UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MOVIMENTOS ASSOCIADOS A HABILIDADES ESPACIAIS EM CONSTRUÇÕES DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA PARA A DIFERENCIAÇÃO DE OBJETOS DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Camila Maria Koftun

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

União da Vitória,

2023

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

MOVIMENTOS ASSOCIADOS A HABILIDADES ESPACIAIS EM CONSTRUÇÕES DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA PARA A DIFERENCIAÇÃO DE OBJETOS DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Camila Maria Koftun

Orientadora:
Prof. Dra. Maria Ivete Basniak

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

União da Vitória
2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Koftun, Camila Maria
Movimentos Associados a Habilidades Espaciais em Construções de Cenários Animados no GeoGebra para a Diferenciação de Objetos da Geometria Plana e Espacial / Camila Maria Koftun. -- União da Vitória-PR,2023.
138 f.: il.

Orientador: Maria Ivete Basniak.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2023.

1. Educação Matemática. 2. Geometria Plana e Geometria Espacial. 3. Cenários Animados. 4. Movimentos. 5. GeoGebra. I - Basniak, Maria Ivete (orient). II - Título.

Camila Maria Koftun

MOVIMENTOS ASSOCIADOS A HABILIDADES ESPACIAIS EM CONSTRUÇÕES DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA PARA A DIFERENCIAÇÃO DE OBJETOS DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Comissão Examinadora:

Prof. Dra. Maria Ivete Basniak – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná

Prof. Dra. Daysi Julissa García-Cuéllar - Membro da Banca
Pontificia Universidad Católica del Perú

Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: Aprovada

União da Vitória
Fevereiro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora, profa. Dra. Maria Ivete Basniak, pela amizade, incentivo e pelas orientações, até mesmo aos finais de semana. Obrigada pela nossa cumplicidade desde a época da graduação. Admiro você como pessoa e profissional.

Aos membros da banca, profa. Dra. Daysi García-Cuéllar e prof. Dr. Sérgio Dantas, por aceitarem esse convite, pelas contribuições e leitura cuidadosa que tiveram com o meu trabalho. Ao professor Sérgio, agradeço ainda pelas excelentes aulas na disciplina de "Tecnologia na Educação Matemática", que tive a oportunidade de participar durante o mestrado.

Aos meus amigos da "panelinha do mestrado", Adrieli Bueno, Jaqueline Pascoski e Luan Padilha, vocês desempenharam um papel significativo para a conclusão desta pesquisa e de outras etapas do mestrado. Obrigada pelo apoio e pela nossa amizade, admiro muito cada um de vocês. Agradeço, ainda, especialmente a Adrieli, por dividir comigo tantas fases da produção desta dissertação. Obrigada pela parceria, aprendizagens, incentivo e paciência.

Aos participantes do projeto do Universidade Sem Fronteiras, que auxiliaram no momento de planejamento e na efetivação das intervenções da pesquisa, especialmente Bruna e Eliseu, que estiveram comigo na sala de aula.

À profa. Andrea, por facilitar a conexão entre universidade e escola, que foi fundamental para a efetivação desta pesquisa. Também ao prof. Fabiano, por disponibilizar suas aulas de Matemática para o desenvolvimento da nossa proposta de trabalho.

Aos estudantes que participaram das intervenções desta pesquisa, por aceitarem a proposta de construção dos Cenários Animados e participarem das discussões.

Aos membros do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística (GEPTEMatE), que contribuíram a partir da leitura e discussão do planejamento e dos artigos que compõem a dissertação.

Aos meus pais, Alcione e Armindo, por sempre acreditarem em mim e por compreenderem minha indisponibilidade para os momentos em família. Ao meu namorado, Willian, pelo incentivo e por me amparar nos momentos em que os problemas técnicos apareceram.

A todos os amigos que, de forma direta ou indireta, contribuíram com a realização deste trabalho.

RESUMO

A construção de Cenários Animados no GeoGebra permite promover discussões sobre conceitos e representações da matemática durante o seu desenvolvimento. Considerando esse objeto de estudo, a presente dissertação busca investigar: como ocorre a diferenciação entre objetos da Geometria Plana e Espacial durante a construção de Cenários Animados no GeoGebra? Para isso, baseia-se em pressupostos da metodologia de pesquisa *Design-Based Research*, que é indicada para propostas de aplicações práticas que investigam as tecnologias em ambientes digitais educacionais. O trabalho está apresentado no formato *multipaper*, composto por uma coleção de artigos, cada um com seu objetivo específico, de maneira que, juntos, buscaram responder ao problema de pesquisa geral. Neste caso, dois artigos teóricos e um artigo empírico compõem o trabalho. Iniciou-se por um estudo teórico sobre a Geometria, considerando o contexto histórico na resolução de problemas, os processos de ensino e a disposição do conteúdo no currículo da Educação Básica, que permitiu identificar obstáculos como a abordagem da Geometria Plana desvinculada da Geometria Espacial, confusões entre a componente figural e conceitual dos objetos geométricos e a maneira estática com que são trabalhados, em livros didáticos, por exemplo. Então, foi possível estabelecer potencialidades do GeoGebra para o ensino da Geometria Plana e Espacial, que foram evidenciadas a partir da construção do Cenário Animado *Cubo na esteira*. Essas contribuições do software estão associadas principalmente ao seu dinamismo, ou seja, aos movimentos que podem ser empregados sobre os objetos geométricos construídos no GeoGebra, as suas ferramentas e ao ambiente que permite trabalhar simultaneamente com as janelas de visualização 2D e 3D, permitindo associar objetos geométricos planos e espaciais e reconhecer características que os definem em relação a sua representação e conceito. O segundo estudo teórico analisou a relação dos movimentos executados no GeoGebra com os movimentos associados ao pensamento espacial, que são os principais elementos teóricos que norteiam as análises da pesquisa. Foi identificado que movimentos realizados em objetos na mente estão associados a habilidades espaciais, como *rotação mental, perspectiva, julgamento espacial* e *construção mental*, que compõem o pensamento espacial e ajudam a pensar e agir sobre situações envolvendo principalmente o espaço. Ao analisar as estratégias utilizadas pelas autoras deste trabalho quando construíram o Cenário Animado *Casa* no GeoGebra, foi possível identificar que os movimentos de *girar, mover, ampliar, reduzir* e *reposicionar* objetos geométricos foram importantes no processo de construção. Identificou-se que esses movimentos estão relacionados com as habilidades espaciais e podem contribuir para promover discussões matemáticas sobre as representações e os conceitos geométricos envolvidos na construção desse Cenário Animado. O estudo empírico levou em conta a construção do mesmo Cenário Animado, nesse caso, foi construído por uma turma de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, e as ações dos alunos, ao construírem a *Casa*, indicam que utilizaram movimentos associados às habilidades espaciais nas etapas da construção, especialmente quando buscaram validar suas estratégias, corrigir erros e identificar a posição dos elementos geométricos. As falas e ações dos alunos sobre a construção oportunizaram identificar momentos em que exploraram propriedades dos objetos geométricos planos e espaciais em relação a sua componente conceitual e figural, especialmente quando são *rotacionados* e comparados em diferentes *perspectivas* e janelas do GeoGebra. Portanto, a pesquisa oportunizou destacar o potencial da construção de Cenários Animados no GeoGebra enquanto um tipo de prática educacional promissora para o ensino de Matemática, neste caso, para a compreensão de características que aproximam e diferem objetos geométricos planos e espaciais, em que a utilização de movimentos teve grande contribuição no processo. Além disso, construir Cenários Animados e estudar sobre essas construções permitiu ampliar sua definição, incluindo e detalhando características necessárias para classificar uma construção enquanto Cenário Animado.

Palavras-chave: Movimentos no GeoGebra. Movimentos mentais. Habilidades Espaciais. Representações. Objetos geométricos. Plano. Espaço.

ABSTRACT

Construction of Animated Scenarios in GeoGebra allows promoting discussions about mathematical concepts and representations during their development. Considering this object of study, this master's dissertation seeks to investigate: how does the differentiation between Plane and Spatial Geometry objects occur during construction of Animated Scenarios in GeoGebra? Thereunto, it is based on assumptions of the Design-Based Research methodology, which is indicated for proposals of practical applications that investigate technologies in educational digital environments. The work is presented as multi paper, composed by a paper collection, each one with its specific objective, so that together they seek to answer the general research problem. In this case, two theoretical papers and an empirical one composed the work. It began with a theoretical study on Geometry, considering historical context in problem solving, teaching processes and provision of content in the Basic Education curriculum, which allowed identifying obstacles such as the approach of Plane Geometry unrelated to Spatial Geometry, confusions between the figural and conceptual component of geometric objects and the static way in which they are worked in textbooks, for instance. Then, it was possible to establish GeoGebra potential for teaching Plane and Spatial Geometry, which were made evident from the construction of the Animated Scenario *Cube on the treadmill*. These software contributions are mainly associated with its dynamism, that is, the movements which can be used on geometric objects built in GeoGebra, its tools and the environment that allows working simultaneously with the 2D and 3D viewing windows, allowing to associate plane and spatial geometric objects and recognize characteristics that define them regarding their representation and concept. The second theoretical study analyzed the relationship between the movements performed in GeoGebra and the movements associated with spatial thinking, which are the main theoretical elements that guide the research analyses. It was identified that movements performed on objects in the mind are associated with spatial skills, such as mental rotation, perspective, spatial judgment and mental construction, which make up spatial thinking and help to think and act on situations involving mainly space. By analyzing the strategies used by the authors of this work when they built the Animated Scenario *House* in GeoGebra, it was possible to identify that the movements of *rotating*, *moving*, *expanding*, *reducing*, and *repositioning* geometric objects were important in the construction process. It was identified that these movements are related to spatial skills and can contribute to promote mathematical discussions on the geometric representations and concepts involved in the construction of this Animated Scenery. empirical study considered the construction of the same Animated Scenery, in this case, it was built by a group of students from the 7th year of Elementary School, and students' actions when building the *House* indicate that they used movements associated with spatial skills in the construction stages, especially when they sought to validate their strategies, correct errors and identify the position of geometric elements. Students' speeches and actions on the construction made it possible to identify moments in which they explored properties of plane and spatial geometric objects regarding their conceptual and figural component, especially when they are *rotated* and *compared* in different perspectives and windows of GeoGebra. Therefore, the research made it possible to highlight the potential of building Animated Scenarios in GeoGebra as a promising type of educational practice for teaching Mathematics, in this case for the understanding of characteristics that approximate and differ plane and spatial geometric objects, in which the use of movements had a great contribution in this process. In addition, building Animated Sceneries and studying these constructions allowed us to broaden their definition, including and detailing characteristics necessary to classify a construction as an Animated Scenery.

Keywords: Movements in GeoGebra. Mental movements. Spatial Abilities. Representations. Geometric objects. Plan. Space.

LISTA DE SIGLAS

A1	Acadêmico 1
A2	Acadêmico 2
AEEI	Atendimento Educacional Especializado Integral
AH/SD	Altas Habilidades/Superdotação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CA	Cenário Animado
CAs	Cenários Animados
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científicos e Tecnológico
DBR	*Design Based-Research*
EA	Equipe Assistente
GEPTEMatE	Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística
GP	Grupo de Planejamento
HE	Habilidades Espaciais
L1	Laboratório de Informática 1
L2	Laboratório de Informática 2
LIFE	Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores
LIM	Laboratório de Informática de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SRM II	Sala de Recursos Multifuncional Tipo II
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná
USF	Universidade Sem Fronteiras

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta dissertação compõe um projeto de pesquisa mais amplo, financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), coordenado pela orientadora deste trabalho e intitulado *A construção de animações e simuladores no software GeoGebra e o Ensino e a Aprendizagem de Matemática.* Desse modo, o objetivo do estudo está centrado na construção de Cenários Animados no software GeoGebra, uma prática que favorece a compreensão e a aprendizagem de conceitos/conteúdos matemáticos (BASNIAK, 2020).

O GeoGebra, enquanto software utilizado na Matemática e na Educação Matemática, possui recursos que possibilitam a criação de construções matemáticas que os alunos podem explorar quando modificam objetos e parâmetros (PROCÓPIO, 2011). Para a abordagem do conteúdo de Geometria, por exemplo, o GeoGebra possibilita a visualização de propriedades geométricas, verificação empírica de hipóteses e teoremas (PROCÓPIO, 2011), e ainda permite que as relações geométricas sejam preservadas sob a ação do movimento.

Nesse sentido, pontuamos que o uso de tecnologias educacionais, como o software GeoGebra, não deve replicar propostas da sala de aula tradicional, mas provocar nos alunos o pensar matematicamente a partir de propostas que geram inquietações sobre os conteúdos matemáticos, pois "as máquinas estão fazendo as contas, isso significa que a matemática necessária para os cidadãos da Sociedade da Informação é diferente" (MONZON; BASSO, 2018, p. 2).

Portanto, a presente pesquisa pretende investigar: *Como ocorre a diferenciação de objetos da Geometria Plana e Espacial durante a construção de Cenários Animados no GeoGebra?*

Com o objetivo de ambientar o leitor sobre a proposta do trabalho e apresentar o contexto do planejamento e das intervenções da pesquisa, desenvolvemos esta introdução estendida.

1.1 De animações à Cenários Animados no GeoGebra

Em 2015, acadêmicos graduandos que participavam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) de Matemática, da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), no campus de União da Vitória, encontraram no software GeoGebra a possibilidade de realizar construções animadas que representam situações cotidianas ou inventadas, como chuva caindo, contagem regressiva, semáforo e outras[1] (BASNIAK, 2020). Essas animações construídas empregaram conteúdos/conceitos matemáticos e, portanto, foi identificado, nessa proposta, potencial para trabalhar matemática de uma forma diferente (BASNIAK, 2020).

Em meados de 2017, uma professora que trabalhava com a Sala de Recursos Multifuncional tipo II (SRM II), com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio[2] que possuem indicativo de altas habilidades/superdotação (AH/SD), procurou a professora da Unespar que pesquisava sobre as animações no GeoGebra em busca de parceria para trabalhar com os alunos que tinham indicativo de AH/SD na área da Matemática. Isso porque esses alunos necessitam de tarefas que explorem sua criatividade e capacidade; logo, o trabalho precisa ser diferente das tarefas habituais já trabalhadas em sala de aula (BUENO; BASNIAK, 2021).

Nessa conversa, foi sugerido trabalhar com a construção de animações no GeoGebra com esses alunos, o que foi considerado uma opção interessante pela professora da SRM II. E assim, desde agosto de 2017, em contexto de projetos de Iniciação Científica (IC), as construções de animação no GeoGebra começaram a ser desenvolvidas com os alunos com indicativo de AH/SD sob a orientação de acadêmicos da graduação, que buscavam, de modo geral, investigar como a construção de animações no GeoGebra pode favorecer a aprendizagem de Matemática (BASNIAK, 2020).

Nem todos os alunos que participaram do projeto possuíam indicativo de AH/SD na área da Matemática: o laudo de alguns era na área de linguagem e astronomia, por exemplo. Entretanto, isso não foi um impedimento para acompanhar as atividades do projeto, cuja participação partia do interesse de cada um, após comparecer nos encontros para conhecer a dinâmica de trabalho (BUENO; BASNIAK, 2021).

No trabalho com os alunos, inicialmente era apresentada a construção pronta, para que identificassem o que se pretendia construir naquele encontro. Depois disso, os acadêmicos graduandos que atuavam no projeto desenvolviam alguns passos da construção com os alunos, geralmente os primeiros, e os incentivavam a construir por eles mesmos as próximas etapas, buscando possibilidades ao explorar as ferramentas disponíveis no GeoGebra (BUENO; BASNIAK, 2021). Das explorações, emergiam as discussões sobre os conteúdos matemáticos

---

[1] Versões mais recentes dessas construções podem ser acessadas em: https://www.geogebra.org/m/akhsvfze e https://www.geogebra.org/m/p9yh4gbh

[2] No Brasil, os alunos que frequentam os anos finais do Ensino Fundamental correspondem às idades de 11 a 14 anos, já os alunos do Ensino Médio encontram-se entre 15 e 17 anos de idade.

envolvidos nas construções, em especial sobre as características das representações matemáticas que permitiam que a construção tomasse a forma desejada.

Nos primeiros anos do projeto, as construções no GeoGebra eram denominadas *animações* (BORUCH; BASNIAK, 2018). Entretanto, com o passar do tempo, começou a se discutir se o termo empregado era suficiente para caracterizar essas propostas de construções.

Por definição, uma animação necessita de atribuição do movimento, e é um tipo de visualização dinâmica que não necessita de interação do usuário (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2011). Essa não era uma característica suficiente para definir as construções realizadas no âmbito do projeto, que possuíam outras especificidades, como a cena que contextualiza os objetos animados e a relação deles com a matemática. Disso, surgiu a necessidade de modificar a nomenclatura das construções, que passaram a ser chamadas de Cenários Animados (CAs)[3].

Em trabalhos mais recentes (BUENO; BASNIAK, 2020, 2021; BASNIAK 2020; BASNIAK; CARNEIRO, 2021; PADILHA DOS SANTOS; BASNIAK, 2021) o termo CA já vem sendo utilizado.

Assim, Bueno e Basniak (2020) entendem por CAs as construções realizadas no software GeoGebra, em que elementos matemáticos são relacionados a ferramentas que atribuem movimento à construção, constituindo uma cena animada. Para que os objetos construídos sejam animados, comumente é utilizada a ferramenta do GeoGebra *controle deslizante*, que determina uma variável numérica dentro de um intervalo pré-estabelecido pelo operador, que varia de acordo com um incremento, também determinado pelo operador (BUENO; BASNIAK, 2020). Assim, quando o *controle deslizante* é animado, o objeto que está relacionado a ele inicia um movimento, e o contexto do CA frequentemente se torna evidente.

Entretanto, salientamos que essa definição está em processo de (re)construção, inclusive a partir desta pesquisa de mestrado, pois acrescentamos outras características importantes na definição desse objeto de estudo.

A partir de especificações, começamos a analisar se uma construção realizada no GeoGebra poderia ser definida enquanto CA ou não. Por exemplo, um ponto que esteja atrelado a um *controle deslizante* e se move horizontalmente sobre o plano cartesiano não constitui um CA nessas condições. Apesar de possuir movimento, essa construção não apresenta uma cena/contexto, mas é possível adaptá-la de modo que se torne um CA. Nesse caso, a cena pode

[3] Para o termo Cenários Animados no plural será utilizada a sigla CAs, e para o termo Cenário Animado no singular será utilizada CA.

ser formada por objetos reais, do cotidiano ou por personagens imaginários, criados no software com elementos matemáticos ou a partir da inserção de imagens que os representem, de modo a ditar um contexto para a construção.

Além disso, o movimento que caracteriza a construção finalizada como um CA é executado por objetos ou personagens da cena, e possui duas especificidades: (i) deve ser desprovido de ação repetida do sujeito, ou seja, não é preciso ir além de cliques em botões ou de selecionar a opção *animar* do *controle deslizante* para que o movimento seja iniciado; e (ii) a partir disso, o movimento deve continuar como resultado dessas ações, até que o objetivo da cena seja concluído.

Em alguns casos, o movimento dos CAs continua sendo repetido, mesmo após a *conclusão* da cena, como se fosse iniciada repetidas vezes, sem que o sujeito precise novamente acionar movimento aos objetos.

1.1.1 Os resultados obtidos com a construção de Cenários Animados

Até o momento, foram desenvolvidas sete pesquisas de IC com base nesse tema, e todas elas tinham objetivos e referenciais teóricos distintos, mas sempre mantendo a proposta de investigar aspectos da aprendizagem matemática a partir das construções de CAs.

Basniak (2020) relata que alunos do 6º ano do Ensino Fundamental conseguiram construir CAs utilizando, em suas estratégias, representações de funções, que é um conteúdo abordado somente a partir do 9º ano do Ensino Fundamental[4]. Segundo a autora, a apropriação de elementos relacionados às funções foi identificada porque os alunos compreendiam o que os valores e sinais da lei de formação alteravam na representação do gráfico, que era utilizado na construção do CA.

Em outra pesquisa, Bueno e Basniak (2020), ao analisarem um CA construído por um aluno que participava do projeto, evidenciam que a apropriação de uma nova ferramenta do GeoGebra permitiu a compreensão do conceito de simetria, além da mobilização de outros conhecimentos matemáticos, como coordenadas cartesianas, reflexão, elementos geométricos e representações algébricas, e em especial a relação entre Álgebra e Geometria.

Essas pesquisas enfatizam que a condução do professor durante os encontros foi imprescindível para a obtenção desses resultados, atuando como mediador.

[4] No Brasil, alunos do 6º e do 9º ano do Ensino Fundamental têm 11 e 14 anos de idade, respectivamente.

Além disso, foram desenvolvidos, com base na construção de CAs, trabalhos de conclusão de curso[5], oficinas, palestras e comunicações científicas em congressos e eventos regionais e internacionais. Uma pesquisa também foi realizada por uma aluna da Educação Básica que participou do projeto (LIPINSKI; BASNIAK, 2021), e desenvolveu um trabalho de Iniciação Científica no Ensino Médio, em que analisou sua aprendizagem de matemática a partir da construção de CA no GeoGebra.

1.2 Trajetória da pesquisadora no envolvimento com o tema

Embora nunca tenha trabalhado diretamente com a construção de CAs antes de ingressar no mestrado, a pesquisadora já conhecia essa proposta de atividade, que era desenvolvida em contexto de projetos de IC.

Quando cursava a graduação em Licenciatura em Matemática, dois[6] colegas da graduação atuavam no projeto de IC que construía CAs com alunos com indicativo de AH/SD. Portanto, em conversas informais com esses colegas, ocorria a troca de experiências sobre os trabalhos que estavam desenvolvendo, além dos momentos de discussão sobre o tema, que aconteciam nos encontros do *Grupo de Estudos sobre Práticas e Tecnologias na Educação Matemática e Estatística (GEPTEMatE)*, do qual a pesquisadora participava.

Entretanto, por não pesquisar o desenvolvimento dessas tarefas com os alunos, ainda não compreendia o processo de construção dos CAs, e se questionava se os resultados obtidos com essas construções só eram possíveis devido ao indicativo de AH/SD dos alunos.

No 4º ano da graduação, ao cursar a disciplina de *Tecnologias Aplicadas à Educação Matemática*, a pesquisadora experienciou a construção de CAs no GeoGebra pela primeira vez. Na ocasião, alguns alunos com indicativo de AH/SD que participavam do projeto de construção de CAs, juntamente com a acadêmica da graduação que orientava os alunos nas construções e a professora da SRM II, foram convidados a comparecer em uma das aulas da disciplina mencionada, para mostrar alguns CAs construídos por eles.

Nesse dia, então, os alunos da Educação Básica foram os *professores*, pois estavam indicando como construir o CA passo a passo com os acadêmicos da graduação. A partir disso,

[5] Em um desses trabalhos, foi desenvolvida uma proposta de ensino para trabalhar sobre o conteúdo de função polinomial de primeiro grau com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental por meio da construção de CAs no GeoGebra; outro trabalho desenvolveu CAs envolvendo o conteúdo de lógica matemática, que foram construídos com alunos da graduação em Licenciatura em Matemática.

[6] Os dois acadêmicos não participavam do projeto no mesmo período. Em 2017, um deles precisou sair do projeto e o outro assumiu o seu lugar.

foi possível identificar que os alunos conseguiam utilizar conteúdos matemáticos, mesmo os que ainda não estudaram formalmente em sala de aula, para representar e modificar as construções que desejassem fazer no GeoGebra, como foi o caso do cenário *submarino*[7], apresentado nessa aula.

Depois dessa experiência, foi possível compreender melhor a dinâmica de construção dos CA e de que modo esse trabalho permite que os alunos compreendam características conceituais de elementos matemáticos, quando modificam as representações obtidas no GeoGebra para compor a cena final, conforme o objetivo de cada construção/aluno.

Depois da graduação, a pesquisadora pôde ampliar seu contato com as pesquisas envolvendo os CA quando atuou como bolsista técnica de apoio ao projeto do CNPq já mencionado, ao qual esta pesquisa de mestrado está vinculada. Dessa forma, ao participar das reuniões juntamente com os membros do projeto, discutiam sobre a elaboração dos relatórios de pesquisas. Além disso, nos momentos em que transcrevia as gravações de áudio e vídeo das intervenções com os alunos, pôde acompanhar o diálogo e o envolvimento dos alunos nas construções, o que proporcionou o contato com outro *momento* das pesquisas com CA no GeoGebra, uma vez que não estava presente nas intervenções com os alunos, mas podia conhecer posteriormente as produções a partir das gravações.

Esses momentos proporcionaram interesse em dar continuidade à realização de pesquisas nessa área, e a partir disso, a pesquisadora já havia definido que o projeto submetido ao processo de seleção do mestrado envolveria a construção de CAs no GeoGebra.

1.2.1 Investigações atuais

As pesquisas já realizadas sobre a construção de CAs envolveram um contexto que considerava um número reduzido de alunos e apresentavam indicativo de AH/SD. Propostas nesses moldes continuam vigentes, devido aos resultados promissores obtidos.

Atualmente, o trabalho com a construção de CAs diretamente com os alunos é desenvolvido por meio do projeto de extensão do Universidade Sem Fronteiras (USF)[8], e não mais a partir de projetos de IC. O USF conta com a participação de quatro acadêmicos graduandos em Licenciatura em Matemática e uma recém-formada na mesma área, que

---

[7] A construção pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/bwa9fbtz

[8] O projeto de extensão é intitulado *Desenvolvimento de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio com indicativo de Altas Habilidades/Superdotação e a construção de cenários animados no software GeoGebra.*

trabalham com alunos com indicativo de AH/SD de cinco escolas da região de União da Vitória - PR.

Além disso, duas pesquisas de mestrado (incluindo esta) estão sendo desenvolvidas considerando como objeto de estudo a construção de CAs no GeoGebra com alunos da Educação Básica. Entretanto, alguns indicadores importantes diferem essas pesquisas daquelas já desenvolvidas.

No caso da presente pesquisa, foram considerados outros sujeitos e contexto para o estudo, que foi desenvolvido em aulas de matemática de uma turma do 7º ano dos anos finais do Ensino Fundamental[9] de um colégio da rede pública estadual de ensino na cidade de União da Vitória - PR. Desse modo, a participação não é restrita a alunos com indicativo de AH/SD, mas considera que o desenvolvimento ocorreu no contexto do ambiente de uma sala de aula, e estão incluídos alunos com indicativo de AH/SD e com dificuldade de aprendizagem.

Os CAs construídos pelos alunos participantes desta pesquisa envolvem o conteúdo matemático de Geometria Plana e Espacial, e as construções foram planejadas para possibilitar discussões sobre a diferença entre objetos geométricos planos e espaciais.

1.3 Contexto da Pesquisa

1.3.1 Planejamento e Descrição dos Cenários Animados

O planejamento e a elaboração dos CAs que foram construídos pelos alunos ocorreram em parceria com os participantes do projeto de extensão do USF. Considerando que ambas as partes estavam trabalhando no processo inicial de planejamento de CAs, para a efetivação da pesquisa de mestrado ou para o desenvolvimento com alunos com indicativo de AH/SD, no caso do projeto do USF[10], foi viável estabelecer uma colaboração nesse processo que beneficiou a todos.

Nesse sentido, desde março de 2022, reuniram-se semanalmente as duas mestrandas, os quatro acadêmicos do projeto do USF e os dois coordenadores do mesmo projeto para criar, remodelar e discutir sobre os CAs que fizeram parte das intervenções com os alunos, totalizando nove encontros. O grupo constituído por esses integrantes será denominado, aqui, *Grupo de Planejamento* (GP).

---

[9] No Brasil, o 7º ano do Ensino Fundamental é destinado a crianças de 12 anos de idade.
[10] A mestranda responsável pela outra pesquisa, que também investiga a construção de CA no GeoGebra, participa do projeto do USF.

Desse modo, quatro CAs foram planejados para a construção com os alunos, cada um deles com objetivos distintos, conforme pode ser lido no quadro 1.1, a seguir.

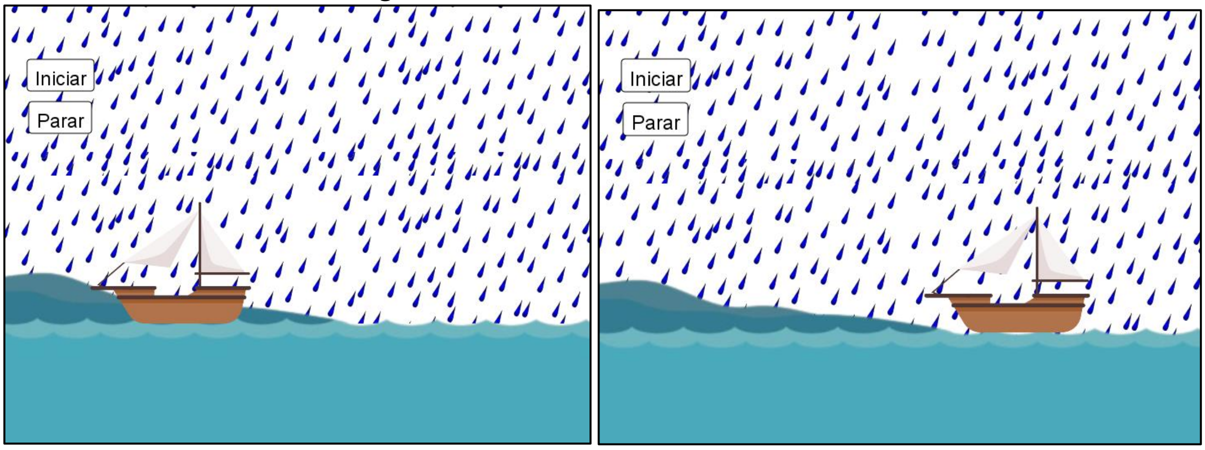
Quadro 1.1 - Objetivos dos CAs para as intervenções com o 7º ano

nº	Cenário Animado	Objetivos no contexto da pesquisa
1	Barco e Chuva	Ambientar os alunos com o software e com a localização de pontos no plano cartesiano do GeoGebra.
2	Cubo na esteira	Auxiliar os alunos com a localização de pontos, segmentos e outros elementos geométricos na janela de visualização 3D do GeoGebra.
3	Casa	Investigar se os alunos reconhecem e diferenciam características de objetos geométricos planos e espaciais, em especial polígonos e poliedros.
4	Xadrez	Investigar se os alunos reconhecem e diferenciam objetos geométricos planos e espaciais, em especial, polígonos e círculo, e poliedros e corpos redondos.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023).

O CA *Barco e Chuva*[11] (Figura 1.1) foi criado no contexto das pesquisas de IC já citadas, e os acadêmicos do USF já haviam reproduzido esse mesmo cenário em outra oportunidade. Portanto, era conhecido pela maior parte do GP e foi adaptado para utilização nos encontros com os alunos participantes desta pesquisa.

Figura 1.1 - Cenário Animado: Barco e Chuva



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Os cenários abordados na sequência são diferentes do primeiro em relação a alguns aspectos, porque utilizam a janela de visualização 3D do GeoGebra e enfatizam objetos matemáticos da Geometria Plana e Espacial.

[11] A construção pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/g8bfaxyg

As criações dos CAs 2, 3 e 4 constituíram-se em grandes desafios para o GP, por envolver ferramentas e comandos diferentes dos utilizados na janela 2D. Como é preciso considerar um terceiro eixo e um ambiente com características diferentes em relação à manipulação de objetos matemáticos que haviam sido pouco explorados até então pelo GP, foi necessária atenção quanto aos conceitos geométricos abordados.

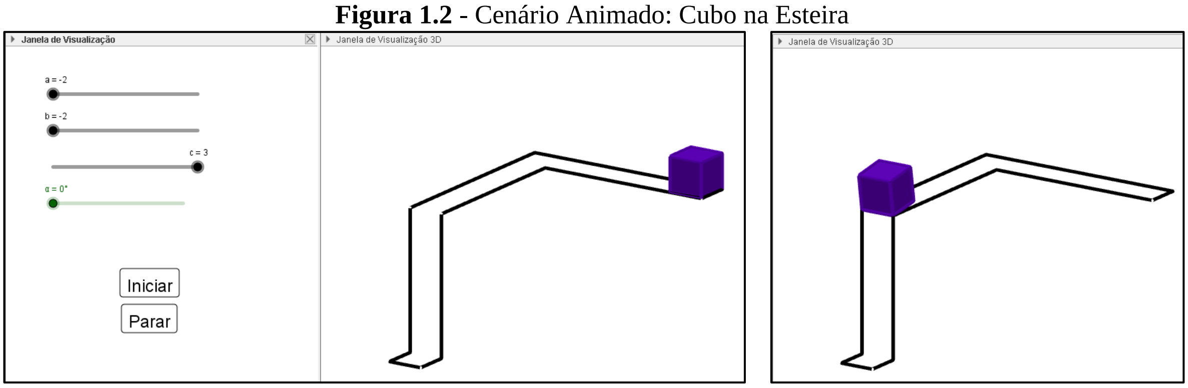
Além disso, a janela de visualização 3D do GeoGebra, até o início dessa pesquisa, não havia sido utilizada para a construção de CAs. Portanto, não conhecíamos nenhum cenário semelhante para servir de inspiração, tanto em relação ao conteúdo quanto ao ambiente utilizado.

Iniciamos o planejamento pelo conteúdo de Geometria Plana e Espacial a ser abordado para depois associá-lo a uma cena/contexto que pudesse ser desenvolvido a partir da articulação entre elementos geométricos, mais especificamente cenários que favorecessem o reconhecimento e diferenciação entre elementos da Geometria Plana e Espacial. Nesse processo, também foi necessário considerar as características de um CA, como a articulação entre elementos matemáticos, de modo a constituir uma cena com movimento.

Com base nesses elementos, foram elaboradas algumas ideias para CAs, dentre as quais se destacaram: *Cubo na esteira*, *Casa* e *Xadrez*, que foram utilizados para as intervenções com os alunos.

O CA *Cubo na esteira*[12] (Figura 1.2) foi construído utilizando apenas a janela de visualização 3D (com exceção dos controles deslizantes que só estão disponíveis na janela 2D). Nessa construção, objetos geométricos como cubo, segmentos e pontos dão origem à representação de um cubo que desliza sobre uma esteira em três direções, seguindo os eixos x, y e z. Essa introdução aos objetos geométricos tem a intenção de iniciar as discussões sobre as nomenclaturas e características.

Figura 1.2 - Cenário Animado: Cubo na Esteira

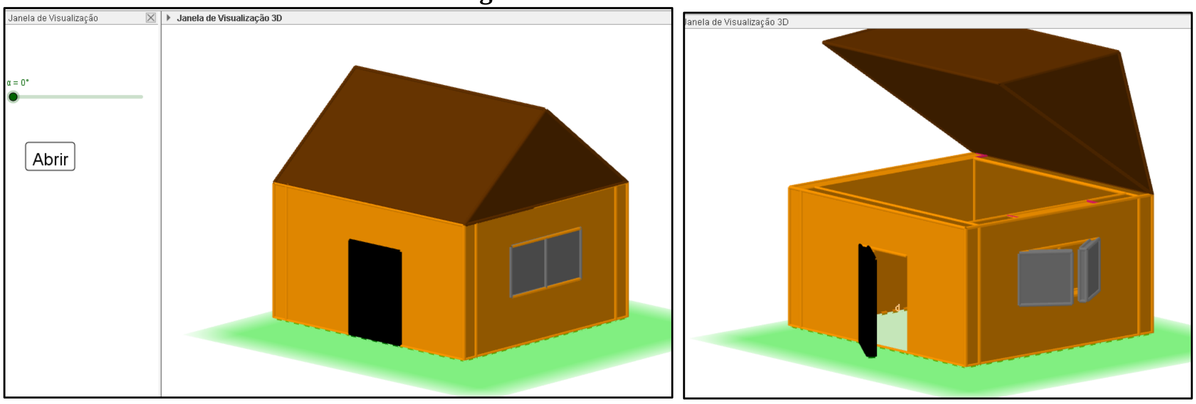


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

[12] A construção pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/tm73gxn4

Para dar continuidade às discussões conceituais, o CA *Casa*[13] (Figura 1.3) simula a construção de uma casa a partir de objetos geométricos na janela 3D, relacionando com a projeção desses elementos na janela 2D, e com isso é possível instigar discussões sobre as diferenças existentes entre os elementos de natureza plana e espacial.

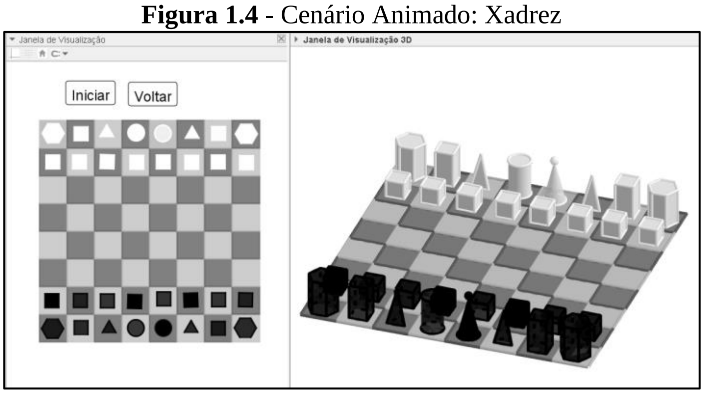
Figura 1.3 - Cenário Animado: Casa



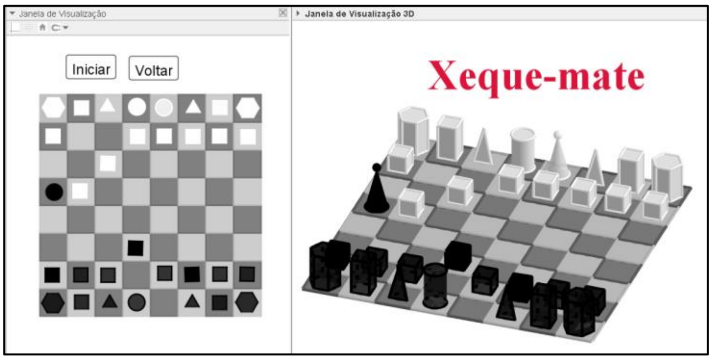
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Já o CA *Xadrez*[14] (Figura 1.4) simula um tabuleiro de xadrez com peças construídas a partir de formas geométricas tridimensionais envolvendo poliedros e corpos redondos. Quando o CA é finalizado, uma jogada de xadrez é realizada a partir da movimentação das formas espaciais. Para ampliar as discussões sobre objetos geométricos planos e espaciais, com esse CA é possível debater sobre características dos não-polígonos e dos não-poliedros.

Figura 1.4 - Cenário Animado: Xadrez



[13] A construção pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/x3ddf9yq
[14] A construção pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/cmwsdmeg



Fonte: Dados da pesquisa, 2022

Ainda no planejamento, foi necessário decidir como seria realizado o processo de construção dos CAs. A decisão foi de construir os primeiros passos juntamente com os alunos e gradualmente desafiá-los a construir outras etapas por si mesmos, aumentando a autonomia durante o processo de construção. Assim, os alunos seriam orientados quanto a possibilidades de construção, de modo que, com base em etapas/discussões anteriores ou a partir da exploração das ferramentas do software, fossem capazes de concluir a construção.

Para estimar o tempo que cada CA levaria para ser construído e discutido com os alunos, os membros do GP realizaram a construção completa de cada um deles, e a partir disso, consideramos o dobro do tempo para o desenvolvimento com os alunos para incluir momentos em que fosse necessário corrigir etapas da construção ou explicar detalhes sobre o procedimento utilizado. Outras opções de CA também foram planejadas, mas devido à quantidade de aulas disponíveis e do tempo empregado nas construções, foi preciso selecionar alguns, que julgamos serem os que melhor abordavam os conteúdos que se pretendia discutir.

1.3.2 Selecionando a escola e a turma

Foi necessário, inicialmente, selecionar uma escola e uma turma de alunos que estivessem dispostos a participar dessa investigação envolvendo a construção de CAs no GeoGebra.

O colégio escolhido foi o mesmo em que foram desenvolvidas as pesquisas de IC com os alunos com indicativo de AH/SD. Um dos motivos que nos levou a essa escolha foi porque os CAs precisam necessariamente ser construídos utilizando computadores ou notebooks, uma vez que já ocorreram testes em celulares e tablets e foi constatado que o aplicativo do GeoGebra para esses dispositivos, em se tratando da construção de CAs, acaba travando por não suportar a execução de muitos comandos simultaneamente. Então, como esse colégio divide o prédio com a universidade, é possível utilizar os laboratórios de informática dessa universidade, que possuem computadores e notebooks disponíveis.

Desse modo, entramos em contato com a professora da antiga SRM II, atualmente professora do Atendimento Educacional Especializado Integral (AEEI), que já conhecia e apoiava a ideia do projeto, para auxiliar na aproximação com um professor de matemática que estivesse disposto a ceder algumas de suas aulas para o desenvolvimento das intervenções da pesquisa.

A proposta de trabalho, assim como o conteúdo (Geometria Plana e Espacial), foram informados ao professor regente no primeiro contato, para que ele pudesse adequar as intervenções de acordo com seu planejamento. Desse modo, o professor sugeriu trabalhar com uma turma do 7º ano, considerando o currículo desse ano escolar.

