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento dos símbolos “M” e “N” e outros termos expostos no enunciado, com a concentração apenas nos elementos necessários para a resolução; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela criação espontânea do algoritmo “A . ESCOLA” (comando “A*ESCOLA”) na linha 3 e exposto na publicação (Figura 31) para determinar a solução do item “a”.

Por conseguinte, apresenta-se a segunda parte do primeiro arquivo “.ggb” com a resolução do item “b” do enunciado 14 e o passo-a-passo publicado no fórum por Danilo:

Figura 33: Resíduo de Enunciação Danilo – Solução ao Enunciado 14 "b"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 34: Resíduo de Enunciação Danilo – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 "b"

Item (b)

Comecei calculando a matriz decodificadora B, ou seja, a matriz inversa de A. Para isso, fiz o seguinte:

- Criei uma matriz 2x2 com entradas a, b, c e d, digitando *{{a,b},{c,d}}* na janela CAS (na linha 4).
- Multipliquei A por essa matriz e igualei à matriz identidade, escrevendo *A*$4=MatrizIdentidade(2)* na janela CAS;
- Na linha seguinte (linha 6), digitei *Nivelar(LadoEsquerdo($5))=Nivelar(LadoDireito($5));*
- Na linha seguinte (linha 7), digitei *Soluções($6, {a,b,c,d})* para obter as soluções das equações;
- Na linha seguinte, digitei *B:={ParteDaLista(Nivelar($7),1,2), ParteDaLista(Nivelar($7),3,4)}*, obtendo assim a matriz inversa de A.

O próximo passo foi decodificar a matriz N. Para isso:

- Digitei *N:={{33,9,8,48},{47,13,9,75}}* na linha 9;
- Digitei *B*N* na linha 10.

A partir da matriz obtida, pode-se concluir que a mensagem codificada foi "SEGUNDA*".

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Danilo encontrou a matriz decodificadora "B" nas linhas 4 a 8 pela igualdade existente entre a multiplicação da matriz codificadora "A" com a matriz decodificadora "B" resultando em uma matriz identidade. Para tanto, atribuiu as incógnitas "a", "b", "c" e "d" aos elementos da matriz decodificadora "B" na linha 4.

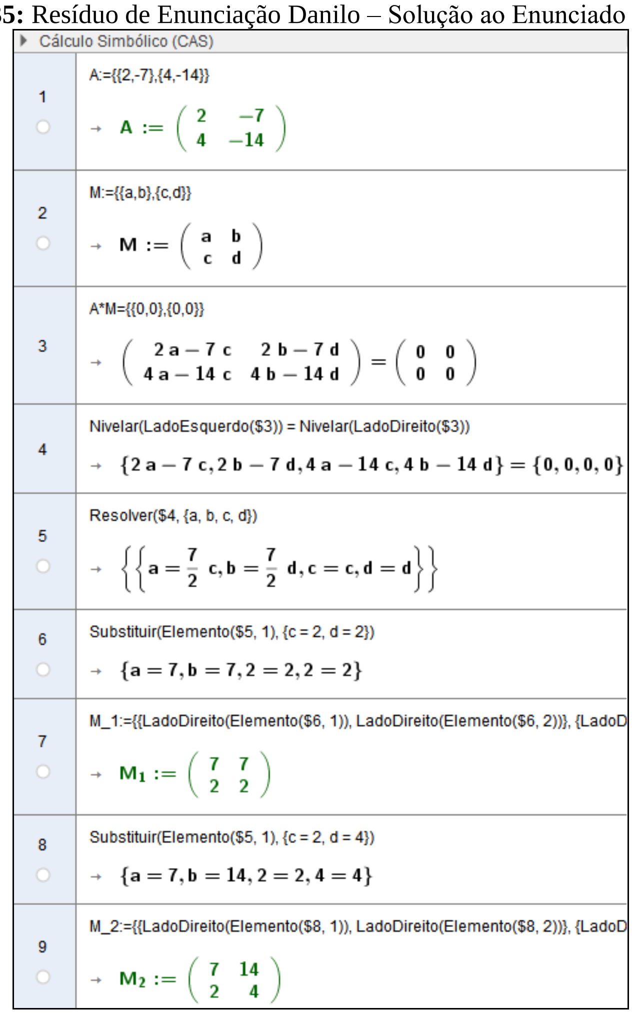
Todos os comandos utilizados pelo cursista foram delineados em seu passo-a-passo descrito na Figura 34. A solução do enunciado foi demonstrada na linha 10 pela multiplicação da matriz decodificadora "B" com a matriz a ser decodificada "N".

Verifica-se que o GeoGebra também foi utilizado por Danilo da mesma forma que ocorreu no item "a", isto como ferramenta facilitadora nas seguintes multiplicações: das matrizes “A” e “B” para, após, igualar o produto à matriz identidade e encontrar os valores da matriz decodificadora “B”; e, das matrizes “B” e “N” para obter a matriz decodificada.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de conjecturar (Pensamento Matemático) – pelo estabelecimento da relação da matriz “A” multiplicada com a matriz “B” originar uma matriz identidade; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento do símbolo “M” e outros termos expostos no enunciado, com a concentração apenas nos elementos necessários para a resolução; decomposição (Pensamento Computacional) – pela divisão do problema em duas partes: primeiro encontrar a matriz decodificadora “B”, e, após, descobrir a mensagem pela multiplicação das matrizes “B” e “N”; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pelo estruturação e aplicação do algoritmo “A $4 = MatrizIdentidade(2)”, o qual representa a multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz decodificadora “B” com produto igual a matriz identidade de ordem 2.

Frente a resolução de Danilo do item “c” do enunciado 14 e o passo-a-passo publicado no fórum, apresentam-se as imagens abaixo:

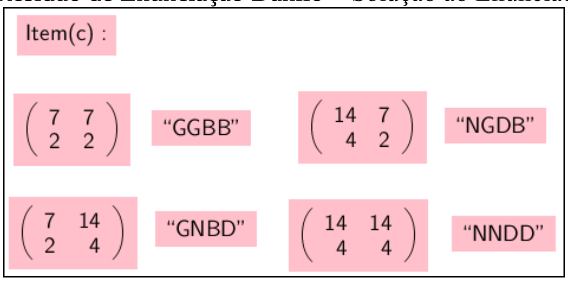
Figura 35: Resíduo de Enunciação Danilo – Solução ao Enunciado 14 “c” - 1



10	Substituir(Elemento($5, 1), {c = 4, d = 2}) → $\{a = 14, b = 7, 4 = 4, 2 = 2\}$
11	M_3:={{LadoDireito(Elemento($10, 1)), LadoDireito(Elemento($10, 2))}, {La → $M_3 := \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
12	Substituir(Elemento($5, 1), {c = 4, d = 4}) → $\{a = 14, b = 14, 4 = 4, 4 = 4\}$
13	M_4:={{LadoDireito(Elemento($12, 1)), LadoDireito(Elemento($12, 2))}, {La → $M_4 := \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
14	A*M_1 → $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
15	A*M_2 → $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
16	A*M_3 → $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
17	A*M_4 → $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 36: Resíduo de Enunciação Danilo – Solução ao Enunciado 14 “c” - 2



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 37: Resíduo de Enunciação Danilo – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 “c”

Item (c)

- Criei a matriz A, digitando *A:={{2,-7},{4,-14}}* na linha 1;
- Criei uma matriz M genérica, digitando *M:={{a,b},{c,d}}* na linha 2;
- Igualei o produto das matrizes A e M a uma matriz nula, digitando *A*M={{0,0},{0,0}}* na linha 3;
- Nivelei as matrizes resultantes do item anterior, digitando *Nivelar(LadoEsquerdo($3)) = Nivelar(LadoDireito($3))* na linha 4;
- Resolvi a equação digitando *Resolver($4,{a, b, c, d})* na linha 5;

O resultado do item anterior envolvia a e b em função de c e d, respectivamente. Para encontrar 4 matrizes, como pedido pelo exercício, atribuí diferentes valores a b e c.

- Inicialmente, atribuí os valores c=2 e d=2. Para isso, digitei *Substituir(Elemento($5,1),{c = 2, d = 2})* na linha 6. Na linha 7, criei a matriz M_1 digitando *M_1:= {{LadoDireito(Elemento($6,1)), LadoDireito(Elemento($6,2))}, {LadoDireito(Elemento($6,3)), LadoDireito(Elemento($6,4))}}*;
- Em seguida, atribuí os valores c=2 e d=4. Para isso, digitei *Substituir(Elemento($5,1),{c = 2, d = 4})* na linha 8. Na linha 9, criei a matriz M_2 digitando *M_2:= {{LadoDireito(Elemento($8,1)), LadoDireito(Elemento($8,2))}, {LadoDireito(Elemento($8,3)), LadoDireito(Elemento($8,4))}}*;
- Procedi de forma análoga para obter a matriz M_3, com c=4 e d=2, e a matriz M_4, com c=4 e d=4;
- Por fim, calculei os produtos de A por M_1, M_2, M_3 e M_4, para confirmar que todos resultariam na matriz nula. Feito isso, obtive as sequências de letras correspondentes e as inseri na janela de visualização em forma de texto.

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Danilo introduziu a matriz codificadora “A” explícita no enunciado perante a linha 1. Após, para a matriz a ser codificada “M” ele atribuiu as incógnitas “a”, “b”, “c” e “d”.

