

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

Campo Mourão,
2023

**UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DAS
ABORDAGENS DA GEOMETRIA DOS FRACTAIS EM
LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO**

Andressa de Fatima Rodrigues

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DAS ABORDAGENS DA GEOMETRIA DOS
FRACTAIS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Andressa de Fatima Rodrigues

Orientadora:
Dra. Mariana Moran

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Fevereiro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

De Fatima Rodrigues, Andressa

UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DAS ABORDAGENS DA GEOMETRIA DOS FRACTAIS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO / Andressa De Fatima Rodrigues. -- Campo Mourão-PR, 2023.

124 f.: il.

Orientador: Mariana Moran.


Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2023.


1. Geometria Fractal. 2. Livro Didático. 3. Teoria Antropológica do Didático. I - Moran, Mariana (orient). II - Título.

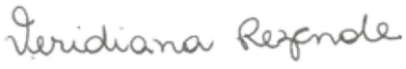
Andressa de Fátima Rodrigues

UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DAS ABORDAGENS DA GEOMETRIA
DOS FRACTAIS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Comissão Examinadora:


Profa. Dra. Mariana Moran - Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual Do Paraná – Unespar


Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa - Membro da Banca
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE


Profa. Dra. Veridiana Rezende - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná – Unespar

Resultado: Aprovada

Campo Mourão - PR
Fevereiro de 2023

*Dedico o presente trabalho a Deus.
À minha família.
Em especial a minha mãe, Celina.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por ter chegado até aqui, por ter me concedido força, saúde e sabedoria. Diante de todas as dificuldades me guiou, nunca me deixou desanimar e sempre esteve comigo, fortalecendo-me.

À minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Mariana Moran, pelas orientações e estudos realizados, pela consideração e por se fazer sempre presente, com muita humildade e empatia. Agradeço pelas conversas que me tranquilizaram nos momentos difíceis, pela atenção e por todo o carinho. Sou grata por ter tido você como orientadora. Muito obrigada!

À minha banca de qualificação, Prof.^a Dr.^a Veridiana Rezende e Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa, por terem aceitado o convite para participação e pelas contribuições que, com certeza, melhoraram ainda mais minha dissertação.

Aos meus pais, Celina e José, aos meus familiares e ao meu noivo; em especial, à minha mãe, que sempre esteve presente, me apoiando e rezando por mim. A presença de vocês em minha vida foi fundamental para que eu pudesse concluir este trabalho!

Aos meus colegas do mestrado, Luan Padilha, Débora Rengel e Alessandra Vilanova, com quem tive o prazer de conviver. Agradeço pelos momentos de construção e aprendizagens, e por sempre se fazerem presentes. Obrigada!

Aos colegas e amigos do grupo de estudos GPEG, pelos momentos de discussões e descontrações, com certeza momentos valiosos que contribuíram muito para o meu desenvolvimento.

Ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PRPGEM, pelos momentos de grande aprendizagem e pelos professores, que tiveram grandes contribuições para minha formação acadêmica, pessoal e profissional.

RESUMO

A presente pesquisa, de cunho documental, tem como principal objetivo identificar habilidades e objetos de conhecimentos da BNCC que foram suscitadas na modelização do assunto Geometria dos Fractais, por meio da Organização Matemática elaborada em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021. Para tanto, foi elaborada a seguinte questão de pesquisa: quais habilidades e objetos de conhecimento, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), identificados nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021? Para responder o problema de pesquisa proposto, utilizou-se, como aporte teórico e metodológico da investigação, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual possibilitou modelar as abordagens encontradas por meio de organizações matemáticas (OM) dos assuntos presentes nos livros da coleção Prisma Matemática, da editora FTD, e nos livros da coleção Diálogo, da editora Moderna. A coleção Prisma Matemática foi aprovada e escolhida pelos professores do estado do Paraná no PNLD 2021, para ser utilizada na área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, e a coleção Diálogo foi a mais vendida a nível nacional, no ano de 2021. Como resultado, podemos apontar que a Geometria dos Fractais se faz presente em 3 dos 6 livros didáticos da coleção Prisma Matemática e em 2 dos 6 livros da coleção Diálogo, sendo utilizada como mediadora para o ensino de diferentes objetos de conhecimento da Matemática, tais como: progressão geométrica e aritmética, sequências, funções, ampliação e redução de figuras, cálculo de área e perímetro. Desse modo, por meio das OM elaboradas, foi possível identificar, além dos objetos de conhecimento, dezoito habilidades de Ensino Fundamental e seis habilidades do Ensino Médio descritas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria dos Fractais. Livro Didático. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This research, of documentary nature, has as its main objective to identify skills and objects of knowledge from BNCC that were raised in the modeling of the subject Geometry of Fractals, through the Mathematical Organization elaborated in High School textbooks approved by the National Book and Didactic Material Program (PNLD) 2021. To this end, the following research question was elaborated: what are the skills and objects of knowledge, present in the National Common Curricular Base (BNCC), identified in approaches to Fractal Geometry in High School textbooks approved by PNLD 2021? In order to answer the proposed research problem, the Anthropological Theory of Didactics (ATD) was used as a theoretical and methodological contribution to the investigation, making it possible to model the approaches found through mathematical organizations (MO) of the subjects present in the books of the *Prisma Matemática* collection, by FTD publisher, and in the books of the *Diálogo* collection, by Moderna publisher. The *Prisma Matemática* collection was approved and chosen by teachers from the state of Paraná in the PNLD 2021, to be used in the Mathematics and its Technologies knowledge area, and the *Diálogo* collection was the most sold nationally, in 2021. As a result, we can point out that the Geometry of Fractals is present in 3 of the 6 textbooks of the *Prisma Matemática* collection and in 2 of the 6 books of the *Diálogo* collection, being used as a mediator for teaching different objects of knowledge of Mathematics, such as: geometric progression and arithmetic, sequences, functions, enlarging and reducing figures, calculating area and perimeter. Thus, through the developed MO, it was possible to identify, in addition to the objects of knowledge, eighteen Elementary School skills and six High School skills described in the National Common Curricular Base – BNCC.

Keywords: Mathematics Education. Geometry of Fractals. Textbook. Anthropological Didactic Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Construção da curva de Koch	23
Figura 2 - Comparação da dimensão euclidiana e dimensão fractal	23
Figura 3 - Complexidade infinita	24
Figura 4 - Níveis da Curva de Koch	24
Figura 5 - Níveis da Ilha de Kock	25
Figura 6 - Níveis do Triângulo de Sierpinski	25
Figura 7 - Níveis do Hexágono de Dürer	26
Figura 8 - Identificação das habilidades na BNCC do EF por código alfanumérico	50
Figura 9 - Identificação das habilidades na BNCC por código alfanumérico	52
Figura 10 - Exercício proposto no vestibular da UNESP.	65
Figura 11 - Ampliações e reduções na Geometria Fractal - Triângulo de Sierpinski	70
Figura 12 - Apresentação da atividade resolvida	71
Figura 13 - Resolução da atividade	72
Figura 14 - Transformações Geométricas	74
Figura 15 - Geometria dos fractais	75
Figura 16 - Investigação sobre os fractais	75
Figura 17 - Construção de fractais	77
Figura 18 - Apresentação da atividade proposta 1	78
Figura 19 - Apresentação da atividade proposta 2	80
Figura 20 - Apresentação da atividade proposta 3	82
Figura 21 - Apresentação da atividade proposta 4	85
Figura 22 - Apresentação da atividade proposta 5	87
Figura 23 - Etapas da construção do Fractal Tapete de Sierpinski	88
Figura 24 - Apresentação da atividade proposta 6	89
Figura 25 - Etapas da construção do Fractal Curva de Peano	90
Figura 26 - Apresentação da atividade proposta 7	92
Figura 27 - Apresentação da atividade proposta 8	94
Figura 28 - Atividade proposta 8 item a	94
Figura 29 - Atividade proposta 8 item b	96
Figura 30 - Resolução do item b atividade proposta 8	96
Figura 31 - Item c atividade proposta 8	97

Figura 32 - Apresentação da atividade proposta 9	99
Figura 33 - Item a atividade proposta 9	99
Figura 34 - Item b atividade proposta 9	101
Figura 35 - Item c atividade proposta 9	101
Figura 36 - Apresentação da atividade proposta 10	103
Figura 37 - Continuação da atividade proposta 10	103
Figura 38 - Atividade proposta 10 alternativas	104
Figura 39 - Apresentação da atividade proposta 11	105
Figura 40 - Item a atividade proposta 11	106
Figura 41 - Item a atividade proposta 12	109
Figura 42 - Item a atividade proposta 13	111
Figura 43 - Item a atividade proposta 14	113

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Dissertações e Teses – TAD, Geometria e Livro Didático	37
Quadro 2 - BNCC: Unidades Temáticas, Objetos de Conhecimento e habilidades relacionadas	49
Quadro 3 - Competência específica 1 e habilidades	52
Quadro 4 - Volumes que compõem a coleção Prisma Matemática	60
Quadro 5 - Volumes que compõem a coleção Diálogo	63
Quadro 6 - Tipo de tarefa A	66
Quadro 7 - Habilidades e objeto de conhecimento referente à tarefa A	66
Quadro 8 - Volumes analisados	69
Quadro 9 - Tipo de tarefa 1	72
Quadro 10 - Habilidades e objeto de conhecimento referente à tarefa 1	72
Quadro 11 - Tipo de tarefa 2	76
Quadro 12 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 2	76
Quadro 13 - Tipo de tarefa 3	79
Quadro 14 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 3	79
Quadro 15 - Tipo de tarefa 4	80
Quadro 16 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 4	81
Quadro 17 - Tipo de tarefa 5	83
Quadro 18 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 5	83
Quadro 19 - Tipo de tarefa 6	85
Quadro 20 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 6	86
Quadro 21 - Tipo de tarefa 7	88
Quadro 22 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 7	88
Quadro 23 - Tipo de tarefa 8	90
Quadro 24 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 8	90
Quadro 25 - Tipo de tarefa 9	92
Quadro 26 - Tipo de tarefa 10	92
Quadro 27 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes às tarefas 9 e 10	93
Quadro 28 - Tipo de tarefa 11	94
Quadro 29 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 11	95
Quadro 30 - Tipo de tarefa 12	96

Quadro 31 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 12	96
Quadro 32 - Tipo de tarefa 13	97
Quadro 33 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 13	98
Quadro 34 - Tipo de tarefa 14	100
Quadro 35 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 14	100
Quadro 36 - Tipo de tarefa 15	101
Quadro 37 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 15	101
Quadro 38 - Tipo de tarefa 16	101
Quadro 39 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 16	102
Quadro 40 - Tipo de tarefa 17	104
Quadro 41 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 17	104
Quadro 42 - Tipo de tarefa 18	106
Quadro 43 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 18	106
Quadro 44 - Tipo de tarefa 19	107
Quadro 45 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 19	108
Quadro 46 - Tipo de tarefa 20	109
Quadro 47 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 20	110
Quadro 48 - Tipo de tarefa 21	112
Quadro 49 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 21	112
Quadro 50 - Tipo de tarefa 22	113
Quadro 51 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 22	113

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CREP – Currículo da Rede Estadual Paranaense

DCE – Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná

OD – Organização Didática

OM – Organização Matemática

OP – Organização Praxeológica

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

TAD – Teoria Antropológica do Didática

t – Tarefa

T – Tipo de Tarefa

τ – Técnica

θ – Tecnologia

Θ – Teoria

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	19
2.1 Estudos preliminares sobre a Geometria dos Fractais	19
2.1.1. Principais características de um fractal	22
2.2 Constructos Teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD)	29
2.2.1. Organizações Praxeológicas	32
2.3 Pesquisas associadas à Geometria e à TAD	36
2.4 Sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	47
2.5 Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)	53
3. ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	57
3.1 Característica da Pesquisa	57
3.2 Contexto da Pesquisa	58
3.3 Critérios para a análise dos dados	64
4. APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	68
4.1 Análise dos Livros Didáticos	68
4.2 Parte Curso	69
4.3 Atividades Propostas	77
CONSIDERAÇÕES FINAIS	117
REFERÊNCIAS	120

1. INTRODUÇÃO

Desde a infância, ser professora sempre foi uma das minhas¹ maiores vontades. Ao longo do Ensino Fundamental e Médio, sempre tive preferência pela área das exatas, sendo que um dos meus desejos se tornou cursar licenciatura em Matemática. No entanto, meus estudos acadêmicos não iniciaram com tal curso, pois, por ser mais acessível às minhas condições, iniciei, no ano de 2011, o curso de Licenciatura Plena em Ciências, na Universidade Estadual de Maringá – UEM, no Campus Regional de Goioerê – CRG.

No segundo ano da graduação, tive minha primeira experiência em ser “professora”, a convite do professor da disciplina de Matemática I, Valdinei Cezar Cardoso, sendo ele uma das minhas maiores inspirações durante a graduação. Tive, assim, a oportunidade de ser preceptora; na preceptoria, sob a orientação do professor coordenador, desenvolvíamos atividades com os acadêmicos da disciplina de Matemática I, alunos do primeiro ano da graduação, e trabalhávamos com a resolução de exercícios envolvendo noções básicas de aritmética, álgebra e geometria. Ali me encontrei e que de fato ser professora era minha escolha.

Ainda na graduação, cursando o último ano, tive minha segunda oportunidade de vivenciar essa profissão. Comecei a participar do Programa Institucional de Bolsas de Indicação à Docência – PIBID, do qual fiz parte por quase um ano. Esse projeto contribuiu para a minha formação, especialmente enquanto docente, e me proporcionou vários momentos de aprendizagens e experiências no cotidiano escolar, sobretudo dentro de sala de aula, com alunos do Ensino Fundamental II em uma escola pública do município de Goioerê, na disciplina de Ciências.

Antes de concluir o curso de Licenciatura plena em Ciências, iniciei o curso de Licenciatura Plena em Matemática, em 2014, e, na sequência, realizei três especializações, respectivamente Educação Especial, Metodologia do Ensino em Matemática, e Arte e Educação. Ainda cursando minha segunda graduação, ministrei aula pelo Processo Seletivo Simplificado do Paraná, realizado pela Secretaria de Estado da Educação – SEED, com contratação temporária, no qual ministrei aulas do Ensino Fundamental II ao Ensino Médio até os dias atuais, no período matutino e vespertino.

Em 2021 retornei ao meio acadêmico ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM, da Universidade Estadual do Paraná – Unespar, que

¹ Parte desta introdução é escrita na primeira pessoa, pois representa a experiência e a motivação pessoal da estudante de mestrado, proponente desta pesquisa.

oportunizou que eu participasse do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, cuja líder do grupo é a orientadora desta pesquisa. Atualmente, o interesse principal do GPEG é o estudo da Geometria dos Fractais, tendo como aporte teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD).

A escolha do tema de estudo de nossa pesquisa se deu em virtude de uma pesquisa desenvolvida por uma colega de mestrado também participante do GPEG, que fez uma investigação da Geometria dos Fractais em livros didáticos modelizados pela TAD. Embora esta não seja diretamente mencionada no documento norteador nacional para a Educação Básica – BNCC (2018) –, estudos realizados por diferentes pesquisadores, como Barbosa (2005), Almeida (2005), Rabay (2013) e Sallum (2015), discutem sobre a importância da inserção dessa Geometria na Educação Básica e apontam a necessidade de fortalecer o ensino de matemática relacionado a ela, abordando-a ainda nas primeiras etapas de ensino. Tais pesquisadores mostram que a Geometria dos Fractais é algo que contribui para a compreensão de “outras geometrias”, bem como para intensificar os estudos de outros conteúdos matemáticos.

Na Educação Básica, os Fractais podem ser explorados através das “relações numéricas de seus elementos, conforme as iterações sucessivas, [...] despertando ou desenvolvendo o senso estético, pela visualização dos mesmos [...]” (BARBOSA, 2005, p. 71). Nessa perspectiva, procuramos, a partir da BNCC, identificar habilidades e objetos de conhecimento da Matemática e da Educação Básica, que são mobilizados pelos alunos ao resolverem tarefas do Livro Didático que abordam essa Geometria. Deste modo, optamos por olhar de maneira especial para as abordagens nos livros didáticos do conteúdo Geometria dos Fractais em livros do Novo Ensino Médio aprovados no PNL 2021.

Na presente pesquisa, a TAD (Teoria Antropológica do Didático) foi utilizada como ferramenta para análise e estudo da Geometria dos Fractais a partir de uma perspectiva matemática. Para tanto, analisamos a parte teórica, as atividades resolvidas e as atividades propostas em que houve manifestação superficial ou aprofundada, do conteúdo Geometria dos Fractais, nos seis volumes de livros que compõe as duas coleções analisadas. Desse modo, realizamos, para cada tipo de tarefa, uma organização matemática (OM) composta pelo quarteto praxeológico - Tipos de Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias -, buscando encontrar um modelo praxeológico a ser estudado. A nossa hipótese é que embora o documento norteador BNCC não indique explicitamente o estudo da Geometria dos Fractais na Educação Básica, nossa pesquisa possibilitará a conexão entre elas, a partir do momento em que identificarmos os objetos de conhecimento, as competências e as habilidades de diversas áreas de

conhecimento da Matemática e suas Tecnologias que podem ser desenvolvidos e trabalhados por meio dessa geometria.

Isso nos conduz à questão de pesquisa: *quais as habilidades e objetos de conhecimento, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), identificados nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021?*

A questão de pesquisa nos direcionou para o objetivo geral: *Identificar habilidades e objetos de conhecimentos da BNCC que foram suscitadas na modelização do assunto Geometria dos Fractais, por meio da Organização Matemática elaborada.*

Sendo os seguintes objetivos específicos:

-Caracterizar praxeologias matemáticas para a identificação das habilidades e objetos de conhecimento nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021.

-Investigar as técnicas e as tecnologias mobilizadas nas partes teóricas e práticas, do assunto Geometria dos Fractais nos livros didáticos a serem analisados.

Com a posse dessas informações, identificaremos, respectivamente, as habilidades e os objetos de conhecimento que compõem o documento norteador nacional BNCC, para a componente curricular Matemática e suas Tecnologias.

No início da pesquisa, tínhamos como pretensão analisar as quatro coleções de livros didáticos mais adotadas e escolhidos no PNLD 2021 nas 5 maiores cidades, em termos de habitantes, do estado do Paraná. No entanto, no estado do Paraná, a SEED (Secretaria Estadual De Educação) optou por escolher um material único para toda a Rede Estadual de Ensino. Dessa forma, como padrão, foram escolhidos os livros didáticos que tiveram maior número de indicação por parte dos professores, compondo uma única coleção.

Sendo assim realizamos a análise da coleção Prisma Matemática, dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Câmara de Souza, da editora FTD, aprovada e escolhida pelos professores do estado do Paraná no PNLD 2021 para ser utilizada na área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias.

Em razão de termos apenas uma única coleção para todo o estado do Paraná, optou-se por acrescentar outra coleção ao estudo. Para tanto, realizamos buscas no Portal Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE), de modo a identificar a coleção mais adotada em nível nacional.

Segundo os dados estatísticos fornecidos pelo FNDE, a coleção do Ensino Médio mais adotada no PNLD 2021 é a da Editora Moderna, com um total de 27.773.621 exemplares. Por

isso, em nossa pesquisa, também analisamos a coleção Diálogo Matemática e suas Tecnologias, da editora Moderna, de autoria de Lilian Aparecida Texeira.

A presente dissertação está dividida em três capítulos além da Introdução, das Considerações Finais e das Referências, conforme segue.

O Capítulo 1, intitulado “Desenvolvimento Teórico”, é dividido em cinco subseções, a saber: 1.1 Estudos preliminares sobre a Geometria dos Fractais; 1.2 Constructos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD); 1.3 Pesquisas associadas à Geometria e à TAD; 1.4 Sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC); 1.5 Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

O Capítulo 2, intitulado “Encaminhamentos metodológicos e desenvolvimento da pesquisa”, traz descrição a respeito do contexto da pesquisa, de sua característica e dos critérios utilizados para a análise dos dados produzidos nos livros.

O Capítulo 3, intitulado “Apresentação, Análise e discussão dos dados”, apresenta as análises e discussões dos dados produzidos a partir da modelização em termos de praxeologias.

Por fim, apresentamos, nas Considerações Finais da pesquisa, uma discussão dos resultados obtidos com base nas análises realizadas. Sem mais, trazemos as referências.

2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Nesta seção, apresentaremos as principais características dos aportes teóricos utilizados nessa pesquisa. Abordaremos os fundamentos teóricos da Geometria Fractal e os constructos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essa fundamentação fornece suporte para a análise realizada a seguir. Para tanto, desenvolvemos um breve histórico destacando os conceitos que fundamentam este estudo e os estudiosos que contribuíram para a pesquisa sobre esses temas. Ainda, nesta parte, apresentaremos o levantamento de teses e dissertações acerca deste tema, abordaremos sobre a Base Nacional Comum Curricular documento norteador da educação brasileira, e discutiremos também sobre o PNLD, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático, visto que nossa pesquisa tem como objeto livros adotados no estado do Paraná no PNLD 2021.

2.1 Estudos preliminares sobre a Geometria dos Fractais

Reconhecida como necessária em diversas áreas da matemática, a Geometria serve de base para compreender conceitos de Matemática avançada e de outras Ciências, pois tem importantes aplicações em problemas reais e está presente em boa parte de nossa linguagem cotidiana. É por meio da Geometria que se torna possível observar diversos fenômenos comportamentais e eventos que ocorrem ao longo dos séculos.

De acordo com a BNCC (2018), a Geometria envolve o estudo de um extenso conjunto de conceitos e procedimentos indispensáveis para solucionar problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. “Esses conceitos envolvem a compreensão desde as formas planas até as espaciais, desde as regulares até as mais irregulares” (CAMPOS, 2020, p. 15).

Lorenzato (1995) afirma que a Geometria possibilita ao indivíduo uma interpretação suficiente do mundo, tendo função essencial na sua formação. Além disso, permite uma conexão didático-pedagógica, pois muitos conteúdos, sejam algébricos ou aritméticos, podem ser explorados e explicados por meio desta área de conhecimento da Matemática.

[...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem habilidade, dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzidas e a visão da Matemática torna-se incompleta” (LORENZATO, 1995, p. 5).

A Geometria Euclidiana, até meados do século XIX, foi considerada única, com a função de descrever as formas geométricas encontradas na natureza. Com o passar do tempo, entretanto, a matemática vivenciou momentos de crises em suas estruturas paradigmáticas, e, desse modo, a Geometria Euclidiana cedeu espaço para as Geometrias não Euclidianas, possibilitando uma nova forma de interpretar e explicar certas ordens e padrões que até então se apresentavam como irregulares.

Dentre essas Geometrias não Euclidianas, teve desenvolvimento a Geometria dos Fractais, que modela as irregularidades da natureza e assume papel notável na interpretação da realidade, associando o ensino da matemática a elementos presentes no nosso ambiente de vivência, bem como o estudo de objetos geométricos com características diferentes dos euclidianos. Como afirmam Fuzzo *et al.* (2009, p. 11), “a Geometria Euclidiana se propõe a estudar formas regulares que quase sempre são feitas pelo homem, já a Geometria Fractal estuda padrões regulares e organizados dentro de uma aparente irregularidade, muito encontradas na natureza”.

Segundo Barbosa (2005), Benoit Mandelbrot é considerado o “Pai da Geometria Fractal” haja vista que, nascido em 1924, na Polônia, este pesquisador e matemático dedicou a vida aos estudos em Geometria. Nesse âmbito, os estudos dos Fractais tiveram início nas últimas décadas, por meio de investigações cujo tema eram as entidades geométricas, e tais entidades foram denominados por Mandelbrot de Fractais, nome baseado no adjetivo *fractus*, que significa “quebrar, criar fragmentos”.

Em seu livro *A Geometria Fractal da Natureza*, Madelbrot (1997) salienta que “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca da árvore não é lisa e tampouco a luz viajava em linha reta” (p.14). Desse modo, presumindo que a natureza exibia uma complexidade maior do que a oferecida pela Geometria Euclidiana, surge a necessidade de uma teoria para estudar e compreender essas formas complexas da natureza; daí a designação Geometria dos Fractais. Tal teoria permitiu descrever diversos dos modelos irregulares e fragmentados que encontramos ao nosso redor por meio da família de formas as quais o autor chamou “Fractais”.

Assim sendo, Mandelbrot definiu fractal com uma forma na qual as partes se assemelham com o todo, com invariância na sua forma, na medida em que sua escala é alterada, mantendo-se a forma idêntica à original. Essa definição aborda três características fundamentais da definição de um fractal: autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita, que serão apresentadas mais adiante.

Barbosa (2005, p. 12) evidencia que “a geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação”; semelhantemente, afirma que outros pesquisadores também tentaram apresentar uma definição para os fractais, não indo muito além, contudo, do que havia sido proposto por Mandelbrot. Falconer foi um dos pesquisadores que sugeriu o entendimento de fractal por caracterizações, propondo que um conjunto F é fractal se:

- F possui alguma forma de autossimilaridade, ainda que aproximada ou estatística;
- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou Interativo (BARBOSA, 2005, p.18-19).

Nesse sentido, os Fractais podem ser considerados como objetos que apresentam invariância na sua forma e que não possuem dimensão necessariamente inteira, uma vez que, à medida que a escala de visualização é ampliada, a sua forma original é mantida, contando com infinitos detalhes.

A Geometria dos Fractais está fortemente relacionada ao estudo do caos e busca um padrão dentro de um sistema visivelmente aleatório que fornece certa ordem a esse caos, trazendo um olhar diferenciado para as irregularidades, as depressões e o caótico. Ela também possibilita o estudo da geometria de maneira diferenciada, considerando a existência do belo no senso estético da matemática, e procurando explicar o traçado das formas irregulares (BARBOSA, 2005, p. 10):

Nessas quatro ou cinco décadas vimos o nascimento e o subsequente desenvolvimento de uma nova ciência, denominada CAOS. Biólogos, físicos, economistas, astrônomos, meteorologistas, ecologistas, fisiologistas e cientistas de várias outras especialidades se depararam com questões oriundas da natureza, procurando dar enfoques mais adequados à sua complexidade

Podemos encontrar representações dos Fractais em alguns objetos do nosso cotidiano quando nos deparamos com representações em formas irregulares – uma das características dos Fractais. Também podemos observar o comportamento e a estrutura de montanhas, árvores, nuvens, um floco de neve, entre outras manifestações possíveis de serem interpretadas fractalmente.

Assim, é correto afirmar que a Geometria dos Fractais possui aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento, contribuindo em muitos estudos para o entendimento dos processos físicos, de formação e comportamento de fenômenos.

Na constituição de nosso mundo, a natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais

da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas (BARBOSA, 2005, p. 10).

Em outras palavras, essa nova área das ciências contribui, por exemplo, na Biologia, no que diz respeito aos estudos do crescimento das plantas; na Física, possibilitando o estudo da distribuição das galáxias; na Medicina, permitindo uma visão da anatomia interna do corpo; na Engenharia, auxiliando nas comunicações telefônicas, analisando os ruídos; na Arte, na Matemática, no estudo dos conceitos geométricos e de vários outros conteúdos (BALDOVINOTTI, 2011).

Para Santaló (2006), a Geometria dos Fractais tem atraído muito interesse nas últimas décadas devido à sua ampla gama de aplicações, desde as artes plásticas, à física, biologia e astronomia, e por possuir muitas conexões com a computação, bem como com a teoria do "caos", em conjunto com física e filosofia.

Na próxima seção, apresentamos as três características consideradas fundamentais para designar um fractal: a autossimilaridade, a sua dimensão fracionária e a sua complexidade infinita.

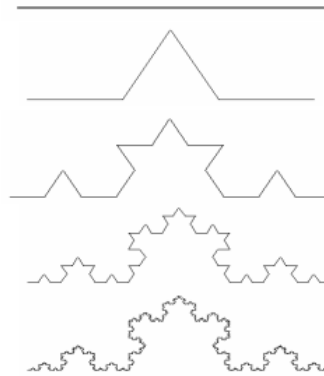
2.1.1 Principais características de um fractal

Mandelbrot (1998) definiu um objeto fractal por meio de três características principais: autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita. No léxico de Objectos Fractais, o autor expõe uma possível definição para fractal baseadas nessas três características:

O seu significado é intuitivo. Diz-se de uma figura geométrica ou de um objeto natural que combine as seguintes características: a) As suas partes têm a mesma forma ou estrutura que o todo, estando, porém, a uma escala diferente e podendo estar um pouco deformadas; b) A sua forma é ou extremamente irregular ou extremamente interrompida ou fragmentada, assim como todo o resto, qualquer que seja a escala de observação; c) Contém "elementos distintos" cujas escalas são muito variadas e cobrem uma vasta gama (MANDELBROT, 1998, p.171).