Desde 2019, as turmas desse colégio passaram a ter aulas em período integral[15], e com isso, os alunos possuem seis aulas de matemática semanais. O professor da disciplina cedeu duas aulas conjugadas por nove semanas consecutivas, totalizando 18 horas/aula para as intervenções. Os encontros iniciaram em maio de 2022 e terminaram em julho de 2022, e nesse sentido, as aulas ocorreram de modo presencial, após o período de ensino remoto emergencial devido à pandemia da Covid-19, iniciado em 2020.

1.3.3 Organização das Intervenções da Pesquisa

Os encontros iniciaram com 27 alunos na turma. Portanto, considerando a infraestrutura dos laboratórios da universidade em que foram realizados os encontros, não houve computadores suficientes para todos os alunos, de modo que ocupassem o mesmo ambiente.

Assim, foram utilizados dois laboratórios concomitantemente para as intervenções: o Laboratório de Informática de Matemática (LIM) pertencente ao Colegiado de Matemática da universidade, e o Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE). Ambos os laboratórios possuem um quadro branco, que foi utilizado para anotações; e um Datashow para projetar os CAs finalizados, bem como as etapas da construção. O LIM conta com 13 computadores de mesa em funcionamento, e o LIFE, com 10. Além disso, havia mais quatro notebooks que foram divididos entre os laboratórios, dependendo da quantidade de alunos presentes. Todos os computadores e notebooks possuíam o software GeoGebra instalado, mas em versões diferentes.

[15] Considerando essa mudança, a escola deixa de ofertar no contraturno o trabalho com alunos nas SRM II

Foi necessário formar duas Equipes Assistentes (EA-1 e EA-2) para auxiliar no desenvolvimento com os alunos nos laboratórios. As equipes foram constituídas por membros do GP, e nesse caso, havia dois graduandos do projeto do USF e uma mestranda em cada EA.

Os alunos foram distribuídos sob orientação do professor regente da turma e da professora do AEEI, de acordo com a quantidade de computadores em cada laboratório. Assim, 15 alunos ficaram no LIM, acompanhados da EA-1; e 12 alunos no LIFE, acompanhados da EA-2. Apesar de ocupar espaços diferentes, os CAs trabalhados foram os mesmos nos dois ambientes.

Em relação à função de cada integrante da EA, a mestranda foi responsável pela condução geral das aulas, participando do processo de construção e intervindo sempre que necessário para chamar a atenção para algumas discussões de conteúdo. Além disso, ao observar o desenvolvimento dos alunos, sempre procurava identificar as estratégias utilizadas para chamá-los a participar das discussões a partir dos argumentos expostos por eles.

Já os dois acadêmicos (A1 e A2) exerciam o papel de mediadores. O A1 era responsável por realizar a construção do CA desenvolvido no encontro, utilizando o notebook conectado ao Datashow, para que os alunos acompanhassem o passo a passo e também sugerissem modos de construção. Já o A2, deveria acompanhar o desenvolvimento dos alunos, estando à disposição para atender problemas técnicos e dúvidas sobre a construção. Nos momentos que o A1 não estivesse realizando as construções no GeoGebra, também foi indicado que ficasse à disposição dos alunos na sala de aula. Essas funções eram intercaladas entre o A1 e o A2, dependendo do encontro.

Para conduzir os encontros, foi necessário estudar a construção de todos os CAs para conhecer os detalhes de cada um e as discussões atreladas. Para auxiliar esse processo, as mestrandas decidiram criar roteiros de construção dos CAs, com passo a passo (Apêndice 01, 02, 03 e 04), relacionando os conteúdos/conceitos envolvidos em cada etapa, que seriam discutidos paralelamente à construção. Aliado aos roteiros, também foi gravado um vídeo tutorial explicando o passo a passo da construção (Apêndice 01, 02 e 03).

Esses materiais foram disponibilizados em uma pasta compartilhada no drive com a EA-1 e EA-2, com a indicação de que todos lessem os roteiros e assistissem aos vídeos para estar preparados a auxiliar os alunos com suas dúvidas sobre as construções, e/ou para alertar a condutora sobre o que deveria ser feito em cada momento, caso esquecesse ou acontecem imprevistos.

Em momento anterior ao início das intervenções, as mestrandas foram até a sala de aula acompanhar o andamento de uma aula de matemática dessa turma de 7º ano, para conhecer os alunos, também para explicar como funcionaria a dinâmica dos encontros. Nessa ocasião, foi entregue a cada aluno o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para que os pais ou responsáveis autorizassem a participação do aluno nas intervenções, bem como o registro dos dados produzidos por eles para utilização nesta pesquisa.

Assim, para a coleta de dados, foram utilizadas gravações em vídeo e áudio de cada laboratório e gravações individuais das telas dos alunos. Para a gravação das telas, foi utilizado o *Apowersoft*[16], uma ferramenta online e gratuita que permite gravar o áudio e as atividades que acontecem na tela do computador. Devido à baixa disponibilidade de microfones, nem todas as telas de áudio e vídeo foram gravadas.

1.3.4 O desenvolvimento das intervenções

A construção do primeiro CA, *Barco e Chuva*, foi importante para avaliar o planejamento pensado para os encontros. A partir desse desenvolvimento, percebemos que o tempo necessário para a finalização do cenário foi de dois encontros, totalizando quatro aulas de 50 minutos. Esse tempo foi o dobro do esperado, e logo percebemos que seria necessário remanejar o tempo estimado para a construção dos CAs seguintes.

Isso se deve à disparidade no processo de construção dos alunos: enquanto alguns demonstraram facilidade e agilidade nas construções, outros, mesmo com ajuda constante da EA, não conseguiam acompanhar o ritmo da construção. Assim, era necessário destinar mais tempo para conclusão de uma etapa antes de passar para a próxima. Além disso, houve atrasos por problemas técnicos em relação aos equipamentos disponíveis.

Os computadores do LIM possuíam restauração de sistema[17]. Portanto, quando desligavam inesperadamente no meio da aula, por mal contato, por exemplo, era necessário começar a construção do início novamente, pois todo o progresso realizado naquele computador era perdido. Ademais, houve alunos que apresentaram dificuldades na manipulação do computador, por exemplo, para identificar símbolos no teclado ou para acessar pastas de arquivos, que eram necessárias para a dinâmica das aulas.

A versão 6 do software GeoGebra, que estava instalada nos computadores do LIM, também gerou alguns problemas, pois era uma versão com a qual não tínhamos experiência, por tornar mais difíceis alguns processos da construção, como a localização de símbolos e a

[16] https://www.apowersoft.com.br/gravador-de-tela-gratis

[17] Os computadores estavam programados para restaurar o sistema (a partir de certo ponto) toda vez que eram desligados ou reiniciados. Desse modo, todos os arquivos e alterações feitas no último acesso eram deletados.

digitação de comandos. Além disso, com exceção do primeiro CA, todos os demais utilizavam a janela 3D do GeoGebra, e houve encontros em que essa versão do software dizia não suportar a janela 3D. Com isso, foi necessário reiniciar o computador e/ou mudar para a versão online do GeoGebra, o que também influenciou no atraso do planejamento das aulas. Para acessar o GeoGebra online, os alunos não cadastraram um perfil na página, pois demandaria ainda mais tempo para tal procedimento. Desse modo, para conseguir salvar as construções, ao final da aula, os alunos baixaram o arquivo com a construção realizada no computador, armazenando em uma pasta compartilhada na rede de internet. Ainda, considerando a restauração de sistema dos computadores, não conseguimos instalar outra versão do GeoGebra.

Devido a feriados e outros eventos particulares da escola, como formação de professores e festa junina, em três dos dias planejados não aconteceram os encontros com os alunos. Com isso, foi necessário solicitar ao professor regente da turma a possibilidade de disponibilizar outros dias de aula, para repor os encontros faltantes e (tentar) finalizar o planejamento: o professor atendeu ao pedido.

Desde que as intervenções foram iniciadas, realizamos reuniões semanais com o GP para discutir sobre o que foi trabalhado no encontro da semana, quais as dificuldades dos alunos e o quanto cada turma avançou na construção. Nesse momento, ouvíamos os relatos da EA-1 e da EA-2 de cada laboratório para conhecer e alinhar o trabalho, e caso fosse necessário, (re)planejar a dinâmica dos encontros seguintes, priorizando a aprendizagem dos alunos.

Uma das mudanças considerada necessária foi a inclusão de materiais impressos a serem entregues aos alunos, pois observamos que parte deles gostava de fazer anotações, e solicitavam lápis e papel. Além disso, incluímos o registro escrito dos alunos na coleta dos dados, solicitando, em dois encontros, que definissem com suas palavras e relacionassem alguns objetos geométricos contemplados na construção dos CAs para identificar o que estavam ou não compreendendo.

O quadro 1.2, na página seguinte, apresenta uma síntese do desenvolvimento dos encontros.

Quadro 1.2 - Quantidade de encontros e os Cenários Animados desenvolvidos

(Continua)

Encontro	Data	Aulas	Cenário Animado desenvolvido
01	06/05/2022	02	Barco e Chuva - Foi realizado o passo a passo da construção com os alunos, buscando discutir os elementos matemáticos envolvidos e apresentando o ambiente e as ferramentas do GeoGebra necessárias para a construção. Os alunos tiveram dificuldades na utilização do computador, para digitação, por exemplo, e demandaram muito tempo para encontrar a imagem de barco na internet. Nesse encontro, finalizaram a etapa da programação do barco.
02	13/05/2022	02	Barco e Chuva - Continuando a construção, foi realizado o passo a passo, com os alunos, de uma parte da programação da chuva. O restante, que seguia o mesmo raciocínio, foi indicado aos alunos que tentassem realizar por si mesmos. Decorrido um tempo, o passo a passo foi mostrado para aqueles alunos que não conseguiram fazer. Novamente demorou muito tempo para encontrar as imagens necessárias para constituir a cena. Nesse encontro, o CA foi finalizado.
03	20/05/2022	02	Cubo - O encontro foi iniciado discutindo sobre características que diferem as janelas 2D e 3D do GeoGebra. O cubo construído foi associado ao controle deslizante, seguindo um passo a passo com os alunos. Depois foi destinado um tempo para que eles delimitassem os movimentos do cubo.
04	03/06/2022	02	Cubo - Na primeira aula, foi dada continuidade à construção. Os alunos foram incentivados a construir o caminho do cubo com segmentos. Na segunda aula, foi entregue uma folha de papel para que eles escrevessem com suas palavras, a partir das discussões dessa aula e das anteriores, como poderiam definir alguns elementos geométricos estudados (ponto, segmento, plano, espaço, quadrado e cubo).
05	10/06/2022	02	Cubo + Casa - Na primeira aula, foi realizada uma discussão sobre as definições escritas pelos alunos na aula anterior, esclarecendo sobre a nomenclatura e características dos elementos geométricos. Na segunda aula, foi iniciada a construção do CA *Casa*. Em meio a discussões sobre características dos objetivos geométricos envolvidos nessa construção, foi construída a primeira parede da casa, seguindo um passo a passo, e os alunos construíram a segunda parede por si mesmos.
06	23/06/2022	01	Casa - No início dessa aula, ocorreram problemas técnicos com o GeoGebra que impediram o acesso à construção da casa iniciada na aula anterior. Esse problema levou mais da metade do tempo da aula para ser solucionado. Na sequência, os alunos foram incentivados a pensar em estratégias para construir a terceira parede da casa.
07	24/06/2022	02	Casa - Nessa aula, retomamos algumas discussões da aula anterior e, novamente, os alunos foram incentivados a pensar em estratégias para construir a terceira parede da casa com a porta, que possuía algumas especificidades. Decorrido um tempo, o passo a passo foi mostrado para aqueles alunos que não conseguiram construir. Depois, os alunos começaram a pensar em estratégias para construir a última parede da casa, com a janela.

(Conclusão)

Encontro	Data	Aulas	Cenário Animado desenvolvido
08	28/06/2022	03	Casa - Na primeira aula, a construção da casa foi finalizada. Alguns alunos estavam atrasados; então, a dinâmica principal desse encontro foi auxiliar individualmente os alunos que estavam com dificuldades. Enquanto isso, a orientação geral para a turma foi de continuarem a construção, finalizando o telhado, os movimentos e alterando a aparência do CA. Depois disso, os alunos receberam uma folha de papel em branco, em que deveriam escrever com suas palavras a definição de alguns objetos geométricos abordados no CA *Casa*, seguindo a mesma ideia do encontro 04. Em seguida, foi discutido sobre o que os alunos escreveram. Para finalizar esse encontro, os alunos receberam uma folha de papel com representações de alguns objetos geométricos e abriram um arquivo do GeoGebra que possuía a representação dos mesmos objetos. A partir disso, deveriam compará-los e indicar o nome e características de cada um.
09	01/07/2022	02	Casa + Xadrez - A primeira aula foi destinada às discussões sobre os objetos geométricos planos e espaciais, a partir do que os alunos realizaram no final do último encontro. Depois, os alunos receberam uma folha de papel para escreverem um *feedback* sobre os encontros, respondendo se gostaram de trabalhar com o GeoGebra nas aulas de matemática ou se preferiam utilizar lápis e papel. As folhas foram recolhidas e a construção do CA *Xadrez* foi iniciada. Foi possível discutir brevemente sobre alguns objetos geométricos envolvidos nessa construção, que não estavam presentes nos CAs anteriores, como o cone e o cilindro. Começamos a construir com os alunos o passo a passo de formas geométricas espaciais que representavam as peças do xadrez. Então, a aula foi finalizada e esse último CA não foi concluído.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023).

Depois de cada encontro com os alunos, as gravações das telas eram salvas em uma pasta compartilhada na rede, assim como as gravações em áudio e vídeo.

1.3.5 Organização dos dados para a análise da pesquisa

Quando a pasta das gravações foi acessada posteriormente, identificamos que, em alguns casos, a coleta de dados não ocorreu como previsto. Estavam faltando gravações porque acontecia de o aluno esquecer de colocar a tela para gravar, ou de finalizar a gravação antes do momento informado, mesmo que fossem orientados no início das aulas sobre o processo de gravação. Além disso, quando os computadores desligavam inesperadamente por problemas técnicos, perdíamos o arquivo com dados da gravação da tela.

Desse modo, esses fatos constituíram a primeira seleção dos dados a serem analisados. Como segundo fator de descarte de dados, ao acessar as gravações no início do processo de análise, deparamo-nos com alguns arquivos corrompidos, dos quais não foi possível acessar o conteúdo da gravação.

Entre os dados restantes, também encontramos outros empecilhos. Algumas das gravações de tela ficaram sem áudio, mesmo nos computadores que tinham microfone. Ainda, o barulho do ambiente externo acabou interferindo nas gravações em áudio realizadas no LIM, pois ao lado do laboratório fica o pátio do colégio, e as músicas do ensaio da festa junina do colégio foram captadas nas gravações, dificultando o entendimento das discussões em sala.

Além disso, não analisamos as gravações de todos os encontros, pois nem todos os quatro CAs desenvolvidos com os alunos foram efetivamente utilizados na pesquisa.

O primeiro CA desenvolvido, *Barco e Chuva,* teve a intenção de ambientar os alunos com o software e com a construção de CAs, por abordar características importantes desse tipo de construção, como a atribuição de movimento aos objetos a partir do controle deslizante. Além disso, essa construção envolveu poucos elementos matemáticos, essencialmente a localização de pontos no plano cartesiano, que não fazem relação direta com o objetivo do estudo. Nessas condições, esse CA não foi utilizado para as análises da pesquisa.

A construção do CA *Cubo na esteira* realizada pelos alunos também não foi utilizada como dado da pesquisa. Por outro lado, as etapas de construção desse CA foram discutidas em um dos capítulos que compõem esta dissertação.

Desde o período de planejamento, tínhamos escolhido o CA *Casa* como o principal para a pesquisa, por apresentar elementos que possibilitam discussões sobre a diferenciação entre objetos de natureza plana e espacial, que faz parte do objetivo geral deste estudo. Esse CA foi discutido do ponto de vista teórico, também foram analisadas as construções que os alunos realizaram da casa.

Por fim, o CA *Xadrez* apresenta objetos geométricos semelhantes aos da casa, mas como tivemos pouco tempo para desenvolvê-lo e não conseguimos finalizar a construção, também não foi utilizado nas análises do trabalho. Acreditamos que seriam necessários mais dois encontros para terminar a discussão e construção desse CA, o que não foi possível porque os alunos entraram em férias.

O referencial teórico que norteou as análises foi baseado em Tversky (2019). A fundamentação das discussões é o pensamento espacial e os movimentos associados a esse tipo de pensamento. Os movimentos envolvidos são os gestos, que expressam ações com base em ideias; e os movimentos realizados mentalmente, como rotacionar, ampliar, espelhar e modificar formatos de objetos na mente (TVERSKY, 2019). Nesse caso, nos ativemos aos movimentos mentais que estão relacionados com as Habilidades de Pensamento Espacial.

Tversky (2019) também pontua que o pensamento espacial e os movimentos são a base para a formação dos demais tipos de pensamento, especialmente o abstrato, que está relacionado ao pensamento matemático. Destaca, também, o importante papel desses elementos no ensino, na aprendizagem e em nossas vidas de modo geral. Mais detalhes sobre os elementos teóricos são discutidos ao longo dos capítulos.

A motivação inicial para a construção dessa base teórica vem do trabalho de Bortolossi (2020), que foi compartilhado por meio de uma palestra realizada na plataforma do Youtube[18], em uma série de *lives* que abrangiam o tema *Tecnologias e Ensino de Matemática*, transmitida pelo canal da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). As discussões dessa palestra, apoiadas em Tversky (2019), chamam a atenção para a importância do movimento fortemente relacionado com o pensamento em tarefas matemáticas. Bortolossi (2020) apresenta exemplos envolvendo o movimento em construções no software GeoGebra, utilizando formas geométricas 2D e 3D.

1.4 Procedimentos Metodológicos

O presente trabalho caracteriza-se como qualitativo e investigativo, pois envolve a imersão do pesquisador no contexto da pesquisa, contribuindo para a focalização das questões de investigação e outras fontes de dados (ALVES-MAZZOTTI, 2002). Além disso, baseia-se em pressupostos da metodologia de pesquisa *Design-Based Research* (DBR), que é indicada para o desenvolvimento de propostas de aplicações práticas e inovadoras que investigam as tecnologias em ambientes digitais educacionais (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014).

Segundo os autores, a DBR abrange cinco características principais: *teoricamente orientada, intervencionista, colaborativa, fundamentalmente responsiva e iterativa*, que estão destacadas no contexto desta pesquisa no quadro 1.3.

Quadro 1.3 – Características da DBR na pesquisa

(Continua)

Características DBR	Relação com a pesquisa
Teoricamente orientada	Essa característica está relacionada à utilização de uma proposta teórica para fundamentar todas as etapas da pesquisa. Nesse caso, a construção do quadro teórico que norteia as análises é baseada em Tversky (2019). O alicerce das discussões é o pensamento espacial e os movimentos associados a esse tipo de pensamento. Concentramo-nos no estudo dos movimentos mentais que estão relacionados com as Habilidades de Pensamento Espacial.
Intervencionista	Desenvolve uma aplicação em campo e pretende produzir produtos educacionais (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014). Nesse caso, houve intervenções com uma turma de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, que durante nove encontros construíram CAs no GeoGebra.

[18] A palestra é intitulada *Matemática, Neurociência e Tecnologia em Ensino e Aprendizagem: a importância dos movimentos na construção dos diferentes tipos de pensamento*, e pode ser acessada em: https://youtu.be/z-szby-YtvI

(Conclusão)

Colaborativa	A colaboração entre duas pesquisas de mestrado e o projeto do USF teve início ainda no planejamento dos CA. A DBR considera que a colaboração ocorre entre todos os envolvidos, que são considerados como parte da equipe de pesquisa (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014). Portanto, a professora do AEEI, o professor regente da turma e os alunos da Educação Básica também colaboraram, cada um com sua participação específica. Os integrantes do GEPTEMatE também fizeram parte dessa colaboração, quando sugeriram modificações e adaptações nos materiais elaborados para a intervenção com os alunos, quando foram discutidos no grupo de pesquisa.
Fundamentalmente responsiva	Durante o período de intervenções, realizamos reuniões semanais com o GP para discutir o encontro da semana, as dificuldades, avanços e (re)planejamento, caso necessário. A dinâmica dessas reuniões está de acordo com a característica fundamentalmente responsiva, de modo que "os potenciais ajustes na intervenção desenvolvida vão sendo desenvolvidas em diálogo e validação pela complexidade do contexto de aplicação" (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014, p. 27).
Iterativa	Os ajustes repensados para cada encontro seguinte também estão de acordo com a característica iterativa da DBR, que prevê, a cada iteração, o refinamento da solução encontrada, de modo que o resultado de uma etapa seja o início do próximo momento (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014). Assim, aperfeiçoar a dinâmica dos encontros sempre foi uma prioridade, pensando na aprendizagem dos alunos.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023).

Na seção seguinte, indicamos o modelo adotado para a dissertação, bem como a disposição das informações ao longo do trabalho.

1.5 Apresentação da Estrutura do Trabalho

Optamos por desenvolver esta pesquisa de mestrado considerando o formato de dissertação *multipaper*, que é composto por uma coleção de artigos científicos publicáveis (BARBOSA, 2015). Esse formato é compreendido como uma forma alternativa de representar trabalhos na Educação Matemática e em outras áreas, e difere do estilo monográfico comumente apresentado em teses e dissertações, que é composto por um único trabalho contínuo.

No caso dos trabalhos *multipaper*, cada um dos artigos apresenta começo, meio e fim bem delimitados. Segundo Barbosa (2015), essa organização facilita no momento de publicação dos resultados da pesquisa, pois a leitura de cada artigo pode ser feita separadamente do restante do trabalho, e como trabalhos relativamente curtos, acabam beneficiando o leitor, que possui pouco tempo para estudo.

Por outro lado, apesar dessa individualidade, os artigos permanecem entrelaçados, pois juntos devem atender ao objetivo geral da pesquisa, o que se constitui como um grande desafio ao pesquisador. A razão é que "não se pode perder de vista o aspecto global do trabalho, que exige coerência para que a conjugação dos artigos ofereça os elementos necessários para responder à questão geral de pesquisa" (ESTEVAM, 2015, p. 39). Considerando essa característica, alguns elementos teóricos e empíricos se repetem em um ou mais artigos, de modo que o pesquisador precisa exercer sua capacidade de síntese na escrita, sem que se percam informações relevantes, levando em conta também o limite de páginas imposto para artigos em periódicos (BARBOSA, 2015).

Seguindo esse formato, o relatório da presente pesquisa está composto por esta introdução estendida, dando uma visão geral ao leitor do trabalho que gerou os três capítulos seguintes, estruturados como artigos, e uma seção de considerações finais. No quadro 1.4, a seguir, estão dispostas informações gerais sobre os artigos.

Quadro 1.4 - Organização dos artigos que compõem a dissertação

Problema de pesquisa: Como ocorre a diferenciação de objetos da Geometria Plana e Espacial durante a construção de Cenários Animados no GeoGebra?		
Capítulos	**Objetivo**	**Contexto**
Artigo 01. Abordando propriedades conceituais e figurais de objetos geométricos em construções no GeoGebra	Discutir o potencial do GeoGebra para auxiliar na identificação e diferenciação de propriedades conceituais e figurais de objetos geométricos planos e espaciais.	O artigo 01 é um trabalho teórico interpretativo, que inicia com um estudo sobre a Geometria Plana e Espacial em um contexto histórico e na resolução de problemas. Também leva em conta a abordagem desse conteúdo na Base Nacional Comum Curricular. A partir de obstáculos identificados com esses estudos, são elencadas potencialidades do software GeoGebra para promover discussões sobre objetos geométricos planos e espaciais durante a construção do CA *Cubo na esteira*. Foram identificadas contribuições principalmente dos movimentos sobre os objetos geométricos e da associação entre as janelas de visualização 2D e 3D.
Artigo 02. Pensamento Espacial e Movimentos em Geometria: O GeoGebra com Enfoque na Construção de Cenários Animados	Discutir o potencial da construção de Cenários Animados no GeoGebra no/para o reconhecimento de objetos geométricos planos e espaciais, articulado com os movimentos associados ao pensamento espacial.	O artigo 02 é um ensaio teórico, que estabelece relações entre a construção de CAs no GeoGebra e os movimentos associados ao pensamento espacial, mais especificamente aos movimentos mentais relacionados às habilidades espaciais, tratado por Tversky (2019). Para isso, discutem-se as estratégias utilizadas pelas autoras no processo de construção do CA *Casa*, ponderando que, nesse processo, são utilizados movimentos e ações relacionados às habilidades espaciais de *rotação mental, perspectiva, julgamento espacial* e *construção mental*. Esses movimentos realizados a partir das ferramentas do GeoGebra, possibilitam discussões sobre objetos geométricos planos e espaciais, especialmente para identificar características diferentes entre eles.
Artigo 03. Movimentos Relacionados às Habilidades Espaciais em uma Construção de Cenário Animado no GeoGebra	Investigar como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção de um cenário animado no GeoGebra.	O artigo 03 tem caráter qualitativo e investigativo. Carregado teoricamente pelas ideias apresentadas por Tversky (2019), sobre o movimento e as habilidades de pensamento espacial, analisa a construção do CA *Casa*, que foi realizada por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. O estudo buscou identificar, nas ações dos alunos, a utilização de movimentos associados às habilidades espaciais durante a construção desse CA, e de que modo esses movimentos influenciaram o processo.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023).

Barbosa (2015) convida a reinventar as representações de pesquisa em Educação Matemática, com esse intuito, foi gravada uma série de vídeos para complementar os artigos. Nesses vídeos, é possível visualizar o passo a passo de uma construção no GeoGebra, ações dos alunos durante a construção do CA *Casa* e outros movimentos. Muitos vídeos estão disponíveis como notas de rodapé, mas no artigo 03 e em uma situação do artigo 01, eles foram inseridos no decorrer do texto. Porém, como no texto não é possível executá-los, quando o leitor clica sobre uma imagem, será aberta uma nova janela em que o vídeo será reproduzido. Desse modo, o acesso ao vídeo é facilitado, uma vez que o leitor não precisa copiar um link disponibilizado em nota de rodapé para assistir ao vídeo. Contudo, é necessário que tenha acesso à internet.

1.6 Referências

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES -MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002, p. 109-187.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. In: D'AMBRÓSIO, B. S; LOPES, C. E. (Org.) **Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática**. 1ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015, v. 1, p.347-367.

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 43-58, 2020. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58

BASNIAK, M. I.; CARNEIRO, E. B. A comunicação na construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação. **REVEMAT**, v. 16, 2021. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e80940

BORTOLOSSI, H. J. Movimentos, Pensamentos e GeoGebra: alguns aspectos neurocientíficos no ensino e aprendizagem da Matemática In: BASNIAK, M. I.; RUBIO-PIZZORNO, S. (Org.) **Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco.** Editora Pimenta Cultural, São Paulo, 2020, p. 96-117.

BORUCH, I. G.; BASNIAK, M. I. Animações no GeoGebra e o Ensino de Matemática: uma experiência com alunos com altas habilidades/superdotação. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología)**, v. extra, p. 1-8, 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Cenários animados no GeoGebra e o estudo de funções por alunos com altas habilidades/superdotação. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 4, n. 1, p. 134–154, 2021. DOI: https://doi.org/10.30612/tangram.v4i1.12629

ESTEVAM, E. J. G. **Práticas de uma Comunidade de Professores que ensinam Matemática e o Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística**. 192f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

LIPINSKI; L. M.; BASNIAK, M. I. Aprendizagem Matemática Através da Construção de Cenários Animados no GeoGebra. In: II Seminário de Integração: pesquisa, extensão, cultura e inovação tecnológica (SIPEC) **Anais...** 2021, p. 78-96.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, p.23-36. 2014.

MONZON, L. W.; BASSO, M. V. A. Prospecção de Pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2018. DOI: 10.22456/1679-1916.86031.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Learning science through computer games and simulations**. HONEY, M. A.; HILTON, M (Eds). Board on Science Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academies Press. 2011.

PADILHA DOS SANTOS, L.; BASNIAK, M. I. Construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação como atividade Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1–20, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n3a20.

PROCÓPIO, W. **O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo**: sugestões de atividades com o uso do GeoGebra.193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

TVERSKY, B. **Mind in Motion:** How Action Shapes Thought. Basic Books, New York, 2019.

2 ABORDANDO PROPRIEDADES CONCEITUAIS E FIGURAIS DE OBJETOS GEOMÉTRICOS EM CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Resumo: Este trabalho, de cunho teórico interpretativo, objetiva discutir o potencial do GeoGebra para auxiliar na identificação e diferenciação de propriedades conceituais e figurais de objetos geométricos planos e espaciais. Com esse intuito, inicia por um estudo sobre a abordagem da Geometria na Base Nacional Comum Curricular, documento orientador da Educação Básica no Brasil, que permitiu identificar que a Geometria Plana e a Espacial são dispostas em blocos separados, o que pode levar a problemas para compreender aproximações entre os objetos planos e espaciais. Os livros didáticos geralmente exibem representações prototípicas dos objetos geométricos, que acaba gerando confusões entre características da representação e características conceituais do objeto pela impossibilidade de realizar alterações na figura. Apresenta, ainda, um contexto histórico da Geometria na resolução de problemas da realidade, e resoluções de problemas geométricos utilizando diferentes recursos. O estudo, de bases teóricas sobre o ensino de Geometria, permitiu estabelecer potencialidades do GeoGebra para promover discussões matemáticas sobre objetos geométricos; nesse caso, durante a construção do Cenário Animado *Cubo na esteira*. Os Cenário Animados são construções envolvendo elementos matemáticos em uma cena com movimento. No processo de construção, o software permitiu explorações sobre os objetos construídos, associando a nomenclatura, as características da representação e os comandos informados ao GeoGebra. Movimentos realizados sobre os objetos construídos colaboraram para identificar posições não prototípicas, ao associar mais de uma componente figural ao mesmo objeto. Ainda, as janelas de visualização 2D e 3D foram utilizadas de maneira simultânea, o que permitiu estabelecer relação entre objetos geométricos planos e espaciais, evidenciando que eles não são disjuntos.

Palavras-chave: Geometria Plana e Geometria Espacial. Conceitos. Representações. GeoGebra. Cenários Animados. Potencialidades.

2.1 Introdução

Tarefas que possibilitam explorar o espaço físico a nossa volta são indicadas para iniciar o estudo da Geometria, por ser a área da Matemática que estuda as formas e disposições no espaço. Assim, considerando os modelos tridimensionais que representam o espaço, é esperado que o estudo das formas geométricas espaciais anteceda o das figuras planas (FONSECA *et al.*, 2011), ou que se associem, para evidenciar a relação entre os objetos.

Entretanto, segundo Fonseca *et al.* (2011), o que costuma ser identificado, especialmente nos livros didáticos, é a abordagem da Geometria Plana desvinculada da Geometria Espacial, de maneira expositiva, e levando em conta exemplos de imagens com características particulares. Isso dificulta identificar os objetos geométricos em posições diferentes das habituais. Por essa razão, não podem ser reduzidos a uma representação, pois os objetos também são definidos por propriedades conceituais: uma associação entre a componente figural e conceitual (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015).

Os softwares de Geometria dinâmica, como o GeoGebra, são uma opção para trabalhar com objetos geométricos planos e espaciais de forma vinculada nas aulas de Matemática. Com ele, é possível abrir espaço para investigações, explorando características dos objetos geométricos.

Neste trabalho temos o objetivo de discutir o potencial do GeoGebra para auxiliar na identificação e diferenciação de propriedades conceituais e figurais de objetos geométricos planos e espaciais. Uma opção para utilizar o GeoGebra com o objetivo de discutir sobre conceitos e representações dos objetos geométricos é com a construção de Cenários Animados, que são um tipo de construção envolvendo elementos matemáticos para formar uma cena animada (BUENO; BASNIAK, 2020).

Para a execução desta pesquisa teórica interpretativa, partimos de estudos sobre Geometria Plana e Espacial, levando em conta um contexto histórico na organização curricular brasileira, sua origem na resolução de problemas da realidade e em problemas da própria matemática, e sobre obstáculos no ensino de Geometria Plana e Espacial. A partir disso, elencamos e discutimos características do software GeoGebra que venham a contribuir com o ensino da Geometria Plana e Geometria Espacial.

2.2 A Geometria na organização curricular

Na década de 1970, a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação nº 5.692/71 concedeu certa liberdade às escolas na estruturação do currículo, permitindo aos professores determinar os conteúdos que seriam ministrados em suas aulas. Com isso, o conteúdo de Geometria deixou de ser ensinado por professores que sentiam dificuldades para ministrá-lo nas aulas de matemática (PAVANELLO, 1993). Nos livros didáticos, a seção sobre Geometria passou a ser a última, e o conteúdo era abordado somente ao final do ano letivo, se houvesse tempo, culminando com o abandono do ensino de Geometria (CARVALHO, 2008). Ao ouvir depoimentos de professores participantes de um curso de formação, Fonseca *et al*. (2011) identificaram desconforto desses professores ao falar do ensino de Geometria, para além da dificuldade sobre o conteúdo, o que não ocorre quando falam sobre ensino de números e operações, por exemplo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), na década de 1990, buscaram resgatar o ensino de Geometria quando, no mesmo contexto o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), favorece experimentações, argumentações e a abordagem dos conteúdos de Geometria de forma mais contextualizada em relação ao espaço em que vivemos (SANTOS; ROSA; SOUSA, 2021). Essa mesma essência está atualmente contemplada na BNCC, documento normativo vigente para as redes de ensino no Brasil, indicando que o estudo da Geometria é necessário para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, integrando a Geometria com outras disciplinas (BRASIL, 2018).

Na BNCC, com o estudo da unidade temática de Geometria ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental[19], "espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa" (BRASIL, 2018, p. 272). Isso sugere uma ligação entre elementos da própria Geometria, e para que essa relação seja estabelecida, ressaltamos a importância de trabalhar com conteúdo da Geometria Plana e Espacial de maneira associada.

Mais tarde, nos anos finais do Ensino Fundamental, é prevista uma "ampliação das aprendizagens realizadas [...] tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes" (BRASIL, 2018, p. 270), habilidades que dizem respeito à compreensão das características da própria Geometria e do pensamento geométrico.

Por outro lado, a associação entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial não fica tão evidente na organização curricular da BNCC. Na descrição do conteúdo estruturante de Geometria, o estudo das figuras geométricas planas e espaciais, que aparece no 5º e 6º ano[20] do Ensino Fundamental, está separado, bem como as habilidades elencadas não garantem que o estudo ocorra de modo vinculado (Quadros 2.1, a seguir, e 2.2, na página seguinte).

Quadro 2.1 - Organização dos conteúdos de Geometria na BNCC para o 5º ano

Unidades temáticas	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
Geometria	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos
	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Fonte: Brasil (2018, p. 296-297).

[19] No Brasil, os anos iniciais do Ensino Fundamental inclui alunos entre 6 e 10 anos de idade, já nos anos finais do Ensino Fundamental a idade varia entre 11 e 14 anos.
[20] O 5º e 6º ano do Ensino Fundamental no Brasil é destinado a crianças de 10 e 11 anos de idade, respectivamente.

Quadro 2.2 - Organização dos conteúdos de Geometria na BNCC para o 6º ano

Unidades temáticas	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
Geometria	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial
	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles

Fonte: Brasil (2018, p. 302-303).

Ao analisar as habilidades da BNCC descritas nos quadros 2.1 e 2.2, percebemos que predominam aquelas que tratam dos objetos planos e espaciais separadamente. Especialmente aquelas relacionadas aos polígonos, em que as ações se concentram na comparação e quantificação de arestas, vértices, lados e ângulos, a fim de classificá-los.

Por outro lado, a habilidade EF06MA18 do 6º ano menciona os polígonos enquanto faces dos poliedros, sugerindo uma relação entre eles. Apesar disso, essa habilidade também se concentra na comparação de objetos planos e seus elementos a fim de classificá-los. Do mesmo modo, a habilidade EF05MA16 do 5º ano menciona a comparação de objetos espaciais com sua planificação, mas sem indicar sua relação com polígonos. Essas duas habilidades inferem de forma indireta sobre uma associação entre objetos planos e espaciais, mas ela não é o suficiente para compreender a relação de dependência existente entre eles, especialmente nos casos em que analisa os polígonos de forma isolada, os quais são projeções de objetos espaciais.

Essa disposição de conteúdo é contemplada nos livros didáticos e, consequentemente, na sala de aula, pois os tópicos que os professores trabalham devem seguir o currículo pré-estabelecido na BNCC. Desse modo, a Geometria Plana e a Geometria Espacial podem não ser trabalhadas de forma diretamente articulada na escola, se o professor seguir a disposição apresentada no currículo para atender as habilidades descritas nessa etapa.

Ao tratar os objetos geométricos planos e espaciais como independentes, é possível gerar dificuldades para compreender os objetos em estudo, pois esse princípio de separação vai contra a origem histórica da Geometria, que utiliza de conhecimentos sobre a Geometria Plana e a Espacial aplicados de forma interligada.

2.2.1 Contexto histórico da Geometria e resolução de problemas

A Geometria, enquanto área de estudo da Matemática, é uma das mais antigas que conhecemos, advinda de necessidades práticas dos povos antigos, que estavam associadas a representações de objetos geométricos diversos (ROGENSKI; PEDROSO, 2019). Tais representações apareciam em atividades mais complexas, envolvendo construções de monumentos, como a pirâmide de Quéops no Egito antigo, ou em situações mais comuns para a época, como a medida e divisão de terrenos.

Ainda na Antiguidade, os usos da Geometria foram ampliados e aprimorados. O homem aprendeu que soluções retilíneas eram mais econômicas, começou a trabalhar com figuras regulares por serem mais fáceis de construir e calcular, e passou a usar modelos de formas geométricas espaciais para construções específicas, como cones e cilindros em poços e cabanas, por perceber que eram mais apropriados para tais situações (CARVALHO, 2008).

A Geometria também se mostrou presente em outras áreas, como na arquitetura, a partir do desenvolvimento de decorações: no caso das arquiteturas egípcia, greco-romana e árabe, a repetição de padrões e as simetrias eram muito presentes (CARVALHO, 2008).

Portanto, há muito tempo a Geometria é essencial para auxiliar em situações da realidade, e ao admitirmos que o surgimento e desenvolvimento da Geometria está associado à resolução de problemas práticos, que a princípio são modelados por representações bidimensionais e tridimensionais, compreendemos que o conhecimento sobre Geometria Plana é indissociável da Geometria Espacial e vice-versa. Nesse sentido, é indicado que, no processo de ensino, permaneçam articuladas.

Nos tempos atuais, conseguimos identificar aplicações da Geometria na Física na natureza, no artesanato, em pinturas e na arte em geral, além de ser contemplada em problemas da própria Matemática. Segundo Vilaça (2018), as representações de elementos geométricos fazem parte de nosso contexto, e nos cercam desde pequenos, quando começamos a recolher objetos, reconhecer formas à nossa volta e nos localizar no espaço. Assim, “a geometria acompanha o desenvolvimento do sujeito ao longo da sua vida. Em várias situações do cotidiano é possível estabelecer relações com conceitos pertinentes ao campo geométrico” (VILAÇA, 2018, p. 9).

É comum que, nas aulas de matemática, os professores criem essas relações, por exemplo, afirmar que uma folha de papel é um retângulo, ou que os arredores das mesas dos estudantes são segmentos de reta. Os professores fazem isso com a intenção de proporcionar assimilação entre o conteúdo estudado e objetos já conhecidos pelos alunos. Entretanto, é preciso tomar cuidado com essas associações para não gerar confusões conceituais na compreensão da Geometria.

Não se pode esquecer que a Geometria é abstrata enquanto ramo da Matemática, e portanto, os objetos geométricos "se situam além das circunstâncias materiais" (FONSECA *et al.*, 2011, p. 67). Nesse sentido, os itens que identificamos em nossa volta podem possuir formato e características semelhantes aos objetos geométricos, mas não são admitidos enquanto os próprios objetos.

As figuras planas não possuem espessura, e assim é necessário grande capacidade de abstração para compará-las com objetos que observamos ao redor, considerando somente a representação do formato de uma parte/face do objeto (FONSECA *et al.*, 2011). Já as formas geométricas espaciais, por serem tridimensionais, apresentam mais características semelhantes a utensílios a nossa volta, o que permite estabelecer comparações entre objetos físicos e geométricos, como comparar uma lata de refrigerante a um cilindro, e uma esfera com uma bola de futebol, por exemplo.

Por manter essa aproximação, a Geometria é fundamental em nosso cotidiano, e tem o sentido de tornar as tarefas mais práticas, exatas e econômicas. Para mais, "sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se incompleta" (LORENZATO, 1995, p. 5).

Nesse sentido, aqueles que não possuem conhecimentos básicos sobre Geometria, possivelmente por consequência do abandono do ensino desse conteúdo nas etapas escolares, podem apresentar dificuldade na resolução de problemas que a requerem, seja em situações do cotidiano ou em problemas da própria matemática.