Em seguida, inseriu os comandos em sequência: “A*M={{0,0},{0,0}}”; “Nivelar(LadoEsquerdo($3)) = Nivelar(LadoDireito($3))”; e, “Resolver($4, {a, b, c, d})”. Isto para encontrar a relação existente entre os elementos da matriz “M” que produzem a matriz nula caso haja a multiplicação com a matriz codificadora “A”.

Por fim, o cursista adentrou com os seguintes comandos para o estabelecimento das quatro soluções: “Substituir(Elemento($5,1),{c=2,d=2})”; “M_1:={{LadoDireito(Elemento ($6,1)),LadoDireito(Elemento($6,2))},{LadoDireito(Elemento($6,3)),LadoDireito(Elemento ($6,4))}}”; “Substituir(Elemento($5,1),{c=2,d=4})”; “M_2:={{LadoDireito(Elemento($8,1)), LadoDireito(Elemento($8,2))},{LadoDireito(Elemento($8,3)),LadoDireito(Elemento($8,4))} }”; “Substituir(Elemento($5,1),{c=4,d=2})”; “M_3:={{LadoDireito(Elemento($10,1)), LadoDireito(Elemento($10,2))},{LadoDireito(Elemento($10,3)),LadoDireito(Elemento($10,4))}}”; “Substituir(Elemento($5,1), {c=4, d=4})”; e, “M_4:={{LadoDireito(Elemento($12,1)), LadoDireito(Elemento($12,2))}, {LadoDireito(Elemento($12,3)), LadoDireito(Elemento($12, 4))}}”. Além disso, para comprovar suas respostas, Danilo multiplicou cada resposta “M_1”, “M_2”, “M_3” e “M_4” com a matriz codificadora “A” resultando em matrizes nulas. Ressalta-se que a Figura 36 evidencia cada um dos conjuntos-soluções obtidos.

Verifica-se que o GeoGebra também foi utilizado por Danilo da mesma forma que ocorreu nos itens “a” e “b”, isto como ferramenta facilitadora nas seguintes multiplicações: das matrizes “A” e “M” para, após, igualar o produto à matriz nula de ordem 2 e encontrar os valores da matriz a ser codificada “M”; e, das matrizes “M_1”, “M_2”, “M_3” e “M_4” com a matriz codificadora “A” resultando todos na matriz nula de ordem 2.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de conjecturar (Pensamento Matemático) – pelo estabelecimento da relação da matriz “A” multiplicada com a matriz “M” originar uma matriz nula; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento do símbolo “N” e outros termos expostos no enunciado, com a concentração apenas nos elementos necessários para a resolução; decomposição (Pensamento Computacional) – pela divisão do problema em duas partes: primeiro encontrar a relação existente entre as incógnitas “a”, “b”, “c” e “d” (elementos da matriz “M”), para, após, descobrir valores a serem substituídos que satisfaçam o solicitado pelo enunciado; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pelo estruturação e aplicação do algoritmo

“A*M={{0,0},{0,0}}”, o qual representa a multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz a ser codificada “M” com produto igual a matriz nula de ordem 2.

4.1.6 Da Análise da resolução de Eliane

Eliane apresentou sua resolução através de um arquivo “.ggb”. Questionada por uma professora do curso sobre a localização das soluções dos itens “a”, “b” e “c”, a cursista respondeu com um passo-a-passo das resoluções dos itens “a” e “b”, mencionando não ter conseguido concluir o item “c”.

Abaixo o trecho da interação da cursista com a professora:

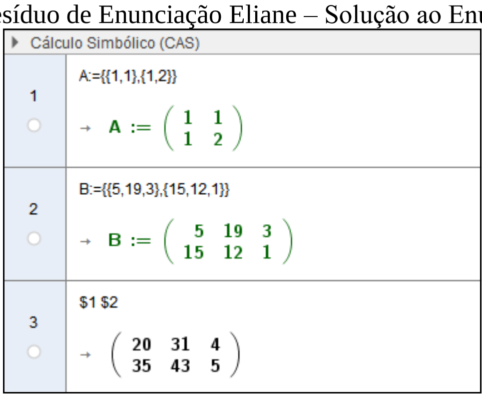
Figura 38: Resíduo de Enunciação Eliane – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14

Olá, professora!
Boa Noite
Passos no Geogebra:
Item A
Primeiramente, digitei na linha 1 A:={{1,1},{1,2}}, montando a matriz. Em seguida na linha 2, B:={{5,19,3},{15,12,1}} (Simbolizando a palavra ESCOLA)
Na linha 3, realizei a multiplicação entre as duas linhas com o comando $1*$2, respondendo assim o item A, a matriz codificada sendo {{20, 31, 4}, {35, 43, 5}}
Item B
No item B, sabendo que as matrizes codificadoras e decodificadoras são inversas, digitei na linha 4 c:={{1,1},{1,2}} e na linha 5 encontrei a inversa da matriz, que seria a decodificadora da mensagem, utilizando c^-1 (Já que minha matriz codificada foi nomeada de C)
Na linha 6, digitei a matriz da mensagem D:={{33,9,8,48},{47,13,9,75}}, finalizando, na linha 7, realizei a multiplicação entre a matriz mensagem e a matriz decodificadora $5*$6
Sendo assim, apareceu o resultado {{19, 5, 7, 21}, {14, 4, 1, 27}}, verificando a mensagem SEGUNDA
c) Não consegui concluir

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Relativo ao item “a” do enunciado 14, a cursista demonstrou a seguinte construção no GeoGebra:

Figura 39: Resíduo de Enunciação Eliane – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

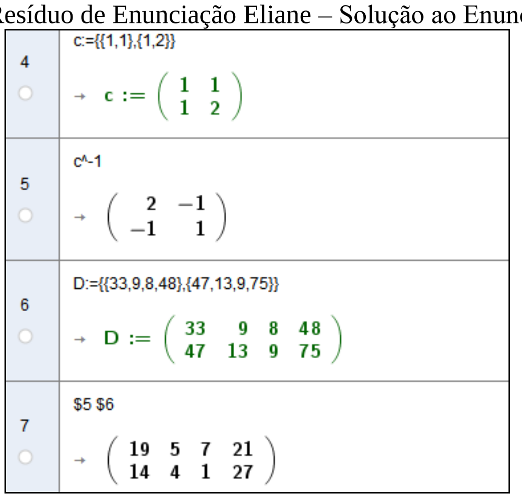
Depreende-se que Eliane inseriu a matriz codificadora “A” na linha 1, a matriz a ser codificada “M” (chamada pela cursista de “B”) na linha 2, resultante da transformação da mensagem “ESCOLA” em uma matriz conforme a tabela exposta pelo enunciado. E, a multiplicação da linha 1 ($1) – matriz “A), com a linha 2 ($2) – matriz “M”, produzindo a matriz codificada “N” na linha 3.

Verifica-se que Eliane buscou inserir as matrizes “A” e “M” (chamada por ela de “B”) para propiciar por conseguinte facilidade na multiplicação entre ambas e promover a solução.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção do símbolo “B” para a matriz a ser codificada “M”; decomposição (Pensamento Computacional) – pela estruturação de primeiro inserir as matrizes “A” e “M”, para, após, realizar a multiplicação de ambas; reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – pela utilização do comando “$1 $2” no GeoGebra e no passo-a-passo descrito na Figura 38 informar o comando “$1*$2”, logo, possivelmente a cursista sabia que o software realiza a multiplicação mesmo sem a presença do símbolo “*” no comando inserido.

Frente ao item “b” do enunciado 14, a cursista exibiu a seguinte construção no GeoGebra:

Figura 40: Resíduo de Enunciação Eliane – Solução ao Enunciado 14 “b”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

A cursista inseriu novamente a matriz codificadora “A” (chamada por ela agora de “c”) na linha 4. Após, demonstrou a matriz decodificadora “B” com a inversão da matriz “A” através do comando “c^-1” (matriz inversa de “c”). Adentrou com a matriz a ser decodificada “N” (chamada pela cursista de “D”) exposta no enunciado, e, por fim, inseriu o comando “$5 $6” para multiplicar a matriz decodificadora “B” (chamada de c^{-1}) com a matriz a ser decodificada “N” (chamada de “D”) produzindo a matriz decodificada “M” que ao utilizar a tabela de numeração das letras exposta pelo enunciado, geram a mensagem “SEGUNDA*”.

Verifica-se que Eliane buscou inserir as matrizes “B” (chamada por ela de c^{-1}) e “N” (chamada por ela de “D”) para propiciar por conseguinte facilidade na multiplicação entre ambas e promover a matriz decodificada “M” e, por fim, produzir a mensagem solicitada no enunciado.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção do símbolo “c” para a matriz codificadora “A”, e “D” para a matriz a ser decodificada; decomposição (Pensamento Computacional) – pela estruturação de primeiro inserir a matriz “A”, produzir a matriz “B” (chamada pela cursista de “c^{-1}”), para, após, realizar a multiplicação das matrizes “B” e “N” (chamada pela cursista de “D”); reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – pela utilização do comando “$5 $6” no GeoGebra e no passo-a-passo descrito na Figura 38 informar o comando “$5*$6”, logo, possivelmente a cursista sabia que o software realiza a multiplicação mesmo sem a presença do símbolo “*” no comando inserido.