No que se refere à autossimilaridade, essa é considerada a característica mais marcante e elementar de um fractal, uma vez que estes objetos "constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes" (BARBOSA, 2005, p. 9). À medida que ocorre uma transformação de escala, tem-se que cada porção do fractal é semelhante ao todo, sendo que essa semelhança pode ser de forma aproximada ou exata. Para exemplificar a autossimilaridade em fractais clássicos, temos como exemplo a Curva de Koch, na qual se pode observar que cada parte do fractal é a própria curva, como mostra a figura 1.

Figura 1 - Construção da curva de Koch



Fonte: Carvalho (2005, p. 16).

A dimensão fracionária de um fractal também é considerada uma característica fundamental desse objeto. Ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, a dimensão de um objeto fractal não é necessariamente um número inteiro, podendo ser um número fracionário ou irracional. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, estando relacionada com o seu grau de irregularidade. Para Barbosa (2005, p. 66), trata-se de “[...] um novo tipo de dimensão denominada dimensão fractal, associada à aspereza, espessura, densidade, textura etc”. Na figura 2, é possível observar essa diferença na dimensão de um objeto euclidiano para um objeto fractal.

Figura 2 - Comparação da dimensão euclidiana e dimensão fractal

Dimensão Euclidiana		Dimensão Fractal	
.	0 (ponto)	---	0.4
—	1		1.4
	2		1.8
	3		2.6

Fonte: Almeida (2016, p. 24).

Por fim, a complexidade infinita indica a impossibilidade de o fractal chegar à sua imagem final, uma vez que sua ampliação pode ocorrer infinitamente. Isso ocorre devido ao processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações, como pode ser visto na figura 3, a seguir.

Figura 3 - Complexidade infinita



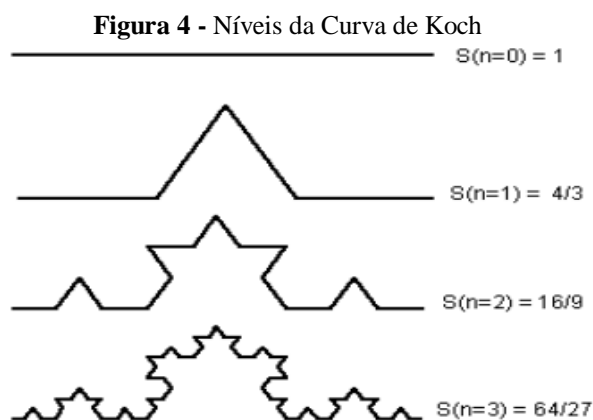
Fonte: Almeida (2016, p.28).

Obviamente, sua imagem chega a um estágio limite; porém, o fractal ideal é contínuo infinitamente.

Na sequência, apresentamos como exemplo três modelos de fractais na Matemática: a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski e o Hexágono de Dürer, discutindo brevemente sobre suas potencialidades no ensino.

Considerado um importante fractal para os estudos iniciais e compreensão da geometria dos fractais, a Curva de Koch foi criada pelo matemático sueco Von Kock, que posteriormente deu origem à “Ilha de Kock” ou “Floco de Neve de Kock”. Citada pela primeira vez por volta de 1904 e 1906, “essa curva é um belo exemplo de curva sem tangente, ela pode ser modificada com outras construções análogas e deve ter influenciado bastante Mandelbrot” (BARBOSA, p.38, 2005).

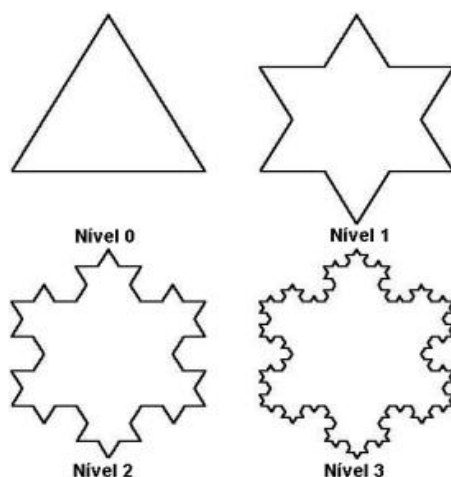
Sua construção tem início a partir de um segmento de reta, que, em seguida, é dividido em três partes de mesma medida em que se substitui a parte central por dois segmentos de mesmo tamanho, formando um triângulo equilátero sem um dos lados. Considerando então o novo segmento de reta e repetindo o processo continuamente, é formado o fractal da Figura 4:



Fonte: Assis *et al.* (2008, p.05).

O processo de construção do fractal Ilha de Kock, também chamado de Floco de Neve, é o mesmo da curva de Koch. O que o diferencia é a construção a partir de um triângulo equilátero, em vez do início com um único segmento de reta.

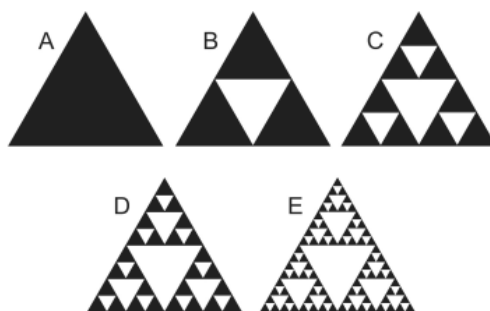
Figura 5 - Níveis da Ilha de Kock



Fonte: Assis, *et al* (2008, p.07).

Também apresentaremos, como exemplo, o triângulo de Sierpinski. Este fractal foi proposto em 1916 pelo matemático polonês Waclav Sierpinski (1882-1969), considerado por Barbosa (2005) um dos mais importantes dos matemáticos famosos. O processo de construção mais comum do triângulo de Sierpinski é por meio de remoção de triângulos: inicialmente, se considera um triângulo equilátero; em seguida, ele é dividido em quatro novos triângulos também equiláteros a partir do ponto médio de cada lado; logo após, o triângulo central da figura formada é removido; por fim, repete-se o mesmo processo em cada um dos triângulos não eliminados, e assim sucessivamente.

Figura 6 - Níveis do Triângulo de Sierpinski

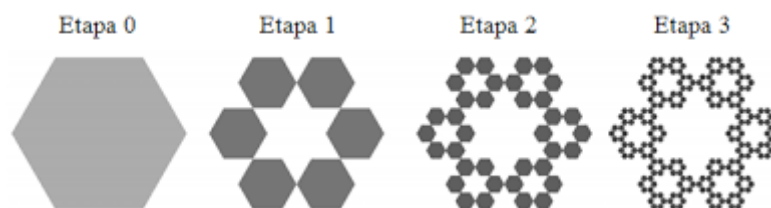


Fonte: Lisboa (2019, p. 40).

Em último lugar, apresentamos os fractais tipo Dürer propostos pelo matemático Albrecht Dürer. Estes “[...] são fractais criados por meio de polígonos regulares, fazendo-se a translação do polígono inicial em escala menor e ajustando dentro desse polígono com encontro dos vértices” (ZANOTTO, p. 35, 2015), por meio de um processo recursivo, são gerados a partir de polígonos regulares de cinco, seis e até oito lados.

Para obter o hexágono de Dürer, inicialmente constrói-se um hexágono regular (nível 0). Em seguida, em cada vértice pode-se inserir hexágonos menores, de modo que um dos seus ângulos coincida com ângulo do hexágono regular do nível anterior, com a condição de que tenham um vértice em comum. Repetindo-se essa ação em cada lado, construindo 6 hexágonos regulares novos, forma-se ao centro um hexágono regular estrelado. Removem-se os triângulos intermediários e o hexágono estrelado central, obtendo assim o primeiro nível de construção do fractal. Por fim, repete-se essa ação em cada novo hexágono, e assim sucessivamente.

Figura 7 - Níveis do Hexágono de Dürer



Fonte: Martires e Rezende (2017, p. 09).

Devido a seu grande potencial de possibilitar análises e discussões acerca de alguns objetos da natureza, a Geometria dos Fractais tem atraído interesse científico e educacional, dado que auxilia no estudo dos comportamentos físicos da natureza e oferece um vasto leque de conteúdos que podem ser explorados por meio dela. O que antes era limitado apenas às comunidades de pesquisadores, envolvendo cálculos complexos, está se transformando em uma linguagem habitualmente utilizada no contexto escolar. Como menciona Fuzzo (2008):

[...] é possível trabalhar conceitos de geometria fractal dentro da sala de aula e, não menos importante, [...] relacionar conceitos com a Geometria Euclidiana, além de ser uma maneira nova e diversificada de motivar e incentivar os alunos ao estudo (FUZZO, 2008, p. 10).

Desse modo, é possível pensarmos no estudo da Geometria dos Fractais nas aulas de Matemática, pois conforme Almeida (2016), diversos conteúdos do currículo do Ensino Médio podem ser abordados por meio de propriedades da Geometria dos Fractais, entre eles: funções, logaritmos, progressões, área e volume.

Para Sallum (2015), a introdução de fractais no Ensino Médio proporciona o trabalho com diversos aspectos da matemática, tais como: processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetro de figuras complexas, dentre outros.

Assim sendo, a inclusão da Geometria dos Fractais no ensino permite aos alunos a ampliação e o aprimoramento de seus conhecimentos geométricos, por meio da integração de diversos assuntos da matemática, explorando aspectos relacionados à sua beleza, a complexidade infinita, e aplicabilidade na natureza e na matemática. Além do mais, permite e

possibilita o uso de recursos e ferramentas de ensino para estudar os conceitos matemáticos, como ferramentas de desenho geométrico, *software* de geometria dinâmica e materiais manipulados. Segundo Carvalho (2005), a Geometria dos Fractais desenvolve no aluno seu caráter e espírito experimental, auxiliando nos estudos dos fenômenos naturais e no entendimento de objetos não tradicionais.

Assim, a inserção da Geometria dos Fractais em sala de aula provoca a quebra do paradigma de que a matemática é algo pronto e acabado; a fácil beleza e semelhança com os elementos da própria natureza apresentadas pelos fractais desvela aos alunos suas aplicações no cotidiano, e, logo, que a matemática que se estuda é aplicável. Rabay (2013, p.87), afirma que “Mesmo que abordado em diferentes níveis, o uso da geometria do fractal provoca nos alunos um olhar diferenciado no mundo que nos rodeia”.

Barbosa (2005) incentiva o trabalho com Geometria dos fractais em sala de aula e afirma:

Cremos, no entanto, que para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração e talvez evidenciando o êxtase na contemplação da beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais (BARBOSA, 2005 p.14).

Neste contexto, Barbosa (2005) enfatiza que a Geometria dos Fractais possibilita conexões com várias ciências, pois muitas situações exigem uma geometria mais rica em detalhes, uma vez que está também permite a difusão do acesso a computadores e à tecnologia da informação. Além disso, propõe duas formas de explorar os fractais em sala de aula: uma delas é estudar as relações numéricas dos mesmos, como por exemplo: contagem, perímetro, áreas e volumes. A outra forma é explorar os fractais despertando e desenvolvendo o senso estético, pela visualização dos mesmos, levando o aluno a contemplar o belo e a harmonia existente nos fractais.

Nessa direção, as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática (DCE) do Paraná ressaltam a abordagem dos Fractais tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, indicando que, dentro do conteúdo estruturante Geometria, seja abordado o conteúdo Geometrias não Euclidianas. Recomenda também o estudo a respeito da Geometria dos Fractais, podendo assim serem explorados o floco de neve e a curva de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski (PARANÁ, 2008).

No que diz respeito à BNCC, um dos documentos mais recente da educação que norteia os currículos dos sistemas educacionais, os fractais foram inseridos de forma bem sucinta, mencionados na habilidade EM13MAT105, a qual indica a utilização das noções de

transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas na construção de figuras e análise de elementos da natureza e diferentes produções humanas, entre elas os *fractais*, as construções civis, obras de arte, entre outras (BRASIL, 2018, p. 533). Dessa forma, mesmo que a Geometria dos Fractais não esteja de modo explícito na BNCC, nossa pesquisa mostrará as diversas contribuições para a aprendizagem da matemática por meio do estudo e da exploração desse tema.

Tendo conhecimento das diversas possibilidades de estudos por meio da Geometria dos Fractais, nos interessamos em pesquisar como tal assunto se encontra em livros didáticos do Ensino Médio e quais as suas relações com os objetos de conhecimento e as habilidades indicadas pela Base Nacional Comum Curricular. É fato que o livro didático não constitui fonte apenas de informação para consulta, mas também de popularização do conhecimento que compõe o currículo escolar nas áreas de estudo da Educação Básica, assumindo o papel de produtor e reproduzidor do conhecimento (GONÇALVES, 2013).

Para Brandão (2013), mesmo coexistindo diversos materiais de apoio ao professor, como quadros, mapas, recursos tecnológicos, dentre outros, o livro didático ainda ocupa um papel central no universo escolar, tendo grande impacto na atuação dos professores em sala de aula, influenciando diretamente o processo de ensino e aprendizagem. O livro didático pode ser usado tanto para suporte ao professor durante sua prática quanto também para o aluno na realização de atividades e releitura dos conteúdos estudados.

De acordo com Barbosa (2017, p. 25) “o livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois, no contexto brasileiro, ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente”. Portanto, podemos destacar a influência da abordagem do conteúdo no livro didático, na atuação profissional dos professores e no conteúdo a ser ensinado.

Neste contexto, realizaremos uma análise praxeológica das abordagens da Geometria dos Fractais em uma coleção de livros didáticos adotados no estado do Paraná e a coleção que mais forneceu exemplares no PNLD 2021 no país, de modo a identificar as técnicas e as tecnologias utilizadas na exploração dos Fractais que encontraremos nos materiais a serem pesquisados. Em vista disso, na sequência apresentaremos a Teoria Antropológica do Didático que fundamenta nossa pesquisa, a qual nos permitirá a construção das Organizações Matemática.

2.2 Constructos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Proposta por Yves Chevallard no final do século XX e desenvolvida no campo da Didática da Matemática, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) tem como objetivo analisar situações de ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, os estudos da TAD podem ser aplicados em qualquer Ciência, uma vez que podemos trabalhar com seus conceitos em atividades desenvolvidas ao longo de um processo de ensino não necessariamente pertencente à Matemática.

Segundo Almouloud, Farias e Henrique (2018), a TAD é considerada um prolongamento da Teoria da Transposição Didática, também proposta por Chevallard, a qual inclui a didática no campo da Antropologia, uma vez que posiciona o estudo da Matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e sociais. Em outras palavras, ela estuda o homem diante do saber matemático e, mais especificamente, diante das situações matemáticas.

Dessa forma, é correto afirmar que a TAD tem como proposta o estudo da matemática baseada nas ações humanas, tomando o homem como objeto para os estudos matemáticos, mediante suas ações no meio em que vive. Seu foco é o estudo das organizações praxeológicas pensadas para o ensino e aprendizagem da matemática, servindo de suporte à compreensão dos percursos trilhados pelos saberes até se tornarem objeto de ensino. Uma vez que a TAD considera que toda atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard de “praxeologia” ou “organização praxeológica”, ela oferece subsídios para investigar e modelar a atividade matemática (BITTAR, 2017).

Diante disso, destacamos que em nossa pesquisa serão realizadas análises, em livros didáticos, do objeto de saber “Geometria dos Fractais”, visando investigar as organizações praxeológicas para o seu estudo, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

É importante destacar que, basicamente, Chevallard (1999) apoia sua teoria em três noções primitivas e fundamentais: Instituições (I), Objeto (O), Pessoa (X) e Relação Pessoal ou Institucional (R), descritas a seguir.

Uma Instituição (I) é um dispositivo social, com uma extensão bem reduzida no espaço total, mas que permite e impõe a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e pensar, passando a ter um sentido bem mais amplo do que lhes é comumente atribuído. Dessa maneira, instituições são locais onde um saber vive, a exemplo de “uma sala de aula” ou “uma família” – consideradas instituições pelo fato de serem compostas por diferentes pessoas que

compartilham de um modo próprio de pensar e agir, ou seja, caracterizando um local não somente no sentido físico, mas onde pode se desenvolver uma praxeologia. Nesse sentido, de acordo Chevallard (1999), todo saber é saber de uma instituição, e assim dizendo, um determinado saber nunca existe por si só, mas é construído em uma determinada sociedade e sustentado por uma ou mais instituições.

Quando se conceitua instituição, torna-se necessário refletir de que maneira as condições de existência de um saber sofrem alterações de uma instituição para outra, dando gênese ao termo “ecologia dos saberes” que, segundo Chaachoua e Bittar (2019), refere-se ao estudo das condições de existência de um saber em uma determinada instituição.

Assim, pode-se dizer que a “ecologia dos saberes” constitui não só um estudo das condições de existência de um saber em uma determinada instituição, dos objetos que podem viver ali ou, ainda, dos que são impedidos de viver em tais condições; mas, sobretudo, um meio de questionar a realidade: o que e por que existe? Ou não existe? O que poderia existir? Em quais condições? Diante disso, realizar uma análise de livros didáticos permitirá estudar possibilidades da Ecologia da Geometria dos Fractais nesses contextos.

Entretanto, toda instituição possui seus objetos, e esses fazem sentido ao sujeito dentro da instituição à qual ele se submete. Mas o que é objeto na TAD? Chevallard (2003) afirma que tudo pode ser considerado objeto, incluindo as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições; em particular, para o autor, qualquer trabalho, ou seja, qualquer produto intencional da ação humana é considerado um objeto.

Para Chevallard, “um objeto é qualquer entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Tudo é, portanto, objeto” (CHEVALLARD, 2003, p. 1.). Nesse sentido, um objeto somente existirá a partir do momento em que for reconhecido como existente por uma pessoa X ou uma instituição I. Assim sendo, configura o que Chevallard (2003) chama de relação pessoal de X com um objeto O, denotada por $R(X, O)$, o que consiste no conjunto de todas as experiências de X com O; e a relação institucional de I com O, representada por $R(I, O)$.

Cabe então agora expor outra noção fundamental da TAD: a noção de pessoa. Chevallard (2003) adverte que não se deve levar a ilusão de que todo indivíduo é uma pessoa; para ele, a pessoa se constitui a partir de suas relações pessoais com os objetos, uma vez que a pessoa muda com o tempo, e o sistema de relações pessoais de X evolui, a saber, objetos que não existiam para ela passam a existir; outros deixam de fazê-lo, mas o indivíduo permanece invariante, sendo tão somente a pessoa a mudar.

Tendo isso em vista, Menezes e Santos (2015) afirmam que ao se relacionar com uma instituição I qualquer, o indivíduo se torna sujeito, ou melhor, isso ocorre quando esse se sujeita a uma Instituição I, sob suas demandas, hábitos, formas; enfim, se sujeitando a essa relação. É mediante as várias relações que o indivíduo tem com diferentes instituições que se constitui a pessoa; melhor dizendo, o conjunto de sujeitos do indivíduo é que forma a pessoa X que vai se modificando à medida que estabelece suas relações com diferentes instituições ao longo do tempo.

Essa modificação se define na TAD como aprendizagem, a qual consiste na modificação na relação pessoal com um objeto. Diante disso, Chauchoua e Bittar (2019) evidenciam:

A aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo X com O. Ou essa relação começa “a existir” (se ela ainda não existia), ou essa relação é modificada (se ela já existia). Essa aprendizagem muda a pessoa (não o indivíduo) (CHAACHOUA, BITTAR, 2019, p. 31).

Dessa forma, com o propósito de analisar as práticas que ocorrem a partir das relações entre sujeitos e objetos numa determinada instituição, fez-se necessário delinear ferramentas que auxiliassem nessa análise, ou seja, que detalhassem e modelassem a prática matemática, incluindo sua dimensão material, e que compreendessem os corpos de conhecimentos matemáticos como indissociáveis de suas práticas.

Assim sendo, Chevallard (1999) desenvolveu a noção de organização praxeológica. Nas palavras de Chauchoua e Bittar (2019, p.3), a praxeologia, no âmbito da TAD, configura um método para analisar as práticas que ocorrem no interior de uma instituição, com o intuito de “descrever a relação institucional que condiciona a relação pessoal de um sujeito com um objeto do saber” (CHAUCHOUA, BITTAR, 2019, p.3). Portanto, pode-se dizer que esse modelo foi introduzido como uma resposta a uma necessidade metodológica, para descrever as relações institucionais.

Na seção seguinte iremos apresentar e aprofundar a noção de organização praxeológica, composta pelos seguintes elementos: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, que permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática.

2.2.1 Organizações Praxeológicas

A organização praxeológica é proposta para descrever qualquer atividade, matemática ou não, e permite modelar, em geral, as práticas sociais e, em particular, a atividade matemática. Segundo Chevallard (1999), qualquer prática institucional pode ser analisada a partir de diferentes pontos de vista e de diversas formas, dentro de um sistema de tarefas relativamente

bem definidas, no qual o cumprimento de uma tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.

De acordo a Teoria Antropológica do Didático, uma organização praxeológica pode ser compreendida como uma forma de explicar a abordagem do assunto matemático através dos quatro elementos que a constituem: tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). Em outras palavras, a praxeologia matemática estuda o conteúdo matemático presente em tipos de tarefas (T) a serem resolvidos por meio de técnicas (τ), justificadas por tecnologias (θ) e validadas pelas teorias (Θ) relativas a determinado objeto do saber. Descreveu-se, assim, o “quarteto praxeológico”, simbolizado pela notação $[T, \tau, \theta, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999).

A palavra praxeologia deriva dos termos gregos “práxis” e “logos”. “Práxis” significa prática, e alude ao bloco $[T, \tau]$, chamado “prático-técnico” ou “saber-fazer”, composto pelo tipo de tarefa e suas técnicas. Já o termo “logos” significa “razão”, e é referente ao bloco “tecnológico-teórico” $[\theta, \Theta]$, designando o “saber”, constituído por tecnologia e pela teoria que a fundamenta.

Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas e, de outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que podemos chamar de “prática”, ou, em grego, a práxis. A segunda é composta por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de logos (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 251).

Portanto, para explicitar seu modelo, Chevallard (1998) elenca as atividades humanas em termos de tarefas a serem cumpridas. Para a TAD, o tipo de tarefa (T) indica uma ação diante de uma proposta e se expressa inicialmente por um verbo que, por si só, caracteriza um gênero de tarefa. Utilizando o âmbito matemático como exemplo, teríamos: calcular, decompor, resolver ou somar, termos que não determinam o conteúdo em estudo e, quando acompanhados por alguma especificidade, indicam um tipo de tarefa.

Segundo Chavellard (1999), um gênero de tarefa só existe na forma de distintos tipos de tarefas nas quais o conteúdo está fortemente especificado. Calcular não é um tipo de tarefa, mas o cálculo do valor (exato) de uma expressão numérica que contém um radical é um tipo de tarefa, assim como calcular o valor de uma expressão que contém a letra x , onde x é um valor determinado, também é um tipo de tarefa, ou seja, os tipos de tarefas são aqueles semelhantes, considerando determinado tema.

A maneira como se realiza uma tarefa recebe o nome de técnica (τ). Ela compõe o bloco determinado de saber-fazer formado por tipo de tarefa e técnica. Chevallard (1999) ressalta que para conseguirmos cumprir uma tarefa, é necessário dispor de pelo menos uma maneira que nos

possibilite realizá-la. Ainda, em consonância com o autor, as técnicas não serão as mesmas para todos os tipos de tarefas, ou seja, para cada tarefa existe uma técnica a ser utilizada.

Toda técnica é justificada por uma tecnologia (Θ), que tem por objetivo justificar racionalmente a técnica utilizada na realização da tarefa, garantindo sua viabilidade e indicando o que foi necessário para implementar a referida técnica e resolver a tarefa em questão, de modo a torná-la compreensível. Como aponta Chevallard (1999), a tecnologia tem por função assegurar que a técnica seja cumprida corretamente, explicar por que ela é correta, torná-la inteligível, e, por fim, produzir novas técnicas, fornecendo elementos para modificação, ampliando seu alcance e aumentando sua abrangência, superando assim as possíveis limitações.

Por fim, a teoria (Θ) completa o quarteto praxeológico, tendo como objetivo justificar e explicar de maneira aprofundada os requisitos apresentados e utilizados na tecnologia. Chevallard (1999) afirma que a teoria é a “tecnologia de sua tecnologia”, e, assim, ela se torna o elemento derradeiro da praxeologia.

Como exemplo disso, podemos considerar uma tarefa do tipo: “calcule a área de um quadrado com lado medindo 2 cm. Uma possível técnica para cumprir esse tipo de tarefa consiste em utilizar a fórmula da área do quadrado. No entanto, a fórmula em si, se apresentada a uma pessoa que não conhece a demonstração, não passará de uma sentença ausente de significado. Assim, neste caso o processo de demonstração da fórmula da área do quadrado desempenha o papel da tecnologia que justifica a técnica de utilizar a fórmula da área do quadrado. Por fim de maneira mais aprofundada a tecnologia pode ser justificada e sustentada pela teoria dos elementos de Euclides.

Ainda a esse respeito, de acordo com Maduro (2015), qualquer praxeologia formada pelos elementos “tarefa”, “técnica”, “tecnologia” e “teoria”, destinada ao estudo de uma atividade matemática, é chamada de “praxeologia matemática”. No entanto, para elaborar uma praxeologia matemática é preciso uma Praxeologia Didática, uma vez que toda atividade matemática está ligada a uma forma de organização.

Neste contexto, a organização didática emerge a partir da necessidade de explicar “como resolver determinadas tarefas”, ou seja, em uma organização matemática, “a praxeologia didática permite descrever, respectivamente, escolhas matemáticas e didáticas em uma determinada instituição” (BITTAR, 2017, p. 369).

Assim sendo, a organização didática se refere à maneira de realização do estudo de um determinado assunto, ao conjunto de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria que são mobilizadas para o estudo de certo tema. Além disso, refere-se às escolhas realizadas referentes à

abordagem, estrutura e desenvolvimento do trabalho de determinado conceito ou conteúdo (CHEVALLARD, 1998).

É possível então compreender a organização didática como um modo pelo qual é construída e organizada a praxeologia matemática, uma vez que, além de observar os objetos matemáticos, a OD observa também como essa situação foi construída.

Por organização didática podemos entender, a priori, o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta. O enfoque clássico em didática da matemática tem ignorado em geral os aspectos mais genéricos de uma organização de estudo de um tipo dado de sistemas didáticos (CHEVALLARD, 1999, p. 238).

Conforme Chevallard (1999), a praxeologia didática, além de ser estruturada pelo quarteto, também pode ser descrita por momentos didáticos, que, por sua vez, permitem descrever o processo didático, ou seja, a atividade de estudo, o que implica dizer que, independentemente das escolhas adotadas no processo de estudo de uma OM em torno de um objeto matemático, algumas situações estão necessariamente presentes, mesmo que se apresentem de formas diversificadas, tanto quantitativa como qualitativamente.

Essas situações serão designadas de momentos de estudos ou momentos didáticos, uma vez que podemos dizer que qualquer que seja o caminho escolhido, ele conduzirá de maneira inevitável a um momento de fixação, ou de institucionalização, ou um momento que demandará o questionamento do que é válido acerca do que foi construído, caracterizando o momento de avaliação, dentre outros.

Chevallard (1999) salienta que não existe uma ordem cronológica entre eles, uma vez que a ordem posta é amplamente arbitrária, visto que os momentos didáticos são, sobretudo, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica, podendo se repetir diversas vezes.

O primeiro momento refere-se ao encontro inicial com a organização praxeológica por meio de tarefas. Esse momento levará ao desenvolvimento de relações institucionais e pessoais com o objeto, e as relações construídas ao longo de todo o processo de estudo desempenharão um importante papel na aprendizagem. Esse encontro pode acontecer de diferentes maneiras, podendo se caracterizar por encontro ou reencontro com uma organização matemática, passível de acontecer tanto na sala de aula, como em uma situação do cotidiano ou em qualquer outro lugar. Teoricamente, esse momento didático não tem a pretensão de explorar excessivamente o objeto matemático, o que poderá ser feito em conjunto com os demais momentos.

O segundo momento consiste na exploração de um tipo de tarefa e início da construção de uma técnica que permita resolver a tarefa estudada. Chevallard (1999) enfatiza que a

exploração de um determinado tipo de tarefa, por si só, não faria sentido se não fosse para a construção de técnicas, que é o principal objetivo de qualquer atividade matemática. Para ele, “a elaboração da técnica está no coração da atividade matemática” (CHEVALLARD, 1999, p.21).