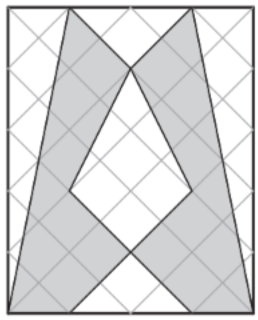
Talvez essa seja uma justificativa para a tendência em resoluções de problemas utilizando a Álgebra, com a qual se tem mais contato durante o período escolar. Isso corrobora com nossa prática de resolução de problemas, em que é comum atribuirmos x ou qualquer outra letra para um valor desconhecido: essa é uma estratégia que utilizamos para resolver problemas envolvendo assuntos para além da Geometria e da Álgebra, especialmente quando os recursos disponíveis para resolver a questão são lápis e papel.

Por outro lado, quando a resolução de problemas pode ser realizada com a utilização de um software, como o GeoGebra, a possibilidade de criar elementos com rigor matemático, considerando os conhecimentos geométricos que integram os recursos do software, contribui para a utilização dessas representações para descobrir a solução de um problema (ALVES; SAMPAIO, 2010). As ferramentas disponíveis no GeoGebra permitem construir representações de objetos e determinar medidas sem que se utilize diretamente cálculos para isso. No exemplo a seguir (Figura 2.1), apresentamos um problema de matemática da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) resolvido de duas formas diferentes, uma delas utilizando o GeoGebra.

Figura 2.1 – Questão área de figuras

6. O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?

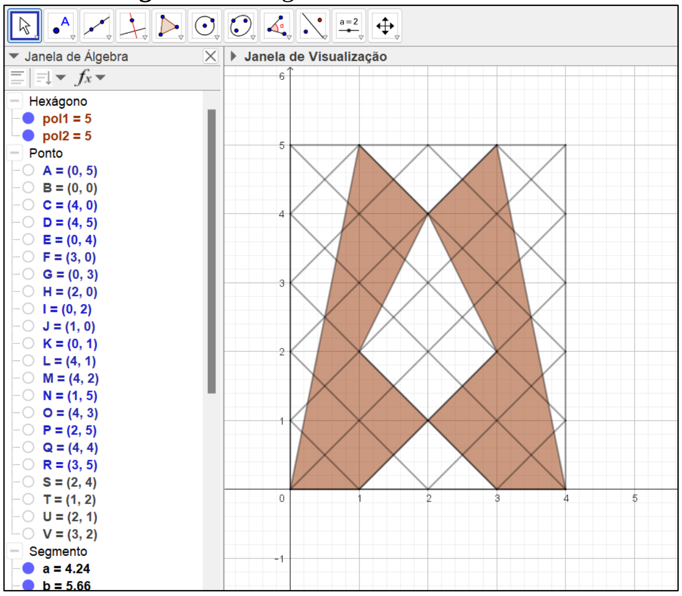
A) 10 cm^2
B) 11 cm^2
C) 12,5 cm^2
D) 13 cm^2
E) 14,5 cm^2



Fonte: OBMEP (2012, p.3).

Resolução 01: No GeoGebra, podemos representar a figura do enunciado a partir das informações visuais e descritivas da questão (Figura 2.2). Para isso, criamos um retângulo de tamanho 4 x 5, com segmentos de reta, tomando como base a escala dos eixos no GeoGebra. Com apoio da malha quadriculada, criamos o tracejado do fundo também utilizando segmentos de reta. Depois disso, com a ferramenta *polígono*, ligamos os pontos conforme o formato da imagem do enunciado. Entretanto, como essa figura possui dez vértices e doze lados: ela não é um polígono. Desse modo, uma opção para conseguir representá-la é criar dois polígonos simétricos, de maneira que, juntos, formem a imagem final.

Figura 2.2 – Figura criada no GeoGebra[21]

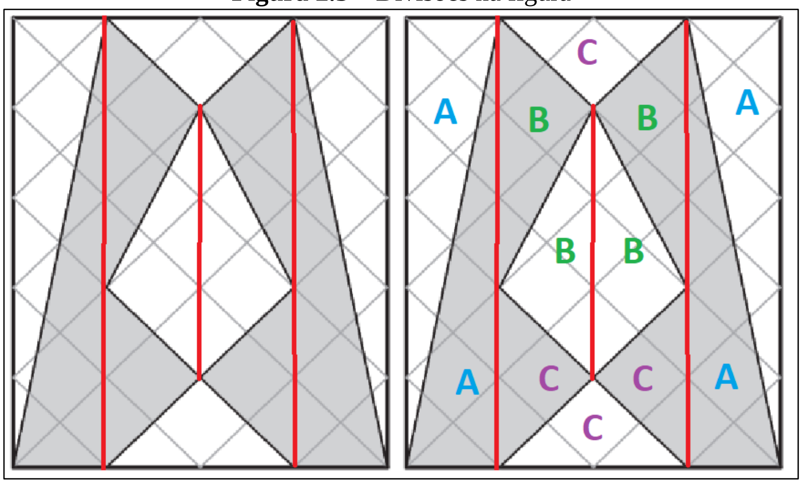


Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Quando um polígono é criado no GeoGebra, uma das informações que podemos identificar sobre ele, na janela de álgebra, é a medida da área. Desse modo, assim que as figuras foram criadas, já obtivemos a resposta para a questão: 10 cm², somando a área das duas figuras que compõem a região escura do retângulo, que é de 5 cm² cada.

Resolução 02: Utilizando lápis e papel para solucionar o problema, começamos dividindo o retângulo do enunciado em figuras menores, formando doze triângulos, em que seis deles são brancos e os outros seis cinzas. Para isso, tomamos como base o quadriculado do fundo (Figura 2.3(a)).

Figura 2.3 – Divisões na figura



(a) (b)

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

[21] A construção no GeoGebra pode ser acessada neste vídeo: https://youtu.be/HYI-xB6SXO4

Ao comparar triângulos de cores diferentes, percebemos que sempre há um branco que corresponde a um cinza, em relação à área, levando em conta a quantidade de quadrados com que são formados e a simetria da figura. Denominados os triângulos de mesma área com as mesmas letras (Figura 2.3(b)), a partir disso podemos escrever a seguinte relação sobre a área total da região branca (A_b) e da região cinza (A_c).

$$A_b = 2 \times A + 2 \times B + 2 \times C$$

$$A_c = 2 \times A + 2 \times B + 2 \times C$$

Como $A_b = A_c$, a área da região cinza é a metade da área total. Logo $A_e = \frac{4 \times 5}{2} = 10cm^2$.

Os conhecimentos matemáticos e as estratégias envolvidas em cada resolução são distintos. Podemos notar que, na resolução 01, não foi necessário fazer nenhum cálculo diretamente para determinar a área. Desse modo, a resolução concentrou-se em representar a figura no GeoGebra e analisar as informações que o software nos oferece. Para isso, foi necessário o conhecimento geométrico sobre as propriedades dos polígonos, simetria, e sobre o que significam as informações que o GeoGebra nos oferece. Por outro lado, na resolução 02, utilizamos conhecimento geométrico sobre simetria quando particionamos a figura do enunciado em outras figuras, e para comparar as áreas dentro do retângulo, recorremos a cálculos algébricos.

A resolução 02 poderia ser reproduzida no GeoGebra. Por outro lado, não seria possível utilizar a estratégia da resolução 01 sem auxílio de um software de Geometria dinâmica, pois se a figura fosse representada em uma folha de papel, por exemplo, a área não seria calculada automaticamente.

Esse problema e outros semelhantes podem ser trabalhados nas aulas de matemática utilizando recursos tecnológicos ou outras alternativas que busquem ampliar possibilidades de resolução explorando os conhecimentos geométricos envolvidos. Entretanto, essa questão fez parte de uma edição da OBMEP. Nessa situação, assim como em outras avaliações de larga escala, os estudantes possuem lápis e papel ou similares como único recurso para resolver o problema, o que acaba restringindo as opções de resolução.

Essas provas geralmente têm como objetivo avaliar a qualidade do ensino, mas esse processo pode ser prejudicado, porque não reflete as práticas realizadas nas salas de aulas. Nessas provas, não é possível utilizar softwares, aplicativos e outros recursos, que são muitas vezes recomendados pelos documentos orientadores da educação, como a BNCC, para utilização nas práticas escolares, possibilitando ao estudante explorar um problema, e assim, encontrar outros meios para resolvê-lo.

Nas duas resoluções apresentadas anteriormente, utilizamos a representação como auxílio do raciocínio, especialmente porque a Geometria possui muitos elementos propícios à visualização. Nesse sentido, a componente figural de um objeto geométrico se destaca. Reconhecer visualmente propriedades de objetos geométricos, descrevê-los e saber como representá-los é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico (FONSECA *et al*., 2011). Para que isso seja possível, é preciso conhecer não apenas a componente figural, mas considerar uma articulação entre a componente conceitual e figural de tais objetos, conforme discutimos na próxima subseção.

2.2.2 Componente conceitual e figural de objetos geométricos e o software GeoGebra

Desenhar um objeto geométrico é a forma de representação que costuma ser mais utilizada em Geometria, a qual chamamos de *componente figural*. Ela está associada a imagens mentais que temos daquele objeto, as quais determinam a representação que concebemos dele (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015). Segundo Amâncio e Gazire (2015), a formação de imagens mentais acontece em decorrência do contato com diferentes representações do objeto e da associação com o conceito.

Quando temos contato com exemplos de figuras geométricas que carregam sempre características particulares, as imagens mentais que formamos sobre eles acabam reduzidas. Nesse caso, a representação do objeto pode ser confundida com o conceito, e apesar de serem estreitamente associados, representação e conceito são diferentes.

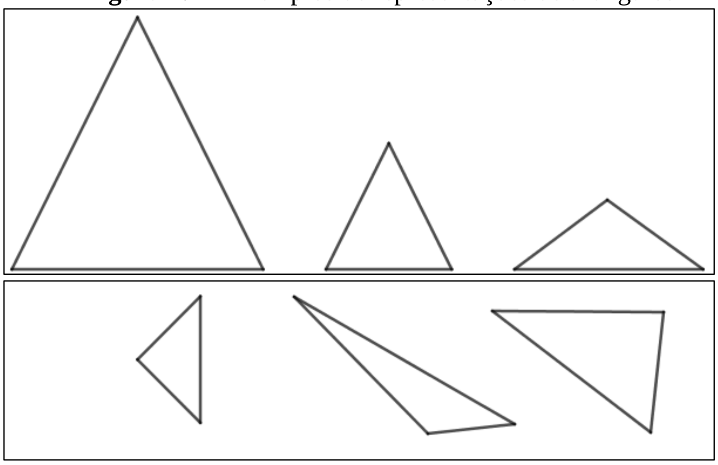
A *componente conceitual* é aquela que define o objeto de acordo com suas propriedades, possibilitando formar "uma representação ideal de uma classe de objetos, baseada em suas características comuns" (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015, p. 115). Desse modo, também contribui para enriquecer o conjunto de imagens mentais do objeto (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015).

Portanto, representação e conceito devem ser trabalhados de maneira conjunta para contemplar a natureza dupla desses objetos, pois é a partir do equilíbrio entre os dois componentes que uma noção mais precisa sobre o objeto geométrico é formada. Logo, "um ente geométrico pode ser descrito por suas propriedades conceituais, mas não são somente conceitos, também são imagens" e vice-versa (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015, p. 115).

Quando a representação e o conceito são confundidos ou tomados como aquilo que não são, o momento de identificar e distinguir características de objetos geométricos pode ser prejudicado, sejam eles planos, espaciais, ou até mesmo em uma relação entre planos e espaciais.

Um exemplo disso, em relação à Geometria Plana, foi evidenciado com a pesquisa de Pirola *et al.* (2004), que realizaram uma investigação com vinte estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, envolvendo a utilização de questionários para verificar se os alunos conseguiam identificar atributos definidores[22] de algumas figuras planas e desenhar exemplos dessas representações. Com os resultados, identificaram que apenas seis entre vinte estudantes reconheceram um triângulo enquanto uma figura plana, e outras propriedades do triângulo sobre seus ângulos e lados não foram reconhecidas pelos estudantes. Os exemplos elaborados pelos alunos mostraram que, na maior parte dos casos, foram desenhados triângulos na mesma posição, variando apenas o tamanho (Figura 2.4(a)). Apenas um estudante variou a medida dos lados e a posição do triângulo (Figura 2.4(b)).

Figura 2.4 – Exemplos de representações de triângulos[23]



(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Os resultados de Pirola *et al.* (2004) podem evidenciar um reconhecimento limitado da *componente figural* e *conceitual* do triângulo, por apresentarem apenas exemplos de representações estereotipadas, e por não reconhecerem características essenciais do objeto geométrico.

Equívocos como esses também podem ser resultado da natureza estática com que a Geometria é trabalhada, geralmente por meio da utilização do livro didático, no qual não se pode modificar características das figuras desenhadas, que costumam fazer referência a exemplos bem particulares, como os descritos por Machado (2015, p. 6, grifos do autor):

---

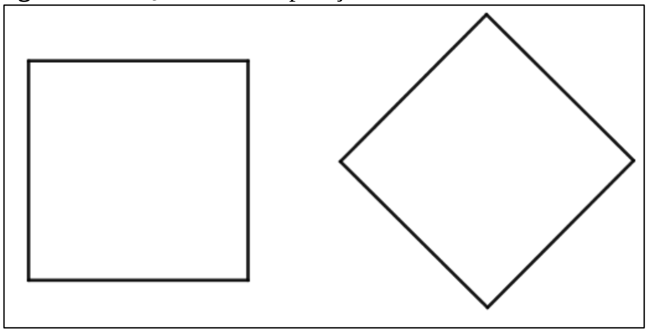
[22] Os atributos definidores dizem respeito às características e propriedades de um conceito. Por exemplo: os atributos definidores do triângulo são: figura plana, simples, fechada, três segmentos de reta, três ângulos internos, etc.

[23] Esses exemplos de triângulos foram inseridos para ilustrar possibilidades de representações nas condições descritas, mas não são os desenhos que foram criados pelos participantes da pesquisa de Pirola *et al*. (2004).

> [...] quadrados e retângulos quase sempre aparecem desenhados com os lados paralelos às bordas da folha e os triângulos, na sua maioria, são acutângulos e quase sempre estão desenhados com um dos lados na "horizontal" e sua altura na "vertical". Mais ainda: os exemplos e exercícios propostos nos livros didáticos são, em geral, aqueles cujas soluções são baseadas em operações aritméticas do tipo "calcule" ou em equações "determine o valor de x", de modo que, para os alunos, a posição relativa do desenho quanto a borda da página, a operação aritmética ou a equação utilizada passam a fazer parte das características do objeto, estabelecendo então desequilíbrios na formação dos conceitos.

Quando se trabalha somente com essas representações particulares, é possível não reconhecer uma figura, se ela não estiver representada em sua posição prototípica (MACHADO, 2015). Um exemplo citado por Machado (2015) é de uma figura com quatro lados de mesma medida e quatro ângulos de 90º, que está desenhada em uma folha com os lados paralelos à borda. Nessas condições, é comum ser reconhecida como um quadrado, mas quando essa mesma figura é rotacionada em 45º, é possível não reconhecê-la enquanto quadrado, pois agora a sua posição se assemelha mais àquela comumente utilizada para as representações do losango (Figura 2.5). Entretanto, a figura foi apenas rotacionada, suas propriedades continuam satisfazendo a representação de um quadrado e de um losango, mas a posição em que é apresentada pode levar a equívocos no momento de identificá-la.

Figura 2.5 – Quadrado em posição habitual e rotacionado 45º



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Nesse exemplo, a identificação do objeto ocorre levando em conta apenas a *componente figural*, sem considerar as propriedades conceituais que definem o objeto, que permanecem inalteradas. Isso porque é comum que a *componente figural* se torne sobressalente, por ser visual, e acabe deixando a *componente conceitual* em segundo plano, dificultando a identificação de características que aproximam e diferenciam esses objetos geométricos pelo aspecto conceitual (MACHADO, 2015).

Por outro lado, considerar apenas a *componente conceitual* não garante a identificação de qualquer representação de um objeto, porque "embora o aluno conheça a definição de paralelogramo, pode ser difícil para ele visualizar várias formas correspondentes a essa definição, pois a imagem mental que uma pessoa tem de um objeto pode enfraquecer o aspecto conceitual"; o mesmo vale para outros objetos geométricos (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015, p. 116). Por isso, segundo Amâncio e Gazire (2015), é importante que o conjunto das imagens mentais seja ampliado nos aspectos quantitativo e qualitativo.

Os exemplos citados até aqui dizem respeito a objetos da Geometria Plana, mas também ocorrem confusões na identificação e diferenciação com os objetos da Geometria Espacial, em que a compreensão da *componente conceitual* e *figural* também é fundamental.

Quando o estudo de formas geométricas espaciais acontece utilizando apenas livros didáticos, é possível confundir representações planas com as espaciais, pois nesse caso, características dos objetos espaciais acabam suprimidas (MALFATTI *et al*., 2020).

Estudar objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais exige uma abstração maior, porque para identificar objetos que possuem comprimento, largura e altura na página de um livro são necessárias diferentes projeções, que por sua vez, "distorcem ângulos, modificam comprimento de segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção" (MALFATTI *et al*., 2002, p. 563). Além disso, identificar características como profundidade e inclinações dos objetos a partir de uma representação estática não é uma tarefa elementar. Sem contar que objetos diferentes podem ter uma mesma projeção plana, o que acaba gerando outras confusões na identificação do objeto.

Com isso, uma das dificuldades enfrentadas no estudo da Geometria Espacial é "reconstruir mentalmente uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional estática impressa" (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019, p. 7). Essa dificuldade não se refere apenas a conseguir desenhá-la, mas consequentemente, a compreender quais elementos compõem sua representação e a caracterizam. Principalmente porque, em Geometria, costuma-se tomar a representação figural como a principal em momentos de aprendizagem, e se a representação limita o reconhecimento do objeto, a compreensão de que elementos conceituais e figurais se conectam e se complementam pode ser prejudicada.

Machado, Bortolossi e Almeida Junior (2019) corroboram com a justificativa de que a ocorrência de confusões e compreensões errôneas em Geometria Plana e Espacial é proveniente do aspecto estático com que as representações são trabalhadas. Por isso, segundo os autores, é fundamental observar um objeto tridimensional por várias posições e ângulos diferentes para entender melhor suas características.

Uma solução para isso é atribuir movimento aos objetos, que pode ser feito com o uso de softwares de Geometria dinâmica. Quando trabalhamos com objetos geométricos planos e espaciais em softwares no computador, também estamos considerando um ambiente plano para essas representações: a tela do computador. Entretanto, nesse caso, os recursos gráficos e computacionais combinam linhas, cores e formas, podendo simular um ambiente tridimensional que permite interagir com as formas construídas, manipulando e observando-as em diferentes perspectivas.

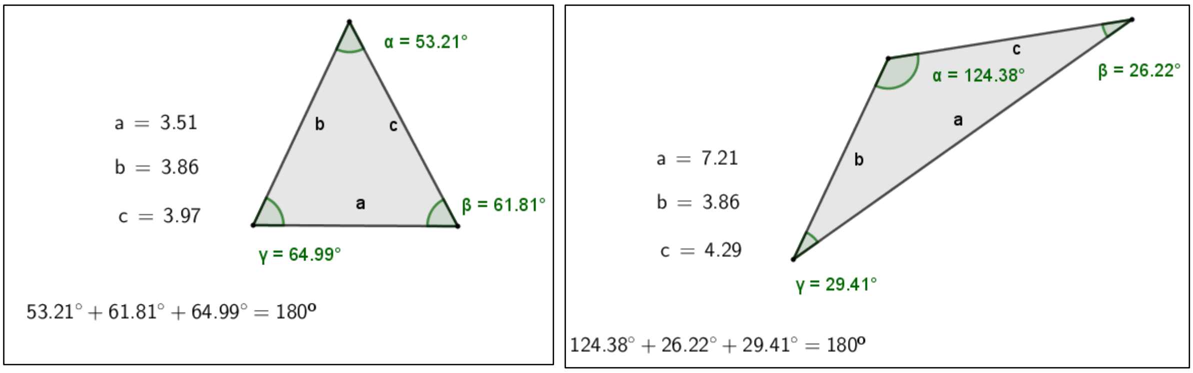
A BNCC (BRASIL, 2018) sugere que, para a abordagem dos conteúdos de Geometria, sejam utilizados recursos como esse. Entretanto, as contribuições dos softwares para as aulas de Matemática vão depender do uso que se faz deles.

O software GeoGebra possibilita uma interação diferente com os objetos geométricos, se comparado com recursos estáticos, principalmente para objetos espaciais, devido ao movimento acompanhado de explorações matemáticas. O software favorece explorações, pois não é "limitado por razões materiais, como a imprecisão do traçado, impossibilidade de tornar invisível temporariamente uma parte do desenho e a limitação do número de elementos a gerar" (ALVES; SAMPAIO, 2010, p. 74).

Construir e manipular os objetos geométricos é diferente de simplesmente observá-los. No processo de construção, é possível testar conjecturas a partir dos conhecimentos prévios, e dependendo da representação oferecida pelo GeoGebra, é possível corrigir, modificar ou validar as estratégias utilizadas, até chegar ao resultado desejado.

Também se pode realizar alterações nas construções do GeoGebra apenas reposicionando alguns elementos, de modo que certas propriedades geométricas não sejam alteradas mediante transformações realizadas sobre o objeto (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019). Por exemplo, quando a localização dos vértices de um triângulo é modificada, a característica de ser uma figura fechada, formada por três segmentos de reta e três ângulos internos que somam 180º permanece, mas as medidas dos lados e a posição do triângulo são alteradas, originando uma representação diferente da anterior para o mesmo objeto geométrico (Figura 2.6, na página seguinte).

Figura 2.6 – Alterações no triângulo[24]



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Isso possibilita criar uma grande quantidade de exemplos para o mesmo objeto a partir de uma única construção, ampliando o conjunto de imagens mentais (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019). Além disso, evita que características particulares sejam tomadas como as propriedades matemáticas que definem o objeto, favorecendo seu reconhecimento em posições diferentes daquelas que são habituais. Nesse processo, podem ser identificadas propriedades dos objetos que permanecem, enquanto partes da representação mudam, agregando ao conhecimento geométrico do indivíduo. Portanto, com o GeoGebra, a interação com a representação dos objetos passa de estática a dinâmica.

Na sequência, ampliamos essa discussão sobre o GeoGebra, quando elucidamos, a partir da construção de um Cenário Animado, como seus recursos e o ambiente dinâmico podem colaborar para a identificação e diferenciação de propriedades conceituais e figurais de objetos da Geometria Plana e Espacial.

2.3 Resultados e Discussões: Cenários Animados no GeoGebra

O ambiente do GeoGebra permite que seja adicionado movimento contínuo às representações de objetos matemáticos nele construídas. Além disso, é possível personalizar a construção, inserindo imagens e alterando a aparência dos objetos matemáticos, como tamanho e cor. Esses atributos do software possibilitam a construção de Cenários Animados (CAs)[25], que são um tipo de construção envolvendo elementos matemáticos em uma cena que é animada (BUENO; BASNIAK, 2020).

Nosso objetivo, com essas construções, é promover discussões sobre os objetos matemáticos que compõem o CA, tanto no aspecto conceitual como de sua representação.

---

[24] Vídeo das alterações no triângulo: https://youtu.be/adOMhihxpo8

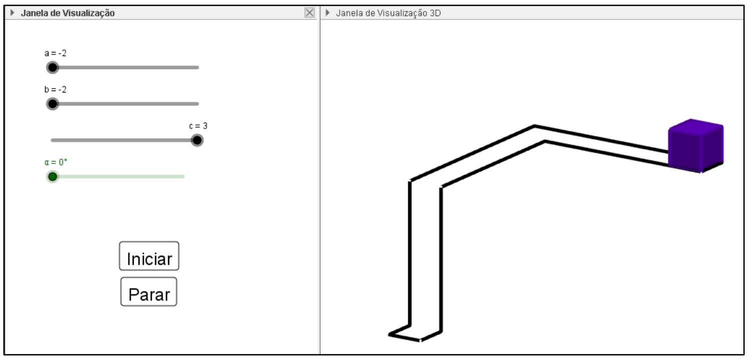
[25] Para o termo Cenários Animados no plural será utilizada a sigla CAs, e para o termo Cenário Animado no singular será utilizada CA.

Ademais, os objetos matemáticos envolvidos podem variar, pois o processo de construção dos CAs pode ser subjetivo: ele depende da criatividade e das escolhas de ferramentas e conteúdo matemático que o indivíduo realiza. Assim, CAs semelhantes podem possuir diferentes elementos matemáticos em sua elaboração.

A cena resultante da construção apresenta relação com personagens, situações imaginárias ou com um contexto real. Nesse sentido, Lima e Almeida (2015) afirmam que as primeiras experiências escolares com a Geometria devem resgatar o conhecimento que a criança traz do meio em que está inserida. Portanto, associar formas geométricas espaciais com representações de objetos do mundo físico, ou com cenas de jogos e desenhos animados, pode ser uma possibilidade interessante para a abordagem do conteúdo de Geometria a partir de uma construção de CA. Desse modo, a intenção não é apenas construir o objeto geométrico, mas adequá-lo a um contexto.

No CA *Cubo na esteira* (Figura 2.7), os objetos geométricos visualmente envolvidos são um cubo e diversos segmentos de reta, que estão representando o caminho que o cubo percorrerá para chegar ao final da esteira. Além disso, também há quatro *controles deslizantes*[26] que determinam a direção e amplitude dos movimentos que o cubo realiza. A partir da construção desses objetos, também é possível personalizar e construir outros CAs que apresentem relação com o contexto dos envolvidos.

Figura 2.7 – Cenário Animado *Cubo na esteira*[27]



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Apesar de ser uma construção com poucos itens, é possível realizar discussões matemáticas sobre esses e outros elementos que estão implicitamente envolvidos. Isso

[26] Utilizamos a ferramenta controle deslizante como uma variável numérica que assume valores dentro de um intervalo pré-estabelecido pelo usuário, possibilitando que os objetos matemáticos associados ao controle deslizante também variem.
[27] Acesse o vídeo do CA *Cubo na esteira* em movimento: https://youtu.be/oJ_d4aB9JoI

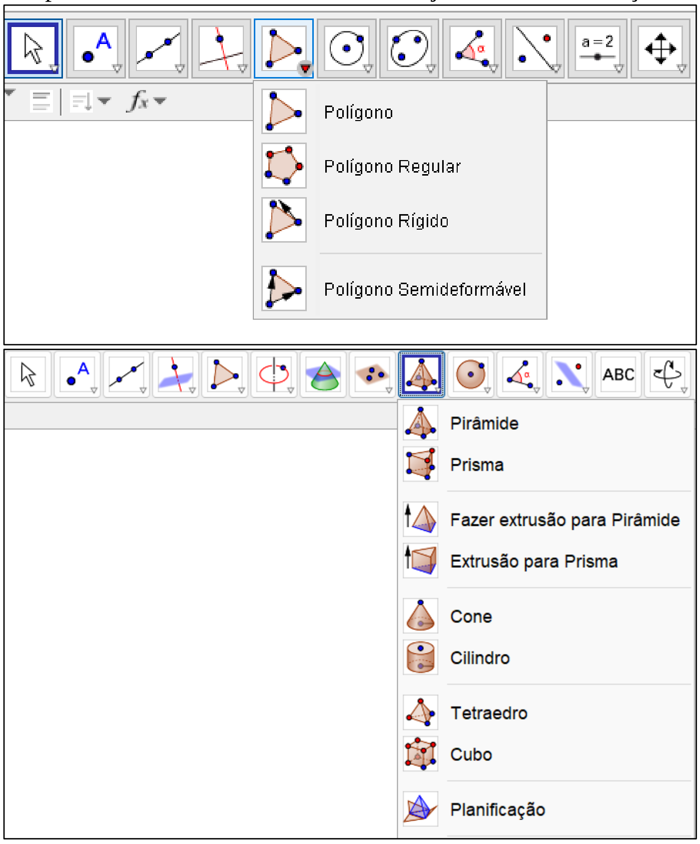
dependerá do processo de construção adotado e da condução da tarefa, e os recursos do software podem contribuir nesse aspecto.

A seguir, elencamos discussões matemáticas identificadas a partir de estratégias cogitadas pelas autoras deste trabalho ao construir o CA intitulado *Cubo na esteira*. Nesse caso, nos ativemos a discussões sobre objetos geométricos planos e espaciais, destacando o potencial do GeoGebra para trabalhar com esses elementos.

2.3.1 As ferramentas do GeoGebra na construção de objetos geométricos

Para criar a representação figural de objetos geométricos planos e espaciais, o software dispõe de duas janelas de visualização, 2D e a 3D. Em cada uma delas há uma lista com as ferramentas que podem ser utilizadas para criar elementos matemáticos (Figura 2.8). Nesse caso, identificamos opções para criar polígonos e formas geométricas espaciais.

Figura 2.8 – Exemplo de ferramentas do GeoGebra na janela de visualização 2D (a) e 3D (b)



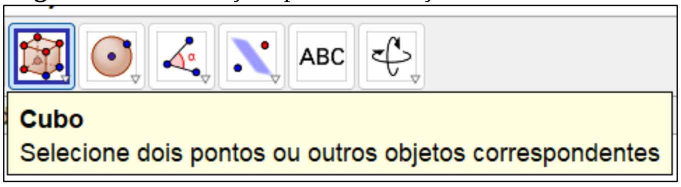
(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

No GeoGebra, há diversas maneiras de construir o mesmo objeto matemático, e para iniciar a construção do CA *Cubo na esteira*, uma possibilidade é selecionar a ferramenta *cubo* na janela 3D e seguir as orientações descritas na própria ferramenta[28] para criar o objeto (Figura 2.9). Ao selecionar qualquer ferramenta no software, é possível visualizar uma caixa de diálogo que indica como utilizá-la.

Figura 2.9 - Orientações para a utilização da ferramenta *cubo*



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Desse modo, é possível realizar construções com certa autonomia, seguindo essas orientações. Com isso, não é necessário ter conhecimento sobre como utilizar o GeoGebra antecipadamente: é possível aprender sobre as ferramentas enquanto manipula o software.

Com a interação contínua do software, é possível identificar, na janela de visualização, o que a ferramenta utilizada permitiu construir. No caso dos objetos espaciais, o GeoGebra permite rotacioná-los na janela 3D para verificar a construção em diferentes posições, utilizando as ferramentas *mover* ou *girar* (Figura 2.10).

Figura 2.10 – Ferramentas *mover* e *girar*

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir desse contato com o objeto construído, é possível relacionar a nomenclatura que é apresentada na ferramenta com os elementos que fazem parte da *componente figural* do objeto. Ainda, a partir das nomenclaturas, familiarizar-se com a linguagem da Geometria, que dentro da Matemática possui linguagem própria.

Na construção do CA, essas identificações/comparações são importantes para avaliar se o objeto construído resultou em uma representação esperada que se assemelha ao cubo do CA, ou se é necessário corrigir, utilizando outra estratégia ou ferramenta. A visualização em tela ajuda a decidir o que precisa ser alterado, e a possibilidade de reposicionar elementos da construção com facilidade contribui para realizar as alterações no GeoGebra. Além disso, "o uso de software pode também contribuir para ampliação das representações com que os alunos

[28] Vídeo da construção: https://youtu.be/jveM7dEccWg

trabalham quando, por exemplo, deslizam, rodam, ampliam ou reduzem uma dada construção geométrica" (FONSECA *et al.*, 2011, p. 31).

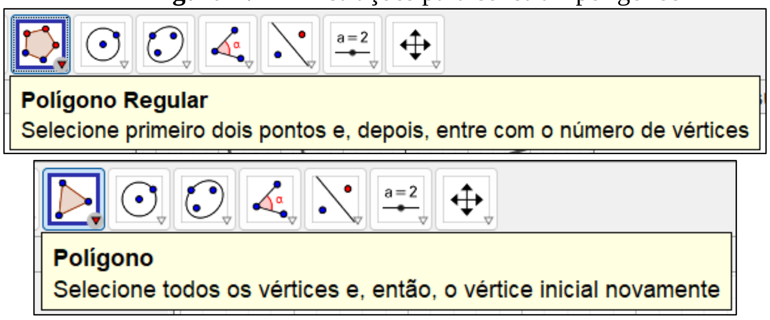
Nesse exemplo apresentado, a construção concentra-se basicamente em uma forma técnica para obtenção do cubo. Em outras palavras, ao seguir as instruções da ferramenta, é possível construí-lo no GeoGebra sem que se tenha empregado conhecimentos matemáticos/geométricos sobre as propriedades que o definem, principalmente sobre sua *componente conceitual*. A ferramenta que foi utilizada já inclui as características do objeto em sua programação; portanto, essa é uma maneira que facilita sua criação.

Entretanto, é possível construir objetos geométricos no GeoGebra utilizando outras ferramentas que não resultam a representação final de maneira imediata, possibilitando diferentes explorações sobre propriedades do objeto no processo de construção, e não apenas ao manipular a representação após construí-la.

2.3.2 Construção geométrica no GeoGebra

Podemos iniciar a construção do cubo por uma de suas faces, criando um quadrado. Utilizar a ferramenta *polígono regular* seria uma opção, mas essa também é uma forma de construção técnica, em que só é necessário criar dois pontos e indicar o número de vértices que o polígono deve possuir, conforme indicado nas orientações dessa ferramenta (Figura 2.11 (a)).

Figura 2.11 – Instruções para construir polígonos



(a)

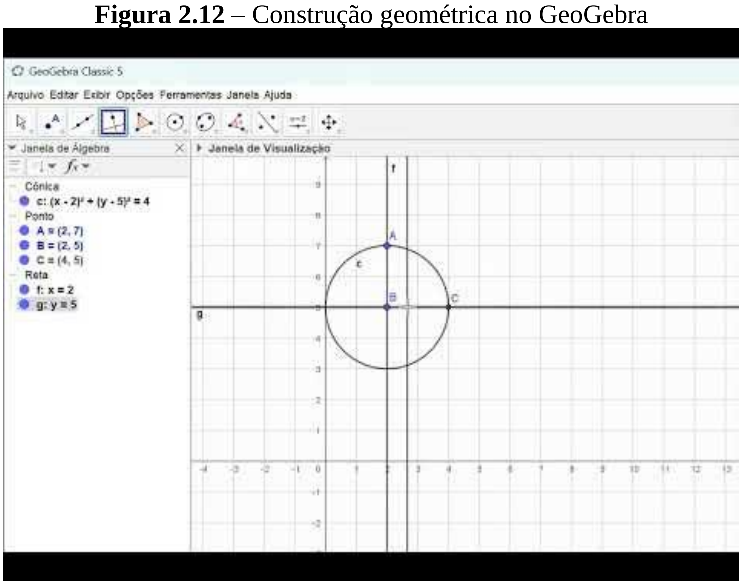
(b)

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Nesse sentido, para envolver outros conhecimentos matemáticos/geométricos nesse processo, realizamos a construção geométrica do quadrado (Figura 2.12). Na janela 2D do GeoGebra, construímos dois pontos, A e B, cuja distância entre eles determina o comprimento do lado do quadrado, e traçamos uma reta *f* que passa sobre esses pontos. Em seguida, construímos uma reta *g* perpendicular à *f*, que passa pelo ponto B, para que o ângulo formado entre os lados seja um ângulo reto. O próximo passo foi traçar um círculo *c* centrado no ponto B, que vai até o ponto A. Dessa forma, o raio do círculo possui tamanho AB, e podemos marcar essa mesma distância na interseção entre o círculo e a reta *g*, criando o ponto C. Traçamos uma reta *h* perpendicular à reta *g*, que passa pelo ponto C*;* em seguida, outra reta *i* perpendicular à reta *f*, que passa pelo ponto A. Marcamos a interseção entre as retas *h* e *i*, criando o ponto D.

Depois disso, basta utilizar a ferramenta *polígono*, sem ser regular (Figura 2.11 (b)), e ligar os quatro pontos construídos, obtendo um quadrado em qualquer condição, porque essa figura apresenta as propriedades de um quadrado. Os elementos que não contribuem com o aspecto visual do CA podem ser ocultados da janela de visualização, mas não deletados.

Figura 2.12 – Construção geométrica no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

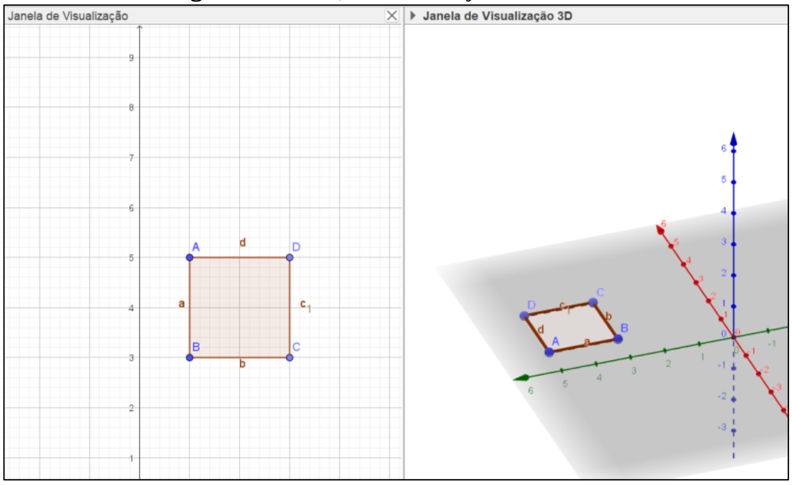
A partir dessa construção, é possível discutir sobre os elementos que pertencem à *componente conceitual* e *figural* do quadrado. Foi construída uma figura plana e fechada com quatro lados, mas para além disso, utilizamos elementos geométricos que nos garantem que os lados são congruentes e que entre eles há quatro ângulos retos. Nessas condições, caracteriza-se a construção enquanto quadrado.

Se a ferramenta *polígono* fosse utilizada para criar uma figura de quatro lados sem tomar como base a posição dos vértices determinada pela construção geométrica, a representação obtida possivelmente não seria a de um quadrado. Isso contribui para compreender que a *componente conceitual* e a *componente figural* devem ser contempladas para que a definição do objeto esteja completa. Logo, possuir quatro lados é uma condição necessária, mas não suficiente para caracterizar um quadrilátero enquanto um quadrado: é necessário levar em conta outros fatores.

2.3.3 Discussões sobre objetos geométricos planos e espaciais

A utilização da janela 2D do GeoGebra foi suficiente para construir o quadrado, e para dar continuidade à construção do cubo, precisamos exibir a janela 3D. No GeoGebra, é possível trabalhar com as duas janelas de visualização de forma conjunta (Figura 2.13), o que favorece a articulação entre os objetos da Geometria Plana e Espacial, que são comumente estudados separadamente, conforme já mencionado.

Figura 2.13 – Quadrado na janela 2D e 3D

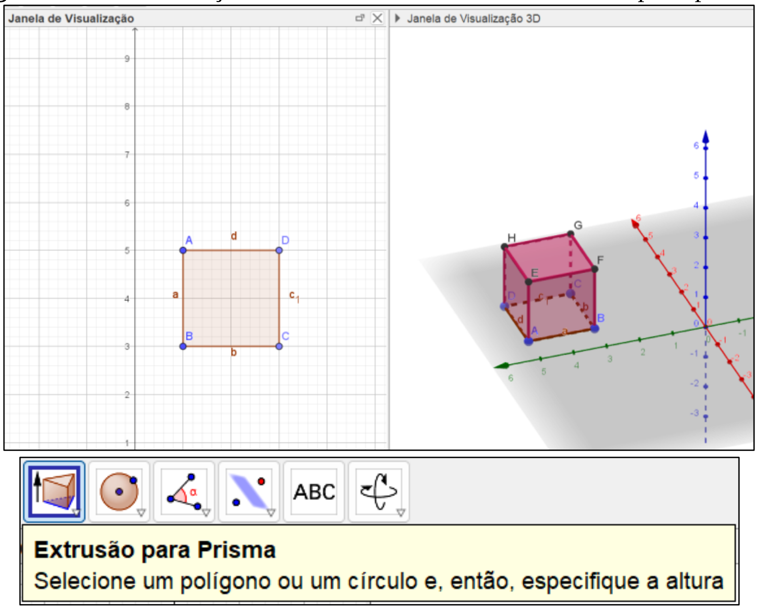


Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na janela 3D, o quadrado está representado no plano *xy*. Ao utilizarmos a ferramenta *extrusão para prisma*, considerando como altura do prisma o comprimento do lado do quadrado, obtemos um cubo[29] (Figura 2.14, na página seguinte).

[29] As demais etapas da construção desse CA, como a criação do trajeto que o cubo deve percorrer e os códigos de programação do GeoGebra para que o cubo se movimente podem ser acessados no roteiro completo da construção (apêndice 02).

Figura 2.14 – Construção do cubo com a ferramenta *extrusão para prisma*[30]



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Nessa etapa da construção do CA, é possível discutir sobre características que diferenciam os objetos geométricos planos e espaciais, observando que o cubo não foi representado por completo na janela 2D, pois no ambiente plano podemos visualizar apenas figuras com comprimento e largura, como o quadrado. Já o cubo também possui altura, dimensão que foi adicionada quando utilizamos a ferramenta *extrusão para prisma* sobre a representação do quadrado.