4.1.7 Da Análise da resolução de Fernando

Fernando apresentou três arquivos: um no formato “.pdf” com a resolução do enunciado 14 de forma manuscrita; e, dois no formato “.ggb” com as resoluções dos itens “a” e “b” do enunciado 14. O cursista não apresentou a resolução do item “c”.

Abaixo, as resoluções do cursista de forma manuscrita e utilizando o GeoGebra para o item “a” do enunciado 14:

Figura 41: Resíduo de Enunciação Fernando – Resolução Manuscrita Enunciado 14 “a”

Olhando a tabela, segue-se que a matriz que escreve a mensagem numericamente é dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora façamos o produto matricial:

$$N_1 = A.M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$$

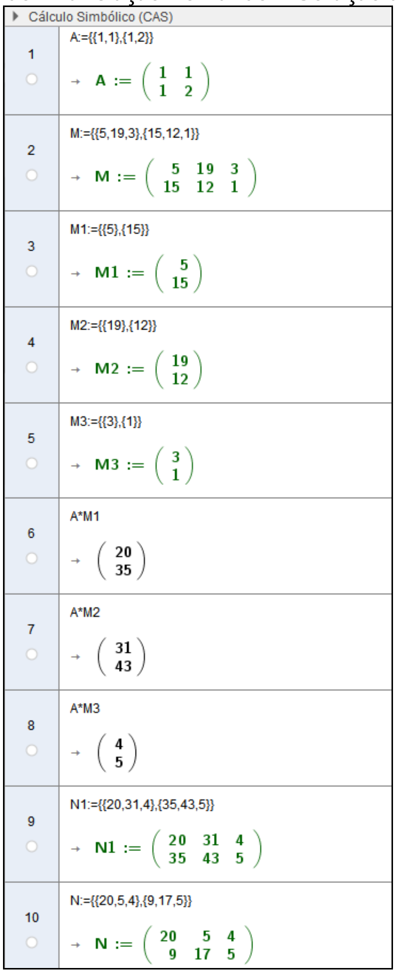
Usando congruência módulo 26 esta matriz é equivalente a seguinte matriz no grupo Z_{26}:

$$N = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 4 \\ 9 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

Olhando as células numéricas da matriz N e novamente consultando a tabela de numeração de letras do alfabeto, segue-se que mensagem codificada que o destinatário recebe é TEDIQE

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 42: Resíduo de Enunciação Fernando – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Fernando descreve na sua publicação que a resolução no GeoGebra possui maior “precisão” e foi “muito mais rápida” comparada com a resolução manuscrita. A ideia proposta em ambas as resoluções é a mesma: introduzir as matrizes codificadora “A” e a ser codificada “M”, para, após, multiplicá-las e obter a matriz codificada “N” (chamada por ele de “N1”).

Entretanto, no GeoGebra o cursista separou as colunas da matriz a ser codificada “M”, conforme linhas 3 a 5, e realizou a multiplicação de cada parte com a matriz codificadora “A”, tendo ao final feito a juntada das partes para formar a matriz codificada “N” (chamada por ele de “N1”).

Na resolução manuscrita e na linha 10, Fernando realizou a subtração de 26 unidades de cada elemento com valor superior a 27 para obter a matriz que denomina a mensagem final (chamada por ele de matriz “N”).

Verifica-se que Fernando constituiu uma direção de interlocução diferente da estabelecida no enunciado com a utilização da subtração de 26 unidades de cada elemento com valor superior a 27 na matriz “N” (chamada por ele de “N1”), ocorrida na linha 10 da resolução realizada no software GeoGebra, e com a tradução da mensagem "TEDIQE" informada por ele na resolução manuscrita.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção do símbolos "M1", "M2", "M3", "M4" e "N1"; formalizar (Pensamento Matemático) – pela separação das colunas da matriz "M", produzindo multiplicações separadas com a matriz codificadora "A"; generalizar (Pensamento Matemático) – pela fidelização do pensamento de subtrair 26 unidades para qualquer elemento com quantidade superior a 27 na matriz "N" (chamada por ele de "N1"); e, decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução na seguinte estrutura: inserção das matrizes "A" e "M", separação das colunas da matriz "M", multiplicação de cada parte com a matriz "A", união dos produtos obtidos para compor a matriz "N".

Perante o item "b" do enunciado 14, Fernando apresentou as seguintes resoluções manuscrita (de forma resumida) e utilizando o GeoGebra:

Figura 43: Resíduo de Enunciação Fernando – Resolução Manuscrita Enunciado 14 "a"

$$P_1 = A^{-1}N_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = A^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = A^{-1}N_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = A^{-1}N_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Assim podemos montar a matriz P cujas colunas são P_1, P_2, P_3 e P_4 respectivamente

$$P = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

Esta matriz já nos permite concluir qual foi a mensagem enviada. Mas seguindo-se o ajuste do item a) vamos usar a conguência módulo 26 em Z_{26}, que finalmente é a nossa matriz S, a qual é dada por:

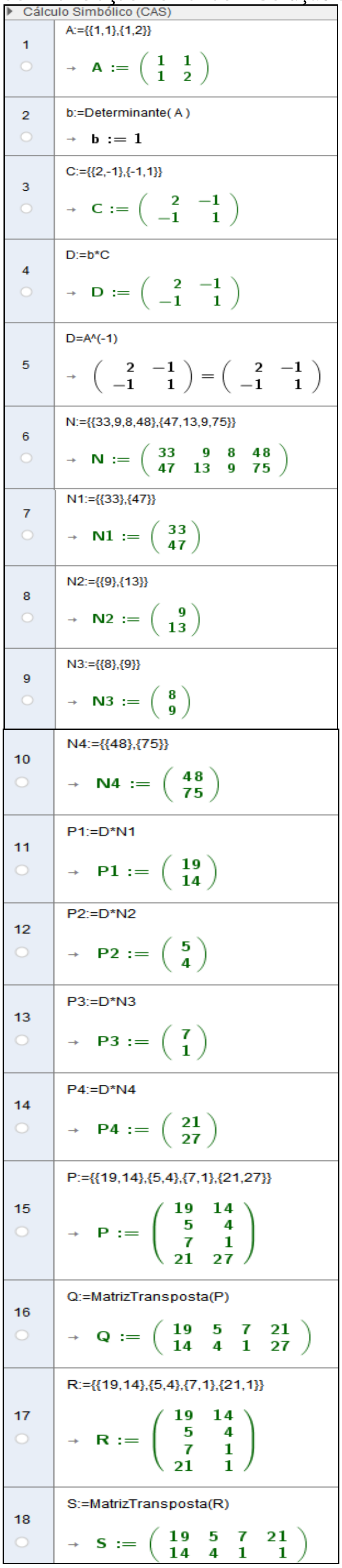
$$S = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Olhando as células numéricas da matriz S e novamente consultando a tabela de numeração de letras do alfabeto, segue-se que mensagem enviada foi

SEGUNDAA

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 44: Resíduo de Enunciação Fernando – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

De forma semelhante à ocorrida no item “a”, Fernando introduziu a matriz codificadora “A”, encontrou o determinante de “A” para saber se era necessário dividir os elementos da matriz decodificadora “B” para encontrar a matriz identidade, descobriu a inversa de “A” e igualou-a à matriz “B” (chamada por ele de “D”), inseriu a matriz a ser decodificada “N” exposta pelo enunciado, separou suas colunas em quatro matrizes “N1”, “N2”, “N3” e “N4”, multiplicou cada matriz com a matriz decodificadora “B” (chamada por ele de “D”) para encontrar a matriz decodificada “M” (chamada por ele de “P”), transpôs a matriz “P” duas vezes, e retirou 26 unidades do elemento que representava o número 27 produzindo a mensagem “SEGUNDAA”.

Lê-se de modo plausível que Fernando também constituiu uma direção de interlocução diferente da estabelecida no enunciado com a utilização da subtração de 26 unidades do elemento da matriz “M” (chamada por ele de “S” na linha 18) que representava o algarismo 27 originando a mensagem “SEGUNDAA” informada por ele na resolução manuscrita e utilizando o GeoGebra.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção do símbolos “N1”, “N2”, “N3”, “N4”, “P1”, “P2”, “P3”, “P4”, “P”, “C”, “D”, “Q”, “R” e “S”; formalizar (Pensamento Matemático) – pela separação das colunas das matrizes “N” e “P”, produzindo multiplicações separadas com a matriz decodificadora “B” (chamada por ele de “D”); generalizar (Pensamento Matemático) – pela fidelização do pensamento de subtrair 26 unidades para qualquer elemento com quantidade superior a 27, ocorrido no último elemento da matriz decodificada “M” (chamada por ele de “S” na linha 18); decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução na seguinte estrutura: inserção da matriz “A”, produção do determinante de “A” para saber se era necessária a divisão dos elementos da matriz inversa para gerar a matriz identidade, encontro da matriz inversa de “A” (matriz decodificadora “B”), inserção da matriz “N” expressa no enunciado, separação das colunas da matriz “N”, multiplicação de cada parte com a matriz “B” (chamada por ele de “D”), união dos produtos obtidos para compor a matriz “M”; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pelos algoritmos constituídos através da divisão da matriz inversa pelo determinante de “A” para produzir a matriz identidade, e da separação das colunas de uma matriz uma a uma para efetuar a multiplicação entre matrizes no GeoGebra.