O terceiro momento consiste na elaboração do entorno tecnológico-teórico. Esse momento está diretamente relacionado com os anteriores, e começa a ser construído desde o primeiro encontro, tornando-se cada vez mais preciso no decorrer do estudo. Nessa etapa, ocorrem as demonstrações e justificativas da técnica estudada, e essa justificativa pode ser aplicada a outros tipos de problemas. Em algumas situações, dependendo do professor ou do autor do livro, esse pode vir a ser o primeiro momento didático, portanto as atividades propostas serão essencialmente para a simples aplicação dos conhecimentos estudados.

O quarto momento é reservado para o trabalho com a técnica, tendo como objetivo estudá-la e explorá-la. Nesse momento, é necessário justificar e explicar as técnicas utilizadas no estudo, com a intenção de torná-las mais eficientes e confiáveis.

No quinto momento ocorre a institucionalização da praxeologia, caracterizado pela formalização do saber matemático, desprezando aqueles saberes que foram mobilizados para a construção da praxeologia e que não mais são essenciais.

O sexto momento de estudo é considerado a partir de dois aspectos, a saber, a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional. É o momento de reflexão em relação às técnicas atribuídas, sobre o que foi aprendido e estudado até o momento em questão e também a respeito da validade de determinada técnica.

Em nossa investigação, buscaremos identificar a ocorrência desses momentos para a compreensão de como o tema Geometria dos Fractais é abordado nos livros didáticos do Ensino Médio, e quais objetos do conhecimento propostos pela BNCC são explorados nessas abordagens.

Desse modo, para compreender como se articulam as organizações didáticas e as organizações matemáticas na abordagem do conteúdo Geometria dos Fractais, realizaremos o estudo desse objeto matemático, de maneira a identificar o bloco tecnológico-teórico, o bloco prático-técnico e os momentos didáticos, os quais constituem as praxeologias que modelam o estudo do objeto de pesquisa com a aplicação de diferentes tipos de tarefas. Nessa pesquisa, entendemos como tarefas as atividades resolvidas e as atividades propostas nas duas coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Médio, selecionadas para a análise, propostas pelo PNLD 2021.

Portanto, com o objetivo de conhecer a respeito das produções científicas que se fundamentam na Teoria Antropológica do Didático, realizamos um levantamento de teses e dissertações acerca deste tema, o qual apresentaremos na sequência.

2.3 Pesquisas associadas à Geometria e à TAD

Nessa etapa do trabalho, apresentaremos um levantamento de pesquisas que se dedicaram a investigar a temática em estudo. Para a obtenção dos dados aqui expostos, foi feita busca no banco de dados da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), e, como critério, optamos por teses e dissertações publicadas entre os anos de 1990 e 2020 de programas referentes a Ensino e Educação. Com o intuito de encontrarmos pesquisas que estejam relacionadas com a nossa proposta, para uma primeira busca, utilizamos como filtro os termos “Geometria”, “Livro didático” e “Teoria Antropológica do Didático”. Embora o assunto a ser pesquisado seja a Geometria dos Fractais, optamos por buscar somente por “Geometria”, uma vez que, ao buscarmos “Geometria dos Fractais” ou somente o termo “Fractais” juntamente com “Livro Didático” e “Teoria Antropológica do Didático”, não obtivemos nenhum registro de pesquisas realizadas.

Entretanto, apresentamos neste texto, um único trabalho que aborda as três temáticas “Geometria dos Fractais”, “Livro Didático” e “Teoria Antropológica”, desenvolvido por uma integrante do nosso grupo de pesquisa GPEG (Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria), mas que até o presente momento não consta no BDTD.

Durante a pesquisa na BDTD, identificamos 16 trabalhos que envolvem os temas acima descritos. No quadro 1, a seguir, demonstrando seu título, tipo do documento, ano de defesa e autores, estão representados os trabalhos encontrados:

Quadro 1 - Dissertações e Teses – TAD, Geometria e Livro Didático

TÍTULO DO TEXTO	TIPO DOCUMENTO	ANO DA DEFESA	AUTOR	PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO	INSTITUIÇÃO DE DEFESA
Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6 ^a a 8 ^a séries de Moçambique	Dissertação	2010	Jacinto Ordem	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6 ^o ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático	Dissertação	2011	José Valério Gomes da Silva	Educação Matemática	Universidade Federal de Pernambuco.
A Organização Praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7 ^a série do Ensino Fundamental	Dissertação	2008	Cristini Kuerten Maia	Educação Científica e Tecnológica	Universidade Federal de Santa Catarina.
Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos	Dissertação	2010	Marcia Varela.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Progressões aritméticas e geométricas: praxeologias em livros didáticos de matemática	Dissertação	2011	Eliane Aparecida Martins de Almeida	Educação	Universidade Federal De Mato Grosso.
Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental	Dissertação	2016	Valéria Ciabotti	Educação	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Polígonos regulares inscritos no círculo: uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental	Dissertação	2012	Gladiston dos Anjos Almeida	Educação Matemática	Universidade Federal do mato Grosso
Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias	Dissertação	2006	Renata Rossini	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Um estudo sobre o Ensino de Transformações Geométricas: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais	Dissertação	2007	Vania de Andrade luz	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
A representação do espaço nos anos	Dissertação	2008	Kátia Sebastiana Carvalho dos Santos Faria	Educação	Universidade Federal De Mato Grosso do Sul.

iniciais do ensino fundamental					
Progressões aritméticas e geométricas: praxeologias em livros didáticos de matemática	Dissertação	2012	Eliane Aparecida Martins de Almeida	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso
Uma análise praxeológica da geometria fractal em livros didáticos do ensino médio	Dissertação	2021	Ana Eliza Pescini	Educação	Universidades Estadual do Paraná
A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático	Tese	2015	Marilene Rosa dos Santos.	Ensino das Ciências	Universidade Federal Rural do Pernambuco.
Geometria Analítica no Espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos	Tese	2015	Acylena Coelho Costa	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas	Tese	2016	Maridete Brito Cunha Ferreira	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro	Tese	2018	Lucia de Fátima Durão Ferreira	Educação Matemática e Tecnologias	Universidade Federal de Pernambuco.
Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática	Tese	2010	Antônio Sales	Educação	Universidade Federal De Mato Grosso do Sul.

Fonte: A autora (2022).

Após a busca e catalogação dos resultados, foi realizada leitura de títulos, resumos, objetivos e introdução de cada uma das pesquisas. Isso nos levou a, dentre as 16 pesquisas encontradas, selecionar 7 que apresentaram relação com a nossa proposta de trabalho. O primeiro critério utilizado para essa seleção foi “pesquisas que realizaram organizações matemáticas e didáticas do conteúdo Geometria em livros didáticos”, o que nos levou a elencar Silva (2011), Ordem (2010), Almeida (2011), Varella (2010) e Costa (2015).

O segundo critério utilizado teve base nas pesquisas que, além de realizar as organizações, fizeram uma análise pautada em documentos oficiais, e, neste caso, encontramos o trabalho desenvolvido por Almeida (2011), que verificou se as praxeologias encontradas condizem com as propostas dos documentos oficiais.

Por fim, apresentamos o trabalho de Pescini (2021), que abordou as três temáticas, “Geometria dos Fractais”, “Livro Didático” e “Teoria Antropológica”, tendo relação próxima com nossa pesquisa, uma vez que a autora analisou as abordagens da Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio e modelizou organizações praxeológicas de modo a investigar as escolhas matemáticas e didáticas dos autores das coleções. Na nossa pesquisa, também analisamos as abordagens dessa Geometria em duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio e modelizamos organizações praxeológicas, porém, identificamos as habilidades e os objetos de conhecimento que compõem o documento norteador nacional BNCC para o componente curricular Matemática e suas Tecnologias, mobilizados nessas abordagens.

Isto posto, iniciamos esta parte de nosso trabalho trazendo um breve resumo dos trabalhos selecionados.

Silva (2011), em seu estudo, propôs-se analisar a abordagem dos assuntos *comprimento*, *perímetro* e *área*, em 16 livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, aprovados no PNLD/2008 e 2011 sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Para tanto, Silva realizou uma análise qualitativa e documental de livros didáticos. As análises foram divididas em três etapas: a primeira etapa consistiu na obtenção de uma visão geral do trabalho com esses conteúdos nos livros didáticos, e auxiliou na escolha dos livros a serem analisados na etapa seguinte; a segunda realizou a identificação dos tipos de tarefas contempladas e predominantes dos conteúdos *comprimento*, *perímetro* e *área* em 8 livros escolhidos na primeira etapa; por fim, a terceira etapa consistiu na caracterização das praxeologias pontuais, relativas aos tipos de tarefa predominantes em cada capítulo, de acordo com a etapa 2.

Esse estudo revelou que o foco dos capítulos dos livros analisados está na medida e nas unidades, e não na grandeza, visto que os tipos de tarefas predominantes abrangem situações voltadas para números: conversão de unidades de medida e aplicação de fórmulas para o cálculo

da área de figuras planas, que direcionam os alunos a pensar que comprimento, perímetro e área. A ênfase nas grandezas geométricas analisadas é insuficiente, uma vez que o percentual de páginas dedicadas ao campo *grandezas e medidas*, posição dos capítulos e quantidades de páginas que focam esses três conteúdos, é relativamente pequeno quando comparado aos demais conteúdos abordados nos livros, comprometendo a possibilidade de que as grandezas geométricas cumpram sua função articuladora no currículo.

O trabalho produzido por Ordem (2010) trata do estudo de como o conteúdo *triângulo* é abordado em cinco livros didáticos de 6.^a e 8.^a séries de Moçambique, sob a ótica das demonstrações. Sua pergunta de pesquisa é: “Como os livros didáticos, aprovados pelo PNLD/2011, abordam temas geométricos, com enfoque nas argumentações e provas?”. As bases teóricas da pesquisa foram os trabalhos de Nicolas Balacheff, sobre os processos de validação de provas, Raymond Duval, referente aos registros de representações semióticas, e Yves Chevallard, sobre a organização praxeológica. Para a obtenção dos dados, foi realizada a análise de conteúdo, baseada em Bardin (1977), em que se buscou identificar como são feitas as demonstrações, quais as concepções dos autores sobre o que é demonstração, prova e argumentação, e como as obras procuram desenvolver nos alunos a habilidade de realizá-las.

Com base nas análises, observou-se que nos livros analisados predominam provas pragmáticas. Em relação aos registros, foi possível perceber que os autores privilegiam registros figurais, discursivo em língua natural e simbólico, e exibem tarefas claras, com o discurso tecnológico-teórico disponível. No entanto, os resultados da pesquisa mostraram que as conversões não são devidamente exploradas no estudo de triângulos, e a reconfiguração não é utilizada para gerar argumentos que possam fundamentar evidências intelectuais.

Na pesquisa de Almeida (2012), o objetivo foi investigar as praxeologias que modelam as resoluções das tarefas aplicadas no estudo do conteúdo *polígonos regulares inscritos na circunferência*, contido em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental. Para efetivar esse objetivo, recorreu-se à Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard, por ser uma teoria que tem sido empregada na análise de conteúdos contidos em livros didáticos de matemática, e, ainda, por situar o estudo da Matemática dentro das instituições sociais e dos sistemas didáticos, possibilitando as relações entre sujeito-instituição-saber, objetivando compreender o desenvolvimento dos conceitos e procedimentos matemáticos. O trabalho abarcou pesquisa qualitativa com abordagem da fenomenologia, por ser um processo de reflexão de métodos e técnicas para a compreensão detalhada do fenômeno a ser investigado. A coleta de dados foi realizada em 6 livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental.

Quanto ao conteúdo *polígonos regulares inscrito na circunferência*, verificou-se que, ao se resolver os diferentes tipos de tarefas é preciso articular as organizações matemáticas e as organizações didáticas as quais compõem o bloco prático-técnico (saber-fazer) $[T/\tau]$, constituído pelos tipos de tarefas (T) e pelas técnicas (τ), e o bloco tecnológico-teórico (saber) $[\Theta/\Theta]$, constituído pelas tecnologias (Θ) e teorias (Θ). As praxeologias pontuais analisadas são compostas pela articulação desses blocos, e caracterizadas por um quatérnio denotado por $[T/\tau/\Theta/\Theta]$. Os resultados indicam que os livros analisados exploram o objeto de pesquisa com aplicação de diferentes tipos de tarefas claras e com os discursos prático-técnico e tecnológico-teórico. Isso privilegia as praxeologias pontuais associadas ao objeto de pesquisa, ou seja, a análise mostra que há uma articulação entre as organizações didáticas e as organizações matemáticas na constituição dos diferentes tipos de praxeologias pontuais aplicadas no estudo do objeto de pesquisa. Ao final, o pesquisador entendeu que o estudo dos polígonos regulares inscritos na circunferência presente em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental pode ser abordado por diferentes tarefas (T), técnicas (τ), tecnologias (Θ) e teorias (Θ), constituindo diferentes tipos de praxeologias pontuais $[T/\tau/\Theta/\Theta]$.

Varella (2010) teve por objetivo analisar como os autores de materiais didáticos do Ensino Médio organizaram as tarefas propostas com provas e demonstrações no conteúdo *geometria analítica*, aplicado à 3ª série do Ensino Médio. Para a obtenção de dados, analisou 7 livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM/2009) e dois cadernos bimestrais adotados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEESP/2009). Os dados foram coletados por meio de análise qualitativa com enfoque documental. As análises desses materiais foram realizadas considerando as tarefas propostas sobre o conteúdo *geometria analítica*, concentrado ao estudo da equação de uma reta. O quadro teórico que fundamentou as análises foi a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1999), com o olhar da organização praxeológica Matemática e Didática, pensadas para o ensino e aprendizagem da matemática, e o trabalho de Nicolas Balacheff, que visa ao estudo da tipologia de provas produzidas pelos alunos.

Apoiadas nessas teorias, as análises foram realizadas com o intuito de responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais organizações Matemáticas e Didáticas envolvendo prova e demonstração são propostas por materiais didáticos do Ensino Médio, no conteúdo Geometria Analítica?”. Para tanto, o pesquisador construiu, a partir das tarefas executadas pelos autores, uma organização didática (OD) e matemática (OM) baseada em quatro questões julgadas relevantes. Por fim, concluiu que o trabalho com provas e demonstrações em materiais didáticos não foi abandonado; no entanto, a clareza dos termos pertencentes ao sistema dedutivo é

insatisfatória no que diz respeito à compreensão do que seja passível de demonstração em Matemática. Quanto às organizações didática (OD) e matemática (OM) construídas a partir das tarefas executadas pelos autores, foi possível observar que houve coerência com as tarefas propostas, visto que elas proporcionaram a mobilização de técnicas já desenvolvidas nas atividades resolvidas, como também solicitaram a busca de conhecimentos adquiridos, não explícitos naquele capítulo específico.

Costa (2015) desenvolveu sua pesquisa com 4 livros didáticos de Geometria Analítica no espaço voltado para o ensino superior, publicados no período da reforma da matemática moderna. O objetivo principal foi analisar como autores de livros didáticos organizaram as atividades propostas em relação ao estudo de retas e planos para ensino de geometria analítica no espaço. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo do tipo documental. O referencial teórico adotado foi a Teoria Antropológica do Didático com foco nas praxeologias e nas variáveis didáticas de Lebeau (2009) para o ensino de Geometria Analítica.

Costa (2015) realizou as análises sob os fundamentos da Teoria Antropológica do Didático e apresentou a organização praxeológica, destacando os tipos de tarefas encontrados nos materiais analisados. As tarefas encontradas foram: determinar a equação da reta no espaço; determinar a condição de paralelismo de retas no espaço; determinar a condição de alinhamento de pontos no espaço; apresentar a equação do plano no espaço como uma propriedade de ortogonalidade; determinar um plano caracterizado por duas retas secantes e caracterizar algebricamente o paralelogramo. O pesquisador conclui que os autores dos livros analisados privilegiam o uso algébrico nos estudos de elementos geométricos e as técnicas adotadas por eles estão situadas no campo da Álgebra Linear e Geometria Analítica.

No que diz respeito ao segundo critério de análise, que foi com base nas pesquisas realizadas a partir de documentos oficiais, podemos citar a dissertação de Almeida (2011), que teve como objetivo geral investigar como os livros didáticos propõem o estudo das progressões aritméticas e geométricas no primeiro ano do Ensino Médio. Os 4 livros analisados pertencem ao primeiro ano do Ensino Médio, selecionados por comporem o catálogo do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio e, utilizados pelas escolas estaduais do município de Cuiabá. Como opção metodológica, foi adotada uma pesquisa qualitativa, na qual, os dados foram coletados por meio de análise documental. Como referencial teórico-metodológico para a análise dos dados foi utilizada a Teoria Antropológica do Didático (TAD), mais especificamente as praxeologias, propostas por Chevallard (1999); e a Teoria dos Jogos de Quadros de Douady (1992). A partir da análise, o pesquisador verificou se as praxeologias

das obras estão de acordo com as propostas dos documentos oficiais, e com as intencionalidades dos autores expostas nos manuais.

Os resultados dessa pesquisa, associados à teoria pertinente, possibilitaram a análise que resultou no fato de que as organizações praxeológicas de dois dos livros analisados não explicitam a estreita relação entre progressões e funções. Percebeu-se também que os livros analisados não propõem com frequência tarefas que incentivam a generalização de padrões, ainda que esteja explícita como intencionalidade dos autores dos quatro livros selecionados para a investigação. Ainda há o predomínio de tarefas de imitação, que levam o aluno à rotinização, tarefas do gênero: calcular, determinar, entre outras. Identificou-se um número reduzido de tarefas que possibilitam a articulação dos diferentes quadros (numérico, algébrico e geométrico) propostos por Douady (1992), priorizando, na maioria das vezes, o quadro algébrico. Entre os livros selecionados para os estudos, o autor constatou que nenhum dos livros analisados pode ser considerado *completo*, ou seja, nenhum deles contempla todas as recomendações dos documentos oficiais; desse modo, não contribuem de modo efetivo para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudos das progressões, cabendo ao professor selecionar o que considerar mais adequado para sua realidade escolar.

O trabalho desenvolvido por Pescini (2021) teve como foco investigar a presença da Geometria dos Fractais nos livros didáticos do Ensino Médio utilizados no estado no Paraná. Intitulado “Uma análise praxeológica da Geometria Fractal em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio”, caracterizou praxeologias didáticas e matemáticas da abordagem do conteúdo Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio. Para efetivar esse objetivo, Pescini (2021) analisou quatro coleções de livros didáticos aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático e do Material Didático (PNLD) de 2018 adotadas entre as cinco maiores cidades, em termos de habitantes, do estado do Paraná. Como referencial teórico-metodológico para a análise dos livros foi utilizada a Teoria Antropológica do Didático (TAD), mais especificamente as praxeologias propostas por Chevallard (1999), de modo a construir organizações praxeológicas das abordagens da geometria dos fractais nos livros analisados, oportunizando assim investigar as escolhas matemáticas e didáticas dos autores das coleções.

Após as análises, foi possível apontar que o conteúdo Geometria dos Fractais encontra-se articulado com outros assuntos da Matemática, como álgebra, funções e números, sendo ainda um conteúdo escasso nos livros didáticos, uma vez que, dos 16 livros analisados, em apenas 4 constaram abordagens dessa geometria. Embora o assunto Geometria dos Fractais não esteja contemplado de modo explícito na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com a pesquisa, foi possível observar que nada impede que ele seja trabalhado em sala de aula, uma

vez que promove a articulação com outras unidades temáticas indicadas no referido documento. Quanto aos Tipos de Tarefas encontradas, elas são apresentadas por meio da exploração de fractais como flocos de neve e curvas de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski, conforme sugerido no DCE (PARANÁ, 2008). No entanto, de modo geral, observou-se que, nos livros analisados, prevalece uma proposta de ensino para esse tema como meio para o ensino de outros conteúdos matemáticos.

Assim, esse levantamento de pesquisas realizadas no período de 1990 a 2020, foi efetuado com o intuito de elencar, tomar conhecimento e analisar algumas das produções existentes abarcando Geometria, livros didáticos e documentos oficiais, fundamentadas na Teoria Antropológica do Didático. Utilizando a mesma plataforma de busca – a BDTD –, realizamos novas buscas, de outros termos relacionados à nossa pesquisa, não obtendo, contudo, nenhum registro. Os termos pesquisados foram “Geometria dos Fractais e Teoria Antropológica do Didático”; “Fractais e Teoria Antropológica do Didático”. “Geometria dos Fractais e livro didático”; “Geometria dos Fractais e BNCC”.

Após a busca, a leitura e o estudo desses trabalhos encontrados, ficou evidente que a Teoria Antropológica do Didático é bastante utilizada, e de modo satisfatório, nos processos de metodologia de pesquisa e análise de dados e construção de organizações praxeológicas de conteúdos da Geometria, abordados em livros didáticos.

De modo geral, é possível observar que, em suma, os trabalhos apresentados nesta etapa da nossa pesquisa realizaram análises de conteúdos da Geometria não Euclidiana em livros didáticos, com o intuito de verificar como alguns conteúdos dessa Geometria são abordados, explorados, como também identificar como os autores organizam as atividades propostas em relação a alguns conteúdos da Geometria Euclidiana. Para tanto, utilizou-se a TAD com outras teorias da Didática da Matemática como aporte teórico nas metodologias das pesquisas e nas análises dos dados.

Contudo, nosso trabalho se diferencia dos demais apresentados nessa etapa pelo fato de possuir um caráter de investigação direcionado para uma Geometria não Euclidiana – a Geometria dos Fractais, visto que encontramos apenas uma pesquisa que articule a TAD com a Geometria dos Fractais. Nossa pesquisa é voltada para explorar suas abordagens em livros didáticos do Ensino Médio, identificando e construindo uma organização praxeológica das suas abordagens nos livros analisados, e relacionando com habilidade e objetos de conhecimento proposto pela Base Nacional Comum Curricular BNCC (2018).

Embora seja um tema recente, Brandão (2006) ressalta que a Geometria dos Fractais vem ganhando força nos estudos da Educação Básica. No Paraná, as Diretrizes Curriculares de

Matemática do estado do Paraná - DCE (PARANÁ, 2008) indicam a sua abordagem tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio; ela também está presente no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná - CREP (PARANÁ, 2021), sendo este último, mais recente, o documento norteador para a Educação Básica no estado.

Portanto, justificamos o desenvolvimento da pesquisa com vistas a responder a seguinte questão: quais habilidades e objetos de conhecimento, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) identificados nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021? Assim sendo, na próxima seção apresentamos a Base Nacional Comum Curricular como documento mais recente e norteador da educação brasileira.

2.4 Sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Ao longo dos últimos anos, o Brasil passou por diferentes reformas educacionais; uma das mais recente foi a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018, que estabelece eixos norteadores para todos os níveis da Educação Básica. Aprovada pelo Conselho Nacional de Educação, a BNCC é um documento de caráter normativo de âmbito federal com 600 páginas, que consiste em um conjunto de referenciais que recomendam as aprendizagens essenciais que todos os educandos devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica, com base em conhecimentos, competências e habilidades.

Segundo Brasil (2018), sua construção deu-se ao longo de décadas, com o protagonismo dos estados e municípios e com ampla participação de diversos setores da sociedade, sendo homologada definitivamente somente em 2018. Seu objetivo é servir como referência para reformulação obrigatória dos currículos de todas as redes de ensino, e garantir que as esferas públicas e particular da educação caminhem no sentido de uma formação humana integral, visando a uma sociedade justa, inclusiva e democrática, com uma educação igualitária a todos os alunos (BRASIL, 2018, p. 09).

Nesse sentido, a BNCC pretende superar a fragmentação das políticas educacionais, possibilitando o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo, a fim de promover uma educação de qualidade. Seu papel é garantir a permanência do educando na escola, sendo para isso necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os alunos (BRASIL, 2018, p. 08).

Conforme descrito na BNCC, no decorrer da Educação Básica - Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio -, as aprendizagens essenciais devem contribuir para

assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais que articulam todas as Áreas de Conhecimento e visam a contribuir para o desenvolvimento de uma formação humana integral cuja meta é a construção de uma sociedade mais ética, justa, sustentável, democrática e inclusiva.

As dez competências gerais são:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2018, p. 9-10).

No entanto, ao longo de cada uma dessas etapas da educação básica, essas competências se desdobram de acordo com as particularidades de cada fase do desenvolvimento dos estudantes.

No Ensino Fundamental (EF), a BNCC divide o aprendizado em áreas de conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. No que

se refere ao componente curricular Matemática, a BNCC propõe cinco Unidades Temáticas, são elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Para cada unidade temática foram definidos objetos de conhecimento e habilidades que devem ser trabalhadas a cada ano de forma progressiva. Para cada ano de ensino a BNCC apresenta quadros, que listam os objetos de conhecimento articulados às habilidades em cada unidade temática. Para uma melhor compreensão, apresentamos um exemplo no quadro 2, que representa essa estrutura.

Quadro 2 - BNCC: Unidades Temáticas, Objetos de Conhecimento e habilidades relacionadas

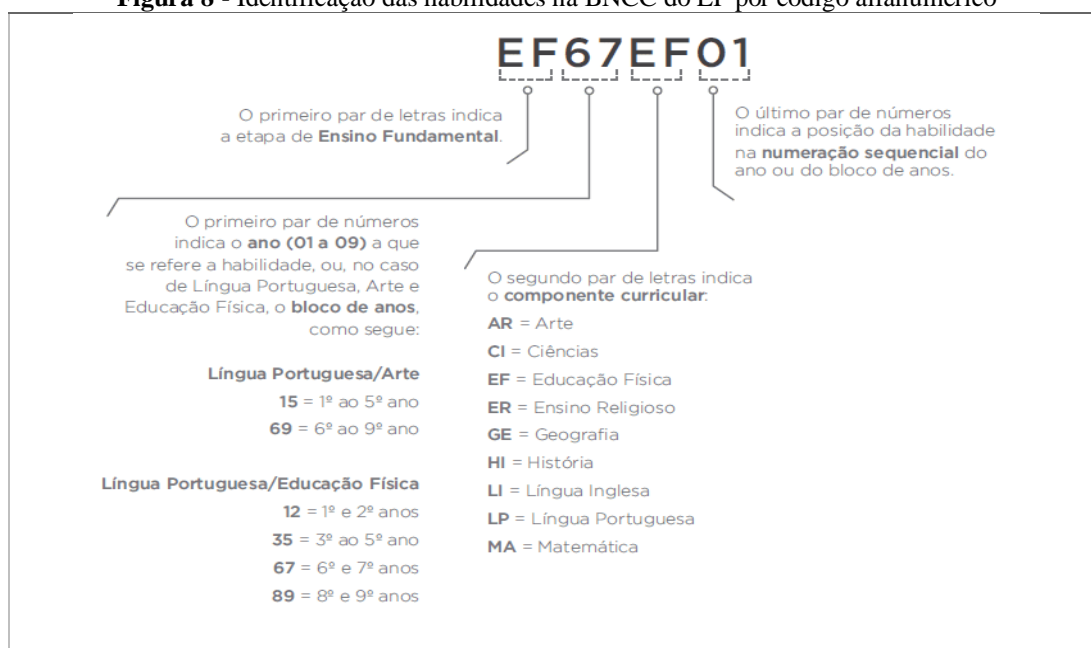
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Grandezas e medidas	Medidas de comprimento, massa capacidade e unidades de medida não convencionais	(EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.
	Medidas de tempo: unidades de medida de tempo, suas relações e uso do calendário	(EF01MA16) Relatar em linguagem verbal ou não verbal sequência de acontecimentos relativos a um dia, utilizando, quando possível, os horários dos eventos. (EF01MA17) Reconhecer e relacionar períodos do dia, dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, quando necessário. (EF01MA18) Produzir a escrita de uma data, apresentando o dia, o mês e o ano, e indicar o dia da semana de uma data, consultando calendários.
	Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas	(EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.

Probabilidade estatística	e	Noção de acaso	(EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.
---------------------------	---	----------------	---

Fonte: Brasil (2018, p. 280 – 281)

Cada habilidade na BNCC é identificada por um código alfanumérico, composto por 8 caracteres, as duas primeiras letras indicam a etapa de ensino, em seguida dois números que indicam o ano que se refere a habilidade, variando de 01 a 09 para o Ensino Fundamental, na sequência duas letras que indicam a área de conhecimento. Por fim, um par de números que indica a posição sequencial da habilidade no ano escolar. Como podemos ver na figura 8, que segue.

Figura 8 - Identificação das habilidades na BNCC do EF por código alfanumérico



Fonte: Brasil (2018, p. 30).