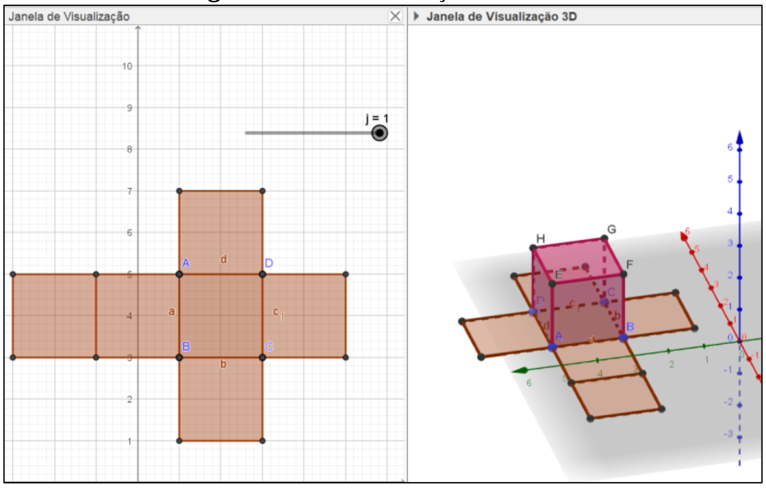
As movimentações que o GeoGebra permite realizar podem evidenciar essa diferença entre os objetos. O cubo pode ser rotacionado para que seja visto em diferentes posições, possibilitando visualizar faces que estejam ocultas (Figura 2.14 - vídeo), o que reforça sua natureza tridimensional. Por outro lado, o quadrado na janela 2D, se for movimentado, não mostrará nenhuma região oculta, pois o objeto não possui outras partes.

Apesar de observarmos duas representações diferentes nas janelas de visualização, elas estão associadas, pois pertencem ao mesmo objeto, considerando que nessa construção o cubo foi criado a partir do quadrado. Se forem realizadas alterações em uma das representações, a outra também será alterada, e ao trabalhar com as janelas 2D e 3D ao mesmo tempo, isso se torna explícito.

Para ampliar as discussões, podemos utilizar a ferramenta *planificação* clicando sobre o cubo (Figura 2.15). A partir disso, as faces planas que formam a superfície do cubo são representadas nas duas janelas de visualização do software.

[30] Vídeo da construção do cubo e movimentos: https://youtu.be/NDQ5-cs7Be0

Figura 2.15 – Planificação do cubo[31]



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O objeto espacial que construímos a partir de um objeto plano assumiu uma representação plana novamente. Esse exemplo mostra a relação de dependência entre os objetos geométricos planos e espaciais: se por um lado o objeto espacial possui suas faces formadas por figuras planas, por outro, o objeto plano é a projeção de uma das faces do objeto espacial.

A construção do quadrado e do cubo no GeoGebra permitiu destacar explorações que podem ser feitas articulando saberes matemáticos e geométricos, especialmente sobre a Geometria Plana e Espacial. Desse modo, a dinamicidade e os recursos presentes no GeoGebra oportunizaram manipular e explorar esses objetos, caracterizando um potencial para *identificar* e *diferenciar* propriedades dos objetos geométricos, evidenciando a relação entre a *componente conceitual* e a *componente figural* de tais objetos.

2.4 Considerações Finais

Entre os problemas identificados neste trabalho, relacionados ao ensino de Geometria, os mais evidentes são a dissociação entre objetos planos e espaciais, entre suas propriedades conceituais e figurais, e a abordagem estática com que são trabalhados. A utilização do software GeoGebra apresenta potencialidades para associar o estudo da Geometria Plana com a Espacial de forma dinâmica.

As janelas de visualização 2D e 3D no GeoGebra permitem trabalhar com objetos planos e espaciais simultaneamente, evidenciando a dependência entre eles e as diferenças entre suas características, especialmente quando são movimentados. Os movimentos no software também permitem criar múltiplos exemplos figurais para um objeto, quando seus elementos são

[31] Vídeo da planificação do cubo: https://youtu.be/4mifvoane5U

reposicionados. Isso permite diferenciar as propriedades conceituais das figurais, quando são identificadas características que se alteram e que permanecem nas diferentes representações.

Os recursos e ferramentas do software favorecem construções que permitem explorar os objetos geométricos e suas características, proporcionando a integração de suas propriedades conceituais e figurais em construções geométricas e na construção de CAs, por exemplo. Além disso, como as ferramentas são acompanhadas das nomenclaturas dos objetos geométricos e de instruções sobre como utilizá-las, também é possível desenvolver construções com certa autonomia, analisando, com base na representação que o software retornou, se a estratégia de construção precisa ser revista.

Essas construções realizadas no GeoGebra, enquanto tarefas investigativas, permitem ampliar discussões sobre os objetos geométricos e sobre diferentes formas de resolver um problema de Geometria, o que garante destaque aos softwares de Geometria dinâmica para sua utilização nas aulas de Matemática. Diferentemente do que acontece quando se utiliza de representações estáticas em livros didáticos, que não permitem alterações pela limitação material, e em avaliações de larga escala, nas quais os recursos e as opções de resolução são reduzidos, o que pode prejudicar o desenvolvimento dos estudantes nessas provas.

Portanto, o ambiente do GeoGebra permite trabalhar com objetos geométricos planos e espaciais de forma articulada em investigações, e com a ideia explícita de que se trata de objetos abstratos da Matemática, contribuindo para a formação das concepções sobre esses objetos a partir da visualização e de alterações realizadas sobre eles.

2.5 Referências

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. O Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele e Possíveis Contribuições da Geometria Dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, n. 5, p. 69-76, 2010.

AMÂNCIO, R.; GAZIRE, E. O desenvolvimento do pensamento geométrico e as contribuições dos recursos didáticos no estudo dos quadriláteros. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 113-127. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/589. Acesso em: dezembro, 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895

CARVALHO, L. **Análise da Organização Didática da Geometria Espacial Métrica nos Livros Didáticos.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil, 2008.

FONSECA, M. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M.; DAYRELL, M. M. M. S. S. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed. Autêntica Editora. Belo Horizonte, 2011.

LIMA, A. F.; ALMEIDA J. J. P. Do sensível às ideias: uma proposta de ensino de geometria, dos aspectos empíricos aos dedutivos. **Revista Principia**. n. 28, p.111 – 120, 2015.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. SBEM, n. 4, p. 3-13, 1995. Disponível em: http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf Acesso em: dezembro, 2021.

MACHADO, E. **Explorando invariantes geométricos com o GeoGebra**: uma seleção para a sala de aula. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro, Brasil, 2015.

MACHADO, E.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. **Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets**. 1 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 2019. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf. Acesso em: dezembro, 2021.

MALFATTI, S.; ENGERS, E.; RIBAS, J.; NUNES, M.; FRANCISCO, D. LOGO 3D – Uma Ferramenta Auxiliar no Aprendizado da Geometria Espacial. **Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Brasil, 2002.

OBMEP. **Provas e Soluções 2012**: 1ª fase nível 1. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm Acesso em: dezembro, 2022.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké,** v.1, n.1, p. 7-17, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822 Acesso em: dezembro, 2021.

PIROLA, N.; CARVALHO, A.; NASCIMENTO, H.; MARIANI, J.; MONGER, W. Um estudo sobre a formação do conceito de triângulo e paralelogramo em alunos do ensino fundamental: uma análise sobre os atributos definidores e exemplos e não-exemplos. **Anais do VIII ENEM**, Brasil. 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/CC13767112817.pdf Acesso em: dezembro, 2021.

ROGENSKI, M.; PEDROSO, S. **O Ensino da Geometria na Educação Básica**: realidade e possibilidades. Paraná, Brasil. 2019. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf Acesso em: dezembro, 2021.

SANTOS, N.; ROSA, M.; SOUSA, D. Os Sólidos Geométricos na Educação Brasileira*:* Comparativo entre PCN e BNCC. **JIEEM**, v.14, n.1, p. 99-109, 2021.
DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n1p99-109

VILAÇA, M. **Investigando o processo de Gênese Instrumental de licenciandos em Matemática ao utilizarem o Geoplano durante a realização de atividades sobre quadriláteros**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. 2018.

Quando o artigo 01 foi elaborado, ainda não sabíamos qual seria o ano escolar da turma que participaria das intervenções, já o conteúdo a ser trabalhado estava definido, Geometria, mais especificamente os objetos geométricos planos e espaciais. Nesse sentido, como o estudo desses elementos matemáticos está presente na organização curricular do 5º e 6º ano do Ensino Fundamental, consideramos esses anos escolares na escrita do artigo 01. Apesar das intervenções serem realizadas com uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, os objetos geométricos planos e espaciais não são evidenciados no currículo desse ano escolar da forma como abordamos na pesquisa, por isso mantivemos a grade curricular do 5º e 6º ano nesse artigo.

A ideia central do artigo 01 esteve na discussão sobre a Geometria Plana e Espacial, pois consideramos importante conhecer possibilidades e limitações do seu ensino para que as próximas etapas da pesquisa levassem esses elementos em consideração. Nesse sentido, foram discutidas potencialidades da abordagem do GeoGebra em uma construção de Cenário Animado envolvendo objetos geométricos. Na sequência, no artigo 02, abordamos novamente o software GeoGebra e o conteúdo de Geometria, abrindo espaço para o referencial teórico de Tversky (2019), que fundamenta a pesquisa, e apresentando mais detalhes sobre nosso objeto de estudo, que são os Cenários Animados.

3 PENSAMENTO ESPACIAL E MOVIMENTOS EM GEOMETRIA: O GEOGEBRA COM ENFOQUE NA CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS ANIMADOS

Resumo: Os Cenários Animados são construções realizadas no software GeoGebra, em que elementos matemáticos estão atrelados a ferramentas que proporcionam movimento à construção, constituindo uma cena animada. Essas construções possibilitam discutir conceitos matemáticos durante seu desenvolvimento, e neste trabalho, o conteúdo matemático envolvido é a Geometria, mais especificamente os objetos geométricos planos e espaciais. O movimento é fundamental para as construções de Cenários Animados, também se faz importante ao pensamento espacial e às habilidades espaciais, que compõem o pensamento espacial, de modo que o movimento físico (gestos) e os movimentos mentais nos ajudam a pensar. Este ensaio teórico, tem como objetivo discutir o potencial da construção de Cenários Animados no GeoGebra no/para o reconhecimento de objetos geométricos planos e espaciais, articulado com os movimentos associados ao pensamento espacial. Para isso, são consideradas as estratégias utilizadas para a construção do Cenário Animado *Casa*, realizado pelas autoras deste trabalho. Assim, foi identificado que movimentos executados por ferramentas do GeoGebra durante a construção do Cenário Animado *Casa* permitem rotacionar, reposicionar, ampliar, reduzir e modificar o formato de objetos construídos no software, e que esses movimentos estão relacionados a habilidades espaciais, como a *rotação mental*, *perspectiva*, *julgamento espacial* e *construção mental*. Ainda, a utilização desses movimentos na construção contribui para o reconhecimento de características importantes que distinguem objetos geométricos planos e espaciais, especialmente quando são rotacionados e comparados em diferentes perspectivas na janela de visualização 3D do GeoGebra.
Palavras-chave: Cenários Animados. Pensamento Espacial. Movimentos Mentais. Movimentos no GeoGebra. Geometria.

3.1 Introdução

O pensamento espacial é a base sobre como falamos e pensamos o espaço, o tempo, as pessoas e outros elementos (TVERSKY, 2019). Nesse sentido, é indicado que situações que estimulem o pensamento espacial sejam propostas nas escolas e pela família, pois possuem papel importante na aprendizagem e na realização de tarefas do dia a dia (TVERSKY, 2019). Na matemática, algumas noções de pensamento espacial, como posição, localização e deslocamento aparecem no estudo da Geometria.

A Psicóloga Bárbara Tversky (2019) apresenta evidências neurocientíficas de que o movimento associado ao pensamento espacial é a base para a formação de outros tipos de pensamento, especialmente o abstrato, que tem relação com o pensamento matemático e geométrico. Alguns dos movimentos associados ao pensamento espacial são os movimentos mentais, como rotacionar, ampliar, deslocar e mudar a perspectiva de objetos na mente (TVERSKY, 2019).

No software GeoGebra, é possível realizar movimentos semelhantes a esses com a utilização de ferramentas que proporcionam movimento a objetos matemáticos construídos no software. Essa característica do GeoGebra possibilita a construção de Cenários Animados (CAs)[32], que são um tipo de construção envolvendo elementos matemáticos em uma cena que, ao final, é animada, ou seja, possui movimento (BUENO; BASNIAK, 2020).

Essas construções também oportunizam discutir conceitos e representações matemáticas durante seu desenvolvimento. Neste trabalho, o CA discutido envolve objetos geométricos planos e espaciais. Com isso, os CAs podem ser utilizados para trabalhar matemática nas salas da aula da Educação Básica, além de ser um tipo de tarefa que pode estimular o pensamento espacial a partir dos movimentos associados a ele.

Ao relacionar o quadro teórico construído especialmente com base no trabalho de Tversky (2019), com nossa subjetividade na construção de um CA, neste trabalho temos o objetivo de discutir o potencial da construção de CAs no GeoGebra no/para o reconhecimento de objetos geométricos planos e espaciais, articulado com os movimentos associados ao pensamento espacial. Para isso, desenvolvemos este ensaio teórico, permeado pela "relação permanente entre o sujeito e objeto, um vir-a-ser constituído pela interação da subjetividade com a objetividade dos envolvidos" (MENEGHETTI, 2011, p. 1).

Evidenciamos a originalidade da pesquisa, pois ainda não existem trabalhos que discutam os CAs construídos no GeoGebra sob o enfoque dos movimentos associados ao pensamento espacial, e do mesmo modo, os estudos de Tversky (2019) sobre pensamentos e movimentos não fazem uma articulação explícita com práticas educacionais de matemática envolvendo o software GeoGebra.

Assim, este estudo relaciona os movimentos mentais associados ao pensamento espacial com um CA, apresentando possibilidades de prática por meio dessa construção no GeoGebra.

3.2 O Movimento e o Pensamento Espacial

Os movimentos acompanham o planeta em suas estratégias evolutivas, e são importantes para a sobrevivência de todas as espécies: os animais se movimentam para caçar, as plantas se movimentam para crescer, e a Terra se movimenta para que haja vida. Desse modo, "o movimento constante no espaço é um dado, o pano de fundo para tudo o que aconteceu e vai

[32] Para o termo Cenários Animados no plural será utilizada a sigla CAs, e para o termo Cenário Animado no singular será utilizada CA.

acontecer [...] a ação no espaço veio muito antes da linguagem, assim como o pensamento baseado na ação" (TVERSKY, 2019, p. 10, tradução nossa).

O ser humano executa movimentos em seu dia a dia o tempo todo, mesmo que inconscientemente (TVERSKY, 2019). Por exemplo, se uma pessoa é solicitada a descrever o caminho de casa até o supermercado mais próximo, é muito provável que utilize gestos, que são um tipo de movimento, para situar melhor o caminho trilhado. Ou ainda, imaginar o movimento sempre que se atravessa a rua, quando um carro se aproxima, pensando se há tempo suficiente para atravessá-la ou não; nesse caso, o movimento ocorre mentalmente, como uma forma de julgar uma ação a ser realizada no espaço.

Nas práticas de sala de aula também são utilizados movimentos, em especial, os gestos. Nas aulas de matemática, por exemplo, o professor pode desenhar no ar a representação de duas retas, um círculo ou um polígono qualquer. Pode, ainda, indicar com as mãos a abertura de um ângulo ou situar a posição do eixo x e do eixo y no plano cartesiano. Já os alunos, muitas vezes, realizam movimentos enquanto utilizam os dedos para contar; ao gesticular símbolos que desconhecem a nomenclatura, como desenhar no ar uma barra e dois pontos para referir-se ao símbolo de porcentagem. Os estudantes também podem movimentar o caderno ou o livro, buscando ver uma representação por um ângulo diferente.

Todas essas ações, realizadas em sala de aula para complementar a prática do professor ou o raciocínio dos alunos, envolvem movimentos. Entretanto, frequentemente são realizadas de modo quase espontâneo, o que faz com que sua importância passe despercebida por quem os realiza e/ou por quem recebe a informação a partir dos movimentos.

Além dos gestos, outros tipos de movimentos podem ser empregados nas aulas de matemática com a utilização de softwares. O GeoGebra permite movimentar livremente os objetos matemáticos construídos, além de contar com ferramentas que possibilitam movimentos de rotação e zoom, por exemplo.

Para entender por que o movimento é importante nessas e em outras situações, faz-se relevante entender que existe estreita relação entre o movimento e o pensamento espacial, e que o movimento nos auxilia a pensar (TVERSKY, 2019). Considerando que o pensamento espacial é uma atividade cognitiva desenvolvida por meio de nossa vivência, ele permite compreender o espaço ao nosso redor, mediante a sua observação e quando nos movimentarmos nele (TVERSKY, 2019). Nesse sentido, segundo Tversky (2019), além de pensarmos sobre o espaço, também utilizamos o espaço e o que existe nele para pensar.

A descoberta sobre a relação entre o movimento e o pensamento espacial vem de experimentos realizados com ratos, em que foram implantados eletrodos em neurônios de regiões do cérebro denominadas hipocampo e córtex entorrinal, nas quais os neurocientistas John O'Keefe e John Dostrovsky identificaram células de lugar, e posteriormente, os pesquisadores May-Britt Moser, Edvard I. Moser, John O'Keefe e colaboradores identificaram células de grade, respectivamente (BORTOLOSSI, 2020; TVERSKY, 2019).

A partir dos experimentos em que os ratos foram colocados em um ambiente para se locomover, foi identificado que as células de lugar "disparavam (emitiam um sinal elétrico mais frequente) quando o rato estava em determinados lugares que já conhecia" (BORTOLOSSI, 2020, p.102), do mesmo modo que as células de grade, mas com marcações diferentes[33]. Portanto, foi constatado que essas células servem como um mapa cognitivo espacial, ou seja, atuam como um GPS e são a base da orientação e desorientação espacial (TVERSKY, 2019).

Os testes realizados com humanos envolvendo navegação virtual por meio do ambiente revelam que o hipocampo é ativado nessas situações; logo, quando a pessoa está inserida e navega virtualmente um ambiente (BORTOLOSSI, 2020). Portanto, o movimento, nesse caso, em ambientes virtuais, possui influência sobre o pensamento espacial, pois a região responsável pela localização no espaço foi ativada por meio dessas simulações.

Os resultados de uma pesquisa envolvendo os motoristas de táxi de Londres que precisam conhecer as mais de 25.000 ruas e 20.000 pontos de referência da cidade evidencia esse aspecto, pois apontam que a porção posterior do hipocampo dos taxistas fica cada vez maior à medida que passam mais tempo nessa profissão, já que suas noções espaciais são estimuladas a todo momento (TVERSKY, 2019).

Segundo Tversky (2019), além de representar lugares, as células de lugar no hipocampo representam outros conjuntos de características, como *eventos, ideias e indivíduos*, independentemente da relação que possuam. Ainda, as células de grade no córtex entorrinal também representam relações entre *informações espaciais, temporais ou conceituais*. A descoberta de um desvio de função das regiões do cérebro estudadas foi o destaque nesse estudo.

Em síntese, a mesma estrutura neural das regiões do cérebro que adquiriu a função primária de nos orientar na questão de movimento e de espaço (os movimentos ativam o GPS espacial), por conta da evolução, passou a manifestar outras funcionalidades (TVERSKY, 2019). Portanto, "os mesmos mecanismos cerebrais em humanos que representam lugares reais

---

[33] Os disparos emitidos pelas células de grade são identificados em aglomerações que, juntas, formam uma espécie de malha triangular, como se estivesse representando um mapa do lugar, enquanto os disparos emitidos pelas células de lugar se concentram em uma região específica (BORTOLOSSI, 2020).

em espaços reais também representam ideias em espaços conceituais[34]. O pensamento espacial permite o pensamento abstrato" (TVERSKY, 2019, p. 72, tradução nossa). Logo, o pensamento espacial e os movimentos associados a esse tipo de pensamento são a base para a formação de outros pensamentos, em particular, o pensamento abstrato (BORTOLOSSI, 2020).

> O pensamento espacial se espelha no pensamento abstrato, no pensamento social, no pensamento cognitivo, no pensamento sobre o que move as pessoas, no pensamento sobre a arte e sobre a ciência. Pensar é pensar, seja qual for o domínio, e o pensamento espacial é o cerne de nossa existência [...] somos muito melhores e mais experientes no pensamento espacial do que no abstrato. O pensamento abstrato pode ser muito mais difícil por si só, mas felizmente [...] o pensamento espacial pode substituir e estruturar o pensamento abstrato (TVERSKY, 2019, p. 59, tradução nossa).

Portanto, é possível estimular outros tipos de pensamento a partir do pensamento espacial e dos movimentos associados a ele, como os gestos que expressam ações com base em ideias e outros movimentos mentais (TVERSKY, 2019).

Uma contribuição dos movimentos é identificada no projeto de Sinha (2009), que busca ensinar indianos cegos congênitos a ver depois de operados. Um dos elementos principais nesse processo é o movimento, pois "a única coisa que o sistema visual precisa para começar a analisar o mundo é informação dinâmica" (SINHA, 2009, vídeo). Em um experimento realizado com essas pessoas, quando é exibida uma imagem estática de um triângulo na tela de um computador, o indiano que o observa não consegue identificar o objeto, mas quando o triângulo é posto em movimento no computador, ele o identifica (SINHA, 2009; BORTOLOSSI, 2020).

O movimento também exerce uma função importante nos CAs construídos no GeoGebra, conforme definimos e apresentamos na seção seguinte.

3.3 A Construção de Cenários Animados no GeoGebra

Os CAs construídos no GeoGebra apresentam o movimento como componente fundamental, pois o produto final dessa construção é uma cena animada envolvendo elementos matemáticos (BUENO; BASNIAK, 2020). A ferramenta *controle deslizante* é comumente utilizada com o objetivo de animar a construção, mas existem outras possibilidades no GeoGebra para atribuir movimento à cena construída.

Além disso, os CAs podem, ou não, apresentar personagens, situações do cotidiano ou do imaginário, mas devem possuir movimento e um contexto/cena. Nosso objetivo principal,

[34] O espaço conceitual é como uma estrutura na mente, que origina e organiza ideias a partir da relação entre qualquer conjunto de ideias (TVERSKY, 2019).

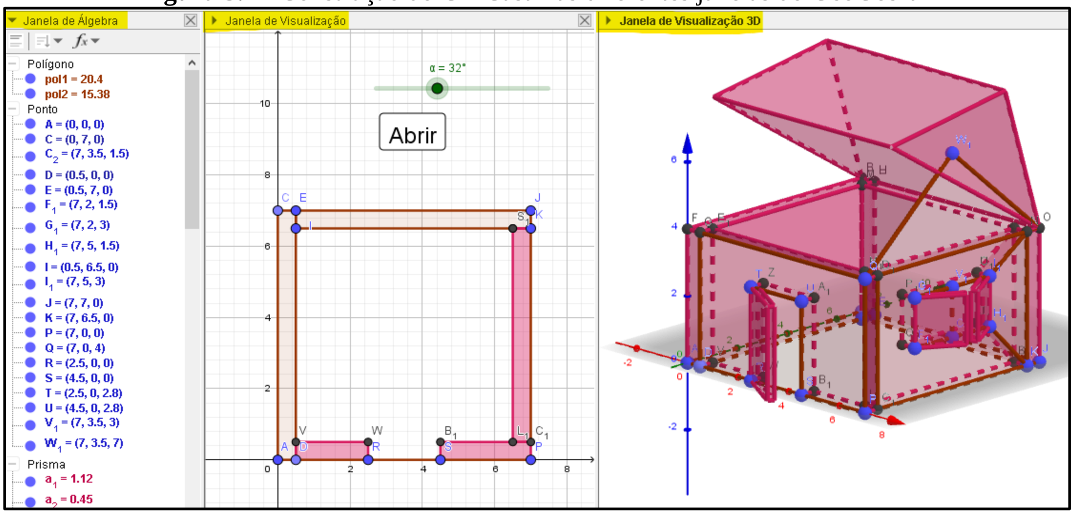
ao trabalhar com CAs, tem sido promover discussões sobre conteúdos matemáticos durante a construção, utilizando a dinamicidade possibilitada pelo GeoGebra.

O CA *Casa*, discutido neste trabalho, não envolve personagens, mas propõe a construção de uma casa, que é um elemento representativo de nosso cotidiano. Na construção desse CA, propusemos discutir conceitos de Geometria relacionados a objetos planos e espaciais, como poliedros e polígonos, além de outros objetos geométricos, como pontos e segmentos. Entretanto, outra característica dos CAs é que, em sua construção, é comum envolver mais que uma área da matemática, e assim, para alguns *detalhes* da construção foram utilizados outros conhecimentos, como lógica, álgebra, números inteiros e decimais.

Salientamos que o objetivo não é restringir um tópico a ser estudado por meio da construção do CA, mas evidenciar como os conteúdos matemáticos estão relacionados e podem ser trabalhados em conjunto em uma mesma situação, embora o objetivo principal possa estar relacionado a um entre os conteúdos abordados.

O cenário *Casa* pode ser construído utilizando apenas a janela de visualização 3D do GeoGebra, mas para atender ao objetivo desta construção, que é reconhecer e diferenciar características de objetos geométricos planos e espaciais, é fundamental estabelecer relações entre as representações da janela 3D, da janela 2D, e da janela de álgebra (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Construção do CA Casa nas diferentes janelas do GeoGebra[35]



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

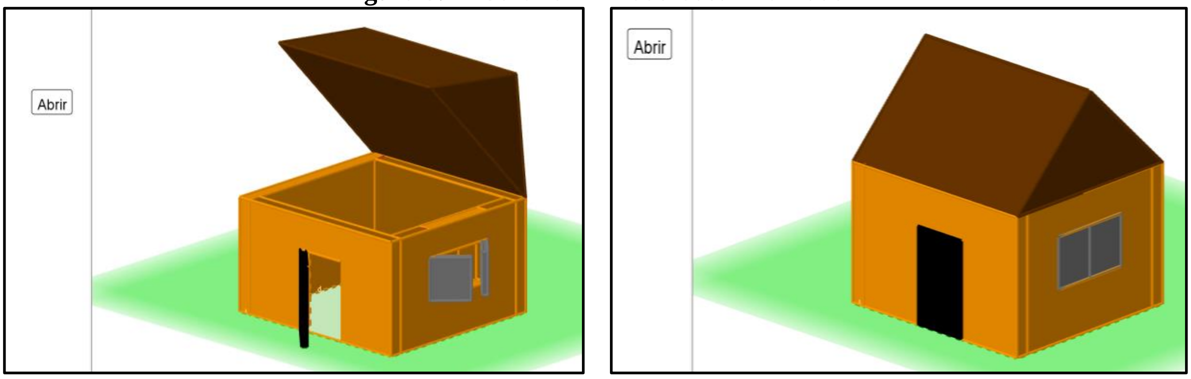
O movimento que caracteriza a construção finalizada como um CA é executado por alguns objetos ou personagens da cena, e possui algumas especificidades: (i) deve ser contínuo até que o objetivo da cena seja concluído; e (ii) desprovido de ação repetida do sujeito. Dessa

[35] Os movimentos da construção podem ser vistos nesse vídeo: https://youtu.be/furLZj7a77Q

maneira, depois de cliques em botões ou de selecionar a opção *animar*, o movimento é iniciado e deve permanecer como resultado dessas ações, sem que o sujeito precise repetidamente acionar movimento aos objetos. No CA *Casa*, os objetos que executam movimento são a porta, a janela e o telhado[36], e o movimento é iniciado ao clicar no botão *abrir* (Figura 3.2).

Além disso, outra característica dos CAs é que, depois de finalizar a construção, são feitas alterações no aspecto visual para que melhor represente o objeto construído. Para isso, as ações geralmente realizadas são: modificar as cores; inserir imagens ou objetos matemáticos para o fundo e para complementar a cena; e ocultar pontos, segmentos e outros elementos matemáticos que não contribuem com a aparência do CA. A partir disso, a relação visual explícita entre o CA e os objetos matemáticos deixa de ser evidenciada para quem o observa.

Figura 3.2 - Cenário Animado *Casa* finalizado



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Os elementos matemáticos ocultos da janela de visualização não podem ser deletados: eles continuam sendo exibidos na janela de álgebra, caso contrário, a construção também seria apagada. A visualização desses objetos (Figura 3.1) não é necessária ao final da construção, pois as discussões em torno dos conteúdos matemáticos são realizadas durante o processo de construção do CA.

Na seção seguinte, discutimos os objetos geométricos planos e espaciais utilizados na construção do CA *Casa*, assim como estabelecemos uma articulação com os movimentos associados ao pensamento espacial a partir dos procedimentos adotados por nós durante a construção desse CA.

[36] Movimentos no CA *casa* finalizado https://youtu.be/WsoHeXbp0ek.

3.4 Movimentos nas Habilidades de Pensamento Espacial e o Cenário Animado *Casa*

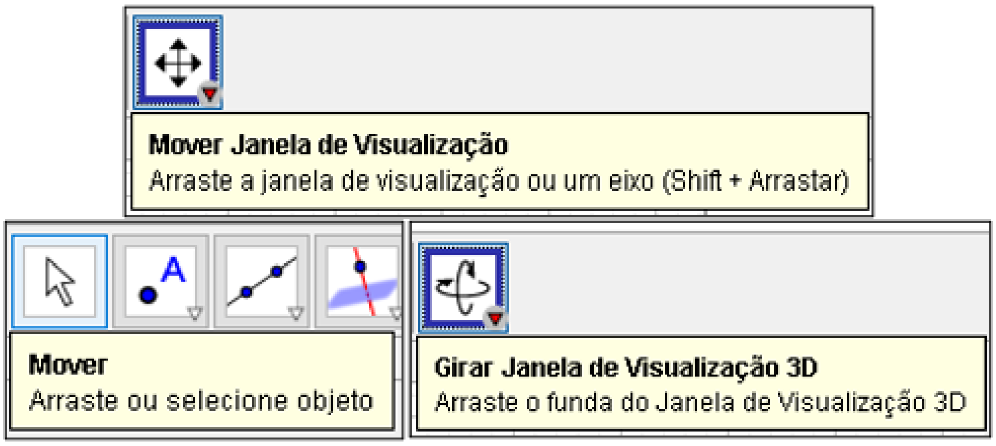
Argumentamos que o movimento é uma característica importante para que uma cena construída no GeoGebra se constitua enquanto CA. Esses movimentos devem aparecer no cenário final, mas também há movimentos durante as etapas de sua construção.

É importante ressaltar que se trata de dois movimentos diferentes. Quando o CA está finalizado, o movimento que observamos é contínuo e executado por algum objeto que compõe a cena a partir de comandos do GeoGebra. Por outro lado, também há os movimentos que são proporcionados pela ação do sujeito sobre os objetos matemáticos que compõem o CA, utilizando de ferramentas do GeoGebra que permitem realizar esses movimentos[37]. Podem ser empregados para observar a construção em diferentes perspectivas, analisando se os objetos apresentam o comportamento esperado. Nesse sentido, os movimentos discutidos nesta seção referem-se a esse segundo caso.

Quando se utiliza a janela de visualização 3D, a importância dos movimentos fica mais evidente, pois nesse caso, quando o objeto construído é tridimensional, não é possível observar todos os seus lados visualizando apenas em uma posição. Assim, é preciso movimentá-lo para observar as características do objeto que sobressaem, conforme a perspectiva de visualização é alterada.

O GeoGebra possui algumas ferramentas (Figura 3.3) que permitem executar diferentes tipos de movimento, seja na janela de visualização ou com os objetos, permitindo visualizá-los em/de diferentes perspectivas.

Figura 3.3 - Ferramentas do GeoGebra[38]



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

[37] Os dois tipos de movimentos diferentes https://youtu.be/ITmMyfuTwMQ .

[38] Os movimentos com essas e outras ferramentas do GeoGebra podem ser vistos no link https://youtu.be/ITmMyfuTwMQ, a partir de 00min35s.

Identificamos que os movimentos que podem ser executados a partir dessas ferramentas do GeoGebra estão associados a algumas Habilidades Espaciais (HE). De acordo com Tversky (2019), as HE são manifestações do pensamento espacial associadas a formas de pensar e agir sobre o espaço. A palavra *habilidade* muitas vezes é relacionada a pessoas que possuem *talento* ou *aptidão* em determinada área; nesse caso, com noções de espaço. Segundo Tversky (2019), isso não está incorreto, pois inúmeras pessoas têm mais facilidade do que outras com localização e disposição no espaço. Porém, as HE não são apenas inatas, elas também podem ser desenvolvidas com atividades práticas que as estimulem, inclusive nas atividades escolares.

No caso dos movimentos identificados a partir das ferramentas do GeoGebra da figura 3.3, duas HE envolvidas, e que estão intrinsecamente relacionadas, são a *rotação mental* e a *perspectiva*, que têm como base o movimento e a visualização (mental ou não), além das HE de *julgamento espacial* e *construção mental*, que discutimos à frente, neste trabalho.

A *rotação mental* consiste em imaginar algo em uma orientação diferente (TVERSKY 2019). Essa HE é utilizada quando montamos quebra-cabeça e jogamos tetris, por exemplo. Tversky (2019) observou, a partir de testes realizados, que ao resolver problemas que requerem *rotação mental*, muitas pessoas giravam espontaneamente as mãos, como se estivessem girando um objeto, e obtinham um desempenho mais rápido e preciso do que as pessoas que não faziam isso. Os gestos aparecem como suporte ao desenvolvimento dessa HE, de modo que "a rotação física ajuda a internalizar a rotação mental" (TVERSKY, 2019, p. 90, tradução nossa).

Com ferramentas do GeoGebra, é possível reproduzir, sobre objetos matemáticos no software, algumas ações relacionadas à essa HE, como rotacionar e reposicionar os objetos. Esses movimentos são importantes para reconhecê-los em posições diferentes das utilizadas habitualmente, e para identificar características ocultas da construção. No CA *Casa*, a posição que observamos na Figura 3.2 não permite identificar as paredes de trás da casa: para isso, é preciso alterar a posição da construção.

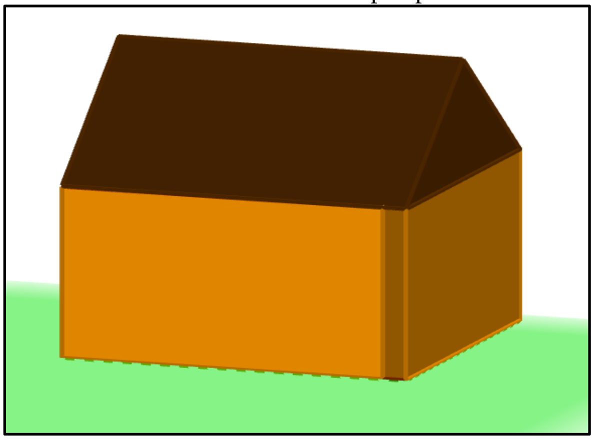
É possível modificar a posição dos objetos presentes na construção com as ferramentas *mover* e *girar* do GeoGebra a partir da rotação. Com isso, alteramos nossa *perspectiva*[39], que é outra HE que está relacionada diretamente à *rotação mental*. Essa HE é importante para reconhecer a posição e características de objetos no espaço. Para isso, podemos acompanhar as coisas ao nosso redor, assumindo a perspectiva de observador que é externa ao objeto, ou quando nos imaginamos no lugar de outra pessoa ou objeto, por uma perspectiva interna

[39]Assumida, aqui, como a representação dos objetos tais como se apresentam à vista, conforme sua posição e tamanhos.

(TVERSKY, 2019). Quando rotacionamos um objeto no GeoGebra ou mentalmente, assumimos diferentes *perspectivas* para observação. Dependendo do objeto, a posição frontal, lateral ou traseira pode apresentar características distintas, podendo ser confundido com outro objeto[40].

Na Figura 3.4, o CA *Casa* foi rotacionado e assumiu uma posição que evidencia sua parte traseira e lateral. Nesse caso, não conseguimos visualizar as formas geométricas espaciais que representam a janela e a porta, de modo que essa posição, na *perspectiva* que assumimos, nos permite afirmar que se trata de uma caixa de papelão, por exemplo, em que o paralelepípedo representa a estrutura da caixa, e o prisma triangular, as abas da caixa levantadas.

Figura 3.4 – Cenário Animado *Casa* em perspectiva traseira e lateral

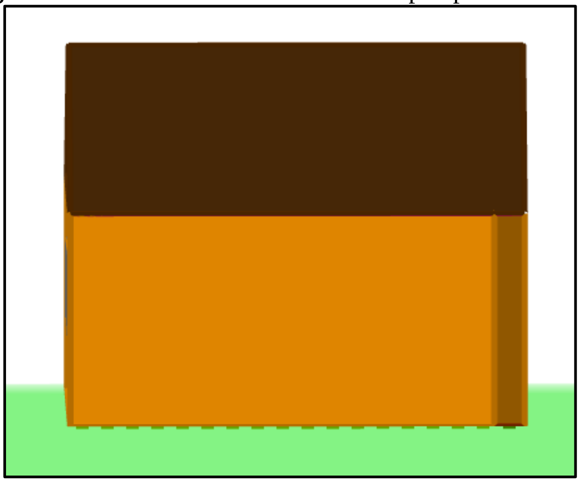


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na Figura 3.5, na página seguinte, visualizamos apenas a posição traseira do cenário. Na *perspectiva* assumida por nós, não é possível entender que se trata de um objeto tridimensional, e no plano, o telhado formado por um prisma triangular aparenta que a face lateral retangular é reta, e não inclinada. Novamente, não podemos afirmar que o objeto é parte de uma casa, pois a nossa *perspectiva* é de uma figura retangular. Por isso é necessário rotacionar o objeto para visualizar diferentes representações que ele pode assumir, dependendo da *perspectiva* de quem observa.

[40] O CA *Casa* finalizado em diferentes perspectivas https://youtu.be/wKn6sxysOkY

Figura 3.5 – Cenário Animado *Casa* em perspectiva traseira



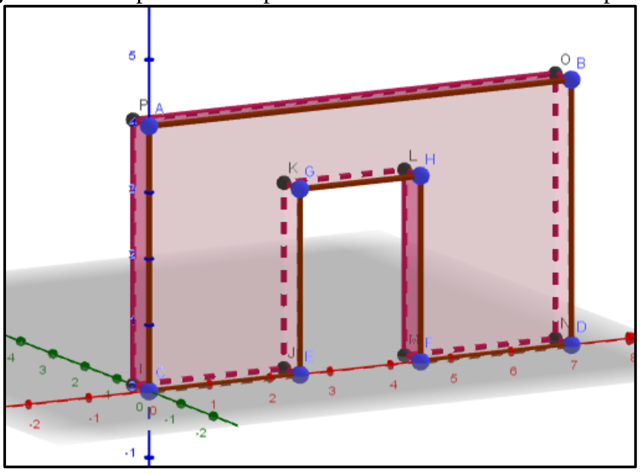
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nessas figuras, a mudança de posição ocorre com o CA finalizado, mas esses movimentos também são úteis durante a construção, porque se pode rotacionar o objeto e modificar a posição, quando se tem apenas uma parede ou o telhado, por exemplo, para verificar, em uma *perspectiva* diferente, se a construção representou o que era esperado ou se ficou distorcida[41].

Para a construção dos poliedros que representam as paredes, em especial dos poliedros que possuem concavidades para caracterizar as paredes que necessitam de aberturas para a porta e a janela, foram utilizados pontos para delimitar o formato necessário em cada caso (Figura 3.6, na página seguinte). Para isso, utilizamos o *julgamento espacial* para localizar a posição mais conveniente para os pontos, avaliando a distância entre os pontos que fosse adequada para, posteriormente, inserir um poliedro nesse espaço que represente a porta, tomando como base o tamanho do poliedro da parede, pois as medidas devem seguir uma proporção para que o aspecto visual do cenário não seja comprometido.

[41] Identificando uma construção equivocada através dos movimentos https://youtu.be/6Wo9Klr-U_E

Figura 3.6 – O poliedro da parede da casa com abertura da porta[42]



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O *julgamento espacial* é uma HE que nos permite fazer comparações sobre noções de distância, tamanho e posição, distinguindo o que é/está perto, longe, pequeno, grande, direita e esquerda. É uma HE ligada à visão, mas que adiciona o movimento à imaginação (TVERSKY, 2019). Quando queremos trocar móveis de lugar ou estacionar um carro, recorremos a essa HE. Na Matemática, utilizamos o *julgamento espacial* para indicar e deslocar coordenadas no plano e no espaço cartesiano, além do estudo de escala e proporção, que trabalha diretamente com comparações, como acontece no CA *Casa*.

Antes de efetivamente construir essas representações no GeoGebra, já possuímos uma ideia do que desejamos representar, pois realizamos uma *construção mental* dos objetos.

A *construção mental* também é uma HE, e envolve ações como imaginar coisas rotacionando, mudando de tamanho, forma, acrescentar e retirar partes de objetos, e outras possibilidades que são utilizadas para criar infinitos objetos na mente (TVERSKY, 2019). O GeoGebra permite reproduzir essas representações de objetos construídos na mente em objetos construídos no software, estimulando o pensamento espacial.

Na construção do CA *Casa*, essas (re)construções mentais são fundamentais para obter a representação final no GeoGebra. Por exemplo, foi preciso reavaliar o formato de algumas formas geométricas espaciais a partir daqueles já criados, retirando partes para formar as aberturas da janela e da porta.