4.1.8 Da Análise da resolução de Gabriela

Gabriela apresentou apenas a resolução do item “a” do enunciado 14. Informou que teve “dificuldades de fazer” os outros itens. Para tanto, juntou um arquivo “.ggb” com a resolução e demonstrou o passo-a-passo em sua publicação no fórum.

Abaixo a resolução da cursista referente ao item “a” do enunciado 14 utilizando o software GeoGebra e o passo-a-passo da resolução publicado no fórum:

Figura 45: Resíduo de Enunciação Gabriela – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 “a”

1- Construí a matriz A. {{1,1},{1,2}}

2- Construí a matriz ESCOLA. Nomeei de M, {{5,19,3},{15,12,1}}

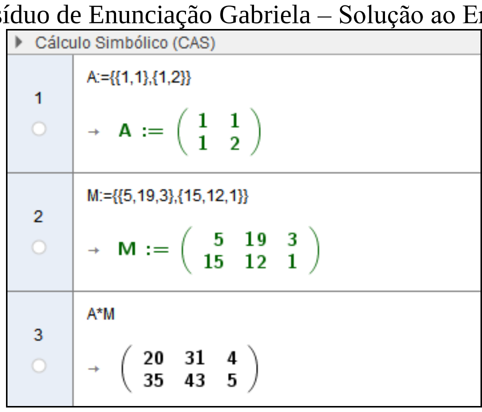
3- Fiz a multiplicação das matrizes A*M

4- Por fim, a mensagem encontrada foi:

A matriz: primeira linha: {20,31,4} e a segunda linha {35, 46, 5}.

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 46: Resíduo de Enunciação Gabriela – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Gabriela inseriu as matrizes “A” codificadora na linha 1 e a codificar “M” na linha 2, sendo esta última o resultado da alteração de seus elementos conforme o disposto na tabela de numeração das letras disposta no enunciado. Após, realizou a multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz a codificar “M” através do comando “A*M” na linha 3, produzindo a matriz codificada “N”.

Verifica-se que Gabriela utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora da multiplicação das matrizes “A” e “M”.

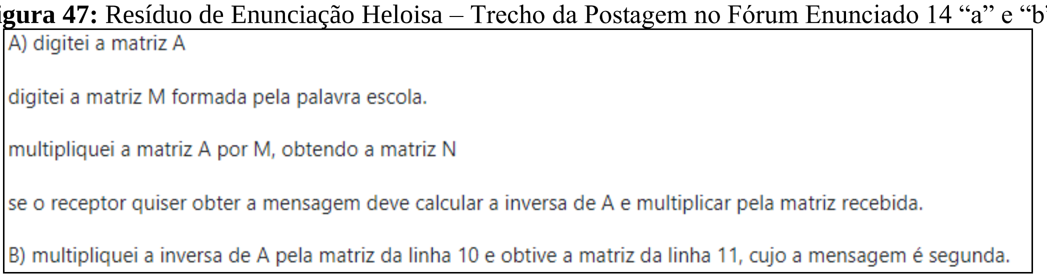
Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de conjecturar (Pensamento Matemático) – pela alteração dos elementos da mensagem “ESCOLA” perante a tabela de numeração das letras disposta no enunciado para construir a matriz a codificar “M”; abstrair (Pensamento Matemático e Computacional) – pela supressão do símbolo “N” da matriz codificada, por não interferir na solução; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo “A*M” para demonstrar a matriz codificada “N” na linha 3.

4.1.9 Da Análise da resolução de Heloisa

Heloisa apresentou um arquivo “.ggb” para os itens “a” e “b” do enunciado 14, com uma descrição da dinâmica envolvida na resolução em sua publicação no fórum. Ela não realizou uma proposta de resolução para o item “c”.

Abaixo o trecho da publicação de Heloisa no fórum que compreende a descrição da resolução:

Figura 47: Resíduo de Enunciação Heloisa – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 “a” e “b”


A) digitei a matriz A

digitei a matriz M formada pela palavra escola.

multipliquei a matriz A por M, obtendo a matriz N

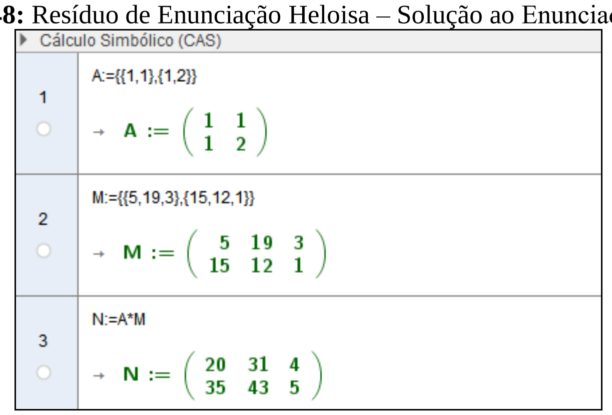
se o receptor quiser obter a mensagem deve calcular a inversa de A e multiplicar pela matriz recebida.

B) multipliquei a inversa de A pela matriz da linha 10 e obtive a matriz da linha 11, cujo a mensagem é segunda.

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Referente a resolução da cursista do item “a” do enunciado 14:

Figura 48: Resíduo de Enunciação Heloisa – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

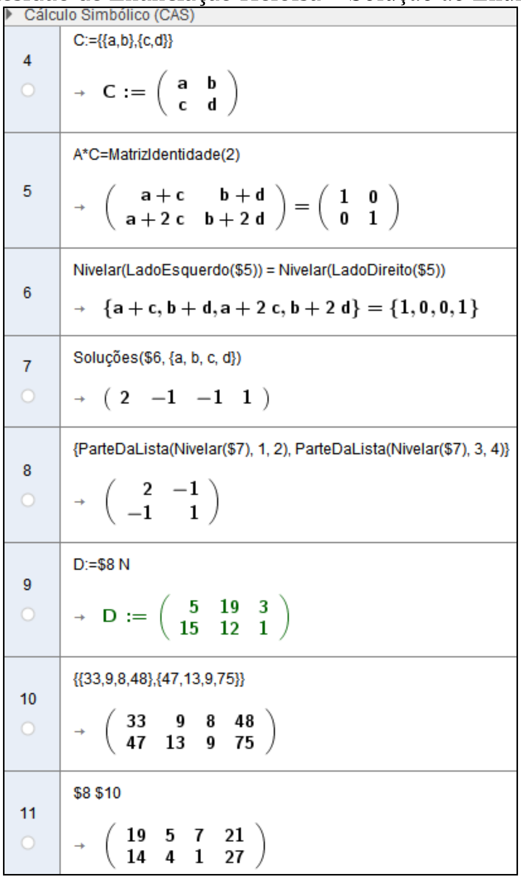
Heloisa inseriu as matrizes “A” codificadora na linha 1 e a ser codificada “M” na linha 2, sendo esta última o resultado da alteração de seus elementos conforme o disposto na tabela de numeração das letras disposta no enunciado. Após, realizou a multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz a ser codificada “M” através do comando “N:=A*M” na linha 3, produzindo a matriz codificada “N”.

Verifica-se que Heloisa utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora da multiplicação das matrizes “A” e “M” para obter a matriz “N”.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização dos símbolos “A”, “M” e “N” assim como disposto no enunciado para demonstrar as mesmas matrizes adotadas na resolução da mensagem “FUVEST”; conjecturar (Pensamento Matemático) – pela alteração dos elementos da mensagem “ESCOLA” perante a tabela de numeração das letras disposta no enunciado para construir a matriz a codificar “M”; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo “N:=A*M” para demonstrar a matriz codificada “N” na linha 3.

Perante a resolução de Heloisa ao item “b” do enunciado 14:

Figura 49: Resíduo de Enunciação Heloisa – Solução ao Enunciado 14 “b”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

A cursista inseriu a matriz decodificadora “B” (chamada por ela de “C”) através das incógnitas “a”, “b”, “c” e “d”, relacionou a multiplicação da matriz codificadora “A” com a matriz decodificadora “B” (chamada por ela de “C”) produzindo a matriz identidade de ordem 2 através do comando “A*C=MatrizIdentidade(2)”. Após, demonstrou a matriz decodificadora “B” pelos comandos em sequência: “Nivelar(LadoEsquerdo($5))=Nivelar(LadoDireito($5))”;

“Soluções($6, {a, b, c, d})”; e, “{ParteDaLista(Nivelar($7), 1, 2), ParteDaLista(Nivelar($7), 3, 4)}”.

Em seguida, a cursista multiplicou a matriz decodificadora “B” (disposta na linha 8) com a matriz a ser decodificada “N” (já alterado seus elementos pela tabela de numeração das letras disposta no enunciado) para produzir a matriz decodificada “M” (chamada por ela de “D”), isto para comprovar que a resolução do item “a” do enunciado 14 realmente produz a mensagem “ESCOLA”.

Retornando ao item “b” do enunciado 14, a cursista finalizou sua resolução inserindo a matriz a ser decodificada “N” disposta no enunciado e realizou a multiplicação desta matriz com a matriz decodificadora “B” (disposta na linha 8) resultando na matriz decodificada “M” (indicada na linha 11), originando a mensagem “segunda” exposta na parte final da Figura 47.