A BNCC para o Ensino Médio se organiza em continuidade ao proposto para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, com foco no desenvolvimento de competências e orientada pelo princípio da educação integral. Está organizada por Áreas do Conhecimento que têm por finalidade integrar dois ou mais componentes do currículo, para assim, melhor compreender a realidade e atuar nela. São elas: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Em relação à área do conhecimento Matemática e suas Tecnologias, essa é composta apenas pelo componente curricular Matemática e corresponde ao trabalho a ser realizado no

contexto das aulas de Matemática, embasado no conhecimento da própria área: números e álgebra, geometria e medidas, probabilidade e estatística.

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p.471).

Na BNCC, cada área apresenta as competências específicas que devem ser desenvolvidas ao longo da etapa do Ensino médio e que estão vinculadas a determinadas habilidades. Nesta direção, entende-se como competência, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), a capacidade do aluno de mobilizar conhecimentos para resolver questões do seu cotidiano por meio do pensamento crítico.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), as competências formam um todo conectado, não tendo uma ordem preestabelecida, uma vez que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras. As competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio são:

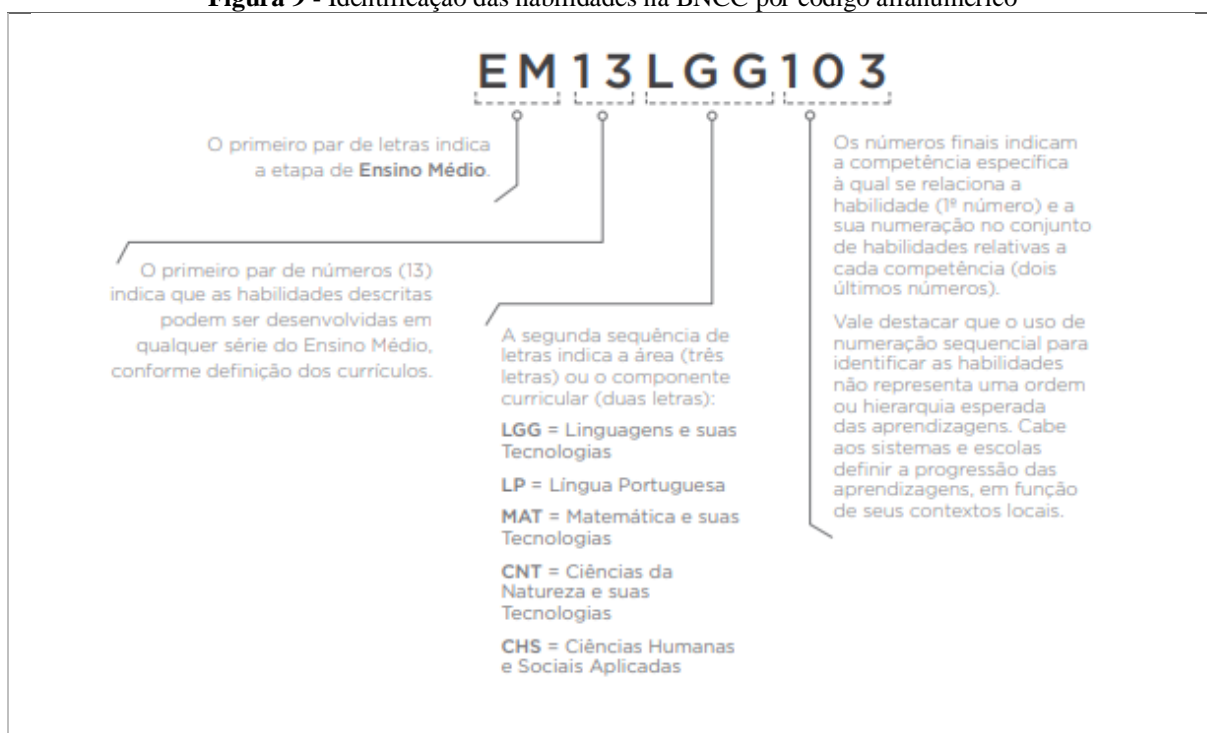
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

Em continuidade, para que as competências específicas de cada componente curricular sejam desenvolvidas, foram estabelecidas para cada ano e cada componente um conjunto de habilidades, que podem ser consideradas as aprendizagens às quais os alunos têm direito a ter acesso para que as competências sejam desenvolvidas ao final da sua educação básica. É o desenvolvimento delas que permitirá que o aluno construa seu conhecimento e desenvolva o

mecanismo necessário para progredir nos seus estudos e para conseguir desenvolver as competências gerais indicadas na BNCC.

Essas habilidades são identificadas na BNCC com um código composto de duas letras que se referem à etapa de ensino, dois números que indicam as habilidades que podem ser desenvolvidas em qualquer ano, três letras que indicam a área de conhecimento ou componente curricular e os três últimos dígitos que indicam a competência específica a que se relaciona a habilidade. Como podemos ver na figura 9, abaixo.

Figura 9 - Identificação das habilidades na BNCC por código alfanumérico



Fonte: Brasil (2018, p. 37).

Cada habilidade está relacionada a um objeto de conhecimento, e este, na BNCC, independentemente de se tratar de conceito ou procedimento, deixa de ser central e passa a ser um meio para que as habilidades sejam desenvolvidas.

Para melhor compreensão do exposto, observamos como exemplo o quadro a seguir, no qual está descrita a competência específica 1 da área do conhecimento Matemática e suas Tecnologias, e as habilidades vinculadas a essa competência.

Quadro 3 - Competência específica 1 e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
HABILIDADES

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Fonte: Brasil (2018, p. 533).

Visando ao desenvolvimento integral dos estudantes, a área de Matemática e suas Tecnologias tem como foco a estruturação curricular a partir de 43 habilidades, distribuídas em 5 competências específicas já descritas anteriormente. Desse modo, as habilidades são centrais para que a aprendizagem aconteça e para que as competências sejam desenvolvidas.

2.5 Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)

Implantado em 1985, o PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático) é um programa do Ministério da Educação (MEC) em conjunto com o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), e que tem por objetivo a compra e distribuição de obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma sistemática, regular e gratuita para professores e estudantes de escolas públicas de todo o país, contemplando os quatro níveis da Educação do ensino público brasileiro: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA). Assim, a principal função do PNLD consiste em contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.

O PNLD tem representado, ao longo de todos esses anos, um importante instrumento de apoio ao processo de ensino/aprendizagem, ajustando-se, continuamente, às mudanças e às novas demandas colocadas para atendimento aos objetivos tanto do ensino fundamental como do ensino médio (BRASIL, 2011, p.12).

De acordo com Silva (2011), no início da criação do PNLD, os livros didáticos não eram submetidos a avaliações para identificar possíveis falhas; somente em 1993 o Ministério da Educação instituiu a primeira avaliação dos Livros Didáticos (LD), com o objetivo de identificar possíveis erros e falhas de conteúdos, bem como avaliar as metodologias empregadas, de modo a selecionar as que mais podem ser aproveitadas por estudantes e professores nas escolas. Neste contexto, foi elaborado e publicado em 1998 o primeiro guia do PNLD, com vistas a auxiliar as escolas nas escolhas dos LD. Assim sendo, as escolas passaram a contar com um documento de apoio para essa seleção, denominado Guia PNLD, e as editoras passaram a adequar seus materiais às exigências do programa.

Segundo o guia do PNLD (2021), a escolha do material deve ser definida pelo professor, e o processo de seleção deve ser baseado na reflexão coletiva, arraigada nas diretrizes que dispõe. O registro de escolha é a consolidação de um processo autônomo, democrático, consciente e transparente.

Os livros que serão analisados em nossa pesquisa constituem Livros Didáticos do Novo Ensino Médio selecionados pelo PNLD 2021, que, em decorrência do formato do Novo Ensino Médio, apresentam estruturas diferentes das coleções adotadas nos anos anteriores. “Os materiais didáticos devem, portanto, contemplar as competências gerais, competências específicas e habilidades da área de Linguagens e suas Tecnologias, na qual se inserem os Projetos Integradores e os Projetos de Vida” (BRASIL, 2021, p. 18).

Nessa direção, o PNLD 2021 se propõe promover o desenvolvimento de competências gerais, competências específicas e habilidades definidas pela BNCC incentivando sempre a autonomia, o protagonismo e a responsabilidade dos alunos, permitindo-lhes fazer escolhas e decisões sobre seus projetos atuais e futuros. Tais modificações também foram realizadas para a Educação Infantil, Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, faltando somente readequar o Ensino Médio. À luz desses entendimentos, as obras selecionadas e adotadas no PNLD (2021) devem contribuir, decisivamente, para a formação de jovens capazes de construir uma sociedade mais ética, justa, inclusiva, sustentável e solidária.

Os processos de organização e distribuição também sofreram modificações no PNLD 2021: em seu âmbito, as obras são classificadas em objetos. Objeto 1 são obras destinadas aos projetos integradores e projeto de vida. Objeto 2 é composto por obras didáticas por área do conhecimento e pelas obras específicas. Objeto 3 são obras de formação para professores e gestores. Objeto 4 são os recursos digitais e, Objeto 5, as obras literárias. Em nossa pesquisa

serão analisados Livros Didáticos do Objeto 2, da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, aprovados no PNLD 2021.

As obras do Objeto 2 não têm mais caráter disciplinar, sendo estruturadas por áreas do conhecimento conforme a organização da BNCC, a saber: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além das obras por área de conhecimento, o Objeto 2 traz quatro obras específicas: “Multiversos Língua Portuguesa”, “Dimensões - Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em Diálogo com a Matemática” e duas outras de Língua Inglesa. No que diz respeito às obras específicas, seu objetivo é aprofundar algumas abordagens e fornecer materiais diferentes dos ofertados nas obras por áreas de conhecimento. Conforme aponta a BNCC, tais obras buscam desenvolver novas habilidades, sempre aliadas às competências gerais, às temáticas contemporâneas e à cultura jovem. Vale destacar que essas obras não substituem as obras por áreas de conhecimento, servindo como complemento, visto que abarcam outros conteúdos e preconizam o aprofundamento de alguns temas abordados nas obras por área do conhecimento.

As coleções didáticas por área de conhecimento são compostas pelo livro do estudante impresso, material digital do estudante (unicamente para Linguagens e suas tecnologias), manual do professor impresso e coletânea de áudios. O estudante recebe 6 volumes para cada área de conhecimento (exceto para Linguagens e suas tecnologias) e se utiliza destes volumes conforme necessidade manifestada em sala de aula pelo professor. O conjunto dos 6 volumes do livro do estudante aborda, de maneira moderada, não só todas as competências gerais e específicas, mas também as habilidades de cada área de conhecimento. “Ao se abordar as habilidades e as competências específicas, está explicitada a devida articulação delas com as competências gerais, os temas contemporâneos e as culturas juvenis, conforme indicado pela BNCC” (BRASIL, 2021, p. 18).

As obras didáticas por área do conhecimento e obras didáticas específicas foram elaboradas com base nas diretrizes da reforma do Ensino Médio, cujo objetivo é promover uma trajetória escolar que faça sentido para os jovens, que seja capaz de engajá-los em ações transformadoras, estabelecendo diálogo efetivo com seus planos e realizações, ao mesmo tempo que desenvolva conhecimentos, habilidades, atitudes e valores com potencial de os capacitar para lidar com os desafios da sociedade contemporânea (BRASIL, 2021, p. 17).

Nesse sentido, o material didático das obras por área de conhecimentos também foca na aprendizagem interdisciplinar, articulando os diferentes componentes curriculares, contribuindo para que a diversidade de vivências e experiências seja beneficiada na articulação que o trabalho proporciona. Além disso, essa interdisciplinaridade deve enriquecer a visão de

mundo dos educandos, de modo que eles possam compreender que um mesmo fato ou assunto pode ser observado e estudado a partir de diferentes pontos de vista, formando a base para a construção de pensamento crítico capaz de questionar as informações, verificar sua veracidade e aceitar que pode existir mais de uma resposta para uma mesma pergunta.

A transversalidade entre as disciplinas estimula os estudantes a pensar por si próprios, usando sua autonomia para enxergar soluções diferenciadas para velhos problemas, o que leva à inovação. Com criatividade, autonomia e curiosidade, cada indivíduo se sente seguro para elaborar seu repertório e utilizá-lo na descoberta de respostas inovadoras (BRASIL, 2021, p. 18).

Como salientado anteriormente o protagonismo juvenil é o elemento principal da BNCC; desse modo, as obras didáticas destinadas ao Ensino Médio empregam os conteúdos dos componentes curriculares como ferramentas que ajudem o estudante a resolver problemas reais da sua comunidade e do seu cotidiano. Assim sendo, os conteúdos a serem ensinados e os exercícios propostos são contextualizados com a realidade do aluno, e deixam de ter aquele formato clássico que geralmente tem pouco a ver com a realidade dos estudantes, passando a propiciar sentido aos educandos (BRASIL, 2021).

Portanto, as obras do PNLD 2021 têm como objetivo e desafio ir além do “conteudismo”, e fazer com que “o estudante “pense como”, por exemplo, um sociólogo ou um linguista” (BRASIL, 2021, p. 19). Assim, indo além da relação texto/interpretação de texto/atividades de validação da interpretação, ajuda-se os alunos a pensarem por si só, estimulando sua criatividade e seu pensamento crítico, tornando-os protagonistas de sua aprendizagem.

3 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa. Descrevemos as características da pesquisa, seu contexto e os critérios para a análise dos dados coletados.

3.1 Característica da pesquisa

Perante o contexto apresentado durante a fundamentação teórica desta pesquisa, definimos a questão norteadora do nosso estudo: quais habilidades e objetos de conhecimento, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), identificados nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021?

Essa questão norteou toda a pesquisa, que tem como objetivo geral: caracterizar praxeologias matemáticas para a identificação das habilidades e objetos de conhecimento nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021.

A presente pesquisa se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, pois conforme explica Alves-Mazzotti (2002), a pesquisa de caráter qualitativa apresenta características que são flexíveis, uma vez que consideram vários aspectos do tema estudado e parte de um pressuposto de que sempre há algo a ser desvendado e estuda o que não pode ser quantificado. Nas palavras de Minayo (2013), a pesquisa qualitativa propõe-se a responder questões bastantes particulares. Se concentra nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser justificado e trabalha com dados subjetivos, crenças, valores, opiniões e atitudes.

Nesta direção, as pesquisas qualitativas caracterizam-se por aquelas que buscam compreender o fenômeno em seu ambiente natural, ou seja, onde ocorre e do qual faz parte. Assim sendo, o pesquisador é a principal ferramenta de obtenção de informações interessando-se mais pelo processo do que pelo produto. Desse modo, as informações ou dados coletados podem ser obtidos e analisados de diversas formas, dependendo do objetivo a ser alcançado. Na pesquisa qualitativa, a busca de dados na investigação leva o pesquisador a cursar caminhos diferentes, ou seja, ele utiliza diversos procedimentos e ferramentas para a composição e análise dos dados. As ferramentas de composição de dados comumente utilizadas são: questionários,

entrevistas, observações, grupos focais, análise de documentos, entre outras (KRIPTA *et al*, 2015).

Em nosso trabalho, para a produção dos dados a serem analisados, utilizamo-nos da análise documental, que essencialmente recorre a documentos que não sofreram tratamento analítico, ou seja, que não foram analisados ou sistematizados com o objetivo semelhante ao que se propõe a pesquisa. Em concordância, para Gil (2002, p.62- 63) “a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa”.

A análise documental, é entendida como uma série de operações, visa estudar e analisar um ou vários documentos na busca de identificar informações factuais nos mesmos; descobrir as circunstâncias sociais, econômicas e ecológicas com as quais podem estar relacionados, atendo-se sempre às questões de interesse (KRIPKA, *et al*, 2015, p. 61).

Portanto, pode-se dizer que a pesquisa documental é um tipo de pesquisa em que os dados são obtidos estritamente de documentos, com a finalidade de extrair as informações contidas neles, de modo a compreender um fenômeno; é um procedimento que utiliza de métodos e técnicas para a compreensão e análise de documentos dos mais diversos tipos.

Assim sendo, realizaremos uma pesquisa documental em livros didáticos da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio, de modo a produzir os dados a serem analisados. Nessa direção, nossos dados serão obtidos por meio de análise da coleção adotada no PNLD 2021 no estado do Paraná e da coleção mais adotada a nível nacional, também no PNLD 2021.

3.2 Contexto da pesquisa

A escolha do tema de estudo de nossa pesquisa se deu em virtude de uma pesquisa desenvolvida por uma integrante do grupo de pesquisa GPEG, relacionando a TAD com a Geometria dos Fractais em livro didáticos, a qual foi intitulada de: Uma análise praxeológica da Geometria Fractal em livros didáticos de matemática do Ensino Médio. Em seu trabalho, Pescini (2020) investigou como o conteúdo Geometria dos fractais é abordado nos livros didáticos do Ensino Médio e quais são as propostas de ensino para este conhecimento. A partir de seu estudo, nos interessamos em investigar como esse conteúdo é abordado nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD 2021, como também nos livros da editora que mais vendeu exemplares de Matemática em nosso país, de modo a identificar as habilidades e objetos de conhecimento presentes na BNCC do Ensino Médio que podem ser

explorados por meio do estudo deste conteúdo. Embora a Geometria dos Fractais não seja contemplada explicitamente na BNCC, documento mais recente e norteador dos currículos das escolas brasileiras, acreditamos ser possível explorar diversos objetos de conhecimentos, ou seja, assuntos da matemática por meio dessa geometria, conforme será apresentado na presente pesquisa.

No início, tínhamos como pretensão analisar quatro coleções de livros didáticos mais adotadas e escolhidos no PNLD 2021 nas 5 maiores cidades, em termos de habitantes, do estado do Paraná. Entretanto, no estado do Paraná a SEED (Secretaria Estadual De Educação) optou por escolher um material único para toda rede estadual de ensino. Dessa forma, foram escolhidos os livros didáticos que tiveram um maior número de indicação por parte dos professores, compondo uma única coleção. Além disso, em razão de termos apenas uma única coleção para todo o estado do Paraná, optou-se por acrescentar outra coleção ao estudo como sendo a mais adotada em nível nacional.

De acordo com a SEED, essa mudança é para beneficiar diretamente os alunos e também os professores, pois os alunos que necessitem migrar de escolas e até mesmo de município dentro do nosso estado, não sofrerão prejuízos quanto a aprendizagem, pelo menos em termos de materiais didáticos. E no que diz respeito aos professores, a vantagem é que terão conhecimento do material didático contribuindo no planejamento de suas aulas, quando atuarem em escolas diferentes, uma vez que o material didático será o mesmo. Além desses benefícios, a unificação dos materiais didáticos para toda rede de ensino facilitará também a parte de distribuição dos livros, visto que será possível remanejar os exemplares excedentes de uma escola para outra, já que todas utilizarão o mesmo livro didático.

Assim sendo, em nossa pesquisa analisaremos a coleção Prisma Matemática em nível de estado, dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Câmara de Souza da editora FTD, aprovada e escolhida pelos professores do estado do Paraná no PNLD 2021 para ser utilizada na área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias. Em virtude de termos apenas uma única coleção para todo o estado do Paraná, optamos por acrescentar outra coleção à nossa pesquisa. Para tanto, realizamos buscas no Portal Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FDNE), de modo a identificar a coleção mais adotada em nível nacional.

De acordo com os dados estatísticos fornecidos pelo FDNE, a coleção mais adotada para o Ensino Médio no PNLD 2021 é a da editora Moderna, com um total de 27.773.621 exemplares. Em vista disso, em nossa pesquisa também analisaremos a coleção Diálogo Matemática e suas Tecnologias, da autora Lilian Aparecida Texeira.

Apresentamos na sequência a coleção Prisma Matemática, a coleção Diálogo e o conjunto de 6 volumes que compõem as coleções didáticas de cada editora a serem analisadas.

Segundo os autores Bonjorno, Júnior e Souza (2020) a coleção Prisma Matemática foi projetada para incentivar e contribuir com os alunos na aprendizagem da matemática, de modo que poderão usá-la em suas vidas e na continuação de seus estudos. Além disso, visa fomentar o desenvolvimento de habilidades e competências para ajudá-lo a se tornar um cidadão crítico, criativo, autônomo, responsável e capaz de enfrentar novos desafios. Em conjunto com os conteúdos matemáticos específicos, a coleção explora o uso de recursos técnicos, como softwares de geometria dinâmica e planilhas, e reflete sobre a relação da matemática com outras áreas do conhecimento.

A coleção Prisma Matemática consiste em 6 volumes separados autocontidos. Isso significa que a ordem em que eles são usados pelo professor não é definida e eles funcionam independentemente um do outro, ou seja, podem ser trabalhados da maneira mais adequada conforme a necessidade do professor e da turma. Na estrutura de cada volume, são consideradas as diretrizes de adaptação ao novo Ensino Médio, mas sem deixar de lado a distribuição dos conteúdos já estabelecidos no ensino de matemática.

No quadro 4, a seguir, apresentamos os 6 volumes que compõem a coleção Prisma Matemática e os conteúdos trabalhados em cada volume.

Quadro 4 - Volumes que compõem a coleção Prisma Matemática

	<p style="text-align: center;">CONJUNTO E FUNÇÕES</p> <p>Neste volume, são trabalhados os conteúdos de Conjuntos, Função afim e Função quadrática.</p>
	<p style="text-align: center;">FUNÇÕES E PROGRESSÕES</p> <p>Neste volume são trabalhados os conteúdos de Função definida por mais de uma sentença; Função exponencial, Função logarítmica e Progressões.</p>

	
	<p style="text-align: center;">GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA</p> <p>Neste volume são abordados os conteúdos de Proporcionalidade e semelhança, Trigonometria no triângulo, Razões trigonométricas na circunferência e Funções trigonométricas.</p>
	<p style="text-align: center;">SISTEMAS, MATEMÁTICA FINANCEIRA E GRANDEZAS</p> <p>Neste volume é apresentado os conteúdos de Matrizes e sistemas lineares, Porcentagem e juros, Matemática financeira e Grandezas.</p>
	<p style="text-align: center;">GEOMETRIA</p> <p>Neste volume é tratado os conteúdos relacionados a áreas; Geometria Espacial de Posição, Poliedros e Corpos redondos.</p>



Fonte: FTD EDUCAÇÃO (2021).

No tocante à coleção Diálogo, da Editora Moderna, contemplada pelo PNLD 2021, segundo a autora, os volumes da coleção são divididos em temas que, por sua vez, foram elaborados com base nas competências gerais, competências específicas e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como em temas contemporâneos e transversais.

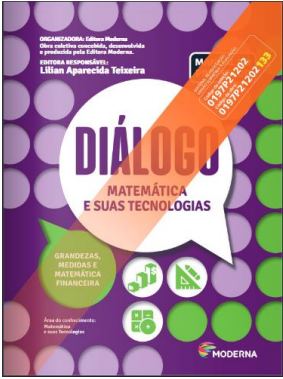
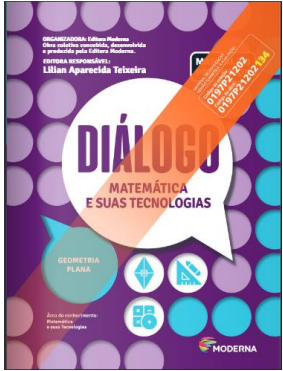
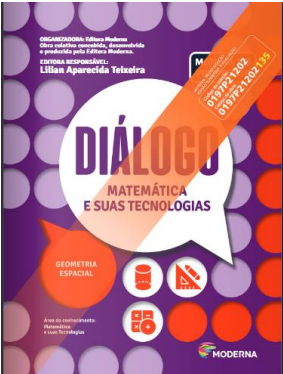
Os conteúdos são apresentados de forma clara e precisa, por meio de variados contextos, tendo por objetivo priorizar o protagonismo do estudante no decorrer do processo de aprendizagem. Os seis volumes trazem questões que levam o estudante a refletir sobre as aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado, além de trabalhar maneiras de organizar o pensamento na resolução de problemas.

Em alguns contextos, a coleção aborda tarefas com algumas vertentes da Educação Matemática, como a Etnomatemática, apresentando conhecimento matemático atrelado a diferentes culturas, proporcionando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Traz também diferentes ferramentas tecnológicas, como software, planilha eletrônicas e ambientes de programação, além de propor reflexões que afetam diferentes aspectos da sociedade contemporânea. Apresenta vários aspectos da história da Matemática por meio de situações motivacionais e favorece o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução e aprimoramento do raciocínio lógico, estimulando o pensamento crítico, a cidadania e o pensamento científico do educando.

A autora destaca que um dos objetivos da coleção é possibilitar o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No entanto, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos que serão abordados em sala de aula, adotando uma ordem diferente da estabelecida em cada volume.

No quadro 5, a seguir, apresentamos os 6 volumes que compõem a coleção Diálogo Matemática e suas Tecnologias, bem como os temas trabalhados em cada volume.

Quadro 5 - Volumes que compõem a coleção Diálogo

	<p style="text-align: center;">GRANDEZAS, MEDIDAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA</p> <p>Neste volume, são abordados os conteúdos relacionados aos estudos das Grandezas, Medidas e Matemática Financeira.</p>
	<p style="text-align: center;">GEOMETRIA PLANA</p> <p>Neste volume, são trabalhados conteúdos relacionados à Geometria Plana, como cálculo de Área de figuras planas e Trigonometria.</p>
	<p style="text-align: center;">GEOMETRIA ESPACIAL</p> <p>Neste volume, são tratados os conteúdos relacionados a áreas; Geometria Espacial de Posição, Poliedros e Corpos redondos.</p>

	<p>GEOMETRIA ANALÍTICA, SISTEMAS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS</p> <p>Neste volume, abordam-se conteúdos referentes aos estudos de Coordenadas e Distâncias, Matrizes, Sistemas Lineares e Transformações Geométricas.</p>
	<p>ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE</p> <p>Neste volume, são trabalhados os conteúdos de Noções de estatística, Pesquisa estatística, e Probabilidade e Combinatória.</p>
	<p>FUNÇÕES E PROGRESSÕES</p> <p>Neste volume, são trabalhados os conteúdos de Conjuntos, Funções e Progressões.</p>

Fonte: MODERNA (2021).

3.3 Critérios para a análise dos dados

Para a sistematização e análise dos dados, recorreremos à parte teórica, às atividades resolvidas e atividades propostas do conteúdo Geometria dos Fractais nos seis volumes de livros que compõe cada coleção analisada, de modo a caracterizar uma organização matemática (OM) composta pelo quarteto praxeológico - Tipos de Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias, -

buscando encontrar um modelo praxeológico matemático e didático. Assim sendo, para alcançar nossos objetivos de pesquisa vamos fazer um estudo das organizações matemáticas (OM), propostas nos Livros Didáticos selecionados, relativas ao conteúdo Geometria dos Fractais, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático.

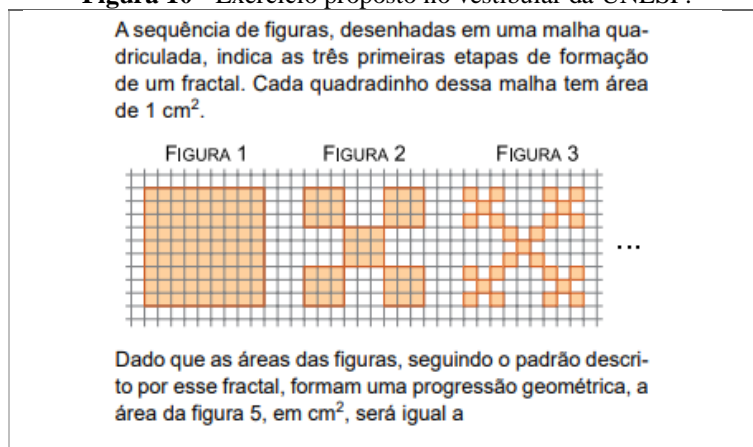
Para análise do livro didático, de acordo com Bittar (2017), é importante dividir o LD em duas partes: *Parte Curso* e *Parte Atividades propostas*. A *Parte Curso* compreende tudo o que não é atividade proposta. Desse modo, em nossa pesquisa para analisar a OM, observaremos a *Parte Curso* e a *Parte Atividades propostas*.

Para a modelagem da OM é realizada uma leitura, linha por linha, da Parte Curso, sem esquecer os boxes tão comuns em LD brasileiros e que podem dar a impressão de trazerem informação extra, talvez não necessário. [...] Assim, a leitura para a elaboração do quarteto praxeológico matemático deve ser feita levando em consideração todos os elementos de cada página do livro, entretanto nem todos serão considerados na modelagem realizada. Na Parte Curso, uma tarefa nem sempre é apresentada explicitamente; muitas vezes o estudo de um determinado conteúdo é proposto por meio de atividade resolvida, como, “Vamos estudar como calcular a altura de um prédio” (BITTAR, 2017 p. 374).