Considerando as etapas da construção, identificamos que as quatro HE discutidas neste trabalho estão intimamente relacionadas nesse processo. Iniciando pela *construção mental* da casa que queremos representar no GeoGebra, precisamos fazer ou refazer a *construção mental* em cada etapa, dependendo das representações obtidas no software que são analisadas por meio

[42] Construção do poliedro da parede da casa com abertura da porta https://youtu.be/Ex3jfaQI3nk

da *rotação* do objeto, que possibilita observá-lo em diferentes *perspectivas*. Além disso, as mudanças que ocorrem sobre o objeto devem estar de acordo com nosso *julgamento espacial*.

Como o formato tradicional de uma casa é conhecido por todos, não precisamos olhar para uma casa para identificar os elementos que a compõem e depois construí-la no GeoGebra, porque essa representação já está construída em nossa mente. Isso acontece porque o pensamento espacial envolve o pensar de maneira visual, com formas e disposição no espaço (TVERSKY, 2019). É de acordo com essa imagem previamente construída mentalmente que sabemos quais as modificações necessárias para que a construção no GeoGebra, a partir de objetos geométricos, tenha características de uma casa.

Por outro lado, não é apenas a partir de entradas visuais que conseguimos construir um objeto na mente: é possível fazê-lo a partir de uma descrição em linguagem, sem nenhuma entrada visual (TVERSKY, 2019). Isso possibilita construir algo abstrato ou visualizar algo que não se pode tocar, como os objetos geométricos. Por outro lado, o produto da *construção mental* está associado a representações figurais, por exemplo, quando é solicitado a alguém que pense em uma cadeira, é bem provável que a pessoa construa mentalmente a imagem de uma cadeira, e não da palavra cadeira.

Além de construir elementos estáticos, a mente também pode construir imagens animadas. Tversky (2019) pontua que existem pessoas especialistas nesse tipo de HE, enquanto outras podem apresentar grandes dificuldades. Um exemplo comum, também das aulas de matemática ou física, são os sistemas de engrenagens ou polias em ação, os quais, para grande parte das pessoas, é difícil responder em que direção gira cada polia quando é preciso animar mentalmente esse sistema a partir de uma representação estática.

O desenvolvimento de HE não só pode como deve ser estimulado, de acordo com o comitê da National Academy of Sciences[43], porque as HE podem beneficiar a aprendizagem escolar, o desempenho em algumas profissões, assim como atividades do dia a dia (TVERSKY, 2019). Nas escolas, o estímulo pode ocorrer a partir de tarefas que proponham "entender e criar mapas, gráficos [...] e explicações visuais não apenas de ciências e matemática, mas também de literatura, história, ciências sociais" (TVERSKY, 2019, p. 102, tradução nossa). Pais e professores podem complementar esse estímulo a partir de brincadeiras espaciais, como quebra-cabeças, lego, jogos de tabuleiro e jogos de adivinhação, além de chamar a atenção para comparações, semelhanças, diferenças, simetrias e analogias em sua volta (TVERSKY, 2019). Outra possibilidade aqui apresentada é estimular o pensamento espacial com a utilização do

[43] Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos.

GeoGebra, pois o software permite replicar ações e movimentos que estão relacionados às HE de *rotação mental*, *perspectiva*, *julgamento espacial* e *construção mental*, manifestadas mentalmente.

A BNCC (BRASIL, 2018) também destaca que o pensamento espacial deve ser estimulado nas escolas e pode enriquecer as aulas com experiências sensoriais e visuais, em especial em disciplinas como Geografia, Matemática e Arte.

O currículo de Matemática na BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental[44] apresenta objetos de conhecimento relacionados ao desenvolvimento do pensamento espacial no campo da Geometria (Quadro 3.1).

Quadro 3.1 - Currículo de Geometria na BNCC nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Unidade temática	Objetos de conhecimento
Geometria	Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido.
	Esboço de roteiros e de plantas simples
	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características
	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características

Fonte: BRASIL (2018, p. 282).

O desenvolvimento desses tópicos envolve algumas das HE já discutidas, e apresentam contribuições para estudos da área da própria Geometria em anos escolares posteriores. A localização e movimentação de pessoas e objetos descritas na BNCC estão associadas com a HE de *perspectiva* e *julgamento espacial*, e se relacionam com a localização de coordenadas cartesianas no plano e no espaço. Já a mudança de direção e sentido que carrega traços do *julgamento espacial* pode contribuir para o estudo de vetores, por exemplo.

Na próxima subseção, abordamos com mais detalhes a discussão de elementos matemáticos que podem ocorrer a partir dos movimentos associados às HE. Nesse caso, para o CA *Casa*.

3.4.1 A Construção do Cenário Animado *Casa*: Discussões Matemáticas

Ao concebermos a construção do CA *Casa*, a primeira etapa foi listar os objetos geométricos que consideramos necessários para utilizar na construção, de maneira que apresentassem semelhanças com os objetos que queríamos construir. Lima e Almeida (2015)

[44] No Brasil, os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental possuem entre 6 e 10 anos de idade.

pontuam que os alunos levam para a escola um conhecimento intuitivo do espaço em que vivem, e o ensino de Geometria deve resgatar experiências e formas do cotidiano para o saber escolar.

Escolhemos a construção de uma casa por ser conhecida do cotidiano; dessa forma, quem construí-la será capaz de indicar as características principais que a compõem. Assim, é possível fazer uma associação entre a casa construída no GeoGebra e as casas materiais, observando seu formato e suas características para decidir quais os objetos geométricos utilizar na construção.

Diferenças entre objetos planos e espaciais são evidenciadas no momento de construir as paredes da casa a partir da inserção e comparação entre eles no GeoGebra, o que remete a discussões sobre conceitos e representações matemáticas a partir do reconhecimento das características desses objetos.

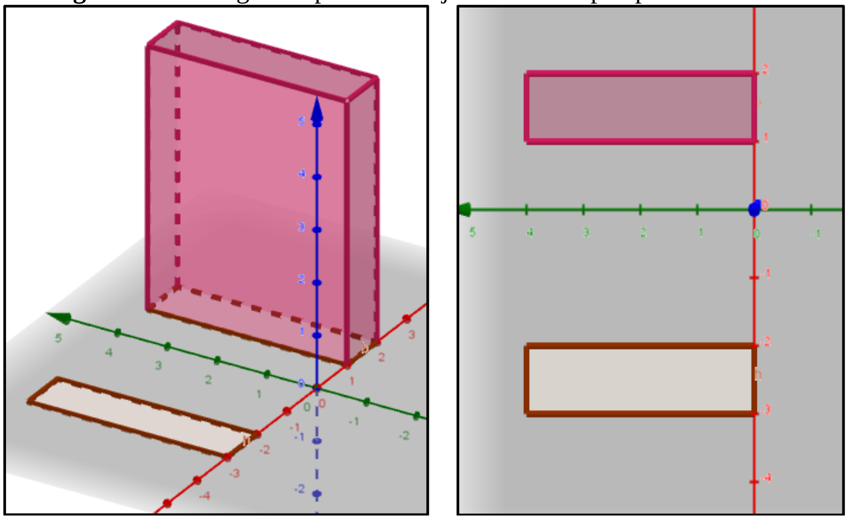
Quando criamos um ponto na janela 2D e outro na janela 3D, fica evidente a diferença na estrutura de um ponto do plano e do espaço. Mesmo que o ponto criado na janela 3D apresente apenas duas coordenadas não nulas, contidas no plano xy, ele é representado de forma algébrica, considerando três coordenadas (x, y, z), evidenciando que aquele ambiente é espacial.

Ao representar um polígono e um poliedro na janela de visualização 3D do GeoGebra, é possível comparar essas representações ao impor o movimento de *rotação* sobre esses objetos, identificando que possuem características diferentes (Figura 3.7, na página seguinte)[45]. A altura no poliedro é um elemento que o diferencia do polígono, que por sua vez representa as faces desse poliedro. Enquanto a representação de um polígono envolve vértices, arestas, ângulos internos, externos e diagonais, a representação de um poliedro relaciona todos esses elementos em cada uma de suas faces.

Desse modo, a representação correta das paredes da casa possui espessura e, portanto, são poliedros, e não polígonos.

[45] Comparação de objetos 2D e 3D nas janelas de visualização 2D e 3D do GeoGebra https://youtu.be/9vCVd44F8qo

Figura 3.7 – Polígono e poliedro na janela 3D em perspectivas diferentes



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Entretanto, sem *rotacionar* as representações na janela 3D, dependendo da *perspectiva* assumida, não é possível diferenciar o objeto plano do espacial, cujas faces têm o mesmo formato, se estiverem na mesma posição (Figura 3.7): é a *rotação* do objeto que permite alterar a *perspectiva* e identificar os elementos que estão ocultos. Assim, os movimentos possibilitados pelo GeoGebra, contribuem para o reconhecimento e a diferenciação dos objetos construídos, sejam eles planos ou espaciais.

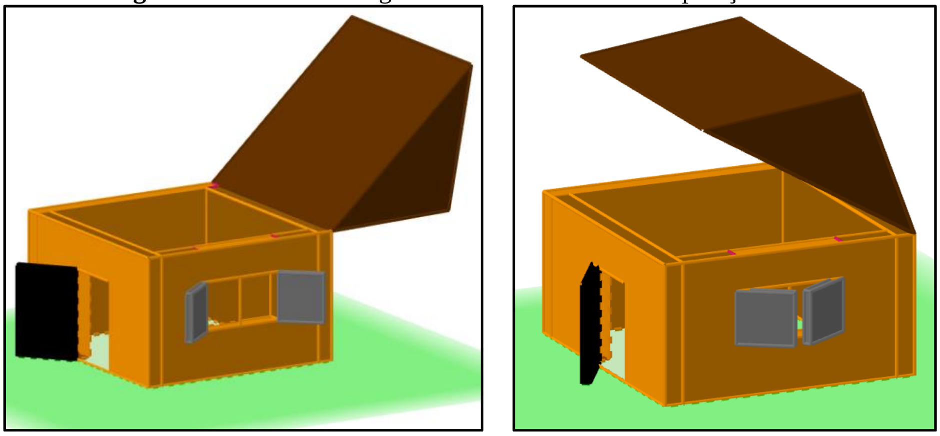
Com a construção finalizada, é atribuído movimento que simula o *abrir e fechar* as formas geométricas espaciais que representam a porta, a janela e o telhado a partir do comando *Girar* do GeoGebra, que gira um objeto de acordo com um ângulo em relação a um eixo de rotação. Nesse caso, o eixo de rotação escolhido foi uma das arestas de cada poliedro, com o ângulo variando de acordo com os parâmetros estabelecidos na ferramenta *controle deslizante*[46].

Esse movimento contribui para identificar que os objetos geométricos não possuem uma posição *correta* para serem representados. Por exemplo, quando o telhado está fechado, o prisma triangular encontra-se em uma posição; por outro lado, quando o telhado abre, o prisma começa a ser inclinado e rotacionado, assumindo posições diferentes (Figura 3.8). Entretanto, o objeto não sofre deformações e suas propriedades se mantêm; logo, ele continua sendo um prisma triangular, que pode ser observado em diferentes posições (Figura 3.8)[47]. Essa comparação pode ser feita com formas geométricas espaciais, bem como com as formas geométricas planas de suas faces.

---

[46] Utilização do comando *Girar* no GeoGebra https://youtu.be/l3FTIjCl9KU
[47] Triângulo do telhado em diferentes posições https://youtu.be/h2Iu3eveeE8

Figura 3.8 - Prisma triangular do telhado da casa em posições diferentes



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nos livros didáticos, as representações de objetos geométricos geralmente são apresentadas em posições prototípicas, ou seja, considerando uma perspectiva e um ângulo de observação padrão (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019). Por exemplo, um triângulo geralmente é representado como acutângulo, equilátero ou isósceles e com um dos lados paralelos às bordas da folha. No CA, é possível identificar outras representações para o triângulo pertencente ao prisma a partir do movimento.

Desse modo, o movimento auxilia na diferenciação entre propriedades de uma representação específica e propriedades do objeto geométrico, que geralmente são confundidas e/ou tomadas como as mesmas, uma vez que a representação estática carrega características particulares que não pertencem à definição do objeto (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019).

Com essa abordagem conjunta entre objetos planos e espaciais associada à movimentação no GeoGebra, é possível identificar que o plano e o espaço não trabalham com objetos da mesma natureza. Por exemplo, um prisma retangular e um retângulo não são o mesmo objeto, embora muitas vezes sejam confundidos, mesmo que o retângulo faça parte do prisma por ser uma de suas faces. Portanto, para que não ocorram confusões como essa, o ensino de Geometria Espacial deve se associar ao ensino de Geometria Plana, como acontece na construção do CA *Casa*, que envolve objetos geométricos planos e espaciais concomitantemente e proporciona discussões sobre suas características.

3.5 Considerações Finais

Na construção do CA *Casa* estão envolvidos objetos geométricos como pontos, segmentos, polígonos e poliedros. Quando os utilizamos para construir a casa, é possível realizar discussões sobre suas propriedades, representações, nomenclatura e a natureza desses objetos.

É necessário rotacionar, reposicionar, mudar a perspectiva, ampliar e reduzir os objetos geométricos construídos para ajustá-los ao formato da casa. Esses movimentos que estão associados às HE, além de auxiliarem no processo de construção, também oportunizam discussões matemáticas, que foram identificadas levando em conta o processo de construção realizado pelas autoras e discutido neste trabalho.

Para começar a construir, é preciso analisar as características dos objetos geométricos, procurando aqueles que mais se assemelham com as particularidades da casa, e para isso é indicado comparar objetos que apresentem características em comum. Ao construir um retângulo e um prisma de base retangular no GeoGebra, os movimentos de *rotação* e a mudança de *perspectiva* sobre eles evidenciam que o retângulo não possui três dimensões, ao contrário do prisma, que com essa característica pode ser considerado uma representação para as paredes da casa.

O formato dos objetos deve ser repensado quando surge a necessidade de construir paredes com abertura, seja para a porta ou para a janela. Isso mostra, por exemplo, que os polígonos não se restringem às formas mais comuns, como triângulo, quadrado e retângulo. Para construir os polígonos com formatos não usuais, o movimento de *rotação* do ambiente do GeoGebra auxilia no *julgamento espacial*, para que os vértices sejam inseridos em locais específicos, que vão depender da *construção mental* que se tem sobre o polígono que pretende construir.

Além do movimento, a comparação dos objetos nas diferentes janelas do GeoGebra também propicia discussões matemáticas. Quando um prisma, por exemplo, é comparado nas janelas 2D e 3D, fica evidente que o ambiente plano não suporta a representação de objetos tridimensionais. Se adicionarmos a janela de álgebra nessas comparações, além da representação figural, é possível considerar a representação algébrica desses objetos, que também apresenta diferenças para os planos e espaciais. Um ponto pertencente ao plano terá duas coordenadas cartesianas; já um ponto criado no ambiente espacial apresenta três coordenadas porque possui um valor a mais para a terceira dimensão.

A partir dessas comparações, o reconhecimento de características importantes que pertencem aos objetos geométricos planos e espaciais e que os diferem pode ocorrer pelo movimento, especialmente para os objetos espaciais, nos quais não é possível observar todas as partes visualizando-os apenas em uma posição.

Assim, identificamos a construção do CA *Casa* no GeoGebra enquanto um tipo de prática educacional para realizar discussões sobre objetos geométricos planos e espaciais de maneira articulada.

3.6 Referências

BORTOLOSSI, H. J. Movimentos, Pensamentos e GeoGebra: alguns aspectos neurocientíficos no ensino e aprendizagem da Matemática In: BASNIAK, M. I.; RUBIO-PIZZORNO, S. (Org.) **Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco.** Editora Pimenta Cultural, São Paulo, 2020, p. 96-117.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília, 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895

LIMA, A. F.; ALMEIDA J. J. P. Do sensível às ideias: uma proposta de ensino de geometria, dos aspectos empíricos aos dedutivos. **Revista Principia**. n. 28, p.111 – 120, 2015.

MACHADO, E.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. **Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets.** 1 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 2019. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf.

MENEGHETTI, F. K. O que é um Ensaio-Teórico? **RAC**. Curitiba. v.15, n.2, p.320-332, 2011. https://doi.org/10.1590/S1415-65552011000200010

SINHA, P. **Pawan Sinha em como o cérebro aprende a ver.** Palestra TED, 2009. http://bit.ly/32AGv7c

TVERSKY, B. **Mind in Motion:** How Action Shapes Thought. Basic Books, New York, 2019.

Quando o artigo 02 foi escrito, estávamos prestes a iniciar as intervenções da pesquisa. Portanto, as estratégias utilizadas e discutidas por nós para a construção do Cenário Animado *Casa* não foram influenciadas pelas ações dos alunos, que ainda eram desconhecidas. Desenvolvemos o referencial teórico a partir do trabalho de Tversky (2019) e apresentamos, neste artigo, elementos importantes para nossas análises, como os movimentos associados ao pensamento espacial e às habilidades espaciais. No artigo 03, discutimos o mesmo Cenário Animado, mas agora analisando as ações dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental durante o processo de construção no GeoGebra, levando em conta o referencial teórico construído no artigo 02 e ampliado no artigo 03.

4 MOVIMENTOS RELACIONADOS ÀS HABILIDADES ESPACIAIS EM UMA CONSTRUÇÃO DE CENÁRIO ANIMADO NO GEOGEBRA

Resumo: As habilidades espaciais compõem o pensamento espacial, e são identificadas em pessoas que apresentam facilidade para resolver tarefas envolvendo formas, localização e movimentos no espaço. O movimento é importante ao pensamento espacial, e juntos nos ajudam a pensar, não somente sobre o espaço, mas sobre outras situações, pois os movimentos associados ao pensamento espacial são a base para a formação dos demais tipos de pensamento. Nesse sentido, este trabalho, de cunho qualitativo, tem por objetivo investigar como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção de um Cenário Animado no GeoGebra. De forma geral, os Cenários Animados são construções envolvendo elementos matemáticos de maneira dinâmica em um contexto. A partir disso, é possível discutir os conceitos e representações matemáticas que estão envolvidos na construção. Os sujeitos da pesquisa empírica foram alunos de uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental que, durante quatro encontros conduzidos por uma equipe de professores, realizaram a construção do Cenário Animado *Casa*, que utiliza objetos geométricos planos e espaciais. Foram analisadas gravações em áudio e vídeo das etapas de construção desses alunos e das discussões matemáticas que ocorreram durante esses encontros. A partir desse material, foi identificado que, para construir o Cenário Animado *Casa*, os alunos utilizaram movimentos como mover, rotacionar, reposicionar, ampliar e reduzir por meio das ferramentas do GeoGebra. Esses movimentos e ações estão relacionados às habilidades espaciais de *rotação mental, perspectiva, construção mental* e *julgamento espacial*, e foram fundamentais para o desenvolvimento da construção quando os alunos buscaram validar suas estratégias, corrigir erros e identificar a posição dos objetos geométricos que compõem a cena. Conclui-se que o emprego desses movimentos associados às habilidades espaciais foi necessário para a efetivação da construção desse Cenário Animado, especialmente por envolver objetos geométricos tridimensionais, nos quais não é possível visualizar todos os lados sem movimentá-los.
Palavras-chave: Movimento no GeoGebra. Pensamento Espacial. Objetos Geométricos. Cenário Animado Casa.

4.1 Introdução

A Geometria, por envolver o estudo de formas, localização e disposições no espaço, é um campo da Matemática que apresenta relações com o pensamento espacial (BRASIL, 2018). Por sua vez, o pensamento espacial ajuda a falar, pensar e agir sobre o espaço, o tempo, as pessoas e outros elementos, de modo que alguns movimentos auxiliam nesse processo, pois o pensamento espacial e os movimentos associados a ele são a base para a formação de outros tipos de pensamento (TVERSKY, 2019). Segundo Tversky (2019), os gestos e os movimentos mentais são tipos de movimentos importantes ao pensamento espacial.

Os movimentos mentais são aqueles realizados sobre um objeto representado na mente, que permitem *girar*, *refletir*, *ampliar* e *reduzir* esse objeto, por exemplo. Movimentos como esses estão relacionados às habilidades espaciais, que podem ser identificadas em pessoas que apresentam facilidade para resolver problemas envolvendo o espaço. Portanto, as habilidades espaciais compõem o pensamento espacial.

A dinamicidade do software GeoGebra possibilita a execução de movimentos, como esses relacionados às habilidades espaciais, sobre os elementos matemáticos construídos em seu ambiente, especialmente quando se utiliza a janela de visualização 3D: ela permite trabalhar com objetos geométricos espaciais e planos, em que os movimentos auxiliam a explorar as características das representações.

Segundo Notare e Basso (2016, p. 2) "uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a 'concretização' dos objetos matemáticos na tela do computador". Essa possibilidade permite o desenvolvimento de novas formas de pensar a matemática, ao manipular e alterar propriedades do objeto representado no software.

Um tipo de construção no GeoGebra que envolve movimento e permite discutir conceitos e representações matemáticas durante seu desenvolvimento são os Cenários Animados (CAs)[48]. Nos CAs, elementos matemáticos são relacionados a ferramentas ou comandos do software que proporcionam movimento para os objetos da construção, constituindo, ao final, um contexto/cena animada (BUENO; BASNIAK, 2020). O movimento deve fazer parte do CA finalizado, mas também aparece durante o processo de construção, quando os objetos matemáticos são manipulados para se adequarem com a cena que se deseja construir. Além disso, a cena final pode envolver personagens, situações do cotidiano ou do imaginário.

Neste trabalho, construímos o CA *Casa* a partir de objetos geométricos planos e espaciais, e investigamos como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção desse CA no GeoGebra, que foi desenvolvida por uma turma de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.[49]

4.2 Pensamento Espacial e os Movimentos

Um pensamento começa por uma ideia ou um problema. Para avançar, você transforma o pensamento inicial em um novo, e realiza esse processo uma série de vezes, até que encontre uma solução para o problema ou amadureça sua ideia (TVERSKY, 2019).

Quando recebemos a tarefa de montar um móvel a partir de um manual, o pensamento vem com as instruções: nesse caso, uma sequência de ações sobre peças as transforma, passo a

---

[48] Para o termo Cenários Animados no plural será utilizada a sigla CAs, e para o termo Cenário Animado no singular será utilizada CA.

[49] No Brasil, o 7º ano do Ensino Fundamental é destinado à crianças de 12 anos de idade.

passo, no móvel completo. A mesma lógica é apresentada por Tversky (2019, p. 85, tradução nossa) sobre o pensamento, como se fossem "ações sobre ideias que as transformam em outra coisa".

Entendemos que essas ações estão relacionadas à disposição para agir sobre uma situação, transformando-a com auxílio de movimentos. Os movimentos são grandes aliados do processo de pensar, tanto os movimentos físicos, que são os gestos que expressam ações com base em ideias (TVERSKY, 2019), como os movimentos mentais, que são aqueles que podem ser realizados sobre objetos construídos na mente, como girar, refletir, mover, adicionar ou remover uma parte do objeto imaginário, entre outras modificações.

Segundo Tversky (2019), o movimento está presente em todo o espaço à nossa volta, apesar de nem sempre estarmos atentos a isso. Em uma conversa qualquer com um colega, as pessoas geralmente gesticulam, apontando para uma direção ou um objeto para complementar a fala. Na natureza, as flores se movem em direção ao sol e abrem e fecham. No meio artístico, os atores e dançarinos realizam movimentos expressivos; e no ambiente educacional, os estudantes e professores também utilizam movimento na sala de aula, seja para representar algum símbolo matemático desenhando-o no ar durante uma explicação, ou utilizando dos movimentos mentais que podem auxiliar a resolver um problema, quando se torna difícil representar o que está pensando.

Desse modo, os movimentos nos auxiliam a tomar decisões relacionadas aos diversos tipos de pensamento. Há uma infinidade de classes que podemos citar, como pensamento social, computacional, criativo, design, abstrato, matemático, e outros, mas "o pensamento espacial é o cerne de nossa existência", e sua relação com o movimento merece destaque (TVERSKY, 2019, p. 59, tradução nossa).

O pensamento espacial é desenvolvido em nossa vivência cotidiana por meio da observação do espaço, e é a base de como falamos, pensamos e agimos sobre o espaço em especial, mas também sobre o tempo, as emoções, as relações sociais e muito mais (TVERSKY, 2019). Desse modo, segundo Tversky (2019), os movimentos associados ao pensamento espacial são considerados a fundação para os demais tipos de pensamento.

Nesse sentido, muitas decisões e comparações realizadas no âmbito social, geográfico, cultural e político, por exemplo, também são influenciadas pelo pensamento espacial. Se precisamos atravessar a rua quando um carro se aproxima, pensamos se há tempo suficiente para percorrer a distância até o outro lado ou se o motorista vai diminuir a velocidade, um julgamento que é parte espacial e parte social, e o erro pode ter um custo alto (TVERSKY, 2019). A relação entre o pensamento espacial e outros pensamentos é destacada em experimentos neurocientíficos mencionados por Tversky (2019), que indicam que as regiões do cérebro responsáveis por nos orientar e movimentar sobre o espaço, ou seja, relacionadas ao pensamento espacial, acabaram, ao longo do tempo adquirindo outras funções, como representar *informações temporais*, *conceituais*, de *indivíduos* e *ideias*. Assim, outros tipos de pensamento possuem uma base no pensamento espacial, especialmente o pensamento abstrato. Como indica a autora, destacamos que é apenas uma base, e não toda a sua estrutura.

Não somos perfeitos em pensamento espacial e em nenhum outro tipo de pensamento, considerando sua complexidade e amplitude, e por isso, frequentemente nos equivocamos em decisões espaciais (TVERSKY, 2019). Por outro lado, algumas pessoas apresentam mais facilidade do que outras na execução de ações relacionadas ao pensamento espacial, que geralmente envolvem movimentos realizados sobre os objetos mentalmente. Um conjunto de tarefas envolvendo esses movimentos é utilizado como teste para medir as habilidades de pensamento espacial, ou habilidades espaciais (HE) de uma pessoa (TVERSKY, 2019).

Segundo Tversky (2019), uma pessoa possui esse tipo de habilidade quando apresenta predisposição para lidar com situações sobre o espaço, em que regularmente estão presentes os movimentos relacionados à *rotação mental* de um objeto, mudança na *perspectiva* de observação, *julgamento espacial* sobre distância e posição, além da alteração de forma, tamanho e outras propriedades de objetos *construídos na mente*. Na subseção seguinte, apresentamos mais detalhes sobre essas HE.

4.2.1 Movimentos nas Habilidades de Pensamento Espacial

Assim como existem diferentes tipos de pensamento, as habilidades sobre os pensamentos também são diversas: habilidade musical, atlética, verbal, visual, espacial e outras (TVERSKY, 2019).

As HE compõem o pensamento espacial e estão relacionadas a diferentes formas de agir sobre ideias e representações no espaço. Já vimos que *ações sobre ideias* é como Tversky (2019) considera o processo de pensar.

Mesmo as pessoas que apresentam aptidão com as HE precisam praticar para se sobressair. O esporte é um bom exemplo disso: "para ser um saltador de elite, shortstop[50] ou quarterback, você precisa de características físicas especiais, talento e *treinamento*" (TVERSKY, 2019, p. 98, tradução nossa, grifos nossos). Nesse sentido, até mesmo aqueles que

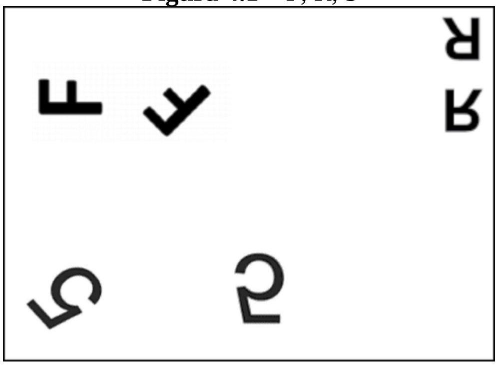
[50] *Shortstop* é o nome da posição de um jogador no beisebol, e quarterback é a posição de um jogador no futebol americano.

apresentam dificuldades com noções espaciais podem desenvolver algum tipo de HE por meio da prática de tarefas que as estimulem, pois não são inatas ao sujeito (TVERSKY, 2019).

Essas tarefas exigem estratégias/pensamentos distintos, que podem requerer HE distintas, de forma que o sujeito pode ser bom em uma, mas não em outra, ou pode ser bom em todas ou em nenhuma (TVERSKY, 2019).

Para experimentar um exemplo dessas tarefas, observe a Figura[51] 4.1, abaixo, e decida se os pares de imagens são iguais ou espelhadas.

Figura 4.1 – F, R, 5



Fonte: Tversky (2019, p. 87).

Para resolver esse problema, é preciso girar as letras e o número quantas vezes for necessário até conseguir compará-los e identificar que os Rs e os 5s estão espelhados, e os Fs não. Essa tarefa exercita a *rotação mental* dos objetos, que é uma ação visual-espacial, comparada a observar algo realmente girando no espaço ou em orientações diferentes (TVERSKY, 2019). Essa é uma das principais HE, e muitas vezes está relacionada com a efetivação de outras. Assim, tarefas envolvendo a *rotação mental* servem como testes para medir essa HE, assim como outras tarefas envolvendo a *perspectiva*, *construção mental* e *julgamento espacial* são utilizadas para medir as HE nessas respectivas ramificações do pensamento espacial. Existem outros tipos de HE, mas focamos este estudo nessas quatro, que apresentam relações com os movimentos realizados mentalmente.

O número de tentativas e o tempo que o sujeito leva para concluir essas tarefas é utilizado como indicativo de dificuldade ou facilidade com as HE (TVERSKY, 2019). Por outro lado, ainda segundo Tversky (2019), não é necessário se submeter a testes específicos para experimentar a *rotação mental*, pois a usamos em tarefas do dia a dia, como colocar uma chave

[51] Após resolver a tarefa, acompanhe a animação dos elementos da figura no seguinte vídeo: https://youtu.be/s1WGt1V9IKA

na fechadura, montar quebra-cabeças, ou quando reconhecemos objetos que não estão em suas posições usuais. O mesmo vale para outras HE.

Para ditar a posição de objetos e reconhecê-los no espaço, às vezes é necessário tomar uma *perspectiva* espacial diferente. Nossa mente permite assumir *perspectivas* internas, contrárias à que estamos, quando nos colocamos no lugar de outra pessoa ou até mesmo de um objeto (TVERSKY, 2019). Também é possível assumir uma *perspectiva* externa, quando estamos do lado de fora, observando, analisando ou buscando a posição adequada para um objeto.

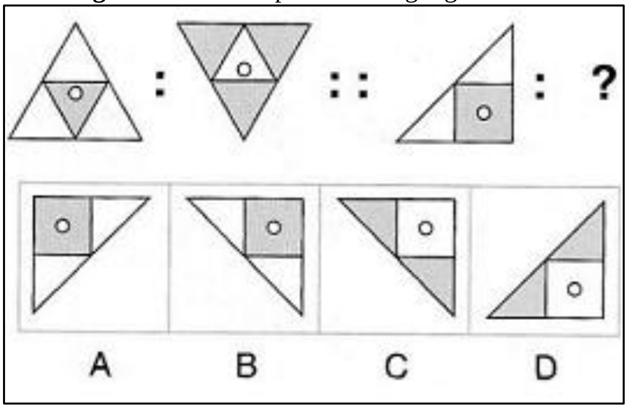
Em um teste envolvendo a HE *perspectiva* descrito por Tversky (2019), o sujeito é convidado a ler um texto que descreve um ambiente com objetos e pessoas, e a partir disso precisa responder onde estava o que, em relação a pontos de referência diferentes. Os participantes relataram que, para responder aos questionamentos, imaginavam-se no lugar das pessoas e dos objetos, e assim realizaram a tarefa sem dificuldades.

Segundo a autora, esse tipo de mudança de perspectiva (interna) considera uma estrutura egocêntrica, que é útil para manter o controle de onde se está e por onde se move. Por outro lado, não é uma maneira eficiente quando a perspectiva assumida é a externa: nesse caso, “para pensar sobre o espaço de forma mais geral, precisamos tirar o ego do espaço e formar uma representação alocêntrica” (TVERSKY, 2019, p. 68, tradução nossa).

Antes de conseguirmos rotacionar um objeto mentalmente ou alterar sua posição, uma representação deve ser construída na mente. A *construção mental* possibilita a representação de um objeto na mente a partir de algo que vimos, ou que foi descrito por meio da linguagem. A partir disso, a imaginação permite mudar as formas, tamanhos e propriedades do objeto, girar, refletir, adicionar uma parte e determinar onde está e o que faz (TVERSKY, 2019). Portanto, a *construção mental*, além de criar os objetos, também permite realizar modificações sobre eles.

Como exemplos de tarefas envolvendo a HE de *construção mental*, podemos citar as analogias com figuras geométricas (Figura 4.2, na página seguinte), em que uma série de transformações sobre a representação deve ser empregada para chegar à solução.

Figura 4.2 – Exemplo de analogia geométrica



Fonte: Quizizz (2021).

As pessoas podem fazer essas manipulações com maior ou menor facilidade, dependendo da sequência de ações empregadas. Para alguns, pode ser mais fácil rotacionar primeiro; enquanto outros, é preciso começar alterando a cor dos triângulos.

Para resolver essas e outras tarefas, as pessoas reúnem as informações que parecem ser relevantes e tentam entender a relação entre elas. Isso está ligado também a outra HE, o *julgamento espacial*, que permite realizar comparações e tem influência nas decisões sobre distância (perto, longe), tamanho (pequeno, grande) e direção (direita, esquerda, frente e trás) no espaço (TVERSKY, 2019). Para isso, a mente utiliza alguns mecanismos para guiar o *julgamento espacial*, como pontos de referência, diferentes perspectivas de um ambiente, a rotação e o alinhamento, mas esses nem sempre auxiliam a inferir a resposta correta (TVERSKY, 2019).

Nos testes envolvendo o *julgamento espacial*, Tversky (2019) cita a comparação entre mapas do mesmo lugar. Os participantes deveriam indicar a distância entre cidades e sua localização, por exemplo, qual estava a leste ou a oeste. A maioria dos participantes acabou respondendo incorretamente aos testes porque, apoiada em outras HE e na percepção de cada indivíduo, a mente parece girar as representações para que pareçam mais alinhadas, também estima que a distância entre locais pertencentes a um mesmo grupo seja menor do que quando comparada a outros grupos, o que pode levar a equívocos (TVERSKY, 2019). Esse é um exemplo da influência do pensamento espacial sobre outros pensamentos.

As HE, quaisquer que sejam, são internas ao sujeito. Situações propostas por terceiros, como jogos de blocos, quebra-cabeças, experiências sensoriais ou tarefas espaciais podem estimular o desenvolvimento ou mobilização de tais HE, mas não existe uma ação específica que garanta esse desenvolvimento.

Tversky (2019) afirma que essas tarefas provocativas devem ser propostas aos sujeitos desde crianças, pois as HE são fundamentais para muitas profissões, atividades cotidianas e para o desenvolvimento pessoal. Além de brincadeiras e jogos com as crianças, pais e professores “podem enriquecer as experiências com conversas espaciais”, utilizando palavras como: frente, atrás, dentro, fora, paralelo, perpendicular, diagonal, área e outras (TVERSKY, 2019, p. 103).

Além disso, treinar um tipo de HE pode auxiliar no desempenho de outras habilidades que não foram diretamente estimuladas (TVERSKY, 2019). Ainda não foi possível compreender e determinar as múltiplas HE existentes, apesar de inúmeras tentativas que ocorreram, segundo a autora. Com isso, concentramo-nos na discussão de apenas quatro HE, nas quais identificamos relações com o campo de estudo da matemática, especialmente quando é trabalhada a partir do software GeoGebra envolvendo a construção de CAs.

4.2.2 Movimentos no GeoGebra

O pensamento espacial e as HE não são condicionados à Matemática. Identificamos a amplitude desse tema, que pode ser utilizado para estudar fenômenos de áreas que compartilhem alguma similaridade com o pensamento espacial, e segundo Tversky (2019, p. 88, tradução nossa), “o pensamento matemático tem uma camada de pensamento espacial”.

A Geometria, enquanto campo de estudo da Matemática, está associada ao pensamento espacial, pois trabalha com formas geométricas, distâncias, tamanhos e outras propriedades do espaço bi e tridimensional.

Neste trabalho, abordamos o conteúdo de Geometria utilizando o GeoGebra, porque esse software possui ferramentas e comandos que permitem *mover*, *girar*, *rotacionar*, *ampliar* e *reduzir* os objetos matemáticos ali construídos. Nesse sentido, relacionamos esses movimentos executados do software com os movimentos mentais associados às HE mencionadas na subseção anterior.

Os sujeitos podem realizar construções, rotações e mudanças de perspectiva na mente, mas com o apoio das ferramentas do GeoGebra, têm a possibilidade de externalizar essas ações, como “uma maneira de colocar a mente no mundo” (TVERSKY, 2019, p. 89, tradução nossa).

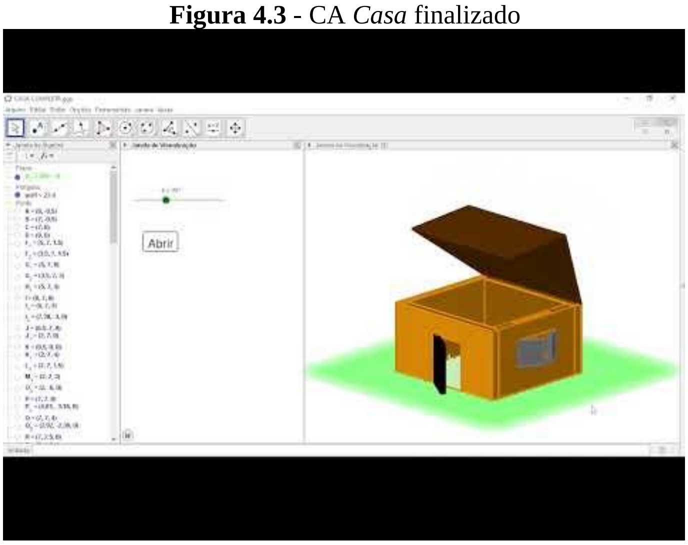
Esses movimentos podem aparecer durante as etapas de desenvolvimento de construções no GeoGebra, como é o caso da construção do Cenário Animado *Casa*, discutido na sequência.

4.3 Contexto e Encaminhamentos Metodológicos

4.3.1 O Cenário Animado *Casa*

O planejamento do CA *Casa* (Figura 4.3) e de outros envolveu uma equipe de acadêmicos que já vinha trabalhando com esse tipo de construção em outras pesquisas e em um projeto de extensão. Todos os CAs elaborados nesse contexto envolveram o conteúdo estruturante de Geometria.

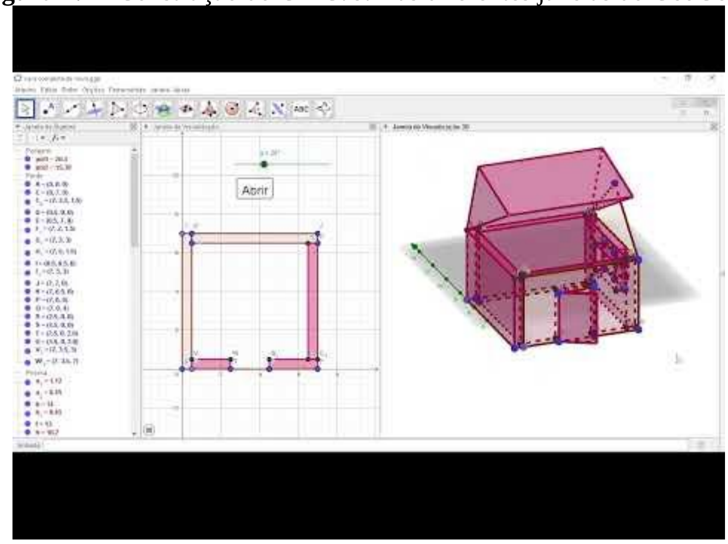
Figura 4.3 - CA *Casa* finalizado



Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Em especial, o CA *Casa* envolveu elementos matemáticos que proporcionaram discussões sobre conceitos e representações geométricas. Assim, a partir dessa construção, o objetivo foi que os alunos pudessem reconhecer e diferenciar características de objetos geométricos planos e espaciais, particularmente polígonos e poliedros. A união desses objetos geométricos em tamanhos e formatos diferentes dão origem à representação da casa construída na janela de visualização 3D do GeoGebra, articulando também a janela de visualização 2D e a janela de álgebra (Figura 4.4, na página seguinte).

Figura 4.4 - Construção do CA C*asa* nas diferentes janelas do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Nesse contexto, para investigar como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção desse CA no GeoGebra, definimos como sujeitos da pesquisa empírica uma turma de alunos da Educação Básica, que realizou essa construção. A seguir, são descritas informações sobre os encontros realizados com os alunos.

4.3.2 Alunos participantes e seleção de dados

A turma que participou da proposta de construção do CA foi o 7º ano de um colégio em tempo integral da rede pública do Estado do Paraná, localizado na cidade de União da Vitória. No período (maio a julho de 2022) em que a proposta foi desenvolvida, as aulas na rede de ensino ocorreram de modo presencial, após o período de ensino remoto emergencial decorrente da pandemia da Covid-19, que iniciou em 2020.