Verifica-se que Heloisa utilizou o GeoGebra da mesma forma que o exposto no item “a”, isto como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz decodificadora “B” e da multiplicação das matrizes “B” e “N” para obter a matriz “M”.

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização dos símbolos “C” e “D”; conjecturar (Pensamento Matemático) – pela alteração dos elementos da matriz da linha 11 perante a tabela de numeração das letras disposta no enunciado para decifrar a mensagem “segunda”; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção dos algoritmos “A*C=MatrizIdentidade(2)”, “D:=$8 N” e “$8 $10” nas linhas 5, 9 e 11 respectivamente.

4.1.10 Da Análise da resolução de Igor

Igor produziu um arquivo “.ggb” com a resolução dos itens “a” e “b”, e uma tentativa de resolução do item “c”. Além disso, publicou o passo-a-passo das construções estabelecidas em cada item do enunciado 14, incluindo a tentativa exposta no item “c”.

Abaixo o passo-a-passo e a resolução do item “a” do enunciado 14 exposta no GeoGebra por Igor:

Figura 50: Resíduo de Enunciação Igor – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 “a”

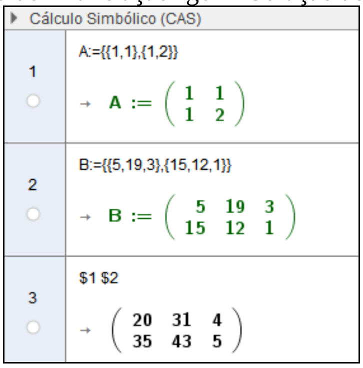
Item A

Primeiramente, digitei na linha 1 A:={{1,1},{1,2}}, montando a matriz. Em seguida na linha 2, B:={{5,19,3},{15,12,1}} (Simbolizando a palavra ESCOLA)

Na linha 3, realizei a multiplicação entre as duas linhas com o comando $1*$2, respondendo assim o item A, a matriz codificada sendo {{20, 31, 4}, {35, 43, 5}}

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 51: Resíduo de Enunciação Igor – Solução ao Enunciado 14 "a"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Depreende-se que Igor inseriu as matrizes codificadora "A" e a codificar "M" (chamada por ele de "B"), tendo já realizado a transformação da mensagem "ESCOLA" conforme a tabela de numeração das letras exposta pelo enunciado. Após, o cursista realizou a multiplicação das duas matrizes com o comando "$1 $2", resultando na matriz codificada "M" (identificada por ele apenas como "matriz codificada" na parte final da Figura 50).

Verifica-se que Igor utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz codificada através da multiplicação das matrizes "A" e "M" (chamada por ele de "B").

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização do símbolo "B" para representar a matriz a ser codificada "M"; abstrair (Pensamento Matemático e Computacional) – pela dispensa do uso do símbolo "N" (exposto no enunciado) para representar a matriz codificada ante sua irrelevância na propositura da solução; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo "$1 $2" para representar a multiplicação das matrizes codificadora "A" e a ser codificada "M" (chamada por ele de "B").

Adiante, o passo-a-passo e a resolução do item "b" do enunciado 14 expostos por Igor:

Figura 52: Resíduo de Enunciação Igor – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 "b"

Item B

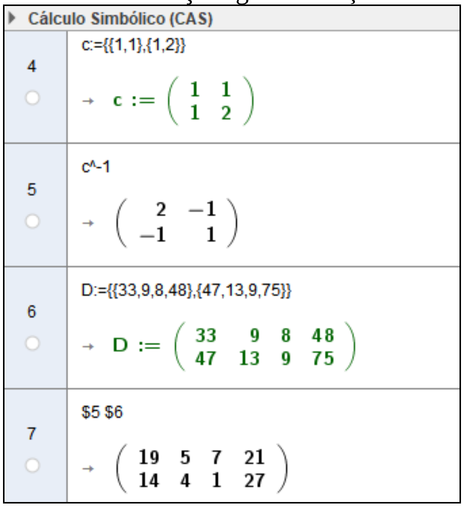
No item B, sabendo que as matrizes codificadoras e decodificadoras são inversas, digitei na linha 4 c:={{1,1},{1,2}} e na linha 5 encontrei a inversa da matriz, que seria a decodificadora da mensagem, utilizando c^-1 (Já que minha matriz codificada foi nomeada de C)

Na linha 6, digitei a matriz da mensagem D:={{33,9,8,48},{47,13,9,75}}, finalizando, na linha 7, realizei a multiplicação entre a matriz mensagem e a matriz decodificadora $5*$6

Sendo assim, apareceu o resultado {{19, 5, 7, 21}, {14, 4, 1, 27}}, verificando a mensagem SEGUNDA

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 53: Resíduo de Enunciação Igor – Solução ao Enunciado 14 “b”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

O cursista inseriu novamente a matriz codificadora “A” (chamando-a de “c”), realizou a sua inversão utilizando o comando “c^-1” para encontrar a matriz decodificadora “B”, introduziu a matriz a ser decodificada “M” (chamando-a de “D”) exposta no enunciado, e, por fim, multiplicou a matriz decodificadora “B” (exposta na linha 5) com a matriz a ser decodificada “M” (exposta na linha 6 por “D”) através do comando “$5 $6”, descrevendo a mensagem como “SEGUNDA”, conforme a parte final da Figura 52.

Verifica-se que Igor utilizou o GeoGebra da mesma forma que o ocorrido no item “a”, isto como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz decodificadora “B” pela inversão da matriz codificadora “A”, e da multiplicação das matrizes decodificadora “B” (exposta na linha 5) e a ser decodificada “N” (exposta na linha 6 por “D”) para obter a matriz decodificada “M” (exposta na linha 7).

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização dos símbolos “c” e “D”; conjecturar (Pensamento Matemático) – pela transformação dos elementos da matriz da linha 7 perante a tabela de numeração das letras disposta no enunciado para decifrar a mensagem “SEGUNDA” exposta na parte final da Figura 52; formalizar (Pensamento Matemático) – pela reiterada prática do algoritmo que indica a multiplicação entre linhas: “$1 $2” (no item “a”) e, agora, “$5 $6” na linha 7; abstrair (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento dos símbolos “A”, “B”, “M” e “N” indicados no enunciado e que não influenciam na solução; decomposição (Pensamento Computacional) – pela fragmentação da resolução em duas partes: encontrar a matriz decodificadora “B” (linha 5) e, após, multiplicar a matriz encontrada com a matriz a ser decodificada “M” (chamada pelo cursista de “D”); e, produção de algoritmo

(Pensamento Computacional) – pela inserção dos algoritmos "c^-1" para determinar a matriz inversa de "A" e "$5 $6" para encontrar a matriz decodificada "M" (expressa na linha 7).

Por conseguinte, o passo-a-passo e a tentativa de resolução do item "c" do enunciado 14 expostos por Igor:

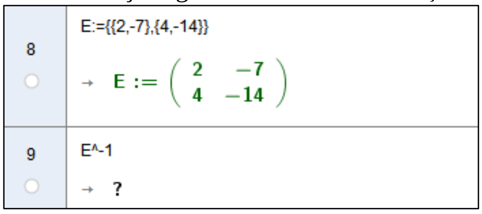
Figura 54: Resíduo de Enunciação Igor – Trecho da Postagem no Fórum Enunciado 14 "c"

Item C

Digitei na linha 8 a matriz indicada E:={{2,-7},{4,-14}} e digitando na linha 9 E^-1, pode-se verificar que a matriz indicada não tem inversa aparecendo a mensagem "?", ou seja, não possível decodificar. Não consegui assim, identificar a sequencia de 4 números indicada.

Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Figura 55: Resíduo de Enunciação Igor – Tentativa de Solução ao Enunciado 14 "c"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

Verifica-se que, nesta tentativa de resolução, Igor constituiu uma direção de interlocução diferente da estabelecida no enunciado, isto através da inserção do pensamento de que a matriz decodificadora será obtida em qualquer caso pela inversão da matriz codificadora.

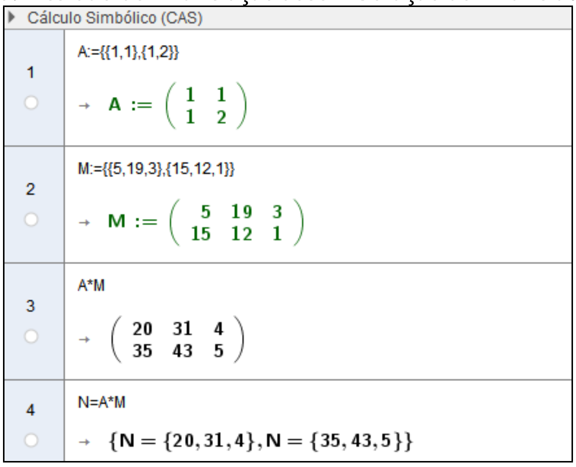
Referente às modalidades de pensamento, a tentativa de resolução compreende vestígios do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção do símbolos "E" para a matriz codificadora "A"; generalizar (Pensamento Matemático) – pela vinculação da ideia de que em qualquer caso a matriz decodificadora "B" é obtida pela inversão da matriz codificadora "A" (chamada pelo cursista de "E"); decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução expresso na Figura 54, o qual ocorreria da seguinte forma: descoberta da matriz decodificadora "B", e identificação da sequência de quatro números solicitada no enunciado; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo "E^-1" na linha 9 para descobrir a matriz decodificadora "B".