No aspecto da OM, investigaremos a *Parte Curso* e a *Parte Atividades propostas*, de modo a identificar as possíveis técnicas e tecnologias presentes nos Livros Didáticos durante a abordagem da Geometria dos Fractais. O objetivo em caracterizar as técnicas e as tecnologias diz respeito ao fato de que estes elementos do quarteto praxeológico nos possibilitam a identificação das habilidades e dos objetos de conhecimento da BNCC, desenvolvidos durante o estudo da Geometria dos Fractais.

A seguir, discutiremos o entendimento de tal afirmação por meio de um exemplo encontrado em uma prova de vestibular da UNESP em 2017.

Figura 10 - Exercício proposto no vestibular da UNESP.



Fonte: UNESP (2017).

Conforme a atividade apresentada, e embora o enunciado do problema não explicita, identificamos o fractal como sendo o Fractal em X de quadrados com base em Barbosa (2005, p.81).

Logo, para resolver este problema iremos descrever o Tipo de Tarefa em que tal situação consiste.

Quadro 6 - Tipo de tarefa A

TIPO DE TAREFA	T _a : Determinar a medida da área do fractal para uma etapa <i>n</i> .
TÉCNICA	τ _{a.1} : Encontrar a medida da área das figuras 1 e 2. T _{a.2} : Encontrar a razão entre a medida da área das figuras 1 e 2. τ _{a.3} : Aplicar a fórmula do termo geral de uma PG: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde a_n corresponde ao valor desconhecido, a_1 primeiro termo da sequência geométrica e q é a razão elevada ao número desconhecido menos 1.
TECNOLOGIA	θ _{a.1} : Conhecimento do elemento figural “quadrado”; θ _{a.1} : Noção geométrica de área. θ _{a.2} : Noção de razão entre dois números. θ _{a.3} : Noção de função exponencial. θ _{a.4} : Noção de Progressão Geométrica.
TEORIA	Θ _a : Aritmética, Geometria e Funções.

Fonte: A autora (2022).

Deste modo, podemos observar que as técnicas a serem empregadas para resolver o Tipo de Tarefa em estudo nos possibilitam a identificação de algumas das habilidades da BNCC. Identificaremos também quais objetos de conhecimento dessa área de conhecimento são suscitados e explorados através do estudo dessa Geometria. Do mesmo modo que as técnicas viabilizam as habilidades, é possível identificarmos os objetos de conhecimento da área Matemática por meio das tecnologias.

Portanto, conforme apresentado no quadro 7, a seguir, o aluno, ao resolver essa Tarefa, estará mobilizando as seguintes habilidades e objetos de conhecimento.

Quadro 7 - Habilidades e objeto de conhecimento referente à tarefa A

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 282).
(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a	Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais (p. 297).

transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais (p. 297).	
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p. 306).
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 533).	Função exponencial e Progressão Geométrica (p. 533).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).

Fonte: Brasil (2018).

Deste modo, podemos observar que as técnicas e tecnologias a serem empregadas para resolver o Tipo de Tarefa em estudo oportunizam identificar algumas das habilidades e objetos de conhecimento da BNCC durante o estudo dessa Geometria. O próximo capítulo apresentará a análise dos dados, a qual contempla o estudo das organizações matemáticas (OM) encontradas em livros didáticos da componente Matemática e suas Tecnologias, selecionados no PNLD 2021.

4. APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos os dados obtidos na pesquisa a partir da análise de 3 dos 6 livros da coleção Prisma Matemática adotados pelo estado do Paraná, no PNLD 2021, na área de conhecimento “Matemática e suas Tecnologias”, para o Novo Ensino Médio, e de 2 dos 6 livros que compõe a Coleção Diálogo, contemplada no PNLD 2021. A análise se realizou no seguintes volumes: “Geometria e Trigonometria”; “Geometria”; “Funções e Progressões”, da editora FTD, e nos volumes “Geometria analítica, Sistemas e Transformações Geométricas” e “Funções e Progressões”, da editora Moderna. Nos demais livros das duas coleções não foram encontradas abordagens referentes à Geometria dos Fractais no que se refere à *Parte Curso* e à *Parte Atividades propostas*.

Os livros da coleção Prisma Matemática, em um total de 6 volumes, são de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Câmara de Souza; os da coleção Diálogo, também constituída por 6 volumes, têm Lilian Aparecida Teixeira como autora. Todos os volumes de ambas as coleções foram apresentados anteriormente, na seção Desenvolvimento Metodológico, no contexto desta pesquisa.

As análises realizadas a partir desses materiais foram feitas em duas etapas: análises da *Parte Curso* e das *Atividades Propostas*, como descritas a seguir.

4.1 Análise dos Livros Didáticos

Apresentamos, nesta subseção, as produções e análises dos volumes “Geometria e Trigonometria”, “Geometria” e “Funções e Progressões”, que compõem a coleção analisada da editora FTD; semelhantemente, trazemos as análises dos volumes “Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas”, “Geometria plana” e “Funções e Progressões”, da editora Moderna. No tocante ao conteúdo Geometria dos Fractais encontrado nos livros didáticos, foi possível observar que, nos volumes analisados, ele está atrelado a outros conteúdos matemáticos; por esse motivo, durante as análises, recorreremos à BNCC do Ensino Fundamental, uma vez que a BNCC do Ensino Médio descreve as habilidades em um contexto de proporcionar ao estudante o alcance de competências específicas de forma mais ampla e em nível macro de conhecimento.

Para realizar a análise, tivemos que percorrer todas as páginas de cada livro, de modo a compreender os assuntos abordados e tendo em vista a utilização ou menção da Geometria dos

Fractais nos momentos que, de acordo com o entendimento dos autores da coleção, fossem oportunos.

Para alcançar os objetivos da pesquisa realizamos o estudo da organização matemática (OM) relativa ao conteúdo Geometria dos Fractais, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático. Esclarecemos que não realizamos (ou modelizamos) as organizações didáticas (OD), uma vez que, nos livros analisados não encontramos um momento ou uma seção específica que aborde o assunto Geometria dos Fractais.

Na organização dos dados, cada volume será identificado por seu respectivo nome, conforme descrito no quadro 8, a seguir.

Quadro 8 - Volumes analisados

Coleção Prisma Matemática editora FTD	Coleção Diálogo editora Moderna
Conjunto e Funções	Grandezas, Medidas e Matemática financeira
Funções e Progressões	Geometria plana
Geometria e Trigonometria	Geometria espacial
Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas	Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas
Geometria	Estatística e Probabilidade
Estatística, Combinatória e Probabilidade.	Funções e Progressões

Fonte: A autora (2022).

Iniciaremos a descrição das análises pela *Parte Curso* de cada livro investigado.

4.2 Parte Curso

Nossa análise tem início com a *Parte Curso*. De acordo com Bittar (2017), a *Parte Curso* inclui definições, explicações, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. Nesta parte, os autores do livro didático propõem o que consideram que os alunos daquele nível de ensino devem aprender, mesmo que de forma implícita, e é nesse momento que os alunos buscam pistas para resolver as atividades que são propostas.

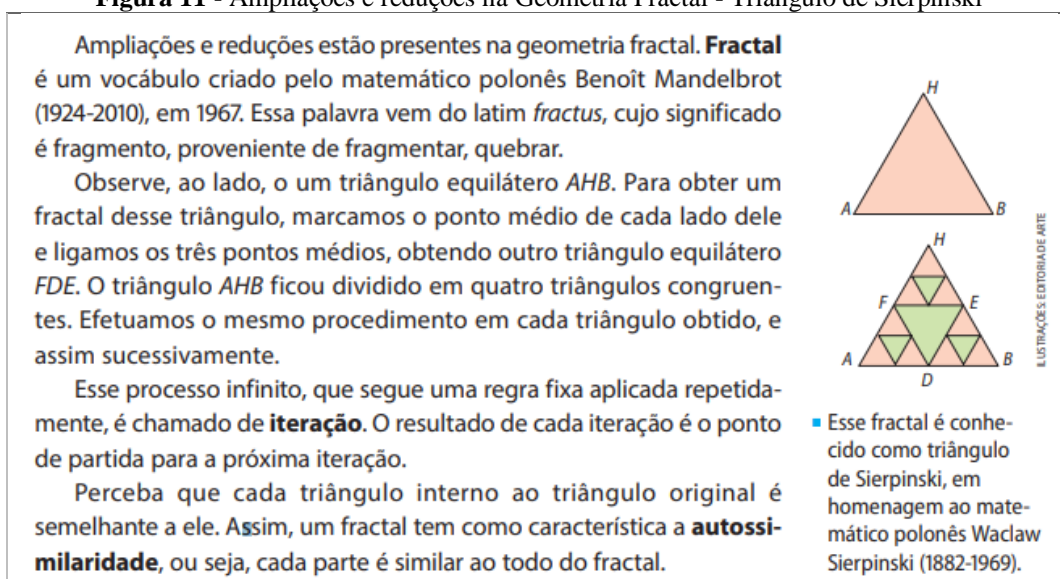
Desse modo, quanto aos livros analisados, destacamos que, dos volumes estudados, apenas um da coleção FTD e um da coleção Moderna abordam, de forma sucinta e breve, o conteúdo Geometria dos Fractais, sendo estes os volumes “Geometria e Trigonometria” da editora FTD e “Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas” da editora Moderna. Os demais volumes não apresentam em seu contexto parte destinada à abordagem do conteúdo de Geometria dos Fractais no momento da *Parte Curso*, mas apresentam alguns aspectos sobre o nosso objeto de pesquisa na *Parte Atividades Propostas*, conforme será descrito posteriormente. Portanto, as análises dessa parte são pautadas unicamente nos volumes

“Geometria e Trigonometria” e “Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas” os quais contemplam essa exploração.

No volume “Geometria e Trigonometria”, os autores trazem uma breve abordagem da Geometria dos Fractais no Capítulo 1, intitulado “Proporcionalidade e Semelhança”, na subseção “Transformações Homotéticas também chamadas homotetias”. Nesta subseção, os autores apresentam o conceito de homotetia e explicam sobre as transformações homotéticas presentes na obra “Limite quadrado”, de M. C. Escher, ressaltando que essas transformações mantêm a proporcionalidade das medidas lineares. Na sequência, abordam ampliação e redução, trazem exemplos de homotetias e discorrem sobre a redução e ampliação de polígonos. Em seguida, realizam a construção de um polígono de modo que ele seja a redução de outro polígono.

A seguir, de forma sucinta, especificamente em quatro parágrafos, os autores comentam que as ampliações e reduções estão presentes na Geometria Fractal. Inicialmente, de forma breve, abordam a criação do termo Fractal e seu significado de acordo com o precursor dessa geometria, Benoît Mandelbrot; trazem, então, como exemplo, o fractal Triângulo de Sierpinski, criado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, e descrevem o processo de construção desse fractal, explicando que o processo de criação é infinito e cada etapa a ser construída é denominada “iteração”; ao finalizar, ainda de forma sucinta, mencionam uma das características dos fractais, a autossimilaridade. Tais considerações são representadas na figura 11, a seguir.

Figura 11 - Ampliações e reduções na Geometria Fractal - Triângulo de Sierpinski



Fonte: Bonjorno *et al* (2020b, p. 33).

Portanto, a *Parte Curso* apresentada no livro “Geometria e Trigonometria” procede à breve exploração do tema, abordando-o como complementação para outro assunto matemático

- transformações homotéticas, ampliação e redução de figuras -, no direcionamento do aluno ao conhecimento da existência desse objeto geométrico e da sua possível exploração matemática.

No tocante aos exercícios resolvidos, contemplados na *Parte Curso*, foi realizada, ainda nesta mesma subseção, uma tarefa referente à curva de Koch, contemplando o conteúdo da Geometria dos Fractais.

O enunciado da atividade retoma a construção do Triângulo de Sierpinski e apresenta a curva de Koch, salientando a semelhança no processo de construção desses dois fractais, a partir de um processo recursivo, por meio de iterações. Na sequência, apresenta como a curva de Koch é formada até a iteração 2, e solicita ao aluno determinar a regra de construção desse fractal e fazer a terceira iteração. Tais procedimentos são representados na figura 12, a seguir.

Figura 12 - Apresentação da atividade resolvida

8. Na página anterior, vimos como construir o triângulo de Sierpinski. Um outro fractal bastante conhecido é a curva de Koch. Ela é atribuída ao matemático sueco Niels Koch (1870-1924), que a apresentou em um artigo em 1906. Essa curva é construída a partir de um processo recursivo, utilizando iterações, assim como o triângulo de Sierpinski.

A sequência de iterações a seguir mostra como a curva de Koch é formada. Observe-a, determine a regra de construção desse fractal e faça a terceira iteração.

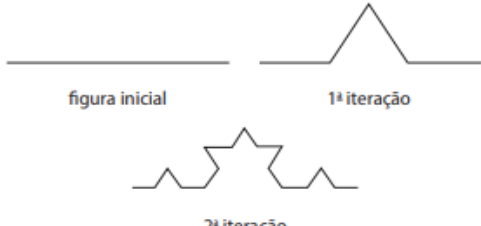


figura inicial 1ª iteração

2ª iteração

Fonte: Bonjorno, *et al* (2020b, p. 34).


Apresentamos, na sequência, a resolução e o quadro que contemplam a OM dessa proposta, como também o quadro com as habilidades e objetos de conhecimento mobilizados para a resolução dessa atividade e presentes na BNCC do Ensino Médio.

Figura 13 - Resolução da atividade

Resolução
 Observando cada iteração feita, podemos determinar a sequência de passos que determina a formação da curva de Koch:

- 1) Divida um segmento de reta em 3 partes iguais.
- 2) Substitua o segmento do meio por dois segmentos de mesma medida do segmento retirado de modo a obter um triângulo equilátero sem a base.
- 3) Repita os passos 1 e 2 com os segmentos de reta da nova figura.

Aplicando essa sequência de ações na figura da 2ª iteração, obtemos a 3ª iteração.



3ª iteração

Fonte: Bonjorno *et al* (2020b, p. 34).

Com base na resolução apresentada pelos autores, realizamos a análise praxeológica matemática e exibimos, na sequência, seu quadro.

Quadro 9 - Tipo de tarefa 1

TIPO DE TAREFA	T ₁ : Construir a figura correspondente ao terceiro nível de iteração.
TÉCNICA	$\tau_{1.1}$: Dividir o segmento de reta em três partes de mesma medida. $\tau_{1.2}$: Substituir a parte central por dois segmentos de mesmo tamanho, formando um triângulo equilátero sem um dos lados. $\tau_{1.3}$: Repetir os processos 1 e 2, nos demais segmentos da figura do segundo nível de iteração.
TECNOLOGIA	$\theta_{1.1}$: Noção de divisão em partes iguais. $\theta_{1.2}$: Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento”. $\theta_{1.3}$: Noção das propriedades de formação de um triângulo equilátero.
TEORIA	Θ_1 : Aritmética e Geometria

Fonte: A autora (2022).

Assim, por meio das Técnicas e das Tecnologias adotadas na resolução, o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades, em que serão estudados os seguintes objetos de conhecimento:

Quadro 10 - Habilidades e objeto de conhecimento referente à tarefa 1

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais (p. 287).	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida (p. 286).

(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (p. 279).	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais (p. 278).
(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos (p. 303).	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados (p. 302).
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (p. 533).	Transformações geométricas (p. 533).

Fonte: Brasil (2018).

Portanto, é possível observar que, por meio deste exercício resolvido, identificam-se três habilidades e seus objetos de conhecimento correspondentes, ou seja, ao estudar a resolução dessa tarefa, o aluno desenvolve as habilidades descritas e ainda estuda alguns objetos de conhecimento correspondentes a elas.

Desse modo, no que diz respeito às *Atividades Resolvidas* no livro analisado da editora FTD, encontramos uma única proposta que contemplou a Geometria dos Fractais associada ao conteúdo Geometria, mais especificadamente ao conteúdo transformações homotéticas. A tarefa encontrada nesse volume explorou aspectos relacionados à construção de fractais, por meio de processos recursivos utilizando iterações, proporcionando ao aluno um breve contato com essa Geometria.

Na coleção Diálogo, encontramos, no volume “Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas”, uma abordagem dessa geometria no capítulo 13, destinado ao estudo das Transformações Geométricas. De forma sucinta - em duas páginas -, a obra apresenta aspectos gerais sobre esta geometria não-euclidiana. Inicialmente, aborda-se a semelhança entre a samambaia e os brócolis, ressaltando o padrão semelhante das partes menores desses elementos na totalidade do desenho. Na sequência, discorre sobre a origem do termo Fractal, destacando umas das três principais característica dos fractais - a autossimilaridade - e enfatiza a aplicação desta geometria em outras áreas de estudo, como na Biologia, Física, Medicina, entre outras, conforme a figura 14.

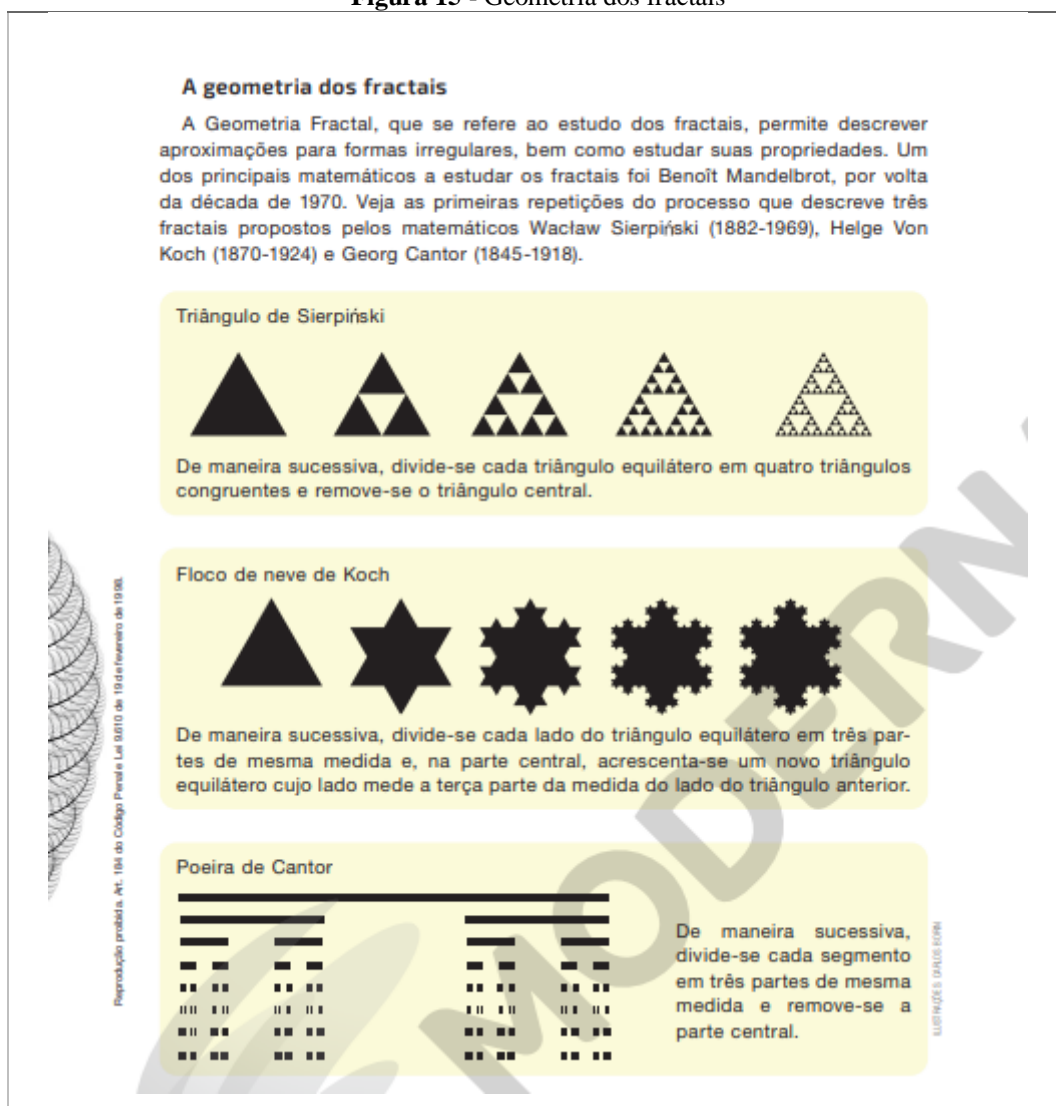
Figura 14 - Transformações Geométricas



Fonte: Teixeira (2020a, p. 132).

Em continuidade, na próxima página, a autora apresenta uma breve explicação em relação à Geometria dos Fractais, destacando o primeiro matemático que dedicou seus estudos a essa geometria, Benoît Mandelbrot, por volta da década de 1970. Ela traz, então, de forma breve, três fractais, propostos pelos matemáticos Waclaw Sierpiski (1882-1969), Helge Von Koch (1870-1924) e Georg Cantor (1845-1918), e também seu processo de construção, conforme a figura 15, abaixo.

Figura 15 - Geometria dos fractais



Fonte: Teixeira (2020a, p. 133).

Diante disso, a autora propõe um momento de reflexão, com uma atividade para que o aluno aprofunde seus conhecimentos em relação ao tema estudado. A atividade é composta por três perguntas, tendo como objetivo a busca de uma formalização ou reflexão sobre o saber matemático estudado. É o que se mostra na figura 16.

Figura 16 - Investigação sobre os fractais

- A** Você conhece outros tipos de fractais? Cite-os.
- B** Pesquise sobre o Tapete de Sierpiński e descreva o procedimento para sua obtenção.
- C** Pesquise uma imagem do Cubo de Sierpiński. Aparentemente, cada face desse fractal é semelhante a qual outro fractal?

Fonte: Teixeira (2020a, p. 133).

A figura 16 permite observar que os itens *a* e *c* dependem diretamente do aluno para que se chegue a uma resolução, demandando do aluno uma pesquisa a fim de obter as respostas necessárias. Sendo assim, podemos caracterizar tais atividades como tarefas de caráter pessoal; em contrapartida, o item *b* oferece subsídios para que se pense sobre sua OM, a qual apresentamos na sequência.

Com relação ao item *b*, o aluno é levado a, primeiramente, realizar uma pesquisa sobre o Tapete de Sierpinski; em seguida, a descrever o passo a passo necessário para a construção desse fractal. Sendo assim, caracterizamos essa tarefa como sendo T_2 : *Construir o fractal Tapete de Sierpinski*, e modelamos suas técnicas provenientes do desenvolvimento apresentado no livro do professor sobre esta atividade, cuja OM apresenta-se no quadro 11, a seguir.

Quadro 11 - Tipo de tarefa 2

TIPO DE TAREFA	T_2 : Construir o fractal Tapete de Sierpinski.
TÉCNICA	$T_{2.1}$: Construir um quadrado. $T_{2.2}$: Dividir o quadrado construído anteriormente em nove quadrados menores e iguais. $T_{2.3}$: Remover o quadrado central da figura.
TECNOLOGIA	$\theta_{2.1}$: Noção de geometria. $\theta_{2.2}$: Noção do elemento figurar “quadrado”.
TEORIA	θ_2 : Aritmética e Geometria.

Fonte: A autora (2022).

Por meio das técnicas necessárias para a resolução da tarefa, e com base nas tecnologias que as justificam, elencamos as seguintes habilidades e objetos de conhecimento, mobilizados durante a sua resolução, conforme mostra o quadro 12.

Quadro 12 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 2

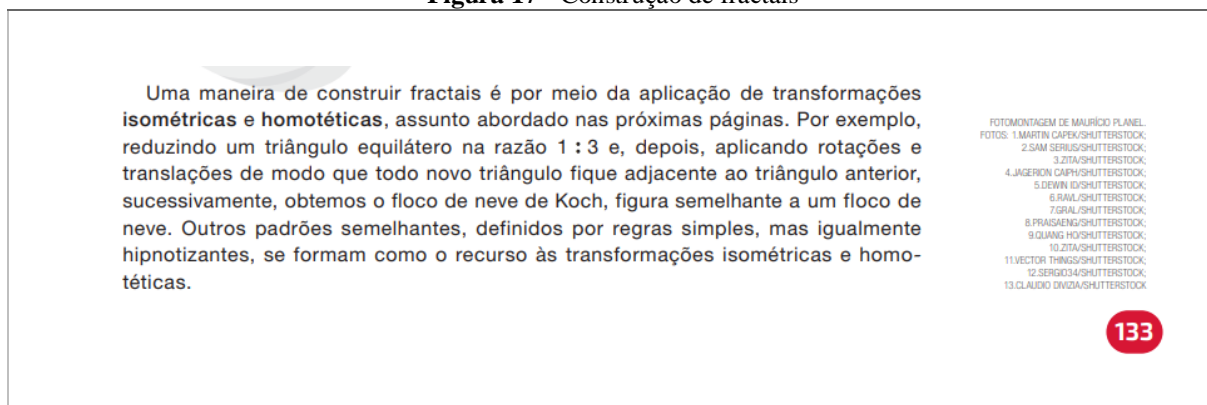
Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (p. 297).	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos (p. 296).
(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (p. 203).	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares (p. 202).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).

envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	Transformações isométricas e homotéticas.

Fonte: Brasil (2018).

Por fim, após a indagar os alunos com as perguntas apresentadas anteriormente, a autora finaliza a abordagem salientando que uma das maneiras para construir fractais é por meio da aplicação de transformações isométricas e homotéticas; em seguida, apresenta um exemplo dessa forma de construção, para a obtenção do fractal floco de neve de Koch, conforme figura 17, abaixo.

Figura 17 - Construção de fractais



Fonte: Teixeira (2020a, p. 133).

Assim, no que diz respeito à análise das abordagens na *Parte Curso*, foi possível observar que ambos os volumes abordam a geometria dos fractais como complementação do estudo sobre as transformações geométricas e homotéticas. Além disso, apresentam tarefas que exploram aspectos relacionados com a construção fractal, proporcionando aos alunos uma breve exposição a esta geometria.

4.3 Atividades Propostas

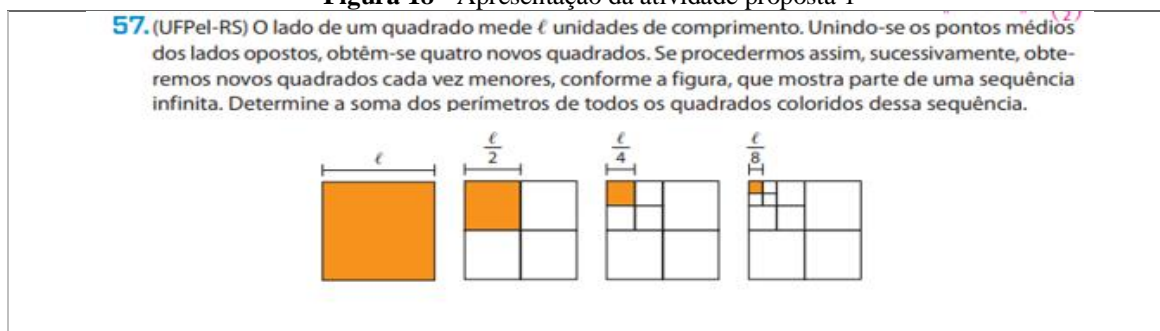
No que se refere às *Atividades Propostas*, estas foram encontradas em apenas 3 livros dentre os 6 analisados da coleção Prisma Matemática, sendo eles “Geometria e Trigonometria”; “Funções e Progressões”; e “Geometria”. Nos livros “Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas”; “Conjuntos e funções”; e “Estatísticas, Combinatória e Probabilidade”, nada

consta em relação à Geometria dos Fractais. Em relação a coleção Diálogo foram encontradas em 2 volumes, sendo eles: “Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas” e “Funções e Progressões”. Nos volumes “Geometria Plana”, “Geometria Espacial”, “Grandezas, Medidas e Matemática financeira” e “Estatística e probabilidade”, nada foi possível evidenciar, uma vez que não encontramos exploração do conteúdo de Geometria dos Fractais nesses volumes.

Iniciamos nossa análise com o livro da coleção Prisma Matemática em que encontramos maior número de Atividades Propostas relacionado ao nosso objeto de estudo - o volume “Funções e Progressões”; na sequência, apresentamos as Atividades Propostas encontradas no volume “Geometria e Trigonometria”; e, por fim, o volume “Geometria”, no qual encontramos uma única atividade relacionada ao assunto Geometria dos fractais.