Os 27 alunos da turma foram divididos em dois laboratórios de informática[52] (L1 e L2) durante os encontros, para que todos tivessem acesso a um computador para realizar a construção, para favorecer as discussões em sala realizadas pela Equipe Assistente (EA) que atuou nesses encontros, também para a posterior análise dos dados. Apesar dos ambientes separados, foi seguido o mesmo planejamento para os encontros com os alunos.

Em cada laboratório de informática atuava uma Equipe Assistente (EA) composta por três integrantes cada, em que um deles conduziu as discussões e os encaminhamentos da aula,

[52] Os laboratórios de informática pertencem a universidade que divide o prédio com o colégio desses alunos

e os demais atenderam a dúvidas pontuais dos alunos e auxiliaram em etapas da construção do CA, amparados por um roteiro[53] que foi elaborado com antecedência.

Antes de criar o CA *Casa,* os alunos construíram outros dois cenários, todos envolvendo o conteúdo estruturante de Geometria para se ambientar com alguns comandos do GeoGebra e com a dinâmica dos encontros. Primeiramente, o CA finalizado era apresentado aos alunos para que soubessem o que seria construído naquele encontro, e os primeiros *passos* da construção eram mostrados detalhadamente em uma tela projetada. A partir disso, os alunos davam continuidade à sua construção com base nas etapas anteriores ou explorando as ferramentas do software e os objetos matemáticos envolvidos.

As discussões, neste trabalho, focalizam no processo de construção realizado pelos alunos do L1, porque nesse ambiente, a responsável por conduzir as discussões foi a primeira autora deste trabalho (*Pesquisadora*). Os demais membros da EA são identificados como A1 e A2.

Foram necessários quatro encontros de aproximadamente 100 minutos com a turma para a construção e discussão do CA *Casa*. Os dados foram coletados por meio de gravações das telas de cada computador utilizado pelos alunos, gravações em áudio e vídeo do L1, e registro escrito dos alunos e da pesquisadora. Para as gravações de tela, foi utilizado no navegador de internet o *Apowersoft*[54], ferramenta online e gratuita que tem a função de gravar as atividades executadas na tela do computador, além de gravar o áudio.

Ocorreram problemas técnicos durante a coleta de dados: gravações das telas dos computadores foram perdidas porque desligaram inesperadamente, sem que fosse possível salvar a gravação ou o progresso do aluno na construção. Além disso, houve encontros em que os computadores do L1 não abriram a janela de visualização 3D no aplicativo do GeoGebra, sendo necessário destinar um tempo para mudar para a versão online e dar continuidade à construção. Nesse caso, os alunos não criaram um perfil no GeoGebra para utilizar a versão online, e para salvar a construção ao final da aula, baixaram o arquivo no computador, armazenando em uma pasta compartilhada na rede de internet.

Não conseguimos gravar o áudio de todos os computadores por disporem de poucos microfones externos, e com isso, parte das gravações das telas dos computadores ficou sem áudio, além de outras gravações em vídeo que ficaram corrompidas. Isso reduziu a quantidade de material a ser analisado, e foi o primeiro critério de seleção dos dados coletados.

---

[53] O roteiro com a indicação do passo a passo da construção e das discussões em cada etapa pode ser acessado no Apêndice 03

[54] https://www.apowersoft.com.br/gravador-de-tela-gratis

Embora cada aluno tivesse à disposição um computador para realizar a construção, foi orientado que poderiam trocar ideias com os colegas sobre suas etapas. Nesse sentido, houve alunos que optaram por produzir uma construção em dupla.

A apresentação das análises segue as etapas estabelecidas para a construção do CA, e os excertos consistem em recortes das telas dos computadores dos alunos, conversas e discussões que ocorreram no momento das aulas, e registro escrito dos alunos. Esses dados foram selecionados considerando os momentos da construção em que foi possível identificar influências dos movimentos empregados, ou da ausência deles.

É possível acessar os trechos das gravações das telas quando se clica sobre as imagens que as representam no decorrer do texto; nesse caso, será aberta uma nova guia em que um vídeo da situação pode ser reproduzido: é necessário estar conectado à internet para acessá-lo. A utilização de vídeos nos parece mais adequada do que uma sequência de imagens que busque representar as ações dos alunos sobre o software, considerando que os movimentos realizados nas etapas da construção do CA são elementos importantes para as análises. Os áudios foram suprimidos dos vídeos para preservar a identificação dos alunos.

Relatamos e analisamos, na sequência, as construções desenvolvidas pelos alunos[55]: *Lucas, Maria, Ana, Paulo, Beatriz, Caroline* e as duplas *André e Gustavo* e *Diego e Eduardo.* Buscamos identificar, em suas ações e falas, indicativos dos movimentos e ações relacionadas às HE de *construção mental*, *rotação mental*, *perspectiva* e *julgamento espacial*.

4.4 Resultados e Discussões

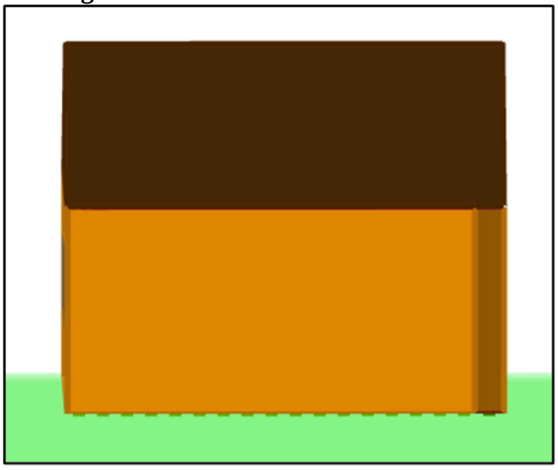
4.4.1 1ª etapa: Apresentação do Cenário Animado Casa

Antes de começar a desenvolver o CA *Casa*, a construção final foi apresentada aos alunos para identificarem o que estava sendo representado no GeoGebra. Porém, a posição do objeto adotada nesse momento (Figura 4.5) teve influência sobre as respostas dos alunos. No excerto a seguir, são apresentadas as falas dos alunos quando observaram a representação da figura 4.5, na página seguinte.

---

[55] Foram adotados nomes fictícios para os alunos, buscando preservar a identidade de cada um.

Figura 4.5 - Vista traseira da casa



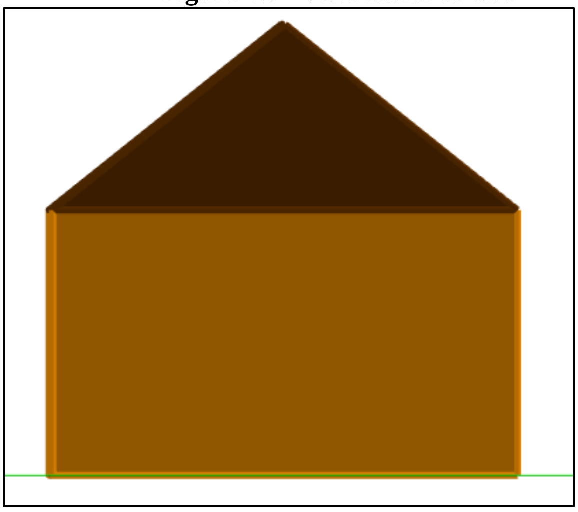
Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Pesquisadora:	*Essa é a próxima construção que a gente vai fazer, o que vocês acham que é?*
Gustavo:	*Uma porta.*
Diego:	*Uma caixa.*
Lucas:	*Um baú.*
Eduardo:	*Uma caixa que é parecida com um baú.*
Beatriz:	*Um cubo.*
Eduardo:	*Uma barra de chocolate.*

Nessa posição, os alunos não identificaram que a construção se tratava de uma casa, e citaram outros objetos semelhantes ao formato apresentado. A posição adotada foi proposital, para que os alunos percebessem que objetos tridimensionais precisam ser observados em diferentes posições para identificar características que fazem parte de sua identidade. Especialmente os objetos geométricos, quando são representados em posições diferentes do usual, acabam não sendo reconhecidos em algumas situações (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019).

Depois disso, a posição da casa foi alterada novamente, mostrando a lateral (Figura 4.6). Nesse momento, não foi apresentado o movimento de *rotação* do CA até chegar nessa posição, para que os alunos não identificassem todos os elementos que compõem o CA e o caracterizassem enquanto uma casa, visto que isso seria discutido na sequência.

Figura 4.6 - Vista lateral da casa



Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Os alunos novamente foram questionados sobre o objeto representado, como pode ser lido no excerto abaixo.

Pesquisadora:	*E agora, é diferente?*
Todos:	*Uma casa!*
Pesquisadora:	*O que vocês identificam aqui que parece uma casa?*
Lucas e Eduardo:	*O telhado e a parede.*
Pesquisadora:	*Será que falta mais algum elemento na casa?*
Eduardo:	*Porta e janela.*
Pesquisadora:	*E essa construção está em qual janela do GeoGebra?*
Lucas:	*3D*
Pesquisadora:	*E como fazemos pra ver se tem mais algum desses elementos construídos?*
Beatriz:	*Girando a casa*
Lucas:	*Pega o mouse e faz assim ó, gira o plano* [realiza o movimento em seu computador].
Pesquisadora:	*Então o A1 vai girar para vocês verem se tem mais alguma coisa escondida.*
Lucas:	*Não tem nada…. Ah, uma janela e uma porta!*
Eduardo:	*Nossa!*
Beatriz:	*Nossa! Eu pensei que era só assim, a casa.*

Quando os alunos observam o triângulo sobre o retângulo, afirmam que se trata da representação de uma casa, e relacionam essas formas geométricas a um telhado e uma parede. Como eles já conhecem uma casa, ou seja, já têm a *construção mental* desse objeto, conseguem notar que os elementos apresentados se assemelham às características de uma casa.

A partir de questionamentos, os alunos citam outros elementos que fazem parte de uma casa, mas não aparecem nessa representação, como porta e janela. Por se tratar de um objeto tridimensional e que está na janela 3D do GeoGebra, os alunos afirmaram que era possível *rotacionar* o objeto, o que foi necessário para reconhecer suas particularidades e modificar a *perspectiva* em que é observado.

Nessa etapa, a casa foi rotacionada e os alunos puderam observá-la sob diferentes *perspectiva*s (Figura 4.3), quando conseguiram identificar elementos que, antes, não estavam visíveis. *Eduardo* e *Beatriz* mostram-se surpresos quando percebem que a casa completa envolve outros objetos geométricos além do triângulo e do retângulo que observaram anteriormente.

A abordagem de objetos geométricos espaciais em softwares possibilita uma visualização diferente a partir dos movimentos. Se a casa fosse observada de frente, de lado, e depois em outras posições, sem considerar o movimento de *rotação* da casa, seria possível reconhecer os elementos que a compõem, mas não teríamos noção de profundidade, altura, declividade e da distância entre seus elementos. Isso costuma acontecer quando olhamos imagens estáticas em um livro.

O movimento de *rotação*, que alterou as *perspectivas*, foi fundamental para a identificação das características da casa para saber o que deveriam construir nas próximas etapas.

4.4.2 2ª etapa: Construção da Primeira Parede e Discussões Matemáticas

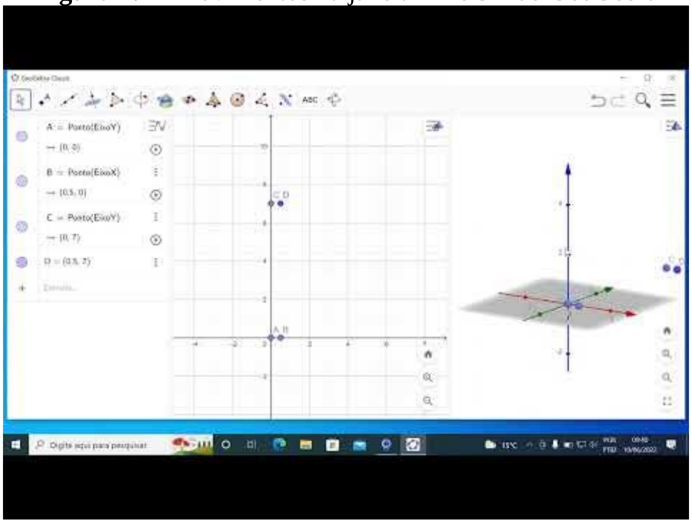
Os alunos foram incentivados a sugerir como começar a construção do CA apresentado a partir de questionamentos que buscaram relacionar a construção com elementos matemáticos que consideramos necessários para dar forma a casa, como pode ser lido no excerto seguinte.

Pesquisadora:	*Vamos pensar primeiro em como construir uma parede da casa. Que formato tem essa parede da casa?* [apontando para uma parede lisa]
André:	*Um retângulo.*
Lucas:	*Um retângulo mais fino.*
Pesquisadora:	*E como ele* [o retângulo] *tem que ser?*
Lucas:	*No 2D primeiro.*
Pesquisadora:	*Porque 2D primeiro?*
Lucas:	*Aí a gente ajeita na janela 3D.*

Os alunos consideram o prisma que representa uma das paredes da casa como o retângulo, que é uma forma geométrica plana: a forma das faces do prisma. Embora a construção seja iniciada pelo retângulo, ele possui propriedades diferentes do prisma.

A fala de *Lucas* expressa que ele estabeleceu relação entre as janelas de visualização 2D e 3D, ou seja, identificou que o objeto criado em um ambiente é representado no outro, e que as alterações sobre o objeto podem ser feitas em ambas as janelas. Suas ações sobre o software reiteram essa afirmação (Figura 4.7), porque depois que *Lucas* construiu os pontos e um retângulo na janela 2D, observou a representação na janela 3D *rotacionando* a construção para visualizá-la em diferentes posições, buscando a *perspectiva* que lhe permitisse avaliar melhor os elementos construídos para dar continuidade a sua construção (Figura 4.7, na página seguinte). Aqui, os movimentos atuam como conferência da ação realizada pelo aluno sobre o que informou ao software.

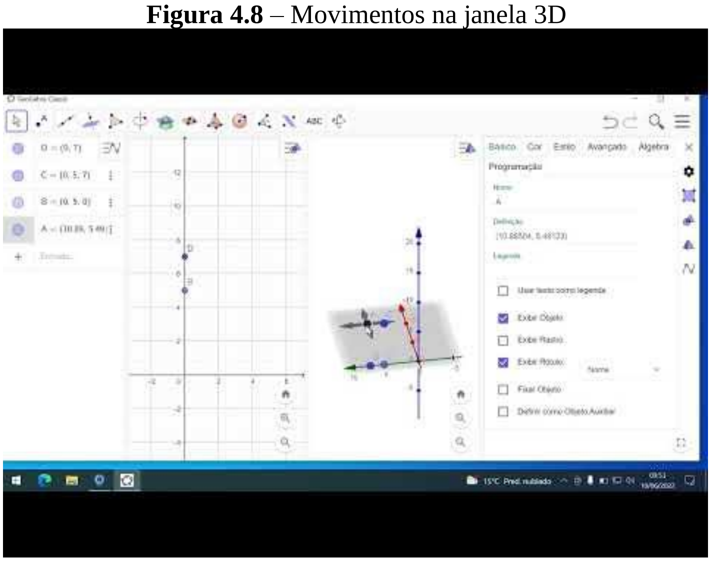
Figura 4.7 - Movimentos na janela 2D e 3D do GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por outro lado, *Paulo* construiu e manipulou os pontos na janela 3D, e a *perspectiva* escolhida em um primeiro momento levou-lhe a equívocos em seu *julgamento espacial*, pois causou a impressão de que os pontos estavam localizados no mesmo plano e alinhados. Quando o aluno *rotacionou* a janela 3D, pôde identificar que um dos pontos não estava no mesmo plano que o outros pontos, e foi necessário fazer alterações (Figura 4.8). Novamente, identificamos que o movimento auxiliou no processo de construção, possibilitando a identificação correta da localização dos pontos.

Figura 4.8 – Movimentos na janela 3D



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Depois de construir o retângulo, os alunos foram questionados sobre a representação que obtiveram, comparando com a parede que tinham o objetivo de construir.

Pesquisadora: *E aí, o que apareceu na tela de vocês?*

Lucas:	*Pra mim apareceu um retângulo no 2D e no 3D… na verdade, o do 3D tem só um pedaço.*
Pesquisadora:	*E os objetos no 3D geralmente tem quantas dimensões?*
Gustavo:	*Largura e comprimento?*
Eduardo:	*Tem 3 dimensões.*
Pesquisadora:	*E esses dois objetos que estão representados* [o retângulo nas duas janelas] *têm alguma diferença nessa parte?*
Gustavo:	*A altura?*
Pesquisadora:	*O de lá* [retângulo representado na janela 3D] *tem altura?*
Gustavo:	*Acho que não.*
Pesquisadora:	*Como fazemos pra ver se esse objeto tem uma terceira dimensão?* [...] *Lembrem da casa lá do começo.*
Eduardo:	*Girar.*
	[o A1 gira a janela 3D e os alunos concluem que os objetos são iguais, nesse momento].
Pesquisadora:	*Então, aqui, nós já temos o retângulo da base, o que falta para se tornar uma parede?*
Lucas:	*Altura.*

Lucas, Gustavo e *André* reconheceram que utilizar somente o retângulo sugerido por eles anteriormente não foi suficiente para construir um objeto que representasse as características de uma parede da casa. A *rotação* realizada por *A1,* na janela de visualização 3D, auxiliou nessa percepção, evidenciando que o retângulo construído não possui altura.

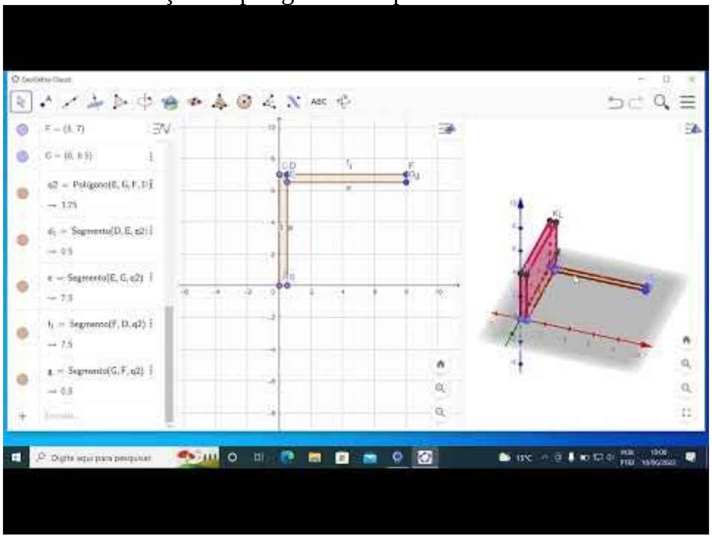
Na sequência, foi indicada a utilização da ferramenta *extrusão para prisma,* necessária para dar continuidade à construção do objeto geométrico. O excerto a seguir inicia com uma aluna que não estava conseguindo realizar essa etapa da construção, e leva a uma discussão com os demais alunos.

Beatriz:	*Professora, o meu não dá certo.*
Pesquisadora:	*Você precisa criar na janela de visualização 3D para dar certo… Por que será que se eu clicar na janela 2D não dá certo? Alguém sabe?*
André:	*Porque no 2D não vai ter altura.*
Pesquisadora:	*Isso mesmo!*
	[...]
Pesquisadora:	*E agora, vocês conseguem ver alguma diferença entre o objeto do 2D e do 3D?*
Todos:	*Sim.*
Lucas:	*Ah, agora sim.*

Beatriz estava tentando utilizar a ferramenta *extrusão para prisma* na janela 2D do GeoGebra, o que não é possível, devido às características desse ambiente, que não possibilita a construção de objetos tridimensionais, como foi pontuado por *André.* A EA auxilia outros alunos que estavam com dificuldades nessa etapa. Depois de construído o prisma, a primeira parede estava finalizada, e com isso, os alunos conseguem identificar diferenças entre as representações da janela 2D e 3D.

A construção da segunda parede foi feita de maneira análoga pelos alunos. *Lucas* novamente *rotaciona* a janela de visualização 3D para analisar o objeto construído, e quando assume diferentes *perspectivas,* ele utiliza esse ambiente como base para sua orientação espacial (Figura 4.9). Depois de rotacionar, costuma deixar as duas janelas na mesma *perspectiva* para, então, seguir para a próxima etapa.

Figura 4.9 - Construção do polígono e do prisma verificando com movimento



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O *julgamento espacial* que ocorre a partir da *rotação* aliada à mudança de *perspectiva*, mostra como essas ações são importantes nas etapas da construção, para que o aluno compare a *construção mental* do objeto que pretende construir com a representação que efetivamente foi representada no software, e assim, perceba se é possível passar para a próxima etapa ou se são necessárias alterações.

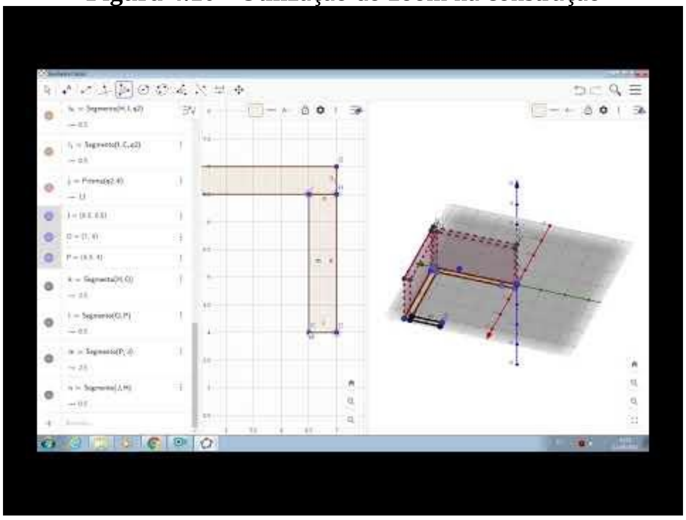
4.4.3 3ª etapa: Estratégias dos Alunos na Construção da Parede com a Porta

Para construir a parede da casa que possui porta, pensando na concavidade do poliedro, não era possível seguir o mesmo passo a passo, e foi deixado como desafio aos alunos.

Ana utilizou a ferramenta *zoom*, que permite ampliar ou diminuir a escala do plano cartesiano no momento de inserir pontos na janela 2D (Figura 4.10). Ela considerou a quantidade de quadrados da malha quadriculada para medir a distância entre os pontos, procurando deixar um espaço pré-estabelecido para a abertura da porta. A ferramenta *zoom* possibilitou que *Ana* tivesse precisão sobre o local em que inseriu os pontos, pois à medida que a malha quadriculada é ampliada, os quadrados menores ficam aparentes e os eixos assumem números decimais.

Essas ações corroboraram com o *julgamento espacial* da aluna, pois sem a utilização do *zoom*, ela não conseguiria, ou seria muito mais difícil plotar pontos diretamente na janela 2D para identificar a localização necessária e construir polígonos de mesmo tamanho, incluindo uma abertura para a porta entre eles. Depois, utilizou a ferramenta *extrusão para prisma*, atribuindo altura aos objetos.

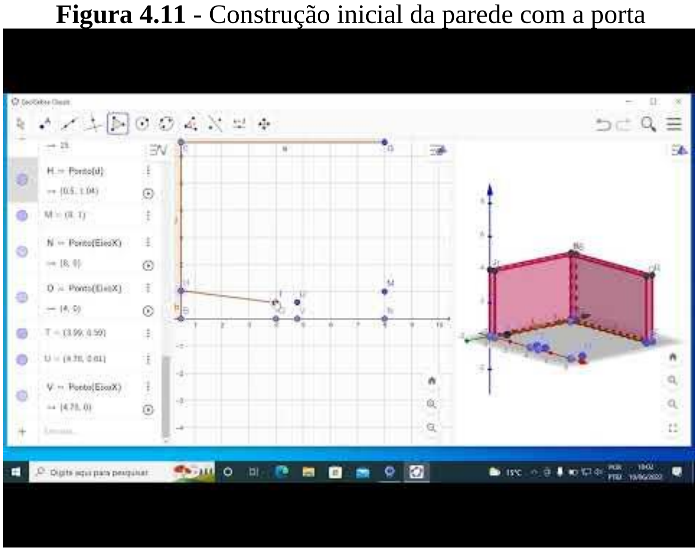
Figura 4.10 - Utilização do zoom na construção



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A dupla *Diego e Eduardo* e o aluno *Lucas* tentaram representar o formato da parede com abertura para a porta na janela 2D a partir da inserção de pontos. Quando *Lucas* realizou a extrusão para prisma e *rotacionou* a construção observando o objeto em diferentes *perspectivas*, conseguiu identificar que a representação retornada não foi o que esperava. (Figura 4.11). Identificamos que o aluno se amparou na comparação entre as janelas 2D e 3D em boa parte das etapas da construção do CA, e que essa foi a principal fonte que utilizou para tomada de decisão, que vai além da simples imaginação do objeto geométrico.

Figura 4.11 - Construção inicial da parede com a porta



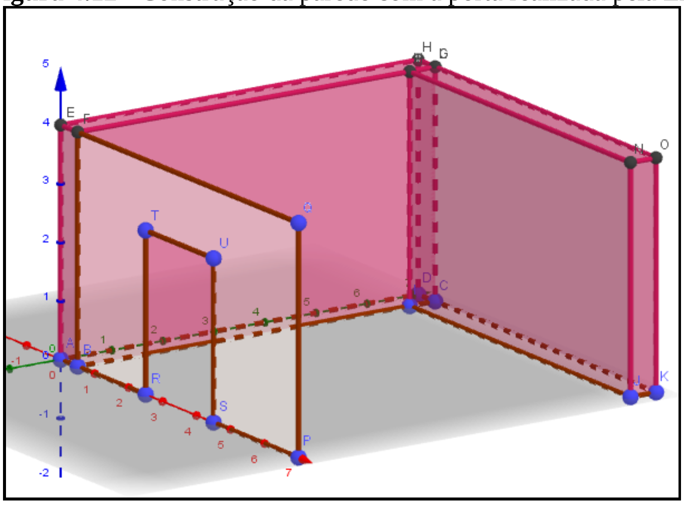
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O aluno, então, procurou fazer alterações, reposicionando os vértices do polígono na janela 2D. Para isso, também se apoiou na utilização da ferramenta *zoom*. Depois de tentativas, ele desistiu de construir a parede a partir dessa estratégia, pois não conseguiu atingir a representação tridimensional desejada, e construiu algo semelhante ao que fez a aluna *Ana*.

Consideramos, a partir disso, que os movimentos possibilitados pela ferramenta *zoom* também influenciam e se fazem importantes no processo de construção da casa, especialmente para as partes minuciosas, que os alunos dedicavam muita atenção, para não deixar os vértices desalinhados e consequentemente a parede deformada. Assim, pontuamos que o *Zoom* também atua como um tipo de *perspectiva* do objeto, pois permite identificar detalhes na construção que não seria possível sem os movimentos de ampliação e redução. Desse modo, também influencia o *julgamento espacial* pelo alinhamento e precisão na localização dos objetos em escala ampliada ou reduzida.

Depois de um período disponibilizado aos alunos para construírem essa parede, foi mostrada outra possibilidade de construção dessa etapa, conforme o roteiro (Figura 4.12).

Figura 4.12 - Construção da parede com a porta realizada pela EA



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Mesmo que os alunos estivessem desenvolvendo outras estratégias, gostaríamos de chamar a atenção para essa possibilidade, para que os alunos trabalhassem com a localização de coordenadas no espaço, e não somente no plano. Para isso, uma discussão sobre o formato da parede foi realizada com os alunos.

Pesquisadora:	*Pensando nessa parede com a porta, qual vai ser o formato dela? Nas outras era um retângulo.*
Lucas:	*Um retângulo com um buraco no meio.*
Pesquisadora:	*Então, se a gente for desenhar esse formato, seria mais ou menos assim, né?* [desenha na lousa o formato] [...] *E como vamos construir essa forma lá no GeoGebra?*
Diego:	*Começa pelos pontos.*

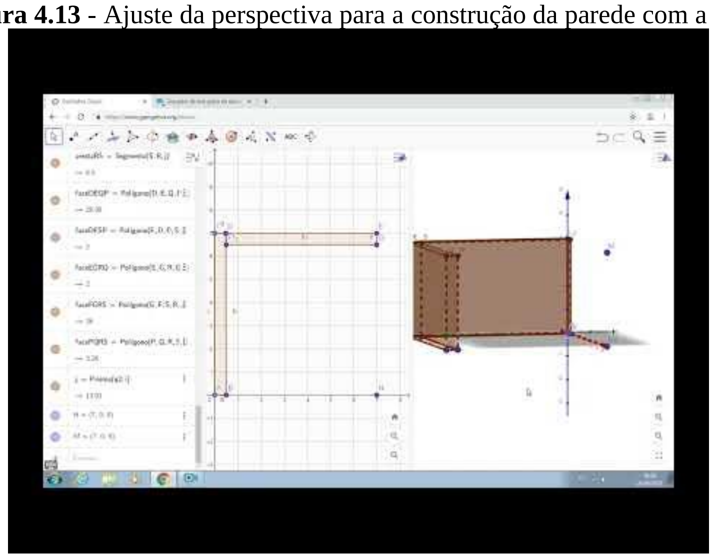
Pesquisadora:	*Mas onde vamos colocar esses pontos?*
Lucas:	*Cria dois pontos como base e os que vão fazer o buraco coloca no 3D.*
André:	*São em alturas diferentes.*

A vista frontal da parede foi apresentada para que os alunos reconhecessem o formato que queríamos construir. Seguindo a sugestão de *Diego* para começar construindo pontos, *Lucas* percebeu que nem todos os pontos deveriam ser construídos no plano, possivelmente levando em conta os testes que realizou quando tentou construir essa parede utilizando outra estratégia, anteriormente (Figura 4.11). *André* identificou que, quando o ponto não está construído no plano, a altura é modificada.

Nesse caso, para construir os pontos que representam os vértices do polígono no espaço, fica mais difícil plotá-los diretamente na janela 3D, de modo que fiquem posicionados exatamente no lugar desejado. Assim, foi indicado que as coordenadas dos pontos deveriam ser digitadas na caixa de entrada do GeoGebra. Nesse momento, os alunos tiveram a oportunidade de explorar outros modos de representar um ponto, trabalhando com pares ordenados pertencentes à Geometria Analítica. Os primeiros pontos foram criados passo a passo com os alunos para exemplificar o processo, e o restante foi deixado para construírem por si mesmos.

Com base nisso, a primeira ação realizada pela dupla *André e Gustavo* foi *rotacionar* a construção para ajustar a *perspectiva* da construção da casa, posicionando-a na lateral (Figura 4.13), de modo que conseguissem visualizar melhor a posição em que pretendiam construir os pontos para a porta: essa estratégia facilita o *julgamento espacial*.

Figura 4.13 - Ajuste da perspectiva para a construção da parede com a porta

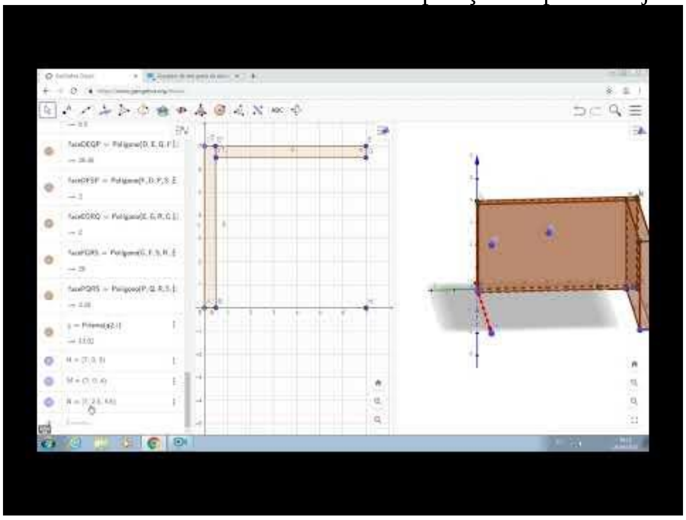


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Quando começaram a digitar as coordenadas dos pontos, os alunos estabeleceram relação entre a representação da janela de álgebra e da janela 3D, pois antes mesmo de clicar *enter* para criar o ponto, os alunos identificaram que sua localização não ficou no lugar esperado e modificaram as coordenadas (Figura 4.14).

Após criar o primeiro ponto, os alunos logo *rotacionaram* a janela 3D para conferir a posição do ponto em diferentes *perspectivas* (Figura 4.14), perceberam que seria necessário modificar a posição do ponto, e fizeram isso alterando as coordenadas na janela de álgebra (Figura 4.14).

Figura 4.14 - Identificando e modificando a posição do ponto na janela 3D



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nesse momento, os alunos copiaram as coordenadas do ponto de um colega ao lado, mas possivelmente, ao analisar o local em que foi posicionado o ponto, *Luís Gustavo* chegou a uma conclusão: *ah, x é a vermelha, y é a verde e z é a azul*, referindo-se à cor representativa dos eixos. A relação que estabeleceu entre os eixos e as coordenadas é outro indicativo da associação com a Geometria Analítica nas investigações sobre o ponto pertencente ao espaço tridimensional. Essa observação auxiliou a perceber o padrão entre as coordenadas dos pontos, e ele explica o que entendeu para seu colega *André*, como pode ser lido no excerto a seguir.

Gustavo:	*A vermelha é a que está no 7, então a outra é a verde.*
André:	*Eu vou tentar colocar o 2.*
Gustavo:	*Ah, eu entendi. Se a gente colocar 4.5, vai ficar em cima daquela, e tem que colocar mais um.*
André:	*Não entendi.*
Gustavo:	*Aqui você copia da qual você quer colocar o ponto em cima, só muda a altura.*
André:	*Ah, o último é a altura. Agora entendi.*

Gustavo identificou que, quando queria construir um ponto que ficasse posicionado na mesma *linha* que outro ponto, mudando somente a altura, as duas primeiras coordenadas poderiam ser repetidas, otimizando o processo de criação dos pontos (Figura 4.15).

Figura 4.15 - Sequência de pontos da porta

●	H = (7, 0, 0)
●	M = (7, 0, 4)
●	N = (7, 2.5, 0)
●	O = (7, 4.5, 0)
●	T = (7, 4.5, 3)
●	U = (7, 2.5, 3)

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A relação estabelecida entre a representação algébrica e gráfica dos pontos foi uma etapa importante para o aprimoramento do *julgamento espacial* no ambiente do GeoGebra, de modo que a inserção dos demais pontos ocorreu sem grandes dificuldades. Depois da inserção de cada ponto, *Gustavo* e *André* apoiaram-se na *rotação* da janela 3D para conferir a posição ocupada.

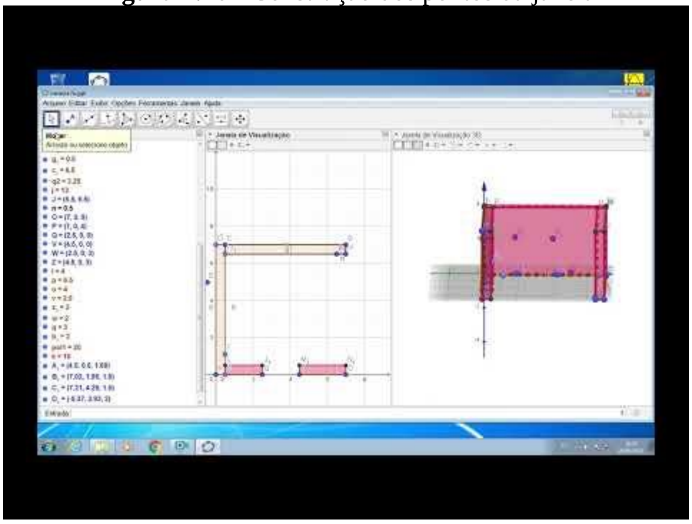
De modo geral, quando construímos ou manipulamos objetos geométricos na janela 3D do GeoGebra, os movimentos de *rotação*, a escolha da *perspectiva* mais adequada e o *julgamento espacial* tanto são importantes quanto são necessários para efetivar a construção e para compreender como ela está ocorrendo.

4.4.4 4ª etapa: Construção da Parede com a Janela

Os movimentos realizados durante a construção por boa parte dos alunos parecem intuitivos e até mesmo óbvios. Entretanto, nem todos pensaram ou sentiram a necessidade de *rotacionar*, alterar a *perspectiva* de visualização do objeto ou aplicar o *zoom*, por exemplo. *Maria* não fez alterações relevantes na posição da casa e apresentou grande dificuldade no processo de construção.

Ao construir a última parede da casa, *Maria* decidiu plotar os pontos diretamente na janela 3D. Já havia dois pontos que foram criados em momento anterior, então ela criou outros dois e tentou construir um polígono unindo esses pontos para formar uma janela. Entretanto, depois que *Maria* iniciou a plotagem dos pontos, realizando várias tentativas, a aluna não movimentou a construção nenhuma vez, e na *perspectiva* em que ela observava a casa, supôs que a construção estava correta (Figura 4.16). Então, quando ela decidiu movimentar a construção, percebeu que os pontos foram criados para fora do espaço em que a casa estava representada, e precisou recomeçar (Figura 4.16).

Figura 4.16 - Construção dos pontos da janela



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nesse caso, apesar de *Maria* ter a *construção mental* do objeto que pretendia construir, a falta dos movimentos de *rotação* ou mudança de *perspectiva* após cada etapa da construção prejudicou a aluna, pois as estratégias utilizadas para dispor os pontos poderiam ter sido corrigidas antes, se manipulasse a construção. Além disso, ela não relacionou as representações do ponto nas diferentes janelas do GeoGebra. Quando deslocava os pontos fazendo manipulações na janela 3D, não se atentava que os valores de suas coordenadas eram alterados na janela de álgebra, que seria um outro modo de perceber que o ponto não estava ocupando uma posição adequada.

Caroline e *Paulo* encontraram um problema semelhante com a plotagem de pontos na janela 3D, como pode ser lido no excerto a seguir.

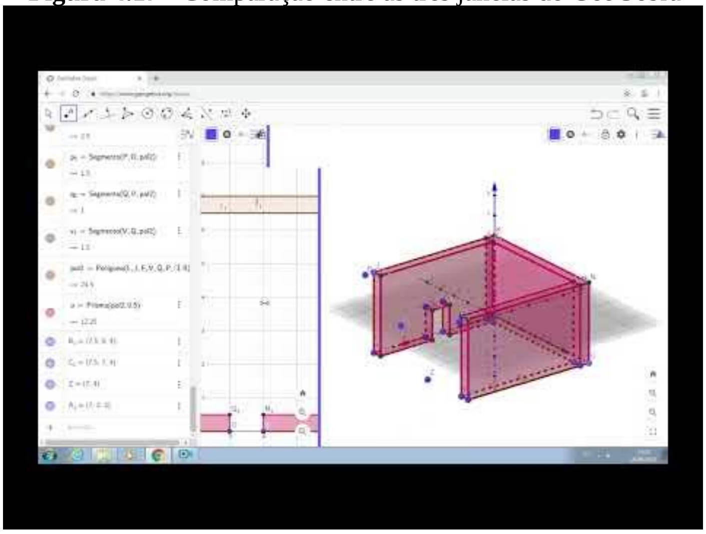
Caroline:	*Professora, não estou conseguindo fazer a janela, ele* [o ponto] *gruda no chão* [no plano].
Pesquisadora:	*Como assim?*
Caroline:	*Quando a gente vai fazer o ponto aqui* [na janela 3D], *ele gruda na outra parede, ou quando coloca um ângulo bom, ele gruda no chão.*
Pesquisadora:	*E como a gente faz pra tirar um ponto do chão?*
Paulo:	*Isso que a gente quer saber.*
Pesquisadora:	*O que a gente pode mudar nas coordenadas para tirar ele do chão?*
Paulo:	*O z vai pra cima e pra baixo.*
Pesquisadora:	*Exatamente: quando você muda a coordenada z, você consegue tirar ele do chão e subir um pouco. Por isso que nesse caso é melhor digitar as coordenadas na caixa de entrada, assim já coloca um ponto com altura.*

Ao contrário do que fez *Maria*, a fala de *Caroline* evidencia que ela realizou movimentos de *rotação* e mudou a *perspectiva* da casa na janela 3D, pois afirmou ter deixado em *um ângulo bom,* mas ainda encontrava dificuldades para criar os pontos na posição desejada.

Depois de criar o ponto e verificar que é necessário mudar a posição ocupada, é possível deslocá-lo para a direita, esquerda, para cima ou para baixo, como responde *Paulo* sobre a coordenada z do ponto, até que se consiga a posição almejada. Outra opção seria alterar as coordenadas diretamente na janela de álgebra, mas para isso, é preciso identificar os valores a serem digitados, estabelecendo uma relação entre as diferentes janelas de visualização. Nessas duas possibilidades de alteração, o *julgamento espacial* entra em ação.

Ao construir a última parede da casa, *Ana* comparou três janelas do GeoGebra; de álgebra, 2D e 3D. A comparação foi associada ao movimento de *rotação* da janela 3D, e foi importante para que ela conseguisse posicionar os pontos no lugar desejado (Figura 4.17).