4.1.11 Da Análise da resolução de José

José apresentou em sua publicação um arquivo no formato ".ggb" com a resolução para o item "a" do enunciado 14. Questionado por uma professora sobre as resoluções dos itens "b" e "c", o cursista disse que teve dificuldades no desenvolvimento das resoluções para estes itens e não apresentou alterações para o arquivo inicial ou qualquer outra tentativa de resolução.

Para tanto, segue a resolução do item “a” do enunciado 14 realizada por José utilizando o software GeoGebra:

Figura 56: Resíduo de Enunciação José – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

O cursista inseriu a matriz codificadora “A” na linha 1 e a matriz a ser codificada “M” na linha 2. Em seguida, utilizou o comando “A*M” para multiplicar as matrizes e encontrar a matriz codificada “N”, a qual foi relacionada na linha 4 pelo comando “N=A*M”.

Verifica-se que José utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz codificada “N” (linha 4) através da multiplicação (linha 3) da matriz codificadora “A” (linha 1) com a matriz a ser codificada “M” (linha 2).

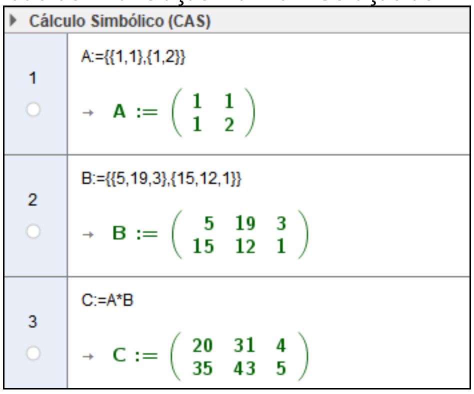
Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização do comando “A*M” para representar a matriz codificada “N” na linha 4; decomposição (Pensamento Computacional) – pela vinculação das etapas na seguinte ordem: introduzir as matrizes “A” e “M”, realizar a multiplicação das matrizes “A” e “M”, e representar a matriz “N”; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo “A*M” nas linhas 3 e 4 para conceber a multiplicação das matrizes codificadora “A” e a ser codificada “M”.

4.1.12 Da Análise da resolução de Karina

Karina apresentou três arquivos no formato “.ggb” contemplando cada um a resolução dos itens “a”, “b” e “c” do enunciado 14.

Abaixo a resolução do item “a” do enunciado 14 realizada por Karina:

Figura 57: Resíduo de Enunciação Karina – Solução ao Enunciado 14 "a"



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

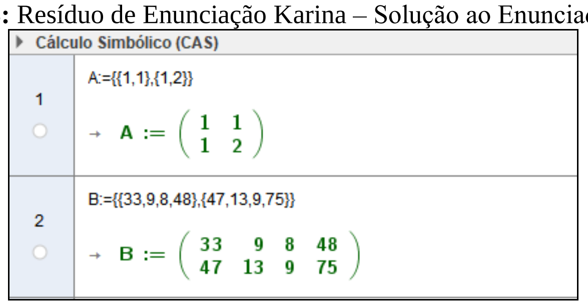
A cursista inseriu a matriz codificadora "A" e a matriz a ser codificada "M" (chamada por ela de "B") já com a transformação dos elementos da mensagem "ESCOLA" conforme a tabela de numeração das letras exposta no enunciado. Após, descobriu-se a matriz codificada "N" (chamada por ela de "C") através do comando "C:=A*B".

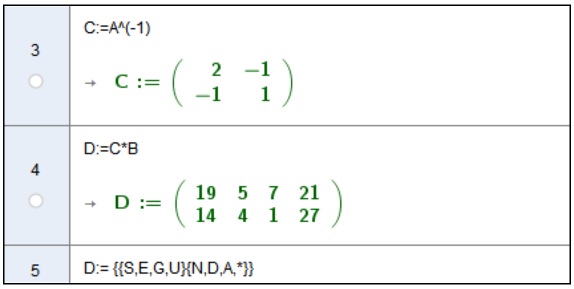
Verifica-se que Karina utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz codificada "N" (chamada por ela de "C") através da multiplicação da matriz codificadora "A" com a matriz a ser codificada "M" (chamada por ela de "B").

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização dos símbolos "B" e "C" para representarem as matrizes a ser codificada "M" e codificada "N" respectivamente; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pela inutilização dos símbolos "M" e "N" expressos no enunciado; decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução na seguinte ordem: introdução das matrizes "A" e "M" (chamada de "B"), realização da multiplicação das matrizes "A" e "M" (chamada de "B") resultando na matriz "N" (chamada de "C"); e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo "C:=A*B" na linha 3 para realizar a multiplicação das matrizes codificadora "A" e a ser codificada "M" (chamada de "B") para encontrar a matriz codificada "N" (chamada de "C").

Perante o item "b" do enunciado 14, a cursista produziu a seguinte resolução:

Figura 58: Resíduo de Enunciação Karina – Solução ao Enunciado 14 "b"





Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

A cursista fez a inserção da matriz codificadora "A" e da matriz a ser decodificada "N" (chamada por ela de "B"). Por conseguinte, introduziu o comando "C:=A^(-1)" para descobrir a matriz decodificadora "B" (chamada por ela de "C") através da inversibilidade da matriz codificadora "A". Depois, Karina efetuou a multiplicação da matriz decodificadora "B" (chamada por ela de "C") com a matriz a ser decodificada "N" (chamada por ela de "B"), produzindo a matriz decodificada "N" (chamada por ela de "D"), pelo comando "D:=C*B". Por fim, trocou os elementos da matriz decodificada "N" (chamada por ela de "D") conforme a tabela de numeração das letras expressa no enunciado, encontrando a mensagem "SEGUNDA*", isto diante da inserção do comando "D:={{S,E,G,U}{N,D,A,*}}" na linha 5.

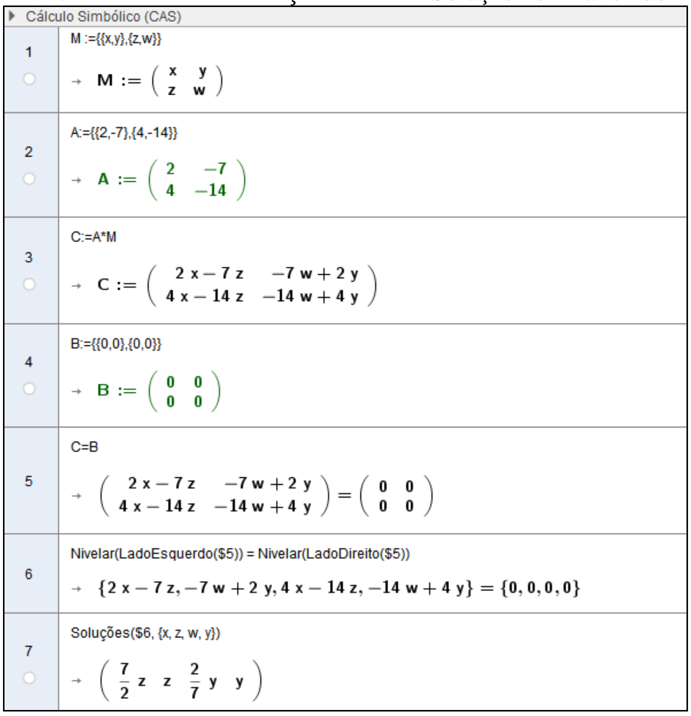
Verifica-se que Karina utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz decodificadora "B" (chamada por ela de "C") através da inversão da matriz codificadora "A", e da multiplicação da matriz decodificadora "B" (chamada por ela de "C") com a matriz a ser decodificada "N" (chamada por ela de "B"), originando a matriz decodificada "M" (chamada por ela de "D").

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização dos símbolos "B", "C" e "D" para representarem as matrizes a ser decodificada "N", decodificadora "B" e decodificada "M" respectivamente; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento dos símbolos "B", "M" e "N" expressos no enunciado, ante a irrelevância perante a obtenção da solução; visualizar (Pensamento Matemático) – pela inserção do comando descrito na linha 5, visto que este é o modo de inserção de matrizes no GeoGebra e a cursista inseriu na tentativa de visualizar uma matriz com linhas "S E G U" e "N D A *" respectivamente; decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução na seguinte ordem: introdução das matrizes "A" e "N" (chamada de "B"), realização da matriz inversa de "A" (chamada de "C"), multiplicação da matriz inversa de "A" e "N" (chamada de "B") resultando na matriz "M" (chamada de "D"), e aplicação da tabela de numeração das letras expressa no enunciado; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção dos algoritmos: "C:=A^-

1” na linhas 3 para encontrar a matriz decodificadora, “D:=C*B” na linha 4 para encontrar a matriz decodificada, e “D:={{S,E,G,U}{N,D,A,*}}” na linha 5 para indicar a mensagem “SEGUNDA*”.