O volume “Funções e Progressões” apresenta, na página 141, no capítulo destinado ao estudo de progressão, uma tarefa referente a uma sequência infinita de quadrado, apresentando quatro níveis da figura, conforme figura 18, a seguir.

Figura 18 - Apresentação da atividade proposta 1



Fonte: Bonjorno *et al* (2020a, p. 141).

Na tarefa, os autores propõem o estudo da soma do perímetro de todos os quadrados coloridos da sequência exibida. Embora a sequência apresentada não tenha o nome de um fractal específico, é possível observar algumas características dessa geometria, entre elas a autossimilaridade, na qual, cada parte em escala menor é semelhante à parte inicial. Para resolver essa questão, o aluno precisa ter o conhecimento de que o perímetro é a soma de todos os lados de um polígono, e este, na situação apresentada, será quatro vezes a medida do lado, visto que a figura exibida é um quadrado. Para que o aluno encontre a soma de todos os perímetros da sequência, será necessário encontrar o valor do primeiro termo e do segundo termo, para assim encontrar a razão da sequência.

Por fim, o aluno aplicará a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Infinita: $\frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo e q é a razão. Sendo assim, a seguir apresentamos o quadro com

a OM e, na sequência, com base nestas informações, descreveremos as habilidades e os objetos de conhecimento presentes na BNCC do Ensino Fundamental passíveis de exploração no decorrer da resolução da atividade proposta 1.

Quadro 13 - Tipo de tarefa 3

TIPO DE TAREFA	T ₃ : Determinar a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos até o terceiro nível de iteração.
TÉCNICA	$\tau_{3,1}$: Calcular o perímetro do quadrado colorido da primeira figura, para determinar o valor do primeiro termo. $\tau_{3,2}$: Calcular o perímetro do quadrado colorido da segunda figura, para determinar o valor do segundo termo. $\tau_{3,3}$: Determinar a razão entre os primeiros termos da sequência. $\tau_{3,4}$: Aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita $s = \frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo e q é a razão, de modo a encontrar a soma dos perímetros dos quadrados coloridos até o terceiro nível de iteração.
TECNOLOGIA	$\theta_{3,1}$: Conhecimento do elemento figural “quadrado”. $\theta_{3,2}$: Noção de quadrado. $\theta_{3,3}$: Noção de perímetro. $\theta_{3,4}$: Noção de Progressão Geométrica.
TEORIA	Θ_3 : Aritmética e Geometria.

Fonte: A autora (2022).

A partir das técnicas necessárias para a resolução da atividade proposta 1, e das tecnologias que justificam cada uma das técnicas, elencamos as seguintes habilidades e objetos de conhecimento, mobilizados durante a sua resolução, conforme mostra o quadro 14, a seguir.

Quadro 14 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 3

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (p. 279).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 278).
(EF04MA20) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local (p. 293).	Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais (p. 292).
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p.306).

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p.541).	Progressões Geométricas e soma dos termos de um PG infinita (p. 541).
---	---

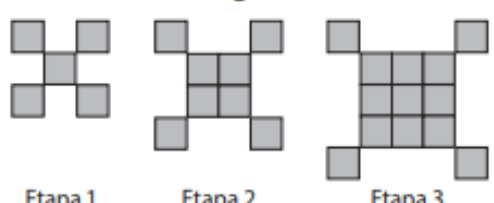
Fonte: Brasil (2018).

Em continuidade, no volume “Funções e Progressões”, na seção Atividades Complementares do capítulo 4, destinado ao estudo de progressões, encontramos 3 atividades que apresentam propriedades fractal. Uma dessas atividades não cita o termo “fractal” em seu enunciado, porém tal ideia fica implícita.

A tarefa a seguir apresenta uma sequência formada por quadrados de lado 1 cm, sendo que os autores apresentam três etapas da sua construção e o número de quadrados:

Figura 19 - Apresentação da atividade proposta 2

2. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção, representado pelos desenhos formados por quadrados de lado 1, em cada uma das etapas indicadas na figura abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

O número de quadrados de lado 1 que farão parte da figura da etapa 10 é

a) 96. c) 104. e) 112.
b) 100. d) 108.

Fonte: Bonjorno *et al* (2020a, p. 147).

A partir da imagem, propõe-se que o aluno encontre o número de quadrados que farão parte da figura na décima etapa.

Ao realizar a OM desta tarefa, observamos que ela se enquadra no tipo de tarefa “Determinar o número de quadrado na décima etapa da sequência”. Conforme observamos na figura, o número de quadrados centrais aumenta de acordo com a regra n^2 , onde n representa o número de etapas. Além disso, cada etapa da sequência tem um número fixo de 4 quadrados, que não varia. Portanto, pode-se concluir que a lei que rege o número de quadrados pode ser escrita como $a_n = n^2 + 4$ e, assim sendo, para a etapa 10, teremos $a_{10} = 10^2 + 4$. Logo, farão parte da figura na etapa 10, 104 quadrados. Na sequência, apresentamos a OM para essa tarefa:

TIPO DE TAREFA	T ₄ : Determinar o número de quadrados na décima etapa da sequência.
TÉCNICA	$\tau_{4.1}$: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. $\tau_{3.2}$: Identificar a lei de formação algébrica da sequência $a_n = n^2 + 4$, onde n é a etapa do fractal. $\tau_{4.3}$: Substituir o número da etapa na lei de formação algébrica e efetuar o cálculo.
TECNOLOGIA	$\theta_{4.1}$: Noção de potência. $\theta_{4.2}$: Noção de sequência.
TEORIA	Θ_4 : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Com base nas técnicas e tecnologias descritas no quadro anterior, o aluno poderá mobilizar as seguintes habilidades e objetos de conhecimento presentes na BNCC:

Quadro 16 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 4

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes (p. 287).	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas (p. 286).
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas (p. 307).	Linguagem algébrica: variável e incógnita (p.306).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).
(EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 533).	Progressão Aritmética e Sequências (p. 533).

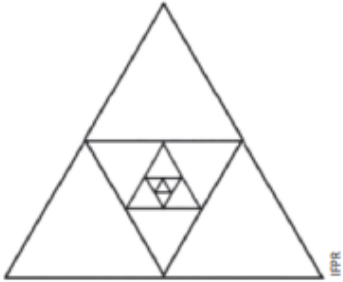
Fonte: Brasil (2018).

Portanto, é possível observarmos que, por meio da atividade proposta 2, é possível desenvolver três habilidades e seus objetos de conhecimento correspondentes, ou seja, ao estudar a resolução desta tarefa, o aluno desenvolve as habilidades descritas e ainda estuda alguns objetos de conhecimento correspondentes a elas.

A segunda tarefa da seção Atividades Complementares deixa explícito o termo “fractal”, apresentando uma pequena definição dele em seu enunciado. Nessa tarefa, é ilustrada a construção de um fractal simples por meio da união dos pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, em um processo de repetições indefinidas. A presente tarefa instiga os alunos a determinarem o limite para soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem o fractal, considerando que a construção se inicia com um triângulo equilátero de medida 8 unidades de comprimento, conforme mostra a figura 20.

Figura 20 - Apresentação da atividade proposta 3

22. (IFPR) Um fractal é uma estrutura geométrica que se repete em qualquer escala. Unindo os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, obtemos outro triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, determinamos um fractal bem simples, ilustrado na figura abaixo. Se começarmos a construção com um triângulo equilátero de lado de medida 8 unidades de comprimento, o limite para a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem o fractal será, em unidades de comprimento, de:



a) 45. c) 48.
b) 46,5. d) 72.

Fonte: Bonjorno *et al* (2020a, p. 149).

Com base no enunciado da tarefa, é possível observar que o valor do perímetro de cada triângulo organizado em uma sequência corresponde a uma Progressão Geométrica. Assim sendo, de início, é necessário que o aluno encontre a medida do perímetro do primeiro triângulo. Sabendo que o fractal inicia com um triângulo equilátero de medida 8 unidades de comprimento de lado, teremos que seu perímetro corresponderá a 24 unidades de comprimento, como sendo $a_1 = 24$.

Na sequência, é necessário encontrar a medida do perímetro do segundo triângulo da sequência, o qual possui cada um de seus lados medindo 4 unidades de comprimento, uma vez que a medida do seu lado corresponde à metade da medida do lado do triângulo anterior. Posto

isto, seu perímetro corresponderá a 12 unidades de comprimento $a_2 = 12$. Encontrada a medida do perímetro do primeiro e do segundo triângulo da sequência, o aluno precisará encontrar a razão entre esses dois termos, em que $q = \frac{a_2}{a_1}$, onde q é a razão a_1 e a_2 correspondem ao primeiro e ao segundo termo da sequência, e, portanto, a razão corresponderá a $\frac{1}{2}$.

Por fim, para determinar o limite da soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem esse fractal, é necessário aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, indicada por $s = \frac{a_1}{1-q}$, na qual s corresponde ao valor da soma, a_1 é o primeiro termo e q é a razão. Desse modo, substituindo os valores na equação, teremos $s = \frac{24}{1-\frac{1}{2}}$; logo, o limite para soma dos perímetros que compõem o fractal é 48 unidades de comprimento. Posteriormente, realizamos a OM para essa tarefa, conforme apresentado no quadro 17.

Quadro 17 - Tipo de tarefa 5

TIPO DE TAREFA	T ₅ : Determinar o limite da soma dos perímetros dos triângulos que compõem o fractal.
TÉCNICA	$\tau_{5.1}$: Calcular o perímetro do primeiro triângulo de 8 unidades de comprimento, para determinar o valor do primeiro termo. $\tau_{5.2}$: Calcular o perímetro do segundo triângulo com 4 unidades de comprimento, para determinar o valor do segundo termo. $\tau_{5.3}$: Determinar a razão entre os primeiros termos da sequência. $\tau_{5.4}$: Aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita $s = \frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo e q é a razão
TECNOLOGIA	$\theta_{5.1}$: Conhecimento do elemento figural “triângulo”. $\theta_{5.2}$: Noção de perímetro. $\theta_{5.3}$: Noção de Progressão Geométrica.
TEORIA	θ_5 : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Na sequência, apresentamos o quadro 18, com as habilidades e objetos de conhecimento presentes na BNCC passíveis de serem mobilizados na resolução dessa tarefa.

Quadro 18 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 5

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF04MA20) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local (p. 293).	Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais (p. 292).
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p.306).

duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p.541).	Progressões Geométricas e soma dos termos de uma PG infinita (p.541).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).

Fonte: Brasil (2018).

Portanto, é possível observar que, por meio da atividade proposta 3, é possível desenvolver quatro habilidades e seus objetos de conhecimento correspondentes, ou seja, ao estudar a resolução dessa tarefa, o aluno desenvolve as habilidades descritas e ainda estuda alguns objetos de conhecimento correspondentes a elas.

A terceira e última tarefa encontrada no volume “Funções e Progressões” apresenta de modo explícito uma abordagem da Geometria dos Fractais, em que se ensinam os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Tal construção explica que os vértices dos triângulos brancos construídos são formados a partir dos pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior, e a sequência a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 , respectivamente, corresponde às áreas das regiões escuras das cinco figuras da sequência. A presente tarefa solicita que o aluno determine a razão entre as áreas, visto que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica, como mostra a figura 21, a seguir.

Figura 21 - Apresentação da atividade proposta 4

31.(UFRN) A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 , respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência.

Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

Fonte: Bonjorno *et al* (2020a, p. 151).

Com base no enunciado desta tarefa, as áreas das regiões escuras das cinco figuras da sequência estão em progressão geométrica, sendo solicitado ao aluno encontrar a razão desta PG. Este procedimento demanda que o aluno encontre o valor de pelos menos dois termos sucessivos dessa sequência. Como o fractal é formado por triângulos equiláteros, para determinar o valor do primeiro termo a_1 utiliza-se a fórmula do cálculo da área do triângulo equilátero, $A = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, onde A corresponde à área, e l à medida do lado do triângulo. Assim sendo, a área da região escura do primeiro triângulo da sequência corresponde ao valor do primeiro termo da sequência, $a_1 = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Aplicando a mesma fórmula é possível encontrar o segundo termo da sequência, sendo ele $a_2 = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - l^2 \frac{\sqrt{3}}{16} = 3l^2 \frac{\sqrt{3}}{16}$. Encontrados pelo menos dois termos da sequência, basta encontrar a razão por meio da fórmula $q = \frac{a_2}{a_1}$, substituindo o valor dos termos temos $q = \frac{3l^2 \frac{\sqrt{3}}{16}}{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{4}$. Logo, a sequência é uma PG de razão $\frac{3}{4}$.

Assim, construímos nossa OM para o Tipo de Tarefa 6:

Quadro 19 - Tipo de tarefa 6

TIPO DE TAREFA	T ₆ : Encontrar a razão da progressão geométrica das áreas das regiões escuras do triângulo de Sierpinski.
TÉCNICA	<p>$\tau_{6.1}$ Encontrar o valor do termo a_1, por meio da fórmula do cálculo da área de um triângulo equilátero.</p> <p>$\tau_{6.2}$: Encontrar o valor do termo a_2, por meio da fórmula do cálculo da área de um triângulo equilátero.</p>

	$\tau_{6,3}$: Calcular a razão da PG dividindo $\frac{a_2}{a_1}$.
TECNOLOGIA	$\theta_{6,1}$: Noção de cálculo de área. $\theta_{6,2}$: Conhecimento da fórmula da área do triângulo equilátero. $\theta_{6,3}$: Noção de Progressão Geométrica.
TEORIA	θ_6 : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Quando da resolução dessa tarefa, o aluno mobilizará as seguintes habilidades e objetos de conhecimento, como mostra o quadro 20.

Quadro 20 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 6

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos (p. 303).	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados (p. 302).
(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (p. 315).	Área de figuras planas (p. 314).
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p. 306).
(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 233)	Progressão Geométrica (p.533).

Fonte: Brasil (2018).

Portanto, é possível observarmos que, por meio da atividade proposta 4, é possível desenvolver quatro habilidades e seus objetos de conhecimento correspondentes, ou seja, ao estudar a resolução dessa tarefa, o aluno desenvolve as habilidades descritas e ainda estuda alguns objetos de conhecimento correspondentes a elas.

Ainda no volume “Geometria e Trigonometria” encontram-se duas tarefas referentes aos estudos dos fractais, na seção Atividades, do primeiro capítulo, denominado “Proporcionalidade e Semelhança”, na subseção “Transformações Homotéticas”. Ambas contemplam os fractais explicitamente em seus enunciados.

A primeira tarefa se refere a processo de construção do Tapete de Sierpinski. O enunciado fornece o passo a passo do processo de construção, e solicita ao aluno que construa três iterações; ao final, pede que aluno pesquise a respeito da figura obtida e descubra o nome do fractal construído, como mostra a figura 22, a seguir.

Figura 22 - Apresentação da atividade proposta 5

26. Já vimos vários exemplos de fractais, como o triângulo de Sierpinski. Agora, vamos conhecer mais um. Siga os passos a seguir para realizar a construção. Faça três iterações.

- I)** Construa um quadrado de lado medindo 3 cm.
- II)** Divida esse quadrado em nove quadrados menores. Para isso, divida cada lado em três partes iguais.
- III)** Pinte o quadrado menor central.
- IV)** Repita os passos **II** e **III** para os demais quadrados da figura que não estão pintados.

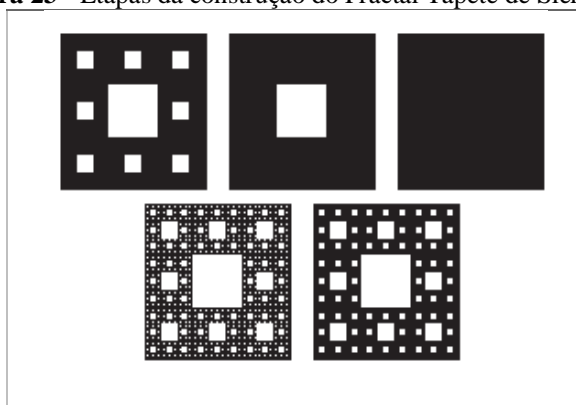
Agora, pesquise a respeito da figura obtida e descubra o nome desse fractal.

Fonte: Bonjorno *et al* (2020b, p. 35).

Ao analisar essa tarefa, realizamos a OM com base na observação do desenvolvimento da solução presente no livro do professor, em que a técnica de mobilização para realizar a tarefa refere-se ao uso de materiais didáticos como folha, régua e lápis, com o intuito de efetuar a construção do Tapete de Sierpinski, e, por fim, explorar matematicamente este fractal.

A construção desse fractal pressupõe, de início, a construção de um quadrado com lados medindo 3 cm; na sequência, cada lado do quadrado construído inicialmente deve ser dividido em três partes iguais, de modo que formem nove novos quadrados, e o quadrado central deve ser retirado; em seguida, o mesmo procedimento é aplicado em cada um dos oito quadrados restantes, e assim sucessivamente, constituindo as etapas do fractal Tapete de Sierpinski, como mostra a figura 23.

Figura 23 - Etapas da construção do Fractal Tapete de Sierpinski



Fonte: Bonjorno *et al* (2020b, p. 242).

Ao analisar essa tarefa, determinamos a OM com o Tipo de Tarefa 6, apresentada no quadro 21, abaixo.

Quadro 21 - Tipo de tarefa 7

TIPO DE TAREFA	T ₇ : Construir o fractal Tapete de Sierpinski.
TÉCNICA	$\tau_{7.1}$: Construir um quadrado com 3 cm de lado, com o auxílio de uma régua. $\tau_{7.2}$: Dividir o quadrado construído anteriormente em nove quadrados menores, dividindo cada lado do quadrado inicial em três partes iguais. $\tau_{7.3}$: Pintar o quadrado menor central. $\tau_{7.4}$: Repita a técnica 6.1 e 6.2, sucessivamente, para a construção da próxima etapa da figura.
TECNOLOGIA	$\theta_{7.1}$: Noção de geometria. $\theta_{7.2}$: Noção do elemento figurar “quadrado”. $\theta_{7.3}$: Noção de partição de um segmento.
TEORIA	θ_7 : Aritmética e Geometria.

Fonte: A autora (2022).

A partir das técnicas necessárias para a resolução da tarefa, e com base nas tecnologias que as justificam, elencamos as seguintes habilidades e objetos de conhecimento, mobilizados durante a sua resolução, conforme mostra o quadro 22.

Quadro 22 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 7

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (p. 297).	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos (p. 296).
(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e softwares (p. 202).

perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (p. 203).	
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras (p.525).	Geometria das Transformações. Noções de Geometria dos Fractais (p.525).

Fonte: Brasil (2018).

Tais habilidades e objetos de conhecimentos são derivados das possíveis técnicas e tecnologias a serem desenvolvidas por meio da tarefa proposta. Sendo assim, identificamos 4 habilidades e seus respectivos objetos de conhecimento.

Na sequência, ainda nesse volume e no mesmo capítulo, os autores propõem mais uma tarefa que envolve os fractais. Nela, o fractal apresentado é a Curva de Peano. Da mesma forma que nas tarefas anteriores, solicita-se que aluno pesquise sobre como construir este fractal, e, em seguida, que faça sua construção por meio de uma regra de iteração; por fim, estimula o aluno a compartilhar a sua construção com os colegas e com o professor da turma, como apresentado na figura 24, a seguir.

Figura 24 - Apresentação da atividade proposta 6

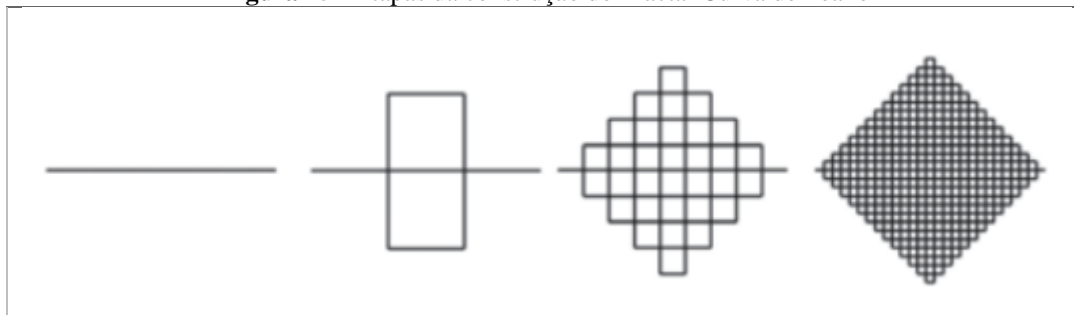
27. A curva de Peano também é um fractal. Para construí-la, existe uma regra de iteração. Pesquise como construir essa curva e construa uma parte dela. Depois, apresente aos colegas e ao professor a sua construção.

Fonte: Bonjorno *et al* (2020b, p. 35).

Para construir a Curva de Peano, primeiramente deve-se traçar um segmento de reta de tamanho qualquer. Na sequência, é necessário dividir esse segmento em três partes iguais. Por meio do segmento central, gerado a partir da divisão do segmento inicial, o aluno deve construir um retângulo que intercepte o segmento central de forma que o retângulo seja dividido em duas partes iguais, formando dois quadrados de lado igual a $\frac{1}{3}$ da medida do segmento. Por fim,

repetindo as etapas anteriores para cada novo segmento, originam-se as demais etapas da Curva de Peano. O fractal obtido pode ser observado na figura 25, apresentada na sequência, encontrada no manual do professor na parte destinada à resolução das atividades.

Figura 25 - Etapas da construção do Fractal Curva de Peano



Fonte: Bonjorno *et al* (2020b, p. 242).

Para estudar essa tarefa, realizamos a OM, como mostra o quadro 23.

Quadro 23 - Tipo de tarefa 8

TIPO DE TAREFA	T ₈ : Construir o fractal curva de Peano.
TÉCNICA	$\tau_{8.1}$: Traçar um segmento de reta. $\tau_{8.2}$: Dividir o segmento traçado em três partes iguais. $\tau_{8.3}$: A partir do segmento central, construir um retângulo que o intercepte de forma que o retângulo seja dividido em duas partes iguais pelo segmento, formando dois quadrados de lados iguais a $\frac{1}{3}$ da medida do segmento inicial. $\tau_{8.4}$: Repetir a técnica 7.1 e 7.2, sucessivamente, até a etapa que achar suficiente para identificar o fractal em estudo.
TECNOLOGIA	$\theta_{8.1}$: Noção de geometria. $\theta_{8.2}$: Noção de segmento de reta. $\theta_{8.3}$: Noção do elemento figural “retângulo”.
TEORIA	θ_8 : Geometria.

Fonte: A autora (2022).

Ao desenvolver a construção dessa tarefa por meio das técnicas e tecnologias mencionadas no quadro anterior, o aluno poderá mobilizar as seguintes habilidades e objetos de conhecimento:

Quadro 24 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 8

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (p. 303).	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e softwares (p. 302).
(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de

de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais (p. 287).	parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida (p. 286).
(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (p. 297).	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos (p. 296).
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras (p.525).	Transformações homotéticas (p. 525).


Fonte: Brasil (2018).


De forma a dar continuidade às análises, no volume “Geometria”, há uma atividade que não aborda de forma explícita os fractais, uma vez que seu enunciado não faz menção ao termo Fractal. Entretanto, nesse momento, o livro didático apresenta características deste objeto geométrico - como o comportamento da autossimilaridade, uma das principais características dos fractais - que tornaram possível procedermos a algumas análises.

Assim, encontramos no capítulo 1, destinado ao estudo de Áreas, na seção “Atividades”, pertencente ao subtópico “Polígono regulares”, atividade em que os autores apresentam uma sequência formada por quadrados congruentes, com medida de lado como sendo 1 unidade de comprimento, e a área de cada quadrado sendo 1 unidade de área. Na sequência, o livro traz um quadro e solicita que o aluno determine a área e o perímetro até a quinta figura da sequência, como podemos observar na figura 26.

Figura 26 - Apresentação da atividade proposta 7

32. Observe a sequência de figuras abaixo, formadas por quadrados alaranjados congruentes:



Considere a medida do lado de um quadrado  como sendo 1 unidade de comprimento (u.c.), e a área desse quadrado como 1 unidade de área (u.a.), e copie o quadro a seguir no seu caderno, completando-o.

Medida do lado (em u.c.)	1	2	3	4	5
Medida do perímetro (em u.c.)	4	8			
Medida da área (em u.a.)	1	4			

Fonte: Bonjorno *et al* (2020c, p. 30).

Nessa atividade, entendemos haver dois tipos de tarefas: i) Determinar a medida do perímetro de cada figura da sequência até a etapa 5; ii) Determinar a medida da área de cada figura da sequência até a etapa 5.

Com relação ao primeiro tipo de tarefa – i) Determinar a medida do perímetro de cada figura da sequência até a etapa 5 –, sabemos que a medida do perímetro P , de cada figura da sequência, em u.c., é dada por: $P(n) = 4n$, onde P é o perímetro e n é a posição da figura na sequência. Assim sendo, o aluno poderá substituir n pela posição da figura, ou seja, o cálculo para a figura que se encontra na terceira etapa da sequência fica na forma $P(3) = 4.3 = 12$. Portanto, na etapa 3, a medida do perímetro corresponde a 12 (u.c.).

Com base nestas informações, elaboramos a OM para essa tarefa como mostra o quadro 25.

Quadro 25 - Tipo de tarefa 9

TIPO DE TAREFA	T ₉ : Determinar a medida do perímetro de cada figura da sequência até a etapa 5.
TÉCNICA	$\tau_{9.1}$: Substituir a posição da figura na sequência na fórmula $P(n) = 4n$, até a etapa cinco da sequência.
TECNOLOGIA	$\theta_{9.1}$: Noção de geometria. $\theta_{9.2}$: Noção do elemento figurado “quadrado”. $\theta_{9.3}$: Noção de cálculo de perímetro.
TEORIA	Θ_9 : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

A respeito do segundo tipo de tarefa, temos: Determinar a medida da área de cada figura da sequência até a etapa 5. Para determinar a área de cada figura, o aluno deve ter conhecimento de que a área de cada figura da sequência é dada por $A = n^2$, em que A corresponde à área do quadrado, e n é a posição da figura na sequência. Observamos, como exemplo, o cálculo da área da figura que se encontra na terceira posição da sequência $A = 3^2 = 9$, logo a área da terceira figura da sequência corresponde a 9 (u.a).

Na sequência, elaboramos a OM para esta tarefa, como mostra o quadro 26, abaixo.

Quadro 26 - Tipo de tarefa 10

TIPO DE TAREFA	T ₁₀ : Determinar a medida da área de cada figura até etapa cinco da sequência.
TÉCNICA	$\tau_{10.1}$: Substituir a posição da figura na sequência na $A = n^2$, até a etapa cinco da sequência.
TECNOLOGIA	$\theta_{10.1}$: Noção de geometria. $\theta_{10.2}$: Noção do elemento figurado “quadrado”. $\theta_{10.3}$: Noção de cálculo de área.
TEORIA	Θ_{10} : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

A partir das Técnicas necessárias para resolver a tarefa 8 proposta e, conseqüentemente, com base nas tecnologias elencadas, listamos as seguintes competências e habilidades, mobilizadas durante sua resolução, conforme demonstrado no quadro 27, a seguir.

Quadro 27 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes às tarefas 9 e 10

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 282).
(EF04MA20) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local (p. 293).	Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais (p. 292).
(EF08MA19) Resolver e elaborar situações problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (p. 315).	Área de figuras planas; Área do círculo e comprimento de sua circunferência (p. 314).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais (p.528).	Cálculo de área de figuras planas. Expressões algébricas (p.528).

Fonte: Brasil (2018).

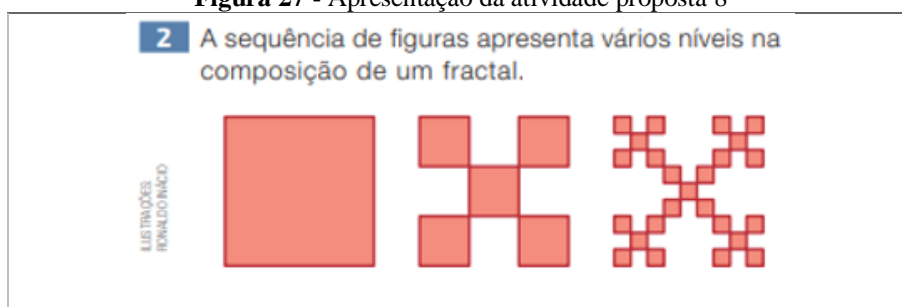
Na seqüência, apresentamos as análises dos volumes que compõe a segunda coleção analisada, Diálogo, da editora Moderna. Iniciamos pelo volume em que encontramos a maior quantidade de abordagens da Geometria dos Fractais, a saber, o volume “Funções e Progressões”. Em seguida, apresentamos as *Atividades Propostas* encontradas no volume

“Geometria analítica, Sistemas e Transformações Geométricas e Trigonometria”, no qual encontramos apenas duas atividades relacionadas ao assunto Geometria dos Fractais.