Figura 4.17 - Comparação entre as três janelas do GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

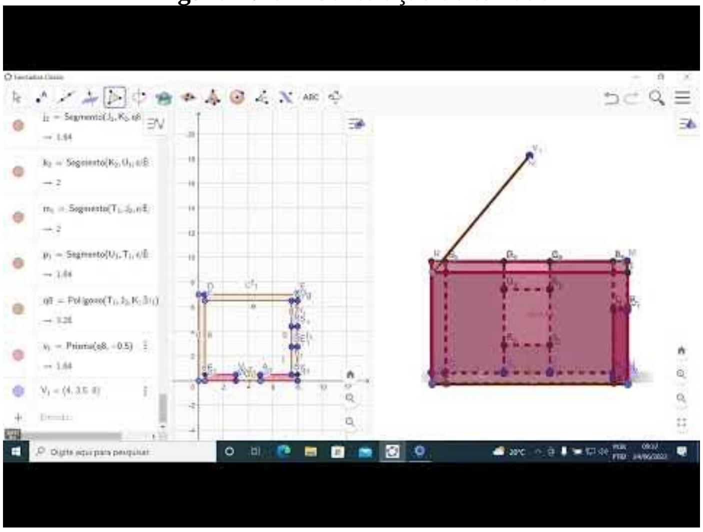
Ana reconheceu que, quando o ponto é criado na janela 2D, possui somente as coordenadas *x* e *y*, e para que seja deslocado do plano, é necessário acrescentar um valor para a terceira coordenada, *z*, que ela realizou utilizando a janela de álgebra. Depois disso, a representação deixa de aparecer na janela 2D e passa a aparecer na janela 3D, na qual *rotacionou* e mudou a *perspectiva* para prosseguir com as alterações.

No diálogo entre as duplas, foi possível identificar que, no decorrer das etapas de construção dessa última parede da casa, a relevância dos movimentos foi notada por eles. *Gustavo*, em conversa com seu colega de dupla, *André*, pediu, depois que criaram pontos para a janela da casa: *olhe de outro jeito pra ver, que às vezes tá certo, mas você olha de outro jeito e não tá*. Nesse trecho, *Gustavo* sugere a mudança de *perspectiva* para identificar se construíram os pontos no lugar correto. Já a dupla *Diego* e *Eduardo* precisava encontrar uma maneira de ligar os pontos que formavam a janela da casa sem preencher a parte interna. Então *Diego* indicou: *vá ali em mover e deixe o ângulo reto.* Nesse caso, a *perspectiva* adequada auxiliou no processo.

4.4.5 5ª etapa: Construção do telhado e finalizações

Com o decorrer das etapas da construção, os alunos aprimoraram as estratégias utilizadas e passaram a cometer menos equívocos, ou quando cometiam, conseguiam resolvê-los rapidamente. *Lucas*, ao construir o telhado da casa, colocou um ponto deslocado do lugar que deveria, devido à *perspectiva* assumida no momento, mas quando *rotacionou* a construção e percebeu o que ocorreu, soube como resolver o problema, afirmando: *eita, o número tem que ser zero* (Figura 4.18). Assim, realizou a mudança necessária e prosseguiu com a construção do telhado.

Figura 4.18 – Construção do telhado



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Depois que a última parte da casa foi construída, os alunos foram instruídos a programar os movimentos da porta, da janela e do telhado, conforme mostrado no CA finalizado (Figura 4.3). Na sequência, tiveram a possibilidade de personalizar o CA, modificando as cores. Nem todos os alunos conseguiram finalizar.

Após a construção, foi entregue uma folha para que os alunos dessem um feedback sobre os encontros, indicando *se gostaram de trabalhar com o GeoGebra ou se preferiam utilizar o caderno nas aulas de matemática*. Algumas respostas podem ser lidas a seguir.

Aluno 01:	*No GeoGebra é melhor de ver por que dá para ver os lados e as formas.*
Aluno 02:	*No GeoGebra dá para ver de 6 ângulos diferentes [...] e olhar forma por forma.*
Aluno 03:	*Eu prefiro no papel, porque no GeoGebra são muitas linhas e pontos e eu me confundo (minha opinião).*

A maioria indicou a preferência pelo software, com exceção do *Aluno 03.* Além de apresentar uma afirmativa ou negativa sobre a utilização do software, as respostas fornecidas destacaram ações que remetem aos movimentos.

4.5 Considerações Finais

A utilização de movimentos relacionados às HE foi identificada nas ações dos alunos sobre o GeoGebra no momento de construir o CA proposto, e trouxe contribuições para esse processo.

O movimento de rotação foi identificado em quase todas as etapas da construção, e esteve relacionado principalmente às HE de *rotação mental* e *perspectiva*. Nos momentos em que os alunos utilizaram esse movimento, conseguiram identificar erros na construção e corrigi-los, conferir e testar suas estratégias sobre o que informaram ao software, comparando com a *construção mental* que fizeram do objeto. A partir da mudança de *perspectiva* proporcionada pelo movimento de rotação, os alunos puderam escolher a posição mais adequada para construir um objeto ou, depois de construir, também utilizaram a rotação para identificar a posição real em que o objeto foi construído.

A ferramenta *zoom* do GeoGebra possibilitou os movimentos de ampliar e reduzir, também identificados como um tipo de mudança de *perspectiva* e que se associa ao *julgamento espacial*, uma vez que, ao ampliar ou diminuir a escala do plano cartesiano, torna possível perceber características dos objetos que antes eram inacessíveis, assim como auxilia na determinação de tamanho, posição e distância entre objetos.

Para ajustar a posição dos vértices dos objetos geométricos, foi utilizado o movimento de reposicionar sobre a representação gráfica dos pontos nas janelas de visualização 2D e 3D. Esse movimento também esteve relacionado ao *julgamento espacial* dos alunos pelo alinhamento e precisão na localização dos objetos.

A janela 3D do GeoGebra foi o ambiente que possibilitou a utilização de mais movimentos, considerando as características desse ambiente; ao contrário da janela 2D, em que o único movimento aplicado foi com a ferramenta *zoom.* Em várias etapas, o mesmo objeto foi comparado pelos alunos nas diferentes janelas do GeoGebra. Isso também auxiliou na construção, pois as modificações no objeto poderiam ser feitas considerando sua representação plana, espacial ou algébrica, dependendo de qual o aluno considerasse mais viável para resolver a situação.

Portanto, os movimentos executados a partir de ferramentas do GeoGebra e seu ambiente dinâmico auxiliaram na tomada de decisão dos alunos durante o processo de construção do CA *Casa*, percebendo se era possível passar para a próxima etapa ou se precisavam realizar alterações.

Além de auxiliar no processo de construção, os movimentos realizados foram importantes para a exploração de propriedades conceituais e das representações dos objetos geométricos envolvidos, especialmente os tridimensionais, nos quais não é possível visualizar todos os lados sem movimentar. Desse modo, quando ocorria a comparação de objetos geométricos nas diferentes janelas do GeoGebra, era possível o reconhecimento das características que os definem e que os diferenciam.

4.6 Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. 2018

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895

MACHADO, E.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. **Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets.** 1 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 2019. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf.

NOTARE, M.; BASSO, M. V. A. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 16, n. 2, 2016. DOI: 10.22456/1679-1916.70683

TVERSKY, B. **Mind in Motion:** How Action Shapes Thought. Basic Books, New York, 2019.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscamos responder à questão: *Como ocorre a diferenciação entre objetos da Geometria Plana e Espacial durante a construção de Cenários Animados no GeoGebra?* Para isso, estabelecemos objetivos específicos ao longo dos capítulos, que nos ajudaram a responder ao problema geral.

Os caminhos percorridos ao longo da pesquisa envolveram compreender nosso objeto de estudo, que são os CAs, e de que forma a Matemática pode ser trabalhada e discutida com alunos da Educação Básica durante seu processo de construção no GeoGebra. Também foi importante estudar aspectos conceituais e do ensino da Geometria Plana e da Geometria Espacial para o planejamento dos CAs e das intervenções com os alunos. Ainda houve o estudo sobre o referencial teórico, com base em Tversky (2019), que norteou as análises da pesquisa.

A pesquisa foi organizada no formato de dissertação *multipaper,* composta por uma introdução estendida e três artigos científicos, ao invés de um único texto monográfico. Esse formato trouxe desafios no momento da elaboração, um deles sobre sintetizar e distribuir o referencial teórico ao longo dos artigos. Por envolver muitos termos e categorias até então desconhecidas por nós, e que não possuem uma definição elementar, foi necessário um estudo aprofundado sobre a teoria para escrever de forma concisa os principais pontos que o leitor deveria compreender. Por isso, nosso referencial teórico começou a ser elaborado no artigo 02 e foi estendido para o artigo 03, nos quais aparecem informações diferentes, ao mesmo tempo em que outras se repetem, porque a leitura dos dois artigos pode ser feita separadamente.

Além disso, em artigos científicos, dispomos de pouco espaço para descrever detalhadamente a seção metodológica, e por isso relatamos na introdução todo o contexto, a trajetória de planejamento e das intervenções com os alunos. No artigo 03, que envolveu diretamente os dados produzidos nas intervenções, reforçamos as informações relevantes para a compreensão do trabalho.

O artigo 01 é carregado teoricamente sobre a Geometria, levando em conta estudos sobre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, que foram essenciais para compreender aspectos voltados à organização curricular, o contexto histórico, o ensino e sua abordagem em sala de aula, além de nossas concepções e inferências acerca do que foi estudado.

Na BNCC, identificamos que a Geometria Plana e a Geometria Espacial estão organizadas em blocos separados, e que as habilidades não preveem articulações diretas entre esses conteúdos, que acabam sendo estudados de forma independente. Além disso, conforme Machado (2015), os objetos geométricos se apresentam de maneira estática nos livros didáticos, impossibilitando realizar alterações nas figuras, além de envolver exemplos de representações com características particulares que levam os alunos a confundir características da representação com características do próprio objeto.

Entretanto, a origem histórica da Geometria mostra que os conhecimentos sobre a Geometria Plana e a Geometria Espacial sempre foram aplicados de forma interligada, e que esses objetos matemáticos possuem relação de dependência entre si. Para que isso fique evidente, defendemos que a Geometria Espacial deve ser trabalhada de modo associado à Geometria Plana, perspectiva que assumimos durante o planejamento e nas intervenções da pesquisa.

Nesse sentido, no artigo 01, *discutimos o potencial do GeoGebra para auxiliar na identificação e diferenciação de propriedades conceituais e figurais de objetos geométricos planos e espaciais* para contrapor com as abordagens identificadas em nossas leituras, que podem causar dificuldades na compreensão dos objetos geométricos. Para isso, levamos em conta a articulação entre as janelas de visualização 2D e 3D, que permite trabalhar com objetos planos e espaciais simultaneamente; e as ferramentas do software, que permitem criar diferentes exemplos de objetos geométricos, explorar e manipular as características das representações construídas.

Identificamos, também, contribuições da dinamicidade do GeoGebra a partir do movimento, que é um dos elementos envolvidos em nosso quadro teórico, discutido nos artigos 02 e 03. As movimentações realizadas sobre os objetos no GeoGebra são importantes para evidenciar diferenças entre características dos objetos geométricos planos e espaciais, especialmente para os espaciais, que podem ser rotacionados e vistos em diferentes posições, evidenciando suas múltiplas faces e características ocultas.

Demonstramos tais potencialidades quando discutimos alternativas para a construção do CA *Cubo na esteira,* em que utilizamos desses e outros recursos do software GeoGebra, oportunizando discussões matemáticas sobre os objetos geométricos envolvidos.

No artigo 02, *discutimos o potencial da construção de Cenários Animados no GeoGebra no/para o reconhecimento de objetos geométricos planos e espaciais, articulado com os movimentos associados ao pensamento espacial.* Para isso, apresentamos os principais elementos teóricos que norteiam as análises da pesquisa, embasados em Tverksy (2019), também descrevemos características importantes que definem os CAs, que são nosso objeto de estudo.

Compreender a relação entre os movimentos, o pensamento espacial e as habilidades espaciais configuram uma tarefa complexa, especialmente porque a base teórica analisada é da área da Psicologia e da Neurociência, e por isso envolve termos e linguagem técnica.

O desafio, portanto, foi associar os elementos dessa teoria com nossa área de pesquisa, a Educação Matemática, que investiga o ensino e a aprendizagem da Matemática. Desse modo, não é a finalidade de uma pesquisa nessa área afirmar ou inferir sobre o desenvolvimento de um pensamento ou o desenvolvimento de uma habilidade em um aluno, pois se trata de algo interno ao sujeito. Entretanto, podemos investigar a relação entre elementos de outras áreas com ações realizadas pelos alunos durante uma aula, por exemplo. Nesta pesquisa, nossa concentração foi na utilização dos movimentos, que são discutidos por Tversky (2019), no processo de construção de CAs, que envolve diretamente elementos matemáticos.

Tversky (2019) menciona que tarefas cotidianas e/ou escolares que envolvam movimento associado ao pensamento espacial podem trazer benefícios para o ensino, a aprendizagem e o desempenho de tarefas em múltiplas áreas de nossa vida, o que também nos permitiu estabelecer relação com a área da Matemática, no campo da Geometria.

Desse modo, conseguimos identificar que alguns dos movimentos mentais relacionados às HE, como *girar, mover, ampliar e reduzir*, podem ser realizados no GeoGebra sobre objetos matemáticos construídos. Esses movimentos são utilizados durante a construção de CAs no GeoGebra, especialmente quando o conteúdo matemático envolvido é a Geometria Espacial. Assim, constatamos a relação entre os movimentos associados ao pensamento espacial com a Matemática, ao trabalhar com a construção de CAs no GeoGebra; neste caso, com o CA *Casa*, que envolve objetos geométricos planos e espaciais.

Ao analisar nossas estratégias para construir esse CA, conseguimos discutir, no artigo 02, aspectos conceituais e das representações dos objetos geométricos planos e espaciais que compõem a casa, ao mesmo tempo que relacionamos o processo da construção desse CA com ações e movimentos associados às HE. Com isso, percebemos que, para reconhecer e diferenciar características entre os objetos geométricos planos e espaciais, no contexto desse CA, a utilização de movimentos foi necessária para efetivar essas comparações. Essa constatação reforça um elemento discutido no artigo 01, que é fundamental observar um objeto tridimensional por várias posições e ângulos para entender melhor suas características e diferenciá-las de outros objetos (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019). Isso permite romper com a abordagem estática com que a Geometria é trabalhada em livros didáticos, atribuindo movimento aos objetos geométricos.

No artigo 03, analisamos o mesmo CA discutido no artigo 02, mas nesse caso, consideramos as ações utilizadas por alunos de uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, ao construir a casa. Nesse sentido, buscamos *investigar como e quais movimentos associados às habilidades espaciais foram utilizados durante a construção do cenário animado no GeoGebra.*

Durante o período de planejamento e das *intervenções* com os alunos, consideramos que estabelecer a parceria com outra pesquisadora do mestrado e com os participantes do projeto do USF foi uma excelente alternativa. Assim, destacamos que, entre as características da metodologia de pesquisa DBR que foi adotada, a *colaboração* foi uma das que mais se destacou.

Com a formação das equipes para as intervenções, tivemos a possibilidade de dividir a turma em grupos menores, de modo que os ambientes fossem controlados de melhor forma e que os alunos recebessem orientações, quando necessário. Assim, tarefas técnicas puderam ser divididas entre os assistentes, e a pesquisadora pôde se concentrar na condução das discussões matemáticas. Essas condições de trabalho favoreceram a produção dos dados para a pesquisa e os resultados obtidos, que possivelmente não seriam os mesmos, se a pesquisadora precisasse assumir a turma de alunos inteira sozinha.

Apesar disso, ressaltamos as dificuldades enfrentadas nesse período de intervenções, em relação à infraestrutura disponível. Não tínhamos computadores para todos os alunos, foi necessário emprestar de outros departamentos da universidade, e até mesmo utilizar notebooks pessoais para suprir a demanda. Do mesmo modo, não tivemos a disposição microfones em quantidade suficiente para captar o áudio de todos os computadores durante os encontros, prejudicando a coleta de dados.

Desse modo, a opção pela coleta dos dados em diversos formatos foi essencial, pois como muitas gravações de tela ficaram sem áudio, em alguns casos, consideramos o áudio de outras gravações, que abrangiam a sala inteira, para detectar conversas entre os alunos sobre a construção, enquanto em outros casos, analisar as ações dos alunos sobre o software, mesmo sem áudio, foi suficiente. As gravações das telas dos computadores foram o principal recurso utilizado para acessar as produções dos alunos.

Além disso, as condições dos equipamentos atrasaram o andamento dos encontros, especialmente quando os computadores reiniciavam e perdia-se o progresso da construção do aluno, bem como a gravação do seu trabalho, e era necessário recomeçar a construção. Também, porque não era possível instalar aplicativos nos computadores devido à restauração de sistema a que estavam programados. Assim, foi preciso utilizar versões online de aplicativos, o que exigia o acesso à internet e/ou acessar versões já instaladas na máquina, mas que dificultaram algumas etapas da construção.

Mesmo nessa situação, não medimos esforços para desempenhar um trabalho de qualidade para com os alunos participantes. Ocorreram encontros semanais com a equipe que trabalhou nas intervenções, em que elaboramos um planejamento meticuloso, pensando em cada etapa das construções dos CAs e das discussões matemáticas, que passaram por ajustes e correções diversas vezes, buscando o melhor resultado para a aprendizagem dos alunos. Também gravamos vídeos tutoriais e escrevemos roteiros, pensando na preparação dos membros da equipe.

Posteriormente, ao analisar as etapas da construção realizadas pelos alunos, concebemos que os movimentos possibilitados pelo GeoGebra tiveram grande influência no processo de construção, quando os alunos buscaram validar suas estratégias, corrigir erros e identificar a posição ideal para objetos geométricos que iriam compor partes da casa. Para isso, utilizaram movimentos, como *mover, rotacionar, reposicionar, ampliar* e *reduzir*, que estão associados às HE.

Além disso, as falas e ações dos alunos sobre a construção oportunizaram identificar momentos em que exploraram propriedades dos objetos geométricos planos e espaciais, em relação a sua componente conceitual e figural, de modo que os movimentos e os recursos do software contribuíram para compreender essas características.

As manifestações dos alunos de que é possível construir um objeto na janela 2D e realizar alterações nele em outra janela, seja a 3D ou a de álgebra, revelam a compreensão de que estão manipulando diferentes representações do mesmo objeto, pois identificaram que alterando uma representação, as outras também se alteram. Em diversos momentos da construção, os alunos se apoiaram nessas comparações entre os objetos nas diferentes janelas.

A relação do CA com o cotidiano contribuiu para identificar os objetos geométricos que melhor representam as partes da casa, quando comparam suas características. Nesse caso, resgatamos as experiências e formas conhecidas do espaço para o saber escolar (LIMA; ALMEIDA, 2015).

Apesar de, em um primeiro momento, os alunos mencionarem que a parede da casa era um retângulo, depois de construí-lo, perceberam que essa representação não era suficiente para constituir a parede, pois faltava uma das dimensões. Nesse caso, movimentar o objeto foi importante para validar as concepções dos alunos, que levaram em conta seus conhecimentos do mundo físico. A partir disso, compreenderam que os objetos planos possuem características diferentes dos objetos espaciais e conseguiram diferenciá-los, considerando as suas dimensões como principal critério.

Quando a primeira parede foi finalizada com a construção de um prisma de base retangular, os alunos verificaram que a janela 2D não permitiu visualizar a terceira dimensão do objeto geométrico. Desse modo, reconheceram que a representação de objetos tridimensionais só pode ser completamente visualizada graficamente no ambiente 3D do GeoGebra. Nesse sentido, também concluíram que os objetos 3D, dependendo da perspectiva que os observamos, precisam ser movimentados para que seja possível identificar todas as suas partes.

A manipulação de pontos, também nas diferentes janelas, oportunizou aos alunos compreender a estrutura do ponto; ou seja, o que cada coordenada representa para a localização na representação gráfica do plano ou do espaço. A partir disso, identificamos que a Geometria analítica também esteve interligada com os objetos geométricos planos e espaciais durante a construção do CA *Casa* pelos alunos. Nessa situação, perceberam que pontos com a mesma coordenada (representação algébrica) são representados no mesmo lugar (representação gráfica). Em especial, a identificação de que a terceira coordenada é a que define a altura do objeto auxiliou nas etapas da construção. O GeoGebra também contribuiu para relacionar as coordenadas, pela cor representativa de cada eixo.

Antes de construir o CA *Casa*, os alunos construíram outros dois CAs. Com isso, passaram por etapas de desenvolvimento em relação ao conteúdo, a manipulação do software e o processo de construção de CAs. Essa evolução ocorreu principalmente durante o processo de construção da casa, que envolveu um número maior e diferentes elementos geométricos do que os outros CAs. Nesse sentido, percebemos que os alunos passaram a utilizar mais a linguagem geométrica, empregando termos como 2D, 3D, altura, dimensões, e outros, cujos significados foram discutidos nos encontros. Além disso, os alunos melhoraram estratégias de construção, passaram a cometer menos erros e/ou sabiam como corrigi-los sem dificuldade. Desse modo, consideramos que essas ações também remetem a um avanço na compreensão dos objetos geométricos.

Portanto, os dados produzidos pelos alunos trouxeram elementos importantes para analisar a compreensão de características dos objetos geométricos planos e espaciais na construção dos CAs. Contudo destacamos, aqui, que outros dados poderiam ter sido acessados e discutidos nos resultados desta pesquisa, se a quantidade e as condições dos equipamentos fossem melhoradas. A ausência de investimentos nas escolas em equipamentos, bem como de profissionais para mantê-los atualizados, acarreta um cenário que dificulta o desenvolvimento de pesquisas na área da educação, também de práticas de ensino que utilizam recursos tecnológicos digitais, como a construção de CAs no GeoGebra.

Com a realização desta pesquisa, conseguimos destacar o potencial da construção de CAs no GeoGebra enquanto um tipo de prática educacional promissora para o ensino de Geometria, que permitiu discutir características conceituais e figurais dos objetos geométricos planos e espaciais. Os alunos compreenderam diferenças e aproximações entre tais objetos a partir da construção do CA *Casa*, em que a utilização de movimentos da janela de visualização e/ou sobre os objetos geométricos teve grande contribuição no processo. Destacamos, também, os CAs como um tipo de construção que possibilita movimentos relacionados às HE, e portanto, pode estimular o pensamento espacial.

Estudar o processo de construção de CAs já desenvolvidos, e principalmente ao planejar e construir novos CAs para esta pesquisa, permitiu ampliar e detalhar as características necessárias para definir uma construção enquanto CA, que foram descritas principalmente no artigo 02.

Segundo Bueno e Basniak (2020), os CAs são construções realizadas no software GeoGebra envolvendo elementos matemáticos relacionados a ferramentas que atribuem movimento à construção, constituindo, ao final, uma cena animada. Além disso, identificamos que: para formar a cena, podem ser inseridos objetos reais, do cotidiano ou personagens imaginários, que são criados no software com elementos matemáticos ou a partir da inserção de imagens que os representem; o movimento executado ao final deve ser (i) desprovido da ação repetida do sujeito e (ii) precisa permanecer contínuo até que o objetivo da cena seja concluído; em alguns casos, o movimento prossegue como se a cena fosse repetidas vezes; é a partir desse movimento que frequentemente o contexto do CA se torna evidente.

Portanto, a utilização do GeoGebra atende as necessidades da proposta de construção dos CAs, seja do ponto de vista da criação, do uso de movimentos ou das discussões matemáticas. Especialmente por se tratar de um ambiente dinâmico, possuir ferramentas que permitem criar elementos com rigor matemático, possibilitar transformações e manipulações sobre os elementos construídos e articular janelas que permitem trabalhar com diferentes representações do mesmo objeto simultaneamente é que o software atende essas necessidades.

A pesquisa também oportunizou criar CAs em um ambiente do GeoGebra que ainda era pouco explorado para essas construções: a janela de visualização 3D. Ela foi fundamental para trabalhar com objetos geométricos espaciais e comparar e diferenciar suas características com objetos planos, conforme o nosso objetivo. É possível construir objetos tridimensionais na janela 2D do GeoGebra, mas a construção resultante seria semelhante às representações que temos em livros didáticos, problematizadas no artigo 01, que necessitam de diferentes projeções para representar o objeto, e que suprimem e distorcem características importantes de sua representação. Nesse sentido, destacamos a importância da janela de visualização 3D neste trabalho, que possibilita outras visões para o objeto a partir da sua construção e manipulação.

Durante as intervenções, identificamos dificuldades com a manipulação do software por parte de alguns alunos, mas que isso não os prejudicou: o próprio ambiente do GeoGebra, especialmente quando os alunos empregaram movimento à construção, permitiu que equívocos fossem identificados e corrigidos, conforme pode ser lido em episódios no artigo 03.

Mesmo os alunos que não conseguiram finalizar a construção tiveram a oportunidade de investigar as características dos objetos geométricos planos e espaciais, pois eram incentivados a responder questionamentos, comparar objetos apresentados em uma tela projetada e realizar testes em suas próprias construções. Novamente, destacamos que o movimento sobre os objetos geométricos do CA auxiliou a responder às situações propostas, o que seria mais difícil se estivéssemos estudando tais objetos a partir de representações estáticas, como identificado no artigo 01.

Outras pesquisas utilizando a construção de CAs podem ampliar os resultados deste trabalho, diversificando o conteúdo envolvido e os sujeitos participantes. Pretendemos, ainda, avançar na descrição dos elementos que caracterizam uma construção enquanto CA, pois essa definição continua em processo de desenvolvimento, assim como suas contribuições para o ensino e para a aprendizagem de Matemática.

Igualmente, o referencial teórico de Tversky (2019) pode ser explorado para a área de Educação em outros aspectos, pois da amplitude de ideias abordadas em seu livro, destacamos, nesta pesquisa, apenas os capítulos que tratam de algumas HE.

REFERÊNCIAS

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. O Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele e Possíveis Contribuições da Geometria Dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, n. 5, p. 69-76, 2010.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES -MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002, p. 109-187.

AMÂNCIO, R.; GAZIRE, E. O desenvolvimento do pensamento geométrico e as contribuições dos recursos didáticos no estudo dos quadriláteros. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 113-127. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/589

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. In: D'AMBRÓSIO, B. S; LOPES, C. E. (Org.) **Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática**. 1ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015, v. 1, p.347-367.

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 43-58, 2020. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58

BASNIAK, M. I.; CARNEIRO, E. B. A comunicação na construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação. **REVEMAT**, v. 16, 2021. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e80940

BORTOLOSSI, H. J. Movimentos, Pensamentos e GeoGebra: alguns aspectos neurocientíficos no ensino e aprendizagem da Matemática In: BASNIAK, M. I.; RUBIO-PIZZORNO, S. (Org.) **Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco.** Editora Pimenta Cultural, São Paulo, 2020, p. 96-117.

BORUCH, I. G.; BASNIAK, M. I. Animações no GeoGebra e o Ensino de Matemática: uma experiência com alunos com altas habilidades/superdotação. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología)**, v. extra, p. 1-8, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. 2018

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Cenários animados no GeoGebra e o estudo de funções por alunos com altas habilidades/superdotação. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 4, n. 1, p. 134–154, 2021. DOI: https://doi.org/10.30612/tangram.v4i1.12629

CARVALHO, L. **Análise da Organização Didática da Geometria Espacial Métrica nos Livros Didáticos.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil, 2008.

ESTEVAM, E. J. G. **Práticas de uma Comunidade de Professores que ensinam Matemática e o Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística**. 192f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

FONSECA, M. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M.; DAYRELL, M. M. M. S. S. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed. Autêntica Editora. Belo Horizonte, 2011.

LIMA, A. F.; ALMEIDA J. J. P. Do sensível às ideias: uma proposta de ensino de geometria, dos aspectos empíricos aos dedutivos. **Revista Principia**. n. 28, p.111 – 120, 2015.

LIPINSKI; L. M.; BASNIAK, M. I. Aprendizagem Matemática Através da Construção de Cenários Animados no GeoGebra. In: II Seminário de Integração: pesquisa, extensão, cultura e inovação tecnológica (SIPEC) **Anais...** 2021, p. 78-96.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. SBEM, n. 4, p. 3-13, 1995. Disponível em: http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf

MACHADO, E. **Explorando invariantes geométricos com o GeoGebra**: uma seleção para a sala de aula. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro, Brasil, 2015.

MACHADO, E.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. **Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets.** 1 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 2019. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf.

MALFATTI, S.; ENGERS, E.; RIBAS, J.; NUNES, M.; FRANCISCO, D. LOGO 3D – Uma Ferramenta Auxiliar no Aprendizado da Geometria Espacial. **Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Brasil, 2002.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, p.23-36. 2014.

MENEGHETTI, F. K. O que é um Ensaio-Teórico? **RAC**. Curitiba. v.15, n.2, p.320-332, 2011. https://doi.org/10.1590/S1415-65552011000200010

MONZON, L. W.; BASSO, M. V. A. Prospecção de Pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2018. DOI: 10.22456/1679-1916.86031.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Learning science through computer games and simulations**. HONEY, M. A.; HILTON, M (Eds). Board on Science Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academies Press. 2011.

NOTARE, M.; BASSO, M. V. A. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 16, n. 2, 2016. DOI: 10.22456/1679-1916.70683

OBMEP. **Provas e Soluções 2012**: 1ª fase nível 1. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm Acesso em: dezembro, 2022.

PADILHA DOS SANTOS, L.; BASNIAK, M. I. Construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação como atividade Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1–20, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n3a20.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké,** v.1, n.1, p. 7-17, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822

PIROLA, N.; CARVALHO, A.; NASCIMENTO, H.; MARIANI, J.; MONGER, W. (2004). Um estudo sobre a formação do conceito de triângulo e paralelogramo em alunos do ensino fundamental: uma análise sobre os atributos definidores e exemplos e não-exemplos. **Anais do VIII ENEM**, Brasil. 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/CC13767112817.pdf

PROCÓPIO, W. **O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo**: sugestões de atividades com o uso do GeoGebra.193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ROGENSKI, M.; PEDROSO, S. **O Ensino da Geometria na Educação Básica**: realidade e possibilidades. Paraná, Brasil. 2019. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf

SANTOS, N.; ROSA, M.; SOUSA, D. Os Sólidos Geométricos na Educação Brasileira*:* Comparativo entre PCN e BNCC. **JIEEM**, v.14, n.1, p. 99-109, 2021. DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n1p99-109

SINHA, P. **Pawan Sinha em como o cérebro aprende a ver.** Palestra TED, 2009. http://bit.ly/32AGv7c

TVERSKY, B. **Mind in Motion:** How Action Shapes Thought. Basic Books, New York, 2019.

VILAÇA, M. **Investigando o processo de Gênese Instrumental de licenciandos em Matemática ao utilizarem o Geoplano durante a realização de atividades sobre quadriláteros**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. 2018.

APÊNDICES

Apêndice 01

Roteiro – Barco e Chuva

Vídeo: **Passo a passo da construção - Barco e Chuva**

Discussões e Passo a Passo:

- Mostrar o cenário animado pronto.
- Buscar a imagem do barco na internet, em formato PNG.
- Abrir uma nova janela do GeoGebra.

  - *Construir um ponto e mostrar como ele se comporta no plano e na janela de álgebra.*
  - *Alterar as coordenadas do ponto e observar o que acontece.*
  - *Mostrar a relação das coordenadas com os eixos X e Y.*
  - *Identificar os quadrantes.*
  - *Mostrar os números inteiro e racionais na reta numérica.*
  - *Para a construção do ponto utilizar a ferramenta e a caixa de entrada.*

- Inserir a imagem do barco.

  - *Mostrar que a imagem é atrelada a dois pontos e movimentá-la.*
  - *Colocar um ponto sobre o outro e mostrar que se forem coincidentes não aparece a imagem.*
  - *Reposicionar a imagem, para que os alunos identifiquem/observem o comportamento e os valores das coordenadas dos pontos (eixo X, porque é o barco).*
  - *Como precisamos que a figura tenha movimento para variar os valores das coordenadas, vamos utilizar uma ferramenta que possibilita isso.*

- Criar o controle deslizante (a) com intervalo de 0 a 5 e incremento de 0.1.

  - *Explicar os parâmetros do controle (intervalo, incremento).*
  - *Identificar que a imagem não pode ficar parada e como o movimento é horizontal em relação ao eixo X, a coordenada de x deve ser alterada para que a figura se movimente neste sentido.*
  - *Por isso, vamos substituir a coordenada de x, no ponto A, pela variável do controle deslizante.*

- Atrelar o ponto A ao controle deslizante e observar se ele está se movendo.
- Colocar para animar (movimentando o controle e com a opção animar).
- Parar a animação do controle. Mostrar diferentes formas de parar.

  - *O ponto B não está acompanhando o ponto A, por isso precisamos atrelar o controle ao ponto B também.*
  - *Antes disso, vamos definir o tamanho da imagem que queremos (em relação ao eixo x).*

- Verificar a distância do ponto A ao ponto B em relação ao eixo x, contando os quadrados do plano (unidades) ou os números na reta numérica.

  - *Mostrar que não basta modificar a coordenada do ponto B para (a, valor de y). Pois desse modo a imagem não ficará na posição desejada e/ou os pontos ficarão coincidentes e a imagem não aparece.*
  - *É preciso considerar a distância entre os pontos da imagem.*

- Definir o ponto B como (a + (tamanho da imagem em relação ao eixo x), valor de y que deve ser o mesmo atribuído ao ponto A).
- Mover ou animar o controle para verificar se a imagem se move conforme o esperado.
- Parar a animação do controle.

  - *O valor que é somado ao controle na coordenada x do ponto B pode ser alterado para verificar que o tamanho da imagem também é alterado. Testar alguns.*
  - *Discutir sobre o valor que assume a coordenada de x do ponto B (somar o valor do controle com o valor colocado, para fazer a relação entre coordenada e expressão algébrica).*
  - *O valor da coordenada de Y é constante, pois queremos que o barco ande apenas na horizontal.*
  - *Mostrar que o valor da coordenada de Y pode ser alterado se quisermos reposicionar o "nível" que o barco irá realizar o trajeto.*
  - *Para evidenciar isso, definir o ponto A como (a,2), (a,3), (a,-1) citando exemplos. E o B como (a+5, 2), (a+5, 3), (a+5, -1), etc.*

- Buscar a imagem da chuva na internet, em formato PNG.
- Inserir a imagem da chuva.
- Criar um controle deslizante (b) com intervalo -5 a 5 incremento de 0.1.

  - *Discutir porque não usamos o mesmo controle (nesse caso), pois o movimento é diferente.*
  - *Perguntar aos alunos o que deve mudar entre o movimento do barco e o da chuva (um é vertical e o outro horizontal).*
  - *Em consequência disso, a coordenada que vai variar será a mesma?*
  - *Isso pode ser observado ao reposicionar a imagem, para que os alunos identifiquem o comportamento e os valores das coordenadas dos pontos (eixo Y).*

- Posicionar a imagem no local desejado.

  - *Identificar que a imagem novamente não pode ficar parada, mas nesse caso o movimento é vertical em relação ao eixo Y, a coordenada de y deve ser alterada para que a figura se movimente neste sentido.*
  - *Por isso, vamos substituir a coordenada de y, no ponto C, pela variável (b) do controle deslizante.*

- Definir o ponto C como (valor qualquer de x, b).
- Mover ou animar o controle deslizante (b) verificando se o ponto C está se movendo.
- Parar a animação.
- Posicionar o ponto D da imagem, de acordo com o tamanho desejado.

  - *Discutir sobre o tamanho da imagem e observar a coordenada do ponto D.*

- Definir o ponto D como (valor fixo de x, b) para que a imagem não fique deformada

  - *Discutir porque nesse caso não acrescentamos unidades ao valor de b, como foi feito na imagem do barco (porque o controle deslizante varia o valor da coordenada de y, e queremos que a imagem fique "na mesma linha").*

- O valor de x pode ser alterado para verificar que o tamanho da imagem se altera.

  - *O valor da coordenada de X nesse caso é constante, pois queremos que o barco se mova apenas na vertical.*
  - *Mostrar que o valor da coordenada de X pode ser alterado se quisermos reposicionar a imagem da chuva no plano ou alterar o tamanho.*

- *Para evidenciar isso, definir o ponto C como (2,b), (4,b), (-1,b) citando exemplos. E o D como (5,b), (7,b), (10,b), etc.*

- Alterar o tipo de animação do controle deslizante (b) para decrescente, pois a chuva só vai para baixo.

  - *Também pode alterar a velocidade dos controles.*

- Se necessário, podem ser colocadas mais imagens de chuva para preencher o espaço percorrido pelo barco.
- Os pontos mais próximos de cada imagem da chuva, devem ter a mesma coordenada. Exemplo F= (3,b), C = (3,b) para que não haja espaços sem chuva.
- Os pontos das extremidades das imagens da chuva, devem ter a mesma distância dos pontos centrais, para que todas as imagens de chuva tenham o mesmo tamanho.
- Lembrando de identificar a distância entre as imagens para que não fiquem sobrepostas. E que todas estejam relacionadas ao mesmo controle deslizante para que realizem o mesmo movimento.
- Animar os controles para verificar o movimento realizado.
- Animar tudo, para verificar se os valores dos controles precisam ser alterados, para que o barco fique se movendo somente no espaço da chuva e a chuva esteja acima da imagem do barco.

  - *Discutir que conforme a construção de cada um, com imagens e tamanhos diferentes, os valores de máximo e mínimo dos controles podem ser diferentes, então cada dupla ou aluno deve estipular os valores de acordo com a sua construção, podem ir testando e adaptando, tomando como base os valores da reta numérica*

- Personalizar o cenário incluindo imagens de ondas, nuvem, céu, etc.
- Criar o botão de Iniciar e Voltar (Voltar é opcional).

  - *Discutir sobre a proposição Iniciar Animação ser uma verdade ou não.*

- Gravar a construção.

Apêndice 02

Roteiro e Discussão - Cubo na esteira

Vídeo: **Passo a passo da construção - Cubo na esteira**

Discussões e Passo a Passo:

- Apresentar o cenário animado pronto.
- Abrir uma nova janela do GeoGebra.
- Abrir a janela 3D do GeoGebra.