Relativo ao item “c” do enunciado 14, a cursista produziu a seguinte resolução:

Figura 59: Resíduo de Enunciação Karina – Solução ao Enunciado 14 “c”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

A cursista inseriu uma matriz genérica de ordem 2 com seus elementos sendo as incógnitas “x”, “y”, “z” e “w” para representar a matriz a ser codificada “M”, adentrou com a matriz codificadora “A” expressa no enunciado, realizou a multiplicação da matriz genérica com a matriz codificadora “A”, igualou o resultado desta multiplicação com uma matriz nula de ordem 2 (chamando-a de “B”), e utilizou os comandos “Nivelar(LadoEsquerdo($5)) = Nivelar(LadoDireito($5))” e “Soluções($6, {x, z, w, y})” para determinar a relação entre os elementos da matriz a ser codificada “M”.

Verifica-se que Karina buscou uma forma de conseguir obter os elementos da matriz a ser codificada “M” através do estabelecimento de incógnitas e da relação “A.M=N”, encontrando a relação expressa na linha 7 dos elementos da matriz a ser codificada “M” em função das incógnitas “z” e “y”. Além disso, a cursista constituiu uma direção de interlocução diferente da expressa no enunciado por demonstrar sua solução de forma diversa da solicitada.

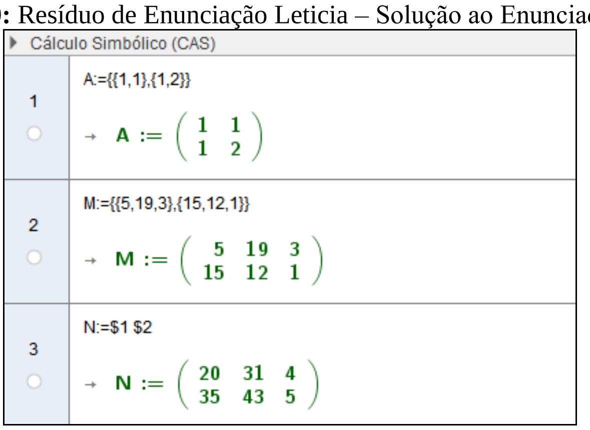
Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela introdução das incógnitas na linha 1 para representar os elementos da matriz a ser codificada “M”, do símbolo “C” para a multiplicação entre as matrizes “A” e “M”, do símbolo “B” para a matriz nula de ordem 2, e da linha 7 para a solução do enunciado; generalizar (Pensamento Matemático) – pela aplicação de uma matriz genérica através de incógnitas na linha 1, isto a ser referenciada para outros casos semelhantes a fim de encontrar a matriz a ser codificada “M”; abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pela desconsideração em utilizar o símbolo “N” expresso no enunciado, por não ser relevante na propositura da solução; decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução da seguinte forma: introdução da matriz genérica e da matriz codificadora “A”, multiplicação das matrizes “A” e “M”, igualdade do produto obtido com a matriz nula, e estabelecimento da solução; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção dos algoritmos “C:=A*M” e “C=B” nas linhas 3 e 5 respectivamente.

4.1.13 Da Análise da resolução de Letícia

Letícia apresentou um arquivo no formato “.ggb” com a resolução do item “a” do enunciado 14. Questionada por uma professora sobre a ausência das resoluções para os itens “b” e “c”, a cursista disse que teve dificuldades e não demonstrou outra proposta de resolução.

Abaixo a resolução de Letícia para o item “a” do enunciado 14 utilizando o GeoGebra:

Figura 60: Resíduo de Enunciação Leticia – Solução ao Enunciado 14 “a”



Fonte: http://www.ogeogebra.com.br/

A cursista introduziu as matrizes codificadora “A” (linha 1) e a ser codificada “M” (linha 2), isto já efetuada a modificação dos elementos da matriz “M” conforme a tabela de numeração das letras exposta no enunciado. Após, para realizar a multiplicação entre as matrizes codificadora “A” e a ser codificada “M”, Letícia inseriu o comando “N:=$1 $2”, produzindo a matriz codificada “N” (linha 3).

Verifica-se que Letícia utilizou o GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na obtenção da matriz codificada “N” (linha 3) através da multiplicação da matriz codificadora “A” (linha 1) com a matriz a ser codificada “M” (linha 2).

Referente às modalidades de pensamento, a resolução compreende vestígios: do ato de representar (Pensamento Matemático) – pela utilização dos símbolos “$1” e “$2” para representarem as matrizes codificadora “A” e a ser codificada “M” respectivamente; decomposição (Pensamento Computacional) – pelo planejamento da resolução na seguinte ordem: introdução das matrizes “A” e “M” e realização da multiplicação das matrizes “A” e “M”, produzindo a matriz “N”; e, produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção do algoritmo “N:=$1 $2” para efetuar a multiplicação das matrizes “A” e “M”, resultando na matriz “N”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de todo o exposto pelo arcabouço teórico adotado nesta pesquisa, considera-se que o **Pensamento Matemático** trazido por Dreyfus (2002) – tanto o Pensamento Matemático Elementar (PME), quanto o Pensamento Matemático Avançado (PMA) – envolve a prática de processos cognitivos desenvolvidos pelos atos de: **Representar, Generalizar, Visualizar, Classificar, Analisar, Conjecturar, Induzir, Formalizar e Abstrair.**

Já o **Pensamento Computacional** é, na análise deste autor, potencialmente vislumbrado a partir de processos mentais oriundos dos quatro pilares trazidos por Dantas (2021) e Brackmann (2017), quais sejam: a **Decomposição,** o **Reconhecimento de Padrões,** a **Abstração** e a **Produção de Algoritmos**.

Desta feita, durante a análise da pesquisa de cunho qualitativo interpretativo verificou-se que os vestígios de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional apresentaram características hora distintas/afastadas e hora semelhantes/próximas.

Em outras palavras, percebeu-se que em determinados momentos alguns fatores que possivelmente embasavam os vestígios de Pensamento Matemático também estavam presentes nos que justificavam os vestígios de Pensamento Computacional, e vice-e-versa.

A título exemplificativo, na análise do cursista Alberto referente ao item “a” constatou-se semelhanças entre os vestígios de conjecturar (Pensamento Matemático) – pelo estabelecimento das etapas previamente definidas em cada sequência de comandos dispostos nas linhas da Janela CAS; e de decomposição (Pensamento Computacional) – ao separar cada matriz em uma linha específica.

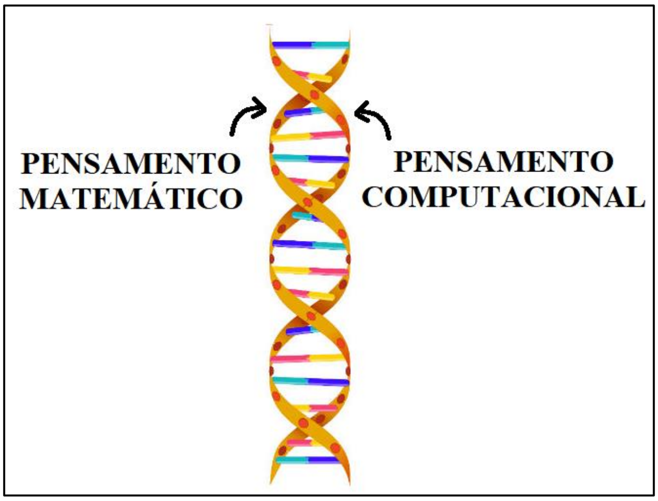
Outro exemplo está presente na análise da cursista Eliane também referente ao item “a” averiguou-se similaridades nos vestígios de representar (Pensamento Matemático) – pela adoção do símbolo “B” para a matriz a ser codificada “M; e, de reconhecimento de padrões (Pensamento Computacional) – pela utilização do comando “$1 $2” no GeoGebra e no passo-a-passo descrito na Figura 38 informar o comando “$1*$2”, logo, possivelmente a cursista sabia que o software realiza a multiplicação mesmo sem a presença do símbolo “*” no comando inserido.

Por sua vez, em mais outro exemplo na análise da cursista Karina referente ao item “b” apurou-se semelhanças nos vestígios de visualizar (Pensamento Matemático) – pela inserção do comando descrito na linha 5, visto que este é o modo de inserção de matrizes no GeoGebra e a cursista inseriu na tentativa de visualizar uma matriz com linhas “S E G U” e “N

D A *” respectivamente; e de produção de algoritmo (Pensamento Computacional) – pela inserção dos algoritmos: “C:=A^-1” na linha 3 para encontrar a matriz decodificadora, “D:=C*B” na linha 4 para encontrar a matriz decodificada, e “D:={{S,E,G,U}{N,D,A,*}}” na linha 5 para indicar a mensagem “SEGUNDA*”.

Não é crível referendar que os vestígios destacados são necessariamente iguais; e, sim, eles indiretamente parecem transcursar um a partir do outro, através de alguma espécie de entrelaçamento. Abaixo apresenta-se a ideia de um esquema gráfico sobre o envolvimento dos vestígios de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional em uma perspectiva semelhante da fita dupla em forma de espiral presente no ácido desoxirribonucleico (DNA):

Figura 61: Semelhança do Entrelaçamento dos Pensamentos Matemático e Computacional na Resolução de Problemas



Fonte: Autor

Assim sendo, entendeu-se que pelos vestígios analisados durante a resolução de problemas o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional acabam por se entrelaçar, caminham em direções semelhantes durante a produção da enunciação, possuem aspectos e elementos comuns, mas que estes não são necessariamente iguais.