No volume “Funções e Progressões”, encontramos, no capítulo Equação e Inequação exponencial, na parte destinada ao ensino de equação exponencial, na seção Exercícios e Problemas, uma tarefa que contempla o conteúdo Geometria dos Fractais.

O enunciado dessa atividade exibe uma Tarefa referente à sequência de figuras, apresentando 3 níveis da composição de um fractal, conforme a figura 27, a seguir.

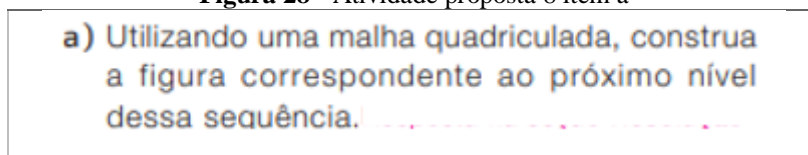
Figura 27 - Apresentação da atividade proposta 8



Fonte: Teixeira (2020b, p. 123).

Na sequência, a autora propõe aos alunos três indagações que fazem menção ao fractal apresentado na imagem anterior. Apresentamos a primeira delas, item a, na figura 28.

Figura 28 - Atividade proposta 8 item a



Fonte: Teixeira (2020b, p. 123).

Nessa tarefa, solicita-se ao aluno que, com o auxílio de uma malha quadriculada, construa o próximo nível da sequência do respectivo fractal. Ao realizar a OM de tal proposição, observamos que ela se enquadra no Tipo de Tarefa: *Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência*. Assim, apresentamos a OM no quadro 28, exibido na sequência.

Quadro 28 - Tipo de tarefa 11

TIPO DE TAREFA	T ₁₁ : Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência.
TÉCNICA	τ _{11.1} : Identificar o padrão figural do fractal. τ _{11.2} : Manipular malha quadriculada para construção do nível desejado.
TECNOLOGIA	θ _{11.1} : Noção de geometria. θ _{11.2} : Noção do elemento figural “quadrado”.
TEORIA	Θ ₁₁ : Geometria.

Fonte: A autora (2022)

Ao realizar a tarefa por meio das técnicas elencadas na OM, o aluno mobilizará as seguintes habilidades e objetos de conhecimentos da BNCC.

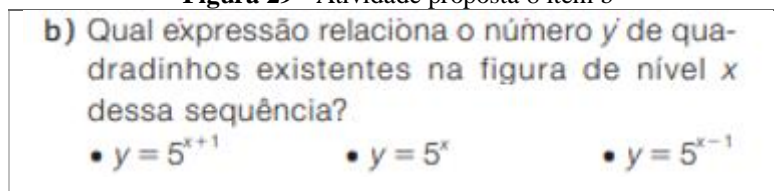
Quadro 29 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 11

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 282).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros (p. 536).	Funções Exponenciais (p. 536).

Fonte: Brasil (2018).

A tarefa item b faz referência ao conhecimento sobre a lei de formação algébrica do fractal; nela, a autora apresenta três alternativas, de modo que aluno resolva e assinale a correta, conforma mostra a figura 29.

Figura 29 - Atividade proposta 8 item b



Fonte: Teixeira (2020b, p. 123).

Com base na resolução encontrada no livro do professor, para resolver essa questão, o aluno pode iniciar com a construção de um quadro relacionando o nível do fractal (x) com a quantidade de quadradinhos (y), de modo a determinar a expressão algébrica, como mostra a figura 30, a seguir.

Figura 30 - Resolução do item b atividade proposta 8

b)

Nível (x)	Número de quadradinhos (y)
1	$1 = 5^0 = 5^{1-1}$
2	$5 = 5^1 = 5^{2-1}$
3	$25 = 5^2 = 5^{3-1}$
⋮	⋮

Logo, $y = 5^{x-1}$.

Fonte: Teixeira (2020b, p. 102).

Dessa forma, construímos a OM, na qual definimos o tipo de Tarefa: *Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal*, representada no quadro 30.

Quadro 30 - Tipo de tarefa 12

TIPO DE TAREFA	T ₁₂ : Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal
TÉCNICA	<p>$\tau_{12.1}$: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível.</p> <p>$\tau_{12.2}$: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis da sequência.</p> <p>$\tau_{12.3}$: Identificar a lei de formação algébrica do fractal.</p> <p>$\tau_{12.4}$: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal $y = 5^{x-1}$, onde x corresponde ao nível da figura, e y, à quantidade de quadradinhos do fractal.</p>
TECNOLOGIA	<p>$\theta_{12.1}$: Noção do elemento figural “quadrado”.</p> <p>$\theta_{12.2}$: Noção de Potência</p> <p>$\theta_{12.3}$: Noção de equação e função</p>
TEORIA	Θ_{12} : Geometria., Aritmética e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Assim sendo, observando a OM matemática para o item b, podemos elencar habilidades e objetos de conhecimentos que serão mobilizados pelos alunos ao realizar as técnicas necessárias para a resolução da Tarefa, representados no quadro 31.

Quadro 31 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 12

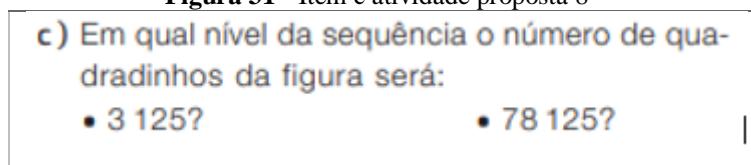
Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 282).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).

naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas (p. 307).	Linguagem algébrica: variável e incógnita (p.306).
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros (p. 536).	Funções Exponenciais (p. 536).

Fonte: Brasil (2018).

Para finalizar a atividade, a autora instiga o aluno a utilizar a função, a qual corresponde ao padrão de iteração do fractal disposto anteriormente no item b, $y = 5^{x-1}$, usando a substituição, de modo a encontrar em qual nível da sequência o número de quadradinhos será, respectivamente, 3.125 e 78.125, conforme se representa na figura 31.

Figura 31 - Item c atividade proposta 8



Fonte: Teixeira (2020b, p. 123).

Por meio da expressão obtida na questão b, o aluno consegue determinar o valor de x , que corresponde ao nível do fractal, substituindo o número de quadradinhos na expressão $y = 5^{x-1}$. Desta forma, $y = 5^{x-1} \rightarrow 3.125 = 5^{x-1} \rightarrow 5^5 = 5^{x-1} \rightarrow 5 = x - 1 \rightarrow x = 6$. Portanto, o número de quadradinhos da figura será 3.125 no nível 6. Para o segundo item o processo será o mesmo, $y = 5^{x-1} \rightarrow 78.125 = 5^{x-1} \rightarrow 5^7 = 5^{x-1} \rightarrow 7 = x - 1 \rightarrow x = 8$. Logo, o número de quadradinhos da figura será 78.125 no nível 8. Com base na resolução, construímos OM para esta Tarefa, demonstrada no quadro 32, abaixo.

Quadro 32 - Tipo de tarefa 13

TIPO DE TAREFA	T ₁₃ : Determinar o nível da sequência em que o número de quadradinhos do fractal é especificado.
TÉCNICA	<p>$\tau_{13.1}$: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível.</p> <p>$\tau_{13.2}$: Identificar a lei de formação algébrica da sequência $y = 5^{x-1}$, onde x é a etapa do fractal e y corresponde à quantidade de quadradinhos de cada etapa.</p>

	$\tau_{13.2}$: Substituir o número de quadradinhos na lei de formação algébrica e efetuar o cálculo.
TECNOLOGIA	$\theta_{13.1}$: Noção de potência. $\theta_{13.2}$: Noção de função e equação exponencial.
TEORIA	θ_{13} : Aritmética e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Na sequência, apresentamos o quadro 33, com as habilidades e objetos de conhecimento mobilizados pelos alunos ao resolverem o item *c* da atividade apresentada anteriormente.

Quadro 33 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 13

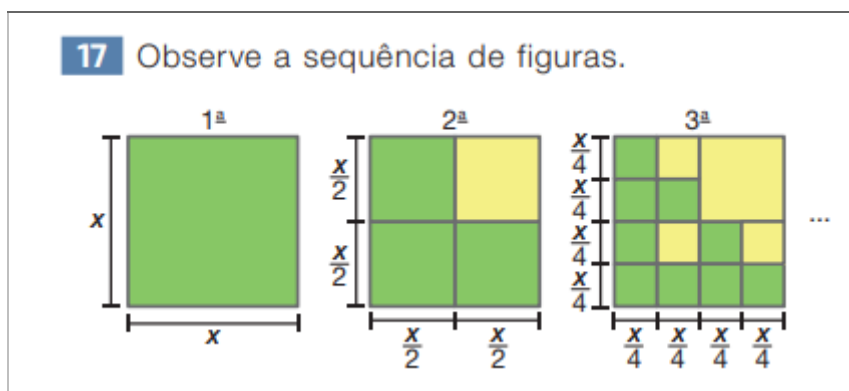
Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas (p. 307).	Linguagem algébrica: variável e incógnita (p.306).
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros (p. 536).	Função Exponencial (p. 536).

Fonte: Brasil (2018).

Dando continuidade às nossas análises nesse mesmo volume, no capítulo referente ao estudo de Progressão geométrica encontramos 4 atividades que possuem propriedades fractais; dentre elas, uma deixa explícito o termo fractal, sendo que as outras três não citam o termo em seu enunciado, deixando a ideia implícita.

A primeira atividade apresenta uma sequência de figura em que os autores representam três de suas iterações, conforme a figura 32, a seguir.

Figura 32 - Apresentação da atividade proposta 9



Fonte: Teixeira (2020b, p. 134).

A partir dessa observação, são propostas ao aluno três perguntas que norteiam essa sequência, partindo dos fundamentos da progressão geométrica. A primeira delas pede que o aluno escreva os cinco primeiros termos da sequência que representam as áreas em verde e amarelo, conforme figura 33.

Figura 33 - Item a atividade proposta 9

a) Escreva, em função de x , os 5 primeiros termos da sequência que representa áreas em:

- verde.
- amarelo.

Fonte: Teixeira (2020b, p. 134).

Podemos observar que, a cada etapa, a área verde diminui $\frac{1}{4}$ em relação à área da figura anterior. Logo: $\left(x^2, \left(\frac{3}{4}\right)x^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3 x^2, \left(\frac{3}{4}\right)^4 x^2\right) = \left(x^2, \frac{3x^2}{4}, \frac{9x^2}{16}, \frac{27x^2}{64}, \frac{81x^2}{256}\right)$. Já em relação à área amarela, é possível verificar que ela é igual à área total do quadrado menos a área verde. Logo: $\left(0, \left[1 - \frac{3}{4}\right]x^2, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]x^2, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right]x^2, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4\right]x^2\right) = \left(0, \frac{x^2}{4}, \frac{7x^2}{16}, \frac{37x^2}{64}, \frac{175x^2}{256}\right)$. Na sequência, no quadro 34, apresentamos a OM para o item a, da tarefa apresentada anteriormente.

Quadro 34 - Tipo de tarefa 14

TIPO DE TAREFA	T ₁₄ : Determinar os cinco primeiros termos da sequência que representa a área da região verde e amarela.
TÉCNICA	τ _{14.1} : Calcular a área da região verde até a etapa 5 da sequência. τ _{14.2} : Calcular a área da região amarela até a etapa 5 da sequência.
TECNOLOGIA	θ _{14.1} : Noção de geometria. θ _{14.2} : Noção de cálculo de área. θ _{14.3} : Noção de progressão geométrica.
TEORIA	Θ ₁₄ : Aritmética e Geometria.

Fonte: A autora (2022).

A partir das Técnicas necessárias para resolver a tarefa 14 proposta e, consequentemente, com base nas tecnologias, listamos as seguintes competências e habilidades, mobilizadas durante sua resolução, conforme demonstrado no quadro 35, a seguir.

Quadro 35 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 14

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 282).
(EF08MA19) Resolver e elaborar situações problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (p. 315).	Área de figuras planas; Área do círculo e comprimento de sua circunferência (p. 314).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 541).	Progressão geométrica (p. 541).

Fonte: Brasil (2018).

Em relação ao item b, a autora interroga o aluno sobre qual das sequências escritas no item a, é uma PG, conforme retrata a figura 34.

Figura 34 - Item b atividade proposta 9

b) Qual das sequências que você escreveu é uma PG? Justifique sua resposta.

Fonte: Teixeira (2020b, p. 134).

De acordo com o manual do professor, a Progressão Geométrica é a sequência que representa os valores das áreas em verde, pois, a partir do segundo termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é uma constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.

Para essa tarefa realizamos a seguinte OM:

Quadro 36 - Tipo de tarefa 15

TIPO DE TAREFA	T ₁₅ : Identificar uma progressão geométrica.
TÉCNICA	$\tau_{15.1}$: Analisar cada termo das sequências encontrada no item a.
TECNOLOGIA	$\theta_{15.1}$: Noção de progressão geométrica.
TEORIA	θ_{15} : Números e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Na sequência, apresentamos as habilidades e objetos de conhecimentos mobilizados pelos alunos ao resolverem a tarefa, como mostra o quadro 37.

Quadro 37 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 15

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 541).	Progressão geométrica (p. 541).

Fonte: Brasil (2018).

Ao fim da atividade, no item c, a autora solicita que aluno determine o décimo termo de cada uma das sequências, conforme mostra a figura 35.

Figura 35 - Item c atividade proposta 9

c) Determine o 10º termo de cada uma dessas sequências.

Fonte: Teixeira (2020b, p. 134).

Para tanto, é necessário que se aplique a fórmula do termo geral de uma PG, ($a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$), em que a_n corresponde ao n - ésimo termo da sequência, a_1 ao primeiro, n à ordem do termo, e q à razão. Assim sendo, para a primeira sequência, que corresponde à área da região verde, temos: $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot x^2 \rightarrow a_{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$. Quanto à segunda sequência, correspondente a área da região amarela, temos: $a_n = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] \cdot x^2 \rightarrow a_{10} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] x^2$. Em relação ao item c, o quadro 38, a seguir, contempla sua OM.

Quadro 38 - Tipo de tarefa 16

TIPO DE TAREFA	T ₁₆ : Determinar o décimo termo de cada uma das sequências.
----------------	---

TÉCNICA	$\tau_{16.1}$: Aplicar a fórmula do termo geral de uma PG: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde a_n corresponde ao valor desconhecido, a_1 ao primeiro termo da sequência geométrica, e q é a razão elevada ao número desconhecido menos 1. $\tau_{16.2}$: Calcular o 10º termo da sequência verde, por meio da fórmula do termo geral de uma PG, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. $\tau_{16.3}$: Calcular o 10º termo da sequência amarela, por meio da fórmula do termo geral de uma PG, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$.
TECNOLOGIA	$\theta_{16.1}$: Noção de função exponencial. $\theta_{16.2}$: Noção de Progressão Geométrica.
TEORIA	θ_{16} : Aritmética e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Na sequência, apresentamos o quadro 39, com as habilidades e objetos de conhecimentos desenvolvidos pelos alunos ao lançarem mão das técnicas listadas para a resolução da Tarefa.

Quadro 39 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 16

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 533).	Função exponencial e Progressão Geométrica (p. 533).

Fonte: Brasil (2018).

Na mesma seção, uma segunda atividade aborda a Geometria dos Fractais. Seu enunciado, retratado na figura 36, apresenta uma breve explicação sobre o termo Fractal, salientando que a Geometria dos Fractais estuda o comportamento de objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

Figura 36 - Apresentação da atividade proposta 10

22 (Enem, 2008) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

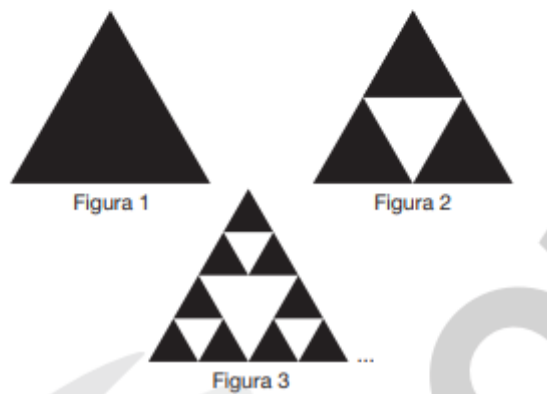
Fonte: Teixeira (2020b, p. 135).

Dando continuidade, a autora cita o fractal triângulo de Sierpinski, comenta sobre as etapas de sua construção e apresenta 3 figuras compatíveis com os 3 primeiros níveis deste fractal. Podemos observar isso na figura 37, abaixo.

Figura 37 - Continuação da atividade proposta 10

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

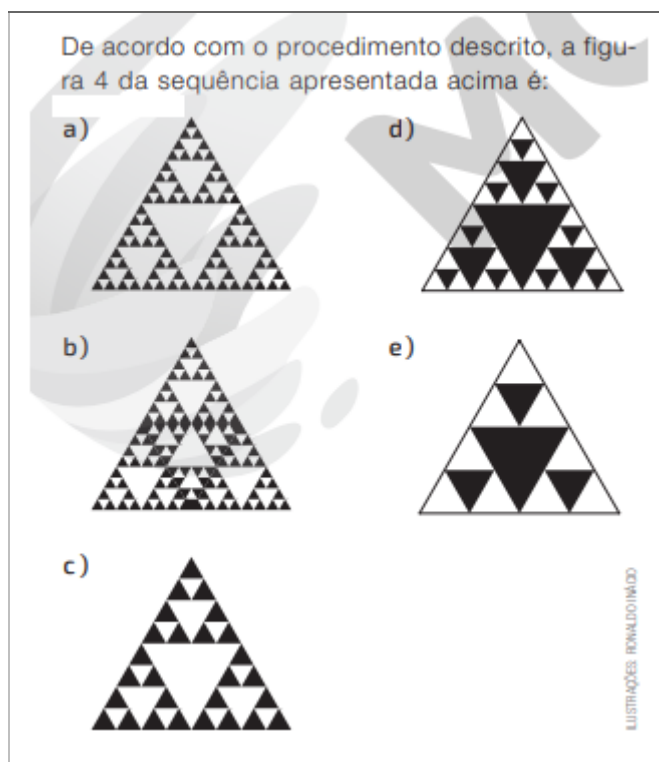
1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).



Fonte: Teixeira (2020b, p. 135).

Posteriormente, então, ao aluno é indagado qual seria a quarta figura obtida seguindo o procedimento descrito anteriormente. Para tanto, são disponibilizadas 5 alternativas, conforme figura 38, a seguir.

Figura 38 - Atividade proposta 10: alternativas



Fonte: Teixeira (2020b, p. 135).

Ao analisar essa Tarefa, construímos a OM, retratada na figura 40. A técnica mobilizada para a realização da Tarefa refere-se a manipular materiais didáticos; no caso em específico, papel, régua, compasso e lápis, buscando a construção do nível desejado.

Quadro 40 - Tipo de tarefa 17

TIPO DE TAREFA	T ₁₇ : Construir a figura correspondente a um nível desejado.
TÉCNICA	$\tau_{17.1}$: Construir um triângulo equilátero. $\tau_{17.2}$: Dividir cada lado do triângulo em duas partes iguais (ou seja, encontrar o ponto médio). $\tau_{17.3}$: Construir um triângulo em que cada lado tenha metade do tamanho do lado do triângulo anterior, e fazer três cópias. $\tau_{17.4}$: Efetuar o mesmo procedimento em cada triângulo obtido, e assim sucessivamente.
TECNOLOGIA	$\theta_{17.1}$: Noção de geometria. $\theta_{17.2}$: Noção do elemento figural “triângulo”. $\theta_{17.3}$: Noção de partição de um segmento. $\theta_{17.4}$: Noção de Potência.
TEORIA	θ_{17} : Aritmética e Geometria.

Fonte: A autora (2022).

Por meio das técnicas necessárias para a resolução da tarefa, e com base nas tecnologias que as justificam, elencamos as seguintes habilidades e objetos de conhecimento, mobilizados durante a sua resolução, conforme mostra o quadro 41.

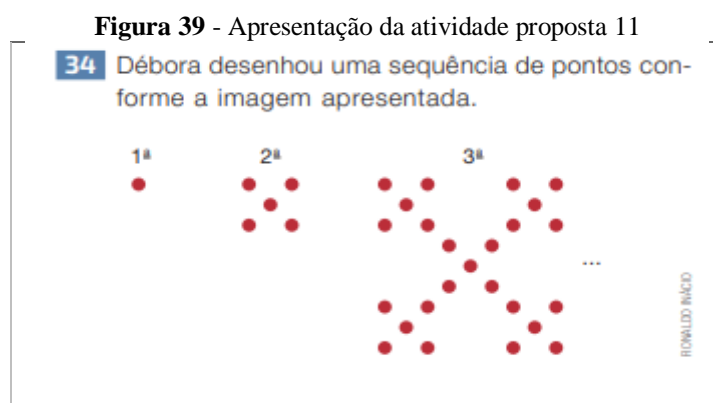
Quadro 41 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 17

Habilidades	Objetos de conhecimento
-------------	-------------------------

(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características.
(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos (p. 303).	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados (p. 302).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).
(EM13MAT508) Identificar e associar seqüências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 541).	Progressão geométrica (p. 541).

Fonte: Brasil (2018).

Dando seqüência às atividades correspondentes ao estudo de Progressão Geométrica, a próxima Tarefa corresponde a uma seqüência de pontos, em que são apresentadas três de suas iterações, conforme a imagem 39, a seguir.



Fonte: Teixeira (2020b, p. 139).

Em seguida, duas perguntas que norteiam essa seqüência são feitas aos alunos, partindo dos fundamentos da progressão geométrica. A primeira delas instiga o aluno a pensar sobre a continuidade da seqüência, determinando a quantidade de pontos referente à 5ª figura, conforme figura 40, abaixo.

Figura 40 - Item a atividade proposta 11

a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência.

Fonte: Teixeira (2020b, p. 139).

Sendo assim, para encontrar a quantidade de pontos na 5ª figura da sequência, o aluno deverá utilizar a fórmula do termo geral de uma PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, já mencionada anteriormente. Inicialmente, é necessário determinar a razão; esse procedimento demanda que o aluno encontre o valor de pelo menos dois termos sucessivos dessa sequência, bastando então escrever numericamente a quantidade de pontos em cada nível representado na figura.

Para encontrar a razão, substituem-se os valores na fórmula $q = \frac{a_2}{a_1}$, em que q corresponde à razão, e a_1 e a_2 ao primeiro e segundo termos da sequência. Portanto, a razão é $q = \frac{5}{1} = 5$. Em seguida, calculamos a_5 , utilizando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_5 = 1 \cdot 5^{5-1} \rightarrow a_5 = 1 \cdot 5^4 = 625$. Portanto, a quantidade de pontos na 5ª figura da sequência é de 625. Construímos então o quadro 42.

Quadro 42 - Tipo de tarefa 18

TIPO DE TAREFA	T ₁₈ : Determinar a quantidade de pontos na 5ª figura da sequência.
TÉCNICA	<p>$\tau_{18.1}$: Identificar o padrão figural.</p> <p>$\tau_{18.2}$: Escrever numericamente a quantidade de pontos em cada nível.</p> <p>$\tau_{18.3}$: Calcular a razão da PG dividindo $\frac{a_2}{a_1}$.</p> <p>$\tau_{18.4}$: Aplicar a fórmula do termo geral de uma PG: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde a_n corresponde ao valor desconhecido, a_1 ao primeiro termo da sequência geométrica, e q é a razão elevada ao número desconhecido menos 1.</p>
TECNOLOGIA	<p>$\theta_{18.1}$: Noção de razão.</p> <p>$\theta_{18.2}$: Noção de Progressão Geométrica.</p>
TEORIA	Θ_{18} : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Ao resolver o item dessa tarefa por meio das técnicas e tecnologias mencionadas no quadro anterior, o aluno poderá mobilizar as seguintes habilidades e objetos de conhecimento:

Quadro 43 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 18

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas,	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).

com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora (p. 301).	
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p. 306).
(EM13MAT508) Identificar e associar seqüências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 233)	Progressão Geométrica (p.533).

Fonte: Brasil (2018).

Com relação ao item b dessa atividade, a autora questiona o aluno sobre qual será a quantidade de pontos desenhados ao concluir a 5ª figura da seqüência. Nesse caso, a obtenção da resposta demandará a utilização da fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma seqüência $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, em que s_n corresponde à soma dos n primeiros termos, n à quantidade de termos, a_1 ao primeiro termo e q à razão. Desse modo, basta fazer as substituições na fórmula $s_5 = \frac{1 \cdot (1-5^5)}{1-5} = 78$. Portanto, ao concluir a 5ª figura da seqüência, terão sido desenhados 781 pontos. Com base na resolução, criamos a OM para esta tarefa, representada no quadro 44.

Quadro 44 - Tipo de tarefa 19

TIPO DE TAREFA	T ₁₉ : Determinar a quantidade de pontos desenhados ao concluir a 5ª figura da seqüência.
TÉCNICA	$\tau_{19.1}$: Identificar o padrão figural. $\tau_{19.2}$: Escrever numericamente a quantidade de pontos em cada nível. $\tau_{19.3}$: Calcular a razão da PG dividindo $\frac{a_2}{a_1}$. $\tau_{19.4}$: Aplicar a fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma seqüência $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, em que s_n corresponde à soma dos n primeiros termos, n à quantidade de termos, a_1 ao primeiro termo e q à razão.
TECNOLOGIA	$\theta_{19.1}$: Noção de razão. $\theta_{19.2}$: Noção de Progressão Geométrica.
TEORIA	Θ_{19} : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Na sequência, apresentamos o quadro 45, com as habilidades e objetos de conhecimento presentes na BNCC passíveis de serem mobilizados na resolução dessa tarefa.

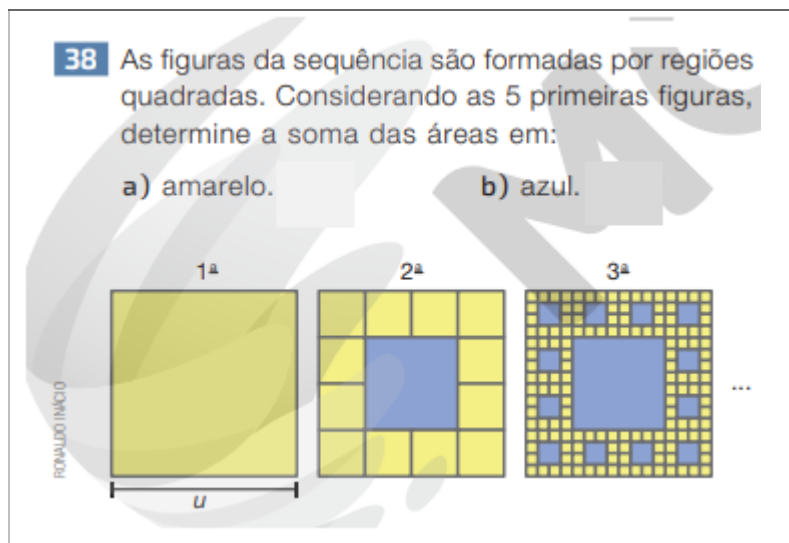
Quadro 45 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 19

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p. 300).
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p. 306).
(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 233).	Progressão Geométrica (p.533).

Fonte: Brasil (2018).

Dando continuidade ao conteúdo de Progressão Geométrica, a quarta e última tarefa apresenta uma sequência de figuras formada por regiões quadradas, trazendo as três primeiras figuras que compõem o fractal. A partir daí, considerando as cinco primeiras figuras, questiona o aluno sobre a área em amarelo e em azul, e as cores que compõem as iterações desses fractais, como pode se observar na figura 41, abaixo.

Figura 41 - Item a atividade proposta 12



Fonte: Teixeira (2020b, p. 139).

