UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DA CONSTRUÇÃO DO FRACTAL ÁRVORE PITAGÓRICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Luan Padilha dos Santos

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

União da Vitória,

2023

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DA CONSTRUÇÃO DO FRACTAL ÁRVORE PITAGÓRICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Luan Padilha dos Santos

Orientadora:
Profa. Dra. Mariana Moran
Apoio: Capes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

União da Vitória
Fevereiro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Padilha dos Santos, Luan
Uma Organização Praxeológica da construção do fractal Árvore Pitagórica utilizando o software GeoGebra / Luan Padilha dos Santos. -- União da Vitória-PR,2023.
179 f.: il.

Orientador: Mariana Moran.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2023.

1. Educação Matemática. 2. Teoria Antropológica do Didático. 3. Geometria dos Fractais. 4. BNCC. I - Moran, Mariana (orient). II - Título.

Luan Padilha dos Santos

UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DA CONSTRUÇÃO DO FRACTAL ÁRVORE PITAGÓRICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Mariana Moran – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas - Membro da Banca
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Profa. Dra. Veridiana Rezende - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: Aprovado

União da Vitória
Fevereiro de 2023

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, saúde e fé.

À minha família, especialmente minha mãe e meu pai, Ivanir e Marcio, pela confiança que sempre depositaram e depositam em mim a cada dia. São meus exemplos de humildade e simplicidade.

À minha orientadora, Professora Doutora Mariana Moran, pelo aprendizado adquirido ao longo dessa caminhada, por seu profissionalismo, estímulo e seriedade. É exemplo de ser humano, a quem agradeço por acreditar em mim e no projeto.

À Professora Doutora Sandra Sausen, pela parceria e oportunidade de realizar essa pesquisa em sua sala de aula.

Aos membros da banca, Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas, pelas ideias preciosas e reflexões provocativas; e Professora Doutora Veridiana Rezende, pelo olhar criterioso e cuidadoso, agradeço pelas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos integrantes do grupo de pesquisa GPEG, pelas contribuições que colaboraram para a melhoria do projeto de pesquisa.

À Professora Doutora Maria Ivete, pelo carinho e incentivo desde o período da graduação.

À Adrieli, Camila, Eduardo e Jaqueline, pela amizade e parceria, sempre dispostos a ajudar no que fosse necessário.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da agência de fomento Capes.

Ah, se o mundo inteiro me pudesse ouvir
Tenho muito pra contar, dizer que aprendi
E, na vida, a gente tem que entender
Que um nasce pra sofrer enquanto o outro ri

Mas quem sofre sempre tem que procurar
Pelo menos vir a achar razão para viver
Ver na vida algum motivo pra sonhar
Ter um sonho todo azul, azul da cor do mar

Sebastião Rodrigues Maia (1970).

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar, por meio de praxeologias matemáticas, habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias que são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra. Tal objetivo foi elaborado com o intuito de responder ao seguinte problema de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias, preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?* Como aporte teórico-metodológico, este trabalho fundamenta-se nos princípios da Teoria Antropológica do Didático - TAD, que permitiu a elaboração de uma organização praxeológica, de forma a modelar o objeto matemático que