Esta aproximação pode ser tão intensa que às vezes se torna quase imperceptível, isto como no caso do ato de abstrair (Pensamento Matemático) e da abstração (Pensamento Computacional) presente em vários momentos da análise.

Neste trabalho não foi possível elencar especificamente quais são as diferenças entre estes dois processos, tanto é que durante a análise ocorreu a classificação dos vestígios que apresentavam o ato de abstrair (Pensamento Matemático) e da abstração (Pensamento Computacional) como “Pensamento Matemático e Computacional”, contudo, em hipótese, pondera-se que os vestígios anteriores ao analisado podem contribuir em uma aproximação dos posteriores.

Ou seja, na análise da cursista Karina perante o item “b” o vestígio do ato de abstrair (Pensamento Matemático e Computacional) – pelo afastamento dos símbolos “B”, “M” e “N” expressos no enunciado, ante a irrelevância perante a obtenção da solução; está mais próximo do Pensamento Matemático, visto que ele possivelmente ocorreu durante a Compreensão do Problema, tema este descrito por Polya (2006) como fundamental na iniciação de uma resolução.

Mas, já na análise do cursista Carlos referente ao item “b” o vestígio de abstração (Pensamento Matemático e Computacional) – pela desconsideração da matriz decodificadora “B” durante a resolução; está mais próximo do Pensamento Computacional, pelo fato de que possivelmente Carlos fez o afastamento da matriz decodificadora “B” por identificar que ela seria desnecessária para o algoritmo criado por ele na resolução.

Conclui-se que no entrelaçamento do Pensamento Matemático e Pensamento Computacional a distância entre os dois processos mentais pode ser perceptível – por exemplo: ato de conjecturar (PM) e decomposição (PC); ou, semi-perceptível – por exemplo: ato de abstrair (PM) e abstração (PC).

Desta feita, entender os processos mentais de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional e o entrelaçamento existente entre ambos pode contribuir na melhor identificação de problemas oriundos do cotidiano.

Por fim, considera-se que o assunto abordado neste trabalho clama ser mais discutido no âmbito acadêmico e além dele, pois reflete em temas de suma importância para o cenário educacional e político brasileiro, visto que já está respaldado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017 e nos planejamentos de aulas dos professores atuantes no Novo Ensino Médio em vigor.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia.** 1.ed. Tradução de Alfredo Bosi. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALIGHIERI, Dante. **A divina comédia.** Tradução de José Pedro Xavier. 12.ed. São Paulo: Atena, 2003.

ANDRADE, André Rubião de. Observações sobre o conhecimento empírico em Aristóteles. **Revista Ítaca,** Rio de Janeiro, v. 1, n. 15, p. 32-41, ago, 2010. Disponível em: https://revistas.ufrj.br/index.php/Itaca/article/view/283/265. Acesso em: 05 jun. 2021.

ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 29, p. 108-118, ago, 2005. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1413-24782005000200009. Acesso em: 20 fev. 2022.

BARCELOS, Thiago Shumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento computacional e Educação Matemática: relações para o ensino de computação na educação básica. **Workshop sobre Educação em Computação - WEI**, Curitiba, 20.ed, jul., 2012. Disponível em: http://www2.sbc.org.br/csbc2012/anais_csbc/eventos/wei/. Acesso em: 18 dez. 2021.

BÍBLIA SAGRADA. Gênesis 1:26-27. **Bíbliaon** – Bíblia Sagrada Online. Disponível em: https://www.bibliaon.com/versiculo/genesis_1_26-28/. Acesso em: 16 set. 2021.

BLIKSTEIN, Paulo. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação.** 2008. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 19, nov. 2021.

BRACKMANN, Christian Puhlmann. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional através de Atividades Desplugadas na Educação Básica.** Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

DANTAS, Sérgio Carrazedo. II ENCOMATI - Encontro de Matemática na Internet - 2º Dia. **Youtube**, 17 nov. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=J8_Jj1VG9n8&t. Acesso em: 03 abr. 2022.

DENZIN, Norman Kent; LINCOLN, Yvonna Sessions. **The SAGE handbook of qualitative research.** Thousand Oaks: Sage Publications, 2005. Disponível em: https://corpoemtransito.wordpress.com/2015/ 04/08/denzin-lincoln-2006/. Acesso em: 22 jun. 2022.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer, 2002.

EBRADI. **Animus, ânimus ou animos?**. Disponível em: https://www.ebradi.com.br/coluna-ebradi/animus/. Acesso em: 07 nov. 2021.

FRANÇA JÚNIOR, Francisco Cristiano de; TASSIGNY, Mônica Mota. Sistemas de camadas de aculturamento institucional em Immanuel Kant aplicado ao ensino superior em administração. **Cadernos EBAPE.BR**, Fortaleza, v. 16, n. 3, s/p, jul./set., 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1679-395162526. Acesso em: 25 set. 2021.

GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?**. c2022. Disponível em: https://www. geogebra.org/ about?lang=pt-PT. Acesso em: 22 mar. 2022.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

HUME, David. **Investigações sobre o entendimento humano e sobre os princípios da moral.** Tradução de José Oscar de Almeida Marques. 1.ed. São Paulo: UNESP, 2004.

INSTITUTO GEOGEBRA – UESB. **O que é GeoGebra?**. c2014. Disponível em: http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page_id=7. Acesso em: 20 mar. 2022.

KANT, Immanuel. **Resposta à pergunta:** que é esclarecimento?. 2.ed. Tradução de Floriano de Sousa Fernandes. Petrópolis: Vozes, 1985.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. 5.ed. Tradução de Alexandre Fradique Morujão e Manuela Pinto dos Santos. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KURSHAN, Barbara. Thawing from a Long Winter in Computer Science Education. **Forbes**, p. 2,fev. 2016. Disponível em: https://www.forbes.com/sites/barbarakurshan/2016/02/25/ thawing-from-a-long-winter-in-computer-science-education/?sh=79d2a0aa284d. Acesso em: 12 jun. 2022.

LINS, Romulo Campos. Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula. **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 2, p. 26-31, 1994a.

LINS, Romulo Campos. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**, Blumenau, v.1, p. 29-39, abr./jun., 1994b.

LINS, Romulo Campos. **Análise sistemática e crítica da produção acadêmica e da trajetória profissional.** Tese (Livre Docência) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

LINS, Romulo Campos. **Modelo dos Campos Semânticos**. 2012. Disponível em: http://sigma-t.org/permanente/2012.pdf. Acesso em: 07 nov. 2021.

PAPERT, Seymour. **Mindstorms:** children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books, 1980.

PAULO, João Pedro Antunes de. **Compreendendo formação de professores no âmbito do Modelo dos Campos Semânticos.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, p. 294, 2020.

PLATÃO. **A República.** Tradução de Maria Helena da Rocha. 9.ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1949.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** 2.ed. Rio de janeiro: Editora Interciência, 2006.

PORTO, Marcus Vinicius Continentino. **O estoicismo de Sêneca e suas considerações sobre Deus e morte.** Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Instituto de Ciências Humanas e Filosofia, Universidade Federal Fluminense, Niterói, p. 91, 2018.

SCHALKWIJK, Louis Van; BERGEN, Theodorus Clemens Maria; ROOLJ, Arnould Van. Learning to prove by investigations: a promising approach in Dutch secondary education. **Educational Studies in Mathematics**, Nijmegen, v. 43, p. 293-311, 2000. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226301611_Learning_to_prove_by_investigations_a_promising_approach_in_Dutch_secondary_education. Acesso em: 23 maio 2022.

SÊNECA. **A vida feliz.** Tradução de Fábio Meneses Santos. 2.ed. São Paulo: Escala, 2006.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO. **Referências de formação em computação:** educação básica. 2017. Disponível em: https://www.sbc.org.br/images/ComputacaoEducacaoBasica-versaofinal-julho2017.pdf. Acesso em: 13 dez. 2021.

SELLTIZ, Claire; et al. **Métodos de pesquisa nas relações sociais.** São Paulo: Herder, 1972.

TALL, David Orme. Differing modes of proof and belief in Mathematics. **International Conference on Mathematics**: understanding proving and proving to understand, 2002, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, 2002. p. 91–107. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002k-proof-3worlds.pdf. Acesso em: 23 maio 2022.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento:** repensando a educação. Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1993.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento:** repensando a educação. 2.ed. Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1998.

VALENTE, José Armando. **A espiral da espiral de aprendizagem**: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. Tese (Livre-docência) – Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, p. 232, 2005.

VYGOTSKI, Lev Semionovich. **Pensamento e linguagem.** 12.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

WING, Jeannette Marie. Computational thinking and thinking about computing. **Philosophical Transactions of the Royal Society a:** Mathematical, Physical and Engineering Sciences, v. 366, n. 1881, p. 3717–3725, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118. Acesso em: 11 jun. 2022.

WING, Jeannette Marie. Computational Thinking: What and Why?. **Carnegie Mellon University:** School of Computer Science, 2010. Disponível em: https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why. Acesso em: 12 jun. 2022.

WING, Jeannette Marie. Computational Thinking Benefits Society. **Social Issues in Computing**, 2014. Disponível em: http://socialissues.cs.toronto.edu/2014/01/computational-thinking/. Acesso em: 10 jun. 2022.