No tocante a essa tarefa, verificamos que as técnicas que se mobilizam para a sua resolução partem da identificação do padrão figural, bem como da progressão geométrica. Para obter o resultado, primeiro é necessário encontrar a soma das áreas da região em amarelo; para isso, é necessário que aluno utilize a fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma sequência, $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, em que s_n corresponde à soma dos n primeiros termos, n à quantidade de termos, a_1 ao primeiro termo e q à razão. Assim sendo, inicialmente é necessário determinar a razão da PG; como visto anteriormente, encontrar a razão é um procedimento que demanda que o aluno encontre o valor de pelo menos dois termos sucessivos dessa sequência. Portanto, para essa situação, basta o aluno calcular a área da região amarela da figura 1 e da figura 2. Logo, $a_1 = u^2$ e $a_2 = \frac{3}{4}u^2$, então a razão é $q = \frac{\frac{3}{4}u^2}{u^2} = \frac{3}{4}$. Encontrada a razão, para determinar a soma das áreas nas cinco primeiras figuras, aplicamos a fórmula $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, segue que: $s_5 = \frac{u^2 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 \right]}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{781}{256}u^2$. Dessa forma, a soma das áreas da região em amarelo corresponde a $\frac{781}{256}u^2$. Em continuidade, para encontrar a soma das áreas em azul, basta subtrair a área de cinco quadrados de lado u pela soma das áreas em amarelo, ou seja: $5u^2 - s_5 = 5u^2 - \frac{781}{256}u^2 = \frac{499}{256}u^2$. Diante disso, apresentamos, no quadro 46, o tipo de tarefa 20.

Quadro 46 - Tipo de tarefa 20

TIPO DE TAREFA	T ₂₀ : Determinar a soma das áreas em amarelo e azul nas 5 primeiras figuras da sequência.
TÉCNICA	$\tau_{20.1}$: Identificar o padrão figural. $\tau_{20.2}$: Encontrar a área da região amarela na figura 1 e 2.

	<p>$\tau_{20.3}$: Calcular a razão da PG dividindo $\frac{a_2}{a_1}$.</p> <p>$\tau_{20.4}$: Calcular a soma das áreas em amarelo nas cinco primeiras figuras da sequência, por meio da fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma sequência $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, em que s_n corresponde à soma dos n primeiros termos, n à quantidade de termos, a_1 ao primeiro termo e q à razão.</p> <p>$\tau_{20.5}$: Calcular a soma das áreas em azul nas cinco primeiras figuras da sequência</p>
TECNOLOGIA	<p>$\theta_{20.1}$: Noção de Geometria.</p> <p>$\theta_{20.2}$: Noção de Cálculo de área.</p> <p>$\theta_{20.3}$: Noção de razão.</p> <p>$\theta_{20.4}$: Noção de Progressão Geométrica.</p>
TEORIA	θ_{20} : Aritmética, Geometria e Álgebra.

Fonte: A autora (2022).

Na sequência, apresentamos o quadro 47, com as habilidades e objetos de conhecimentos mobilizados para a resolução da tarefa.

Quadro 47 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 20

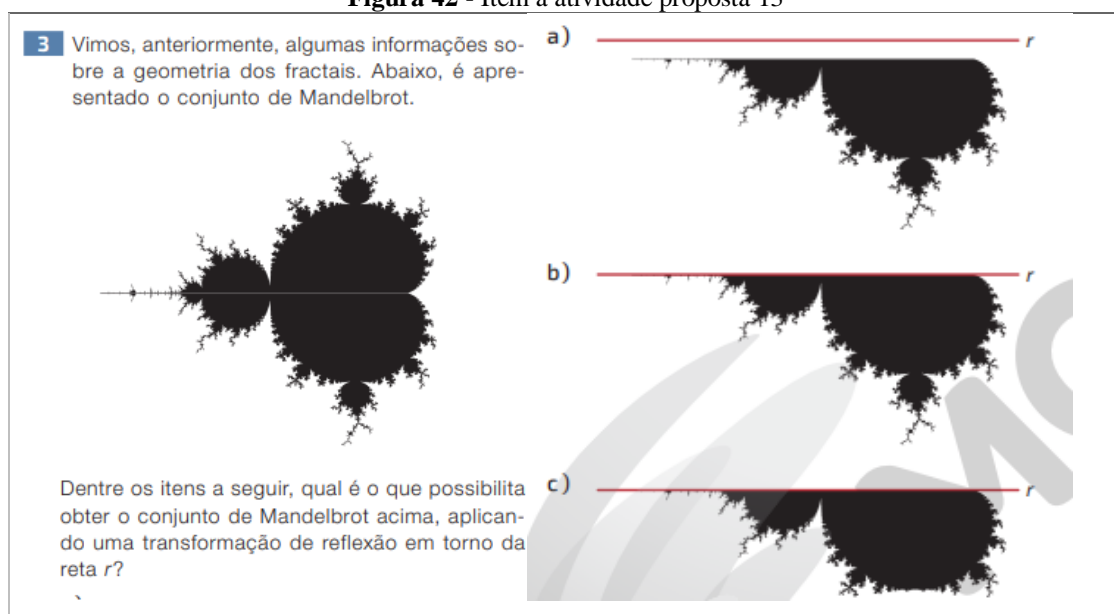
Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características (p. 282).
(EF08MA19) Resolver e elaborar situações problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (p. 315).	Área de figuras planas; Área do círculo e comprimento de sua circunferência (p. 314).
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (p. 301).	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais (p.300).
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (p. 307).	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (p. 306).

(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (p. 233).	Progressão Geométrica (p.533).
--	--------------------------------

Fonte: Brasil (2018).

Ao analisarmos o volume “Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas”, identificamos, ao longo da obra, a presença de apenas duas atividades que contemplam o conteúdo da Geometria dos Fractais. Essas atividades apresentam-se ao final do capítulo destinado ao estudo Transformações Geométricas, em uma seção denominada “No contexto”. A primeira tarefa é sobre o estudo de transformação de reflexão. Na tarefa, é apresentado o fractal Conjunto de Mandelbrot; na sequência, são fornecidos três itens para que aluno analise e assinale aquele em que é possível obter o conjunto de Mandelbrot, aplicando uma transformação de reflexão em torno da reta r , como mostra a figura 42.

Figura 42 - Item a atividade proposta 13



Fonte: Teixeira (2020a, p. 136).

Nessa tarefa, o aluno precisará aplicar seus conhecimentos sobre transformação de reflexão em relação a uma reta r . Para tanto, inicialmente, é necessário que o aluno observe os itens a, b e c; assim, o perceberá que o item b é a alternativa correta, uma vez que, no item a, podemos observar um espaço até a reta r , e, no item c, é possível observar que o fractal não está representado por completo.

Portanto, essa tarefa consistiu em aplicar uma transformação de reflexão em uma figura em relação a uma reta r . Assim, estabelecemos a OM, representada no quadro 48, a seguir.

Quadro 48 - Tipo de tarefa 21

TIPO DE TAREFA	T_{21} : Aplicar uma transformação de reflexão em uma figura em relação a uma reta.
TÉCNICA	$\tau_{21.1}$: Realizar uma simetria de reflexão em relação à reta r .
TECNOLOGIA	$\theta_{21.1}$: Noção de simetria. $\theta_{21.2}$: Noção de transformações geométrica. $\theta_{21.3}$: Noção de reflexão.
TEORIA	Θ_{21} : Geometria.

Fonte: A autora (2022).

Ao resolver a tarefa apresentada anteriormente, o aluno mobilizará as seguintes habilidades e objetos de conhecimento, como mostra o quadro 49:

Quadro 49 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 21

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica (p. 314).	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação (p. 313).
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras (p.525).	Transformações Geométricas. Reflexão (p. 525).

Fonte: Brasil (2018).

Finalizando, ainda nesse mesmo capítulo, a autora traz mais um exercício em que é abordada a Geometria dos Fractais. Nessa tarefa, é solicitado que aluno identifique quais tipos de transformações geométricas podem ser observadas nos fractais Floco de Neve de Koch e Triângulo de Sierpinski, como mostra a figura 43.

Figura 43 - Item a atividade proposta 14

22 Vimos anteriormente o triângulo de Sierpiński e o floco de neve de Koch.

Triângulo de Sierpiński Floco de neve de Koch

a) Ao analisar esses fractais, é possível identificar transformações geométricas? Em caso afirmativo, quais?

b) É possível construir as figuras 1a e 1b aplicando transformações geométricas na figura 1? Converse com os colegas e professor sobre essas construções.

Figura 1 Figura 1a Figura 1b

Fonte: Teixeira (2020a, p. 148).

Podemos observar que, no item *a*, é solicitado que aluno observe os dois fractais representados na imagem e aponte quais transformações geométricas é possível identificar nos fractais. Com relação ao item *b*, este possibilita diversas respostas, dependendo diretamente do aluno; sendo assim, caracterizamos essas atividades como tarefas de caráter pessoal. Assim sendo, somente o item *a* oferece subsídios para se pensar sobre suas OM, a qual comentamos no quadro 50.

Quadro 50 - Tipo de tarefa 22

TIPO DE TAREFA	T ₂₂ : Identificar transformações geométricas em um fractal.
TÉCNICA	$\tau_{22.1}$: Reconhecer transformações tais como: homotetia, reflexão, rotação e translação.
TECNOLOGIA	$\theta_{22.1}$: Noção de transformações geométricas.
TEORIA	Θ_{22} : Geometria.

Fonte: A autora (2022).

A seguir, apresentamos, no quadro 51, as habilidades e objetos de conhecimento presentes na BNCC que podem ser mobilizados pelo aluno ao resolver essa tarefa.

Quadro 51 - Habilidades e objetos de conhecimento referentes à tarefa 22

Habilidades	Objetos de conhecimento
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica (p. 314).	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação (p. 313).

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras (p.525).	Transformações Geométricas. Reflexão (p. 525).
--	--

Fonte: Brasil (2018).

Feitas as análises nas duas coleções, observamos que as explorações referentes à Geometria dos Fractais apresentam-se não por meio do seu próprio conteúdo, mas por intermédio de outro conteúdo matemático, uma vez que não encontramos de fato uma parte destinada somente a esta Geometria nos livros analisados.

De modo geral, encontramos duas menções à Geometria dos Fractais: uma no volume “Geometria e Trigonometria”, da editora FTD, que, de forma breve, mencionou tanto o surgimento desta geometria quanto seu precursor, Benoît Mandelbrot, abordando o Fractal Triângulo de Sierpinski e enfatizando que as ampliações e reduções estão presentes na Geometria Fractal; outra, no volume “Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas”, da editora Moderna, que, em duas páginas, aborda esta geometria, no capítulo destinado ao estudo das Transformações Geométricas, apresentando a origem do termo fractal e comentando sobre a aplicação desta geometria em outras áreas da ciência.

Na sequência, ambos discorrem acerca da Geometria dos Fractais e comentam sobre seu precursor, Benoît Mandelbroit, um dos principais matemáticos a estudar os fractais. Abordam, também, de forma breve, três importantes fractais: Triângulo de Sierpinski, Floco de Neve de Koch e Poeira de Cantor.

Quanto aos exercícios resolvidos, contemplados na *Parte Curso*, constatamos a presença de uma única atividade, encontrada no volume “Geometria e Trigonometria”, da editora FTD, o qual aborda a construção da curva de Koch, complementando a abordagem anterior sobre o Triângulo de Sierpinski, referente ao estudo de ampliações e reduções de figuras. Os demais volumes “Geometria”, “Funções e Progressões”, em contrapartida, apresentaram somente *Atividades Propostas* referentes ao estudo da Geometria dos Fractais, assim como os dois volumes da editora Moderna, “Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas” e “Funções e Progressões”. Nos demais volumes da editora Moderna, nada consta com relação a essa geometria.

Assim sendo, observando as *Atividades Propostas* encontradas nas duas coleções analisadas, é possível verificar que essa Geometria é utilizada como aplicação para o estudo de

diferentes conteúdos matemáticos; tanto a coleção Prisma Matemática como a coleção Diálogo apresentam um total de sete exercícios cada uma, em que se aborda a Geometria dos Fractais. No entanto, vale ressaltar que alguns desses exercícios são compostos por mais de um item, em que diferentes tipos de tarefas são explorados.

Nesse âmbito, dez atividades são referentes ao estudo de Progressões, contando com os seguintes tipos de Tarefas:

T₃: Determinar a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos até o terceiro nível de iteração.

T₅: Determinar o limite da soma dos perímetros dos triângulos que compõem o fractal.

T₆: Encontrar a razão da progressão geométrica das áreas das regiões escuras do triângulo de Sierpinski.

T₁₄: Determinar os cinco primeiros termos da sequência que representa a área da região verde e amarela.

T₁₅: Identificar uma progressão geométrica.

T₁₆: Determinar o décimo termo de cada uma das sequências.

T₁₇: Construir a figura correspondente ao nível 4 da figura.

T₁₈: Determinar a quantidade de pontos na 5ª figura da sequência.

T₁₉: Determinar a quantidade de pontos desenhados ao concluir a 5ª figura da sequência.

T₂₀: Determinar a soma das áreas em amarelo e azul nas 5 primeiras figuras da sequência.

Temos também duas atividades referentes ao estudo de Sequências:

T₃: Determinar o número de quadrados na décima etapa da sequência.

T₄: Determinar o limite da soma dos perímetros dos triângulos que compõem o fractal.

Também identificamos seis atividades alusivas ao estudo de Transformações Geométricas:

T₁: Construir a figura correspondente ao terceiro nível de iteração.

T₂: Construir o fractal Tapete de Sierpinski.

T₇: Construir o fractal Tapete de Sierpinski.

T₈: Construir o fractal curva de Peano.

T₂₁: Aplicar uma transformação de reflexão em uma figura em relação a uma reta.

T₂₂: Identificar transformações geométricas em um fractal.

Identificamos três atividades referentes ao estudo de Equações Exponenciais, sendo elas:

T₁₁: Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência.

T₁₂: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.

T₁₃: Determinar o nível da sequência em que o número de quadradinhos do fractal é 3.125 e 78.125.

E uma atividade referente ao estudo de cálculo de área e perímetro de polígonos, na qual entendemos haver dois tipos de tarefas:

T₉: Determinar a medida do perímetro de cada figura da sequência até a etapa 5.

T₁₀: Determinar a medida da área de cada figura até etapa 5 da sequência.

Quando comparamos as duas coleções analisadas, coleção Prisma Matemática, da editora FTD, e coleção Diálogo, da editora Moderna, é possível observar que ambas não abordam a Geometria dos Fractais de forma específica, e sim como complemento para o estudo de outros assuntos da Matemática. A coleção Prisma Matemática aborda os fractais em três volumes, enquanto a coleção Diálogo o faz em apenas dois dos seis volumes que a compõem. Dentre os assuntos estudados por meio dessa geometria, estão: Progressão Geométrica e Aritmética, Sequências, Função Exponencial, Transformações Geométricas e Cálculo de área e perímetro.

Quando observamos os tipos de tarefas expostos anteriormente, observamos que o assunto matemático que mais abordou a Geometria dos Fractais foi o estudo de Progressões.

Em continuidade, quando olhamos para as habilidades da BNCC desenvolvidas em cada tarefa, é possível observar que, embora as atividades sejam referentes ao Ensino Médio, o aluno, ao resolvê-las, estará desenvolvendo habilidades desde o Ensino Fundamental I até do Ensino Médio. Isso deixa claro que a Geometria dos Fractais pode ser trabalhada e explorada nos mais diversos anos de ensino, e não somente no Ensino Médio, como indica de forma sucinta a BNCC, um dos mais recentes documentos norteadores da Educação. O mesmo acontece quando observamos os objetos de conhecimento suscitados, haja vista que são também explorados objetos de conhecimento de diferentes anos de ensino.

Na sequência, apresentamos as considerações finais de nossa pesquisa, em que buscamos destacar os principais aspectos identificados a respeito da proposta de ensino do conteúdo Geometria dos Fractais ao longo das coleções analisadas, de modo a salientar as habilidades e objetos de conhecimento da BNCC mobilizados na resolução de tarefas que abordam essa geometria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi orientada pela seguinte pergunta: *quais as habilidades e objetos de conhecimento, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), identificados nas abordagens de Geometria dos Fractais em Livros Didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021?* Delineamos, como objetivo de pesquisa, identificar habilidades e objetos de conhecimento da BNCC que foram suscitados na modelização do assunto Geometria dos Fractais, por meio da Organização Matemática elaborada.

E, como objetivos específicos, elencamos:

- Caracterizar praxeologias matemáticas para a identificação das habilidades e objetos de conhecimento nas abordagens de Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021.

- Investigar as técnicas e as tecnologias mobilizadas nas partes teóricas e práticas do assunto Geometria dos Fractais nos livros didáticos a serem analisados.

Para tanto, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard, como referencial teórico e metodológico para o estudo das Organizações Matemáticas, presentes nas abordagens do assunto Geometria dos Fractais em livros didáticos do Novo Ensino Médio. Tais OM foram exploradas por meio dos Quartetos Praxeológicos - Tipos de Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teoria, uma vez que tais elementos nos possibilitaram a identificação das habilidades e dos objetos de conhecimento da BNCC desenvolvidos durante o estudo da Geometria dos Fractais.

Ressaltamos que a Teoria Antropológica do Didático, utilizada nesta pesquisa, foi fundamental para a construção e compreensão da proposta de ensino em discussão. As noções de Organizações Matemáticas por meio dos Quartetos Praxeológicos deram subsídios para compreender nosso objeto de pesquisa, que se resumiu em identificar e conhecer as habilidades e objetos de conhecimento da BNCC desenvolvidos no estudo da Geometria dos Fractais.

Nos dois primeiros capítulos desta dissertação, apresentamos a Geometria Fractal e a Teoria Antropológica do Didático. Na sequência, realizamos um levantamento de trabalhos que dissertaram sobre a temática em estudo, de modo a contribuir com nossa pesquisa. A seguir, abordamos a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e o PNLD 2021 (Programa Nacional do Livro e do Material Didático), sendo esse o contexto em que foram aprovadas as coleções analisadas nesta pesquisa. Também trouxemos em nossa escrita os elementos metodológicos

utilizados para analisar as abordagens da Geometria dos Fractais nos livros didáticos e, por fim, as análises realizadas.

As análises foram feitas nos livros da coleção Prisma Matemática, dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Câmara de Souza, da editora FTD, aprovada e escolhida pelos professores do estado do Paraná, no PNLD 2021, para ser utilizada na área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias; também nos livros da coleção Diálogo, da autora Lilian Aparecida Teixeira, da editora Moderna, coleção aprovada no PNLD 2021 e mais vendida em nível nacional.

Assim, no tocante às análises realizadas, foi possível observar que a Geometria dos Fractais é utilizada como mediadora para o ensino de vários conteúdos da Matemática. Desse modo, por meio das organizações matemáticas (OM), foi possível identificarmos habilidades e objetos de conhecimento da BNCC que são suscitados ao resolverem atividades que abordam essa geometria.

Nas coleções analisadas, encontramos um total de dezesseis atividades que abordam a Geometria dos Fractais, oito em cada coleção analisada. Dentre essas atividades, por meio da OM, identificamos vinte e dois tipos de tarefas diferentes (elencados abaixo), e estes nos possibilitaram identificar as habilidades e os objetos de conhecimento desenvolvidos na resolução das tarefas:

T₁: Construir a figura correspondente ao terceiro nível de iteração.

T₂: Construir o fractal Tapete de Sierpinski.

T₃: Determinar a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos até o terceiro nível de iteração.

T₄: Determinar o número de quadrados na décima etapa da sequência.

T₅: Determinar o limite da soma dos perímetros dos triângulos que compõem o fractal.

T₆: Encontrar a razão da progressão geométrica das áreas das regiões escuras do triângulo de Sierpinski.

T₇: Construir o fractal Tapete de Sierpinski.

T₈: Construir o fractal curva de Peano.

T₉: Determinar a medida do perímetro de cada figura da sequência até a etapa 5.

T₁₀: Determinar a medida da área de cada figura até etapa cinco da sequência.

T₁₁: Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência.

T₁₂: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.

T₁₃: Determinar o nível da sequência em que o número de quadradinhos do fractal é 3.125 e 78.125.

T₁₄: Determinar os cinco primeiros termos da sequência que representa a área da região verde e amarela.

T₁₅: Identificar uma progressão geométrica.

T₁₆: Determinar o décimo termo de cada uma das sequências.

T₁₇: Construir a figura correspondente ao nível 4 da figura.

T₁₈: Determinar a quantidade de pontos na 5ª figura da sequência.

T₁₉: Determinar a quantidade de pontos desenhados ao concluir a 5ª figura da sequência.

T₂₀: Determinar a soma das áreas em amarelo e azul nas 5 primeiras figuras da sequência.

T₂₁: Aplicar uma transformação de reflexão em uma figura em relação a uma reta.

T₂₂: Identificar transformações geométricas em um fractal.

Observamos, por meio desses tipos de tarefas, que a Geometria dos Fractais, nos volumes analisados, possibilita os estudos de diversos conteúdos da Matemática, dentre eles: Progressão Geométrica e Aritmética, Sequências, Funções, Ampliação e Redução de figuras, Cálculo de área e perímetro. Portanto, nenhum dos volumes analisados aborda essa geometria de forma isolada, e sim, como motivação e complementação ao estudo de outros assuntos matemáticos.

Ainda que as coleções analisadas contenham um volume específico destinado ao ensino de Geometria, estes foram os que apresentaram a menor quantidade de tarefas a explorar a Geometria dos Fractais. Assim, com a pesquisa realizada, evidenciamos que a Geometria dos Fractais ainda é pouco explorada no ensino, mesmo que várias outras pesquisas, como as de Barbosa (2005), Almeida (2005), Rabay (2013) e Sallum (2015), apontem a importância da inclusão dessa geometria no Ensino Fundamental e ressaltem a necessidade de fortalecer o ensino de Matemática relacionado a ela, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Embora a Base Nacional Comum Curricular – BNCC – não indique de modo explícito o estudo da Geometria dos Fractais no contexto da Educação Básica, nossa pesquisa permitiu observar que, por meio dessa geometria, diversas habilidades e objetos de conhecimento da BNCC são desenvolvidos pelos alunos. As habilidades e os objetos de conhecimento identificados se encontram tanto na BNCC do Ensino Médio quanto na do Ensino Fundamental. No decorrer das abordagens foram mobilizadas dezoito habilidades do Ensino fundamental e seis habilidades do Ensino Médio.

Portanto, entendemos que essa pesquisa manifesta a importância de se trabalhar e realizar pesquisas com a Geometria Fractal em sala de aula, uma vez que constatamos que por meio dessa Geometria muitas habilidades e objetos de conhecimentos da BNCC podem ser mobilizados pelos alunos, assim como muitos conteúdos podem ser aprendidos e explorados por meio dela.

Entretanto outras indagações podem surgir e resultar em pesquisas futuras. Como exemplo: Os professores possuem conhecimento suficiente para explorar essa geometria? De que maneira esse conteúdo é explorado em sala de aula?

Assim sendo, almejamos que esta pesquisa possa contribuir com estudos e investigações relacionados ao conteúdo Geometria dos Fractais, como também na visibilidade da organização praxeológica para a aprendizagem deste tema.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. A. O. **Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula.** 2006. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 75 f. 2006.
- ALMEIDA, D. S. S. **Geometria fractal:** uma proposta para sala de aula. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 50 f. 2016.
- ALMEIDA, E. A. M. de et al. **Progressões aritméticas e geométricas:** praxeologias em livros didáticos de matemática. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá. 131 f. 2012.
- ALMEIDA, G. dos A. **Polígonos regulares inscritos no círculo:** uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 173 f. 2012
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. (Org.); FARIAS, L. M. S. (Org.); HENRIQUE, A. (Org.). **A Teoria Antropológica do didático:** Princípios e fundamentos. 1. ed. Curitiba: CRV, 2018. v. 1. 572 p.
- ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. *In:* ALVES -MAZZOTTI, A. J.; BARBOSA, R. M. **Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Ed Autêntica, 2005.
- ASSIS, T. A de et. al. Geometria fractal: propriedades e características ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30 n. 2, p. 1-10, São Paulo, 2008.
- BARBOSA, E. J. T. **Praxeologia do professor:** análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 252 f. 2017.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BALDOVINOTTI, N. J. **Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática.** 2011. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 204 f. 2011.
- BITTAR, M. A. Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, v. 25 n. 3, p. 364-387, Campinas, set-dez/2017.
- BONJORNO, J.R.; JÚNIOR, J.R.G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática:** funções e progressões. São Paulo: FTD, 2020a.
- BONJORNO, J.R.; JÚNIOR, J.R.G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática:** geometria e trigonometria. São Paulo: FTD, 2020b.
- BONJORNO, J.R.; JÚNIOR, J.R.G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática:** geometria. São Paulo: FTD, 2020c.

BRANDÃO, J. D. P. **O papel do livro didático no processo de ensino aprendizagem:** uma introdução ao conceito de função In: I Congresso Nacional de Educação. Anais. Campina Grande: Ed. UEPB, 2014.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 26 ago. 2022.

CAMPOS, F. A. B. de. **O Ensino da Matemática com Fractais na Educação Básica:** percepções em meio ao curso Enfrac. 2020. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Mato Grosso, Barra do Bugres, 106 f. 2020.

CARVALHO, H. C. **Geometria fractal:** perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 101 f. 2005.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista** (online), v. 9 n. 1, p.29-44, nov/2019.

CHEVALLARD, Y. **L'Analyse de Des pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique.** IUFM d'Aix-Marseille, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques:** L'approche anthropologique. IUFM d'Aix-Marseille, 1998.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: MAURY, S.; CAILLOT, M. (Orgs.) **Rapport au savoir et didactiques.** Paris: Fabert, 2003, p. 81-104.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad.Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço:** análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos. 2015. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 113 f. 2015.

DO NASCIMENTO, R. C.; DA COSTA, L. d. F. M. A Geometria Fractal e a formação do professor de Matemática: constructos possíveis. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** (online), v. 11 n. 1, p. 1–15, 2020.

FUZZO, R. A. Calculando a costa do Brasil: uma atividade fractal com professores e futuros professores da educação básica. In: Encontro de iniciação científica 8. Seção de Artigos. União da Vitória: FAFIUV, 2008.

FUZZO, R. A.; REZENDE, V.; DOS SANTOS, T. S. **Fractais:** algumas características e propriedades. In: IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica. Anais. Campo Mourão: EPCT, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002

GONÇALVES, A. O. **O livro didático de matemática e o professor:** produtores ou reprodutores de conhecimento? In: XI Congresso Nacional de Educação. Anais. Curitiba: EDUCERE, 2013.

- KRIPKA, R.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. **Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa.** In: Atas do 4º Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa e do 6º Simpósio Internacional de Educação e Comunicação. Aracaju: Universidade Tiradentes, 2015.
- LISBOA, M. C. **Uma proposta de abordagem da geometria fractal na educação básica.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Arraias, 59 f. 2019.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, v. 3 n.4, p. 3-13, Blumenau, 1º semestre/1995.
- MADURO, V. P. S. **Um estudo da prática docente no tema função quadrática com base na teoria antropológica do didático.** 2015. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional) – Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém, 57 f. 2015.
- MANDELBROT, B. **Objectos fractais.** Trad. Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima. 3 ed. Lisboa: Gradiva, 1998.
- MANDELBROT, B. **The fractal geometry of nature.** Londres: MacMillan, 1997.
- MENEZES, M. B.; SANTOS, M. C. dos. **O saber escolar na perspectiva da teoria antropológica do didático.** In: Simpósio internacional de pesquisa em educação matemática. Recife. Anais. Recife: Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências. UFRE, 2008.
- MINAYO, M. C. de S. (Org). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade.** Petrópolis: Vozes, 2013.
- ORDEM, J. **Prova e demonstração em Geometria: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique.** 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 143 f. 2010.
- PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008.
- PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações.** Curitiba: Estado do Paraná, 2021.
- PESCINI, A. E. **Uma análise praxeológica da geometria dos fractais em livros didáticos do ensino médio.** 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná. União da Vitória, 101 f. 2021.
- PNLD 2011:** Guia de livros didáticos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.
- PNLD 2021:** Guia de livros didáticos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. 2021.
- RABAY, Y. S. F. **Estudo e aplicações da geometria fractal.** 2013. 89 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 89 f. 2013.
- SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. **Revista do professor de matemática**, v. 10 n. 57, p. 1- 8, Bauru, 2005.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. *In*: SAIZ, I.; PARRA, C. (Org). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Trad. Juan Acuna Lorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8 n. 18, p. 648-670. Campo Grande, 2015.

SILVA, J. V. G. da. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 194 f. 2011.

TEIXEIRA, L, A. **Diálogo**: matemática e suas tecnologias: geometria analítica, sistemas e transformações geométricas. São Paulo: Moderna, 2020a.

TEIXEIRA, L, A. **Diálogo**: matemática e suas tecnologias: funções e progressões. São Paulo: Moderna, 2020b.

VARELLA, M. **Prova e demonstração na Geometria Analítica**: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 214 f. 2010.

ZANOTTO, R. A. **Estudo da geometria fractal clássica**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás. Jataí, 67 f. 2015.