    - *Mostrar que a janela 3D apresenta alguns aspectos diferentes em relação a janela utilizada na última construção (um eixo a mais, novas ferramentas)*
    - *Movimentar a janela e observar como são os eixos e a malha nessa janela*
    - *Criar um ponto na janela 3D e observar que possui 3 coordenadas*
    - *Alterar as coordenadas do ponto de modo que o valor para z seja diferente de zero (movimentar a janela para visualizar que neste caso o ponto é representado do espaço e não no plano)*
    - *Aproveitar esse ponto para dar início a construção, movendo-o para a posição do ponto A ou do ponto B.*

- Criar 2 pontos na janela de visualização 3D, A=(1,1,0) e B=(1,2,0)

    - *Perguntar se os alunos sabem o que é o objeto que aparece se movendo no cenário animado pronto (cubo)*

- Selecionar a ferramenta *cubo* e clicar sobre os pontos A e B, nesta ordem

    - *Perguntar como fizemos para movimentar a construção anterior do barco e da chuva (controles deslizantes) e indicar que utilizaremos a mesma estratégia neste caso*
    - *No cenário barco e a chuva, tínhamos movimentos em relação ao eixo x e ao eixo y, e para isso utilizamos 2 controles, um para cada direção. Neste caso, vamos utilizar 3 controles deslizantes (numéricos) pois o cubo realiza movimentos no sentido dos eixos x, y e z.*

- Criar 03 controles deslizantes numéricos. Sendo que os controles a e b possuem intervalo entre -2 e 3 e o controle c possui intervalo entre -1 e 3. Todos com incremento 0.1

    - *Observar que além dos movimentos "retos" na direção dos eixos, o cubo também executa um movimento de rotação, por isso vamos criar um controle deslizante angular*
    - *Explicar a diferença entre o controle deslizante numérico e o angular*
    - *Perguntar se os alunos sabem o que é um ângulo (a medida da abertura entre duas semirretas de mesma origem).*
        - *Abrir um novo arquivo do GeoGebra para fazer algumas explorações envolvendo ângulo, os alunos devem apenas observar:*
        - *Criar dois segmentos quaisquer e criar um ângulo entre eles.*
        - *Verificar que conforme modificamos a abertura entre os segmentos, a medida do ângulo varia.*
        - *A medida dos ângulos varia entre 0° e 360º.*
        - *360º é "uma volta completa", 180º é "meia volta" e 90º é um "canto".*
        - *Os polígonos e poliedros também possuem ângulos. Como exemplo, criar um triângulo e construir um ângulo no triângulo.*

- Criar um controle deslizante angular α, com intervalo entre 0º e 90º e incremento 1

  - *Perguntar aos alunos como utilizamos o controle deslizante para atribuir movimento ao barco e a chuva (relacionando às coordenadas dos pontos)*
  - *O controle foi atrelado a coordenada que estava variando, (no barco o controle estava só no eixo x e na chuva só no eixo y) nesse caso vamos atrelar o controle em todas as coordenadas, pois o mesmo objeto realiza o movimento nos 3 sentidos*
  - *Definir/Indicar que o controle (a) estará relacionado ao eixo x; o controle (b) ao eixo y e o controle (c) ao eixo z.*

- Clicar no ponto A e alterar sua definição para (a,b,c)

  - *Mostrar que conforme movimentamos os controles, o cubo altera de tamanho. Para que o objeto se movimente por inteiro mantendo o tamanho, precisamos realizar o mesmo procedimento com o ponto B.*
  - *Como o ponto A e o ponto B estão distantes em 1 unidade, precisamos acrescentar essa diferença na coordenada do eixo y*
  - *Além disso, por se tratar de um cubo algumas características são preservadas quando movimentamos esse objeto. Por definição em um cubo todas as faces são iguais e consequentemente as arestas possuem o mesmo tamanho, então não é possível esticar ou deformar o objeto (como acontecia com o barco) pois desse modo ele deixaria de ser um cubo.*

- Clicar no ponto B e alterar sua definição para (a,b+1,c)

  - *Por mais que o cubo possua outros pontos, só precisamos alterar as coordenadas dos pontos A e B, pois o cubo está definido por estes pontos.*

  - *Para programar o movimento angular realizado pelo objeto, vamos utilizar o comando Girar*
  - *Para analisar os elementos que precisamos para utilizar nesse comando, vamos escrever no campo de entrada "girar" e selecionar a terceira opção: Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação>).*
  - *O objeto é o cubo, o ângulo é o controle deslizante que criamos, e o eixo de rotação é o "lado" em que o objeto vai girar*
  - *Para identificar em que direção queremos que o cubo gire, vamos simular o movimento que o cubo deve realizar (de acordo com o cenário animado pronto) movendo os controles deslizantes.*
  - *Primeiro vamos posicionar os controles nos pontos a=-2,b=-2 e c=3, que são os pontos em que o movimento deve iniciar (também de acordo com o cenário pronto). Com os controles nessas posições, o cubo deve estar localizado no canto superior direito da janela de visualização 3D.*

- Com a ferramenta *segmento* criar um segmento sobre uma das arestas do cubo, escolhendo o lado que queremos que o cubo gire (neste caso B e C)
- Nas propriedades do cubo, inserir o comando *Girar* na definição: Girar(definição do cubo,controle deslizante α, segmento criado no passo anterior)

  - *Mover o controle deslizante* α *para verificar se o cubo realiza o movimento*
  - *Simular o movimento de todos os controles, para verificar se os movimentos estão corretos e para identificar a sequência de controles que devem ser animados.*
  - *Agora precisamos programar os controles para que executem o movimento no momento certo e para que se movam apenas um de cada vez.*
  - *O primeiro controle que deve ser animado é o controle a. Para que ele inicie o movimento vamos criar um botão com essa função.*

- Com a ferramenta *botão,* clicar sobre a janela. Na legenda do botão escrever *Iniciar* e no código escrever a programação
  IniciarAnimação[a,true]

DefinirValor[a,-2]
IniciarAnimação[b,false]
DefinirValor[b,-2]
IniciarAnimação[c,false]
DefinirValor[c,3]
IniciarAnimação[α,false]
DefinirValor[α,0º]

- *Depois de programado, clicar no botão iniciar para verificar se o cubo está executando o movimento desejado.*
- *O botão vai animar somente o controle a, por isso as proposições para os demais controles serão falsas.*
- *Para programar os demais controles vamos inserir um código de programação nas propriedades de cada controle separadamente*
- *Ressaltar que os comandos devem estar corretos e completos para que o software execute a programação (se tiver espaços, falta de acentos nas palavras, não fechar todos os colchetes, o GeoGebra não executa a programação como esperado).*

- Alterar a velocidade dos controles deslizantes a, b, c e α para 3
- Nas propriedades do controle deslizante a, em programação escrever:
  Se[a>=2.98,IniciarAnimação[b,true]]
  Se[a>=2.98∧b==-2,IniciarAnimação[a,false]]

  - *Explicar porque deve ser um número um pouco menos do que o limite do controle deslizante*
  - *Explicar que "∧" é uma operação da lógica matemática que significa "e"*
  - *Discutir sobre a proposição "IniciarAnimação" ser uma verdade ou não*
  - *Depois de programado, clicar no botão iniciar para verificar se o cubo está executando o movimento desejado*

- Nas propriedades do controle deslizante b, em programação escrever:
  Se[b>=2.98,IniciarAnimação[α,true]]
  Se[b>=2.98∧α==0º,IniciarAnimação[b,false]]

  - *Clicar no botão iniciar para verificar se o cubo está executando o movimento desejado*

- Nas propriedades do controle deslizante α, em programação escrever:
  Se[α>=88º,IniciarAnimação[c,true]]
  Se[α>=88º∧c==3,IniciarAnimação[α,false]]

  - *Clicar no botão iniciar para verificar se o cubo está executando o movimento desejado*

- Nas propriedades do controle deslizante c, em programação escrever:
  Se[c<=-0.99,IniciarAnimação[c,false]]

  - *Clicar no botão iniciar para verificar se o cubo está executando o movimento desejado*
  - *Para construir o caminho percorrido pelo cubo, podemos movê-lo para as posições das extremidades e criar pontos com as respectivas coordenadas observando os valores na janela de álgebra.*
  - *Desabilitar a animação dos controles, caso o cubo comece a se mover quando estiver posicionados nos valores limites dos controles deslizantes, que foram programados para que isso aconteça.*

- Criar os pontos D=(-3,-2,3) e E=(-3,-1,3)

- Pedir que os alunos movam o cubo com os controles deslizantes e criem os demais pontos que delimitam o caminho

  - *Os pontos que ainda devem ser criados são: F=(3,-2,3) G=(2,-1,3) H=(3,4,3) I=(2,4,3) J=(2,4,-1) K=(3,4,-1) L=(2,5,-1)e M=(3,5,-1)*

- Com a ferramenta *segmento* ligar os pontos criados anteriormente, 2 a 2, de modo a constituir o caminho do cubo.

  - *Neste caso foram construídos segmentos ligando os pontos: D e F; F e H; H e K; K e M; M e L; L e J; J e I; I e G;G e E; E e D.*

- *(Opcional)* Com a ferramenta *botão,* clicar sobre a janela. Na legenda do botão escrever *Parar* e no código escrever a programação
  IniciarAnimação[a,false]
  DefinirValor[a,-2]
  IniciarAnimação[b,false]
  DefinirValor[b,-2]
  IniciarAnimação[c,false]
  DefinirValor[c,3]
  IniciarAnimação[α,false]
  DefinirValor[α,0º]
- Ocultar os elementos que não contribuem com o aspecto visual da construção (eixos, plano, e pontos).
- Alterar a cor e/ou formato dos objetos nas propriedades.
- Gravar a construção.

Apêndice 03

Roteiro e Discussões – Casa

Vídeo: [Passo a passo da construção - Casa]

Discussões e Passo a Passo:

- Apresentar o cenário pronto aos alunos

  - *Inicialmente mostrar o cenário em uma perspectiva lateral e perguntar aos alunos que objeto está sendo representado*
  - *Caso os alunos digam que não é possível identificar o objeto, perguntar o que podemos fazer para ver o objeto inteiro (movimentar)*

- Abrir o GeoGebra
- Abrir a janela 3D do GeoGebra

  - *Perguntar qual é o objeto que representa as paredes da casa. (se os alunos falarem quadrado ou retângulo, perguntar se as características dessas figuras são suficientes para representar a parede inteira.)*
  - *Caso ainda tenham dúvidas, perguntar quantas dimensões tem a casa. E com isso quantas dimensões devem ter os objetos que compõem a casa.*
  - *Pedir ideias para começar a construir um objeto 3D que represente a parede. Perguntar qual formato seria adequado para a base da parede (retângulo. Caso escolham outra forma, questionar como ficaria a parede se a base não fosse um retângulo)*
  - *Perguntar porque eles escolheram essa forma. Que relação o retângulo possui com o formato da parede? (é uma de suas faces. Perguntar aos alunos o que é face)*
  - *Caso necessário pode-se exibir a representação da casa na janela 2D (aparece apenas a parte de baixo da casa) e perguntar aos alunos: Se a casa é 3D, o que é a representação que aparece no 2D? (são retângulos, figuras planas, aqui confirmamos o formato da base das paredes)*
  - *Enfatizar que a parede não será um retângulo, mas o retângulo faz parte do objeto que representa a parede (características de um poliedro)*
  - *Questionar os alunos: Se o retângulo é uma forma 2D conseguimos representar no 3D? (Discutir que o espaço permite representar objetos 2D e 3D, pode consultar a folha entregue na discussão do cubo)*
  - *Definido que a base da parede será um retângulo, pensar na medida dos lados que não pode ser muito "larga", pensando no contexto da casa.*
  - *Em que locais podemos colocar pontos para formar um retângulo? Quantos pontos são necessários para formar um retângulo? Perguntar como são chamados os pontos que delimitam um polígono (vértice, pedir que os identifiquem na folha entregue na discussão do cubo, caso não recordem).*

- Com a ferramenta *ponto* criar os pontos com as seguintes coordenadas: A=(0,0,0), B=(0.5,0,0), C=(0.5,7,0) e D=(0,7,0) sobre a janela de visualização 3D.

  - *É possível reposicionar os pontos caso não estejam posicionados exatamente na coordenada desejada, observando os valores na janela de álgebra.*
  - *Aconselhar que todos utilizem as mesmas coordenadas.*

- Com a ferramenta *polígono*, construir um polígono ligando os pontos A, B, C e D formando um polígono de tamanho 7 por 0.5

  - *Como utilizamos a ferramenta polígono, perguntar o que é um polígono de acordo com as características do objeto que foi construído.*

- *Verificar que o polígono aparece nas duas janelas de visualização (2D e 3D). Posicionar os eixos da janela 3D, de modo que o polígono seja observado nas duas janelas pela mesma perspectiva. Questionar os alunos: Como verificar se o objeto da janela 3D realmente possui somente comprimento e largura? (espera-se que respondam que é preciso movimentar os eixos).*
- *Questionar se o polígono construído é suficiente para representar a parede (ainda precisa de altura para erguer a parede).*
- *Perguntar que tipo de objeto possui essa altura que precisamos (poliedro; objetos 3D; formas geométricas espaciais). Qual o nome vocês imaginam que esse objeto recebe?*

- Selecionar a ferramenta *extrusão para prisma*, clicar sobre o polígono e em seguida, na caixa de diálogo que aparece, digitar a altura para o poliedro, neste caso altura = 4 (ou -4)

  - *Caso o prisma seja representado no lado oposto ao esperado, solicitar que os alunos alterem o valor da altura de 4 para -4.*
  - *Questionar porque a representação só aparece na janela 3D.*
  - *Como podemos identificar que uma representação é 3D e a outra é 2D? (movimentando)*
  - *Questionar qual a diferença e a semelhança entre as representações que aparecem na janela 2D e 3D. Pedir que citem algumas características dos objetos que estão aparecendo*
  - *Nesse momento podemos formalizar o nome de alguns elementos dos objetos: enquanto o polígono é uma forma plana que possui vértices e arestas. O poliedro é um objeto espacial que relaciona vértices e arestas em cada uma de suas faces.*
  - *Definir que esse é um prisma de base retangular*
  - *Mesmo sendo objetos diferentes, discutir que nesse caso, as representações são resultantes da mesma construção e não são separadas. (pode-se mover um dos vértices e verificar que a mudança ocorre nos objetos das duas janelas)*
  - *As partes da parede estão sendo representadas no 2D, são somente as partes que pertencem ao plano xy. Perguntar qual é a face que está projetada no 2D (para identificar isso precisam girar o objeto)*
  - *Questionar qual deve ser o formato da base para a próxima parede (verificar se os alunos compreenderam que todas as paredes devem possuir base retangular)*
  - *Questionar qual objeto geométrico utilizamos para representar a segunda parede (verificar se os alunos compreenderam que o poliedro é o objeto mais adequado por apresentar altura)*

- Para construir a próxima parede, vamos inserir os pontos digitando as coordenadas na caixa de entrada.
- Vamos utilizar o ponto C=(0.5,7,0) construído anteriormente, para a outra parede

  - *Como as coordenadas dos pontos devem ser os vértices do polígono (retângulo) da base da parede, é preciso pensar nas coordenadas que representem esse formato, antes de digitá-las no software. Perguntar para os alunos algumas das coordenadas.*
  - *A malha pode auxiliar na seleção dos pontos.(vermelho é o x; verde é o y; azul é o z)*
  - *Orientar que todas as paredes tenham o mesmo tamanho (comprimento = 7).*

- Digitar na caixa de entrada os pontos que formam a base da parede seguinte: I=(0.5,6.5,0), J=(7,6.5,0) e K=(7,7,0).
- Com a ferramenta *polígono* construir um polígono ligando os pontos C, I, J e K criados.
- Com a ferramenta *extrusão para prisma*, clicar sobre o polígono e, na caixa de diálogo que aparece, digitar a altura = 4

  - *A próxima parede terá uma porta. Questionar o que precisamos modificar para construir essa parede (precisa de uma abertura).*
  - *Discutir que não podemos criar poliedros sobrepostos para formar a parede, pois o espaço já está sendo ocupado por outro objeto.*

- *Desafiar os alunos a construir a parede utilizando apenas uma geométrica espacial (e não o encaixe de vários prismas)*
- *Perguntar qual será o formato da base (não será um retângulo) pedir que testem exemplos de formato em suas construções (a base será um polígono com abertura)*
- *Caso necessário, construir o polígono com a abertura no plano xy, e a partir da representação obtida, verificar que não é adequado construir o polígono da base neste plano*
- *Perguntar em quais eixos/plano deve ser construído o polígono da base (no plano xz para que fique "em pé").*
- *Perguntar quais as dimensões que esse polígono "em pé" possui (mesmo estando em pé, ele não terá "espessura" porque não é tridimensional, está contido apenas no plano).*
- *Perguntar se essa figura é um polígono. Perguntar qual a diferença entre esse polígono e os que construímos antes (comentar sobre a diferença entre polígono convexo e côncavo)*
- *Para identificar a posição dos vértices que formarão esse polígono vamos movimentar a janela para observar os eixos x e z*
- *Nas outras duas paredes, a coordenada Z dos pontos, era constante e nula, pois estavamos construindo os pontos no plano xy. (observar os pontos das paredes anteriores para verificar essa informação). Agora o eixo Y vai ser constante e nulo, pois os pontos serão construídos no planos xz.*
- *Isso não descarta a possibilidade de construir um ponto com coordenada zero para Z, caso seja necessário. Mas a coordenada de Y, neste caso, será 0.*
- *Para construir os pontos deste polígono, vamos digitar suas coordenadas na caixa de entrada.*

- Vamos utilizar os pontos B=(0.5,0,0) e F=(0.5,0,4) da primeira parede, para construir a terceira parede, que possui abertura para a porta.
- As coordenadas que devem ser digitadas na caixa de entrada são P=(7,0,0) e Q=(7,0,4) para as extremidades da parede.

- *O valor da coordenada de Z é igual a 4, considerando a altura das outras paredes da casa.*
- *Para pensar nos pontos para a abertura da porta, devemos considerar o comprimento total da parede (7) e considerar medidas que sejam proporcionais, para que a parede não fique muito grande ou muito pequena.*
- *Sugerir que a porta fique bem no meio da parede (em relação ao comprimento (eixo x)).*
- *Encontrar o meio entre 0 e 7 (3.5). Sugerir comprimento = 2 para a porta. Questionar como localizamos os pontos das extremidades da porta, partindo do meio encontrado anteriormente (considerar a distância de 1 unidade a cada lado, ou seja, 3.5 + 1 e 3.5 -1)*
- *Pensando na altura total da parede (4) a altura da porta no meio da parede não seria adequada (podemos observar a porta do laboratório e verificar que ela é um pouco mais alta do que a metade da parede). Sugerir altura = 2.8 para a porta.*

- Os pontos para formar a abertura da porta são: R=(2.5,0,0), S=(4.5,0,0), T=(2.5,0,2.8) e U=(4.5,0,2.8) e também devem ser digitados na caixa de entrada.
- Selecionar a ferramenta *polígono* e unir os pontos criados na ordem R, T, U, S, P, Q, F e B para obter uma concavidade para a porta.

- *Discutir que nesse caso a "altura" do poliedro não será no sentido vertical, mas sim horizontal, devido a posição do polígono.*
- *Questionar qual deve ser a "altura" da terceira parede, digitada no comando da ferramenta extrusão para prisma (a altura será a medida da "espessura" das paredes anteriores, 0.5).*

- Selecionar a ferramenta *extrusão para prisma,* clicar sobre o polígono e indicar altura = 0.5

- *Questionar o que representa a projeção que apareceu na janela 2D (lado da parede que pertence ao plano xy).*

- *Perguntar porque ficou um “espaço em branco” nessa projeção (a abertura da porta, que representa a parte do poliedro que não está contido no plano xy).*
- *Perguntar se essa forma geométrica é um poliedro (poliedro côncavo)*
- *Mudar a perspectiva de visualização da construção, caso ajude a responder.*
- *A última parede contém a abertura para a janela e os alunos devem fazer por si mesmos essa etapa. Podem buscar estratégias para construir a última parede conversando com seu colega de dupla. Algumas dicas que podem auxiliar nesse processo:*
    - *Projetar o cenário pronto para que os alunos busquem inspiração, podendo estimar valores para a construção dessa etapa;*
    - *Utilizar pontos das paredes anteriores para a construção da última parede;*
    - *Indicar que não é possível construir a parede inteira e depois remover uma parte para a abertura da janela;*
    - *Não pode criar poliedros sobrepostos;*
    - *Pensar no tamanho adequado para a janela, considerando o tamanho da parede; E a janela terá abertura dupla, por isso deve-se escolher um tamanho maior para a janela inteira;*
    - *Pensar nas coordenadas dos pontos observando a posição desejada e o respectivo valor no eixo;*
    - *Indicar que existem várias possibilidades para ligar os pontos e construir polígonos diferentes que vão preencher o espaço da parede.*
- *Depois que os alunos construírem, pode-se mostrar como nós pensamos essa etapa da construção. Ou, caso os alunos tenham dificuldade vamos construir o passo a passo.*

- Para as extremidades da última parede, não é necessário construir novos pontos
- A janela terá tamanho 3 por 1.5.

  - *Optamos por posicionar a janela no centro da parede (em relação ao comprimento).*
  - *Como a janela possui abertura dupla, escolhemos comprimento total = 3 para que cada lado da janela tenha tamanho 1.5.*
  - *Em relação a altura, escolhemos posicionar a janela um pouco acima da metade da parede. Desse modo, a distância entre a parte inferior da janela e o chão é 1.5 e a distância entre a parte superior da janela e o chão é 3. Assim, a altura total da janela é 1.5.*
  - *Movimentar e/ou ampliar a construção para auxiliar na compreensão dessa etapa.*

- Digitar os pontos da janela na caixa de entrada: F_1=(7,2,1.5), G_1=(7,2,3) H_1=(7,5,1.5) e I_1=(7,5,3)
- Selecionar a ferramenta *polígono* e clicar sobre os pontos I_1, N, C_1, B_1, J, H_1, F_1, G_1 e I_1 novamente, para formar o primeiro polígono.
- Depois para criar o segundo polígono clicar sobre os pontos J, N, I_1, H_1 e J novamente, mantendo a abertura da janela.

  - *Será necessário formar 2 ou mais polígonos.*
  - *Podemos mostrar aos alunos mais do que uma possibilidade de unir os pontos do polígono da janela*

- Com a ferramenta *extrusão para prisma* clicar sobre o primeiro polígono construído e, na caixa de diálogo que aparece, digitar a altura = 0.5
- Repetir o mesmo processo para o segundo polígono da mesma parede

  - *Relembrar que assim como na parede da porta, o valor indicado para a “altura” neste caso, representa a "espessura" da parede.*
  - *Perguntar se essas formas geométricas espaciais são poliedros (considerando-os separados e como um único objeto)*

- *Para iniciar a construção do telhado, questionar os alunos sobre o formato da base desse poliedro (triângulo).*
- *Perguntar onde ficará posicionada essa base (não será sobre o plano xy porque o telhado fica acima das paredes da casa. E também não será a face de baixo do poliedro).*
- *Definir que o poliedro que representa o telhado é um prisma de base triangular. Discutir que a base de um prisma não é necessariamente o polígono da face inferior do objeto espacial, com isso enfatizar que os objetos geométricos não possuem uma única representação ou um lado específico (pode citar exemplos, e perguntar aos alunos como seriam outras representações para um prisma de base triangular, em posições diferentes)*
- *Pedir que os alunos indiquem onde deve ser construído o polígono da base do telhado (acima da parede que possui a abertura para a janela). Espera-se que percebam a necessidade de alterar a perspectiva de visualização da construção.*
- *Observar os pontos da parede e questionar se é possível utilizá-los para construir o triângulo.*

- Para construir o telhado, utilizamos os pontos Q=(7,0,4) e O=(7,7,4) da parede com a janela, como dois vértices do triângulo.

  - *Questionar em que posição deve ficar o outro vértice do triângulo. Pode-se criar um ponto no centro da aresta superior do poliedro da parede e questionar como fazemos para que ele fique "mais alto" (alterar a coordenada de z).*
  - *A altura do triângulo deve ser maior do que a altura das paredes da casa por representar o telhado (neste caso escolhemos altura = 7).*

- Digitar no campo de entrada o ponto V_1 = (7,3.5,7) que será o outro vértice do triângulo.
- Com a ferramenta *polígono,* clicar sobre os pontos V_1, Q e O para construir um triângulo.

  - *Questionar qual será a "altura" do poliedro digitada no comando da ferramenta extrusão para prisma (como o telhado deve cobrir a casa toda, neste caso a altura é o comprimento da casa, movimentar a construção para que perceberam até onde deve ir o telhado).*

- Com a ferramenta *extrusão para prisma* clicar sobre o polígono e, na caixa de diálogo que aparece, digitar a altura = 7.

  - *Perguntar aos alunos, como pensam em preencher as aberturas da porta e da janela (utilizando polígono e poliedro, do mesmo modo que foram construídas as paredes e o telhado).*

- Para criar a porta, selecionamos a ferramenta *polígono* e construímos um polígono com os pontos que já delimitam a porta.

  - *É importante que o polígono seja construído considerando os pontos do lado de fora, pois queremos que a porta abra para fora.*
  - *Questionar qual será a "altura" digitada no comando da ferramenta extrusão para prisma (geralmente a porta possui espessura menor do que a parede, então o valor digitado deve ser menor do que 0.5, vamos utilizar neste caso 0.2).*

- Com a ferramenta *extrusão para prisma* clicar sobre o polígono e, na caixa de diálogo que aparece, digitar a altura = 0.2.

  - *Relembrar que a janela será dupla, por isso não podemos apenas unir os pontos que já estão na construção. Por ser uma janela dupla, precisamos criar dois polígonos.*
  - *Questionar qual será o "contorno" de cada polígono da janela, e se/onde ainda faltam pontos para que possamos criar os polígonos (identificar que ainda precisamos criar dois pontos no meio da janela, para formar os polígonos).*

- Para criar a janela dupla, digitamos no campo de entrada os pontos F_2=(7,3.5,3) e G_2=(7,3.5,1.5)
- Na janela de visualização, selecionamos a ferramenta *polígono* e clicamos sobre os pontos da janela e os pontos F_2, G_2, H_1 e I_1 e depois sobre os pontos F_2, G_2, F_1 e G_1 para construir dois polígonos, um para cada lado da janela.
- Com a ferramenta *extrusão para prisma* clicar sobre o primeiro polígono e, na caixa de diálogo que aparece, digitar altura = 0.2
- Ainda com a ferramenta *extrusão para prisma* repetimos o procedimento com o outro polígono da janela.
- Para criar um chão/gramado para a casa selecionamos a ferramenta *plano* e clicamos em três pontos pertencentes ao plano xy.

  - *Perguntar quais as características de um plano (podem consultar a folha entregue na discussão do cubo. Relembrar que o espaço é formado pelo alinhamento de planos).*
  - *Construção finalizada! Agora precisamos incluir o movimento de abrir e fechar na porta, na janela e no telhado.*
  - *Questionar como atribuímos movimento aos objetos nas construções anteriores (controle deslizante).*

- Selecionar a ferramenta *controle deslizante* e clicar sobre a janela.

  - *Perguntar se os alunos lembram o que é um ângulo (discutido na folha e na construção do cubo).*

- Selecionar a opção *ângulo*, com nome do controle α, intervalo de 0° a 90° e incremento 1°. Clicamos ok.
- Incluir o movimento de abrir e fechar nos objetos, a partir do comando *Girar (<Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação>).*

  - *Indicar que os alunos cliquem sobre a janela de visualização 3D e escrevam no campo de entrada "girar". Selecionar a terceira opção que aparece (para discutirmos sobre os elementos que precisamos para utilizar esse comando).*
  - *Os objetos que queremos que girem é a porta, a janela e o telhado. O ângulo, é o controle deslizante que criamos. E o eixo de rotação, é o "lado" em que o objeto vai girar (mostrar [Exemplos - eixo de rotação])*
  - *Precisamos atribuir esse comando aos objetos, um de cada vez. Vamos começar pela porta. Movimentar a construção e aproximar na porta, para melhor visualização*

- Identificar o objeto a ser girado, neste caso o prisma correspondente a porta

  - *Explicar que quando clicamos em um objeto, a sua representação fica sombreada, indicando que o objeto foi selecionado. Isso vale tanto para as janelas de visualização (2D e 3D) quanto para a janela de álgebra.*

- Escolher qual será o eixo de rotação da porta, neste caso um segmento lateral

  - *Escolher para qual lado queremos que a porta abra.*
  - *Aproximar bem a imagem da porta para que os alunos visualizem essa etapa.*
  - *Clicar sobre o segmento que será nosso eixo de rotação (ele ficará selecionado e/ou em destaque) para identificar o nome do segmento. Copiar o nome do segmento, pois utilizaremos depois (r_1)*
  - *Caso não seja possível identificar o nome do segmento, será indicado que os alunos selecionem a ferramenta segmento e criem outro segmento sobre a lateral da porta clicando sobre os pontos das extremidades. O nome do segmento criado aparecerá na janela de álgebra e também é possível identificar o nome clicando sobre ele.*

- Identificar o prisma correspondente a porta na janela de álgebra e alterar a sua definição.
- Na definição do prisma alterar/digitar o comando *Girar(copiamos a definição do prisma, α, nome do segmento que será eixo de rotação)*. Clicamos ok.
- Verificamos o que acontece, à medida que o controle deslizante é movimentado.

  - *Neste momento é possível que a porta abra para dentro ao invés de abrir para fora como o esperado. Nesse caso, pedir para que os alunos cliquem na definição do prisma e alterem o sinal do controle deslizante, de α para -α.*
  - *Considerando que o procedimento é o mesmo para girar todos os objetos, o movimento da janela será deixado a cargo dos alunos para que realizem juntamente com seu colega de dupla.*

- Para os demais objetos, o procedimento é análogo.
- Identificar o objeto a ser girado, neste caso o prisma correspondente a um dos lados da janela.
- Escolher qual será o eixo de rotação deste lado da janela
- Identificar o prisma correspondente a um dos lados da janela da casa na janela de álgebra e alterar a sua definição.
- Na definição do prisma digitar o comando *Girar(copiamos a definição do prisma, α, nome do segmento que será eixo de rotação)*. Clicamos ok
- Verificamos o que acontece, à medida que o controle deslizante é movimentado.
- Repetir o mesmo procedimento para o outro lado da janela e para o telhado.

  - *É possível que cada janela esteja abrindo para um lado diferente, neste caso, será indicado aos alunos que modifiquem o sinal do controle deslizante α apenas de um dos lados das janelas, para que o movimento de abertura se iguale.*
  - *O movimento do telhado poderá ser realizado passo a passo com os alunos, ou, caso os alunos tenham compreendido o procedimento a partir dos objetos anteriores, poderão fazer por si mesmos podendo solicitar ajuda sempre que necessário.*

- Criar o botão *Abrir*. No código do GeoGebra digitamos:
  IniciarAnimação[α,true]
  DefinirValor[α,0º].

- Para finalizar pode-se ocultar alguns objetos da cena (pontos, segmentos, polígonos) selecionando a opção *exibir objeto*
- Também é possível alterar a cor dos objetos nas *propriedades* de cada um.
- E construir outros objetos, caso queiram complementar o cenário animado.
- Gravar a construção.

Apêndice 04

Roteiro e discussão - Xadrez

Vídeo: (para esse cenário animado não foi gravado um vídeo com o passo a passo)

Discussões e Passo a Passo:

- Apresentar o cenário pronto.

  - *Questionar sobre as representações do tabuleiro e das peças que aparecem na janela de visualização 2D e 3D (no que elas se diferem (altura, número de arestas, vértices e faces, a natureza dos objetos) e no que se assemelham (formato de uma das faces, dependendo da perspectiva adotada a representação é a mesma)).*
  - *Movimentar o tabuleiro caso ajude os alunos a responder.*
  - *Perguntar aos alunos se conhecem o nome dos objetos que estão representando as peças de Xadrez (distinguir polígonos e poliedros).*

- Disponibilizar a construção no GeoGebra com alguns elementos já criados.

  - *Nesse arquivo do GeoGebra haverá o tabuleiro e algumas peças do jogo já criadas. Terá espaço no tabuleiro para a criação de outras 08 peças.*

- Criar um peão branco.

  - *Perguntar qual forma geométrica espacial está representando o peão.*

- Selecionar a ferramenta *segmento com comprimento fixo* e clicar sobre o tabuleiro da janela de visualização 2D
- Digitar comprimento de 0.5
- Clicar na janela de visualização 3D
- Selecionar a ferramenta *cubo* e clicar nos pontos criados B e C
- Arrastar o cubo para a posição desejada no tabuleiro (Isso vale para as demais peças)

  - *Pedir para que os alunos movimentem o objeto a partir dos pontos, para verificar que um dos pontos (B) possibilita arrastar o objeto para outra posição e outros dois pontos (C e D) possibilitam girar o objeto. Os demais pontos são fixos e não permitem movimento ao objeto (Isso vale para as demais peças)*
  - *Depois de movimentar, indicar aos alunos que deixem o ponto B na parte "da frente" do cubo. Fazer o mesmo com os outros cubos que se movimentam.*

- Repetir o procedimento para criar mais dois peões, um preto e um branco, respectivamente (pontos J e K do peão preto e Z_2 e A_3 do peão branco)

  - *Solicitar que os alunos criem os dois peões*
  - *Pedir ideias para criar a próxima peça do tabuleiro (cavalo)*
  - *Perguntar o que muda do peão (cubo) para o cavalo (prisma de base quadrada ou paralelepípedo) e no que eles se parecem.*
  - *Discutir que os objetos possuem a mesma base, mas a altura é diferente. E "apenas" mudando a altura já mudamos o objeto. Ele deixa de ser um cubo. (todo cubo é um prisma, mas nem todo prisma é um cubo)*

- Para criar o cavalo (prisma de base quadrada) selecione a ferramenta *segmento com comprimento fixo* e clique sobre o tabuleiro 2D. Digitar comprimento 0.5

- Selecionar a ferramenta *polígono regular* e clicar nos pontos criados (P_4 e O_4)

  - *Explicar que os vértices são os pontos em que as arestas se encontram*
  - *Perguntar aos alunos quantos vértices o polígono que queremos criar possui*

- Digitar 4 para o número de vértices

  - *Questionar sobre a representação que apareceu, e o que falta para chegar na representação que queremos*
  - *Espera-se que os alunos relembrem que a mesma situação aconteceu na construção da casa quando precisamos erguer as paredes.*

- Na janela de visualização 3D, selecionar a ferramenta *extrusão para prisma* e clicar sobre o polígono construído. Digitar altura = 1

  - *No momento de clicar sobre o polígono construído para a base da peça, pode ser necessário arrastar o polígono para fora do tabuleiro antes de clicar sobre ele, pois a base do tabuleiro também é um polígono e podem ser confundidos. O mesmo vale para as demais peças.*
  - *Observar que o objeto é maior do que os cubos criados anteriormente.*
  - *Perguntar qual a altura dos cubos (espera-se que os alunos lembrem que foi digitado o comprimento 0.5 e que todas as arestas do cubo possuem a mesma medida, portanto sua altura é 0.5). Explicar que poderíamos utilizar essa mesma ferramenta para criar o cubo, modificando o valor da altura.*
  - *Perguntar aos alunos o que deve mudar para a construção da torre (prisma de base hexagonal ou pentagonal) e pedir que criem esse objeto. Eles poderão escolher qual os objetos preferem para representar a torre.*

- Para criar a torre (prisma de base hexagonal ou pentagonal) utilizar a ferramenta *segmento com comprimento fixo.* Digitar comprimento 0.5 se construir o pentágono e 0.4 se construir o hexágono.
- Selecionar a ferramenta *polígono regular* e clicar nos pontos criados (F_7 e G_7)

  - *Como esse objeto será criado pelos alunos, caso eles ainda não saibam qual valor colocar para vértices, indicar que testem valores e verifiquem o que é alterado na figura.*

- Digitar (5 ou 6) para o número de vértices
- Na janela de visualização 3D, selecionar a ferramenta *extrusão para prisma* e clicar sobre o polígono construído. Digitar altura = 1

  - *Perguntar que características semelhantes os alunos observam nas peças criadas até o momento (são prismas e por isso possuem duas bases congruentes e paralelas e faces laterais)*

- Para criar o bispo (pirâmide de base triangular) utilizar a ferramenta *segmento com comprimento fixo*. Digitar comprimento 0.5
- Selecionar a ferramenta *polígono regular* e clicar nos pontos criados (K_8 e Q_8). Digitar 3 para o número de vértices

  - *Pode-se utilizar a ferramenta extrusão para prisma, e verificar que desse modo o objeto construído não será o mesmo que aparece no cenário pronto.*
  - *Perguntar se os alunos notam alguma diferença entre a torre e o bisco, além do formato das faces. Nesse momento pode-se discutir algumas diferenças entre prisma e pirâmide (a pirâmide só possui uma base e as faces laterais se encontram em um vértice, enquanto o prisma possui duas bases congruentes e as faces laterais)*

- Na janela de visualização 3D, selecionar a ferramenta *extrusão para pirâmide* e clicar sobre o polígono construído. Digitar altura = 1

    - *Considerando as características apresentadas, pedir que citem quais das peças são representações de prismas e quais são pirâmides.*
    - *Se os alunos indicarem que o rei (cilindro) é um prisma e que a rainha (cone) é uma pirâmide, discutir que essas formas geométricas espaciais não são poliedros por possuírem curvas.*
    - *Questionar qual é o formato da base para as peças da rainha e do rei, e perguntar como faremos para criá-las, se seguirá o mesmo procedimento das peças anteriores ou não*
    - *Caso os alunos respondam que sim, pedir que testem. Caso respondam que não, pode-se discutir a diferença das formas planas poligonais para o círculo, que é uma forma plana mas não é um polígono (o círculo não possui vértices nem arestas então as ferramentas utilizadas anteriormente não são adequadas para esse caso, existe uma ferramenta específica para a criação do círculo)*

- Para iniciar a construção da peça da rainha (cone) selecionar a ferramenta *círculo: centro e raio.*
- Clicar sobre a janela e digitar raio = 0.3
- Ainda com a mesma ferramenta selecionada, clicar novamente sobre a janela para criar outro círculo com raio = 0.3, que será a base da peça que representa o rei (cilindro)

    - *Discutir que a base para os mesmos objetos é a mesma, mas os objetos finais são diferentes*
    - *Perguntar o que muda entre o cilindro e o cone.*
    - *Discutir as características de cilindro e cone, que são semelhantes às de prisma e pirâmide. (O cilindro possui duas bases planas na forma de um círculo e uma superfície lateral visualmente arredondada e o cone possui uma base plana na forma de um círculo, um único vértice e uma superfície lateral visualmente arredondada) (São classificados como corpos redondos, por possuírem ao menos uma superfície curva. A superfície curva não é o círculo da base, mas a lateral desses objetos.)*

- Na caixa de entrada escreva *Cone*, selecione a opção *Cone(círculo, altura)*. Escreva o nome do círculo e a altura desejada Cone(c_4,1.2).
- Arraste o cone para a posição desejada no tabuleiro.
- Na caixa de entrada escreva *Cilindro,* selecione a opção *Cilindro(círculo, altura)*. Escreva o nome do círculo e a altura desejada Cilindro(d_4,1.2).
- Arraste o cone para a posição desejada no tabuleiro.

- Para ter animação, cada peça deve ser atrelado a um controle deslizante
- Com a ferramenta *controle deslizante* criar 04 controles, um para cada peça que se move no tabuleiro.
- Nomear os controles como p1, p2, p3 e r1 para os 03 peões e a rainha, respectivamente.
- Nesse momento o intervalo dos controles pode ser criado entre 0 e 7
- Identificar qual ponto do polígono da base movimenta a peça sem rotacioná-la. Fazer o mesmo para as 04 peças

    - *Nesse momento, pode-se ocultar os demais pontos para que os alunos não confundam no momento de alterar a definição*
    - *Observar a construção do cenário pronto para identificar os movimentos que as peças executam, começando pelo primeiro peão branco.*
    - *Verificar se o movimento é realizado no eixo x,y ou z. Questionar os alunos sobre a direção de cada eixo. Fazer o mesmo para as demais peças*

- Para o primeiro peão branco clicar sobre o ponto (B) e alterar a definição do ponto para (2.7, p1, 0). Movimentar o controle para verificar se a peça está executando movimento na direção desejada

  - *Caso o ponto B não esteja posicionado em 2.7 para x, é possível girar o cubo para que se adeque a este valor ou utilizar outro valor para x. O mesmo vale para todas as peças.*
  - *Com o controle deslizante, simular o movimento que o peão deve realizar para verificar de quais coordenadas o objeto parte e em quais ele chega.*
  - *Alterar os limites do controle deslizante correspondente a peça para os intervalos em que ela se movimenta. Fazer o mesmo para as demais peças*
  - *Queremos que o peão se movimente apenas no sentido decrescente, por isso vamos selecionar essa opção para o controle deslizante*
- Alterar os valores do controle p1 para 5.25 a 6.25. Deixar como decrescente e alterar a velocidade do controle para 3
- Para o peão preto clicar sobre o ponto (J) e alterar a definição do ponto para (3.2, p2, 0). Movimentar o controle para verificar se a peça está executando movimento na direção desejada.
- Alterar os valores do controle p2 para 1.7 a 2.7 Deixar como crescente uma vez e alterar a velocidade do controle para 3
- Para o outro peão branco clicar sobre o ponto (Z_2) e alterar a definição do ponto para (1.2, p3, 0). Movimentar o controle para verificar se a peça está executando movimento na direção desejada
- Alterar os valores do controle p3 para 4.2 a 6.2. Deixar como decrescente e alterar a velocidade do controle para 3

  - *Discutir que a rainha, nesse caso, realiza o movimento na diagonal e que os valores de x e de y são alterados, por isso precisamos relacionar o controle deslizante r1 em ambas as coordenadas.*
  - *Enquanto os valores de x diminuem os valores de y aumentam, por isso precisamos que em alguma das coordenadas o controle tenha sinal negativo*
  - *Para deslocar a peça em algumas unidades acima da origem, adicionamos 5*

- Para a rainha, clicar sobre o ponto (B_9) e alterar a definição do ponto para (r1, -r1 + 5). Movimentar o controle para verificar se a peça está executando movimento na direção desejada

Alterar os valores do controle r1 para 0.5 a 4.5. Deixar como decrescente.

  - *Depois que todas as peças estão se movimentando na direção desejada, precisamos fazer com que realizem o movimento na sequência correta*

- Com a ferramenta *botão* criar um botão para iniciar os movimentos. A legenda do botão será *Iniciar* e a programação:

IniciarAnimação[p1,true]
DefinirValor[p1,6.25]
IniciarAnimação[p2,false]
DefinirValor[p2,1.7]
IniciarAnimação[p3,false]
DefinirValor[p3,6.2]
IniciarAnimação[r1,false]
DefinirValor[r1,4.5]

- Ainda com a ferramenta *botão* criar um segundo botão para que as peças voltem à posição inicial do tabuleiro. A legenda do botão será *Voltar* e a programação será a mesma do controle *Iniciar,* porém com todos os controles em *false*

- Nas propriedade/configurações de cada controle, escrever a programação para que realizem o movimento na sequência
- No controle deslizante p1:

Se[p1<=5.27,IniciarAnimação[p1,false]] (porque é DECRESCENTE)
Se[p1<=5.27,IniciarAnimação[p2,true]]

- *Clicar sobre o botão Iniciar para verificar se os comandos digitados estão corretos e se a peça realiza o movimento desejado. Fazer o mesmo depois de cada controle programado.*

- No controle deslizante p2:

Se[p2>=2.6,IniciarAnimação[p3,true]] (CRESCENTE UMA VEZ)

- No controle deslizante p3:

Se[p3<=4.23,IniciarAnimação[p3,false]] (porque é DECRESCENTE)
Se[p3<=4.23,IniciarAnimação[r1,true]]

- No controle deslizante r1:

Se[r1<=0.55,IniciarAnimação[r1,false]] (porque é DECRESCENTE)

- Com a ferramenta *texto* clicar sobre a janela 3D e digitar *Xeque-mate* no campo que aparece. Em seguida clicar ok
- Nas propriedades/configurações do texto, selecionar a opção *Avançado* e no campo *Condição para exibir objeto* digitar $r1 \leq 0.54$
- Ainda nas propriedades pode-se alterar a cor, tamanho e fonte do texto
- Alterar a cor e a transparência dos objetos
- Desabilitar os pontos
- Salvar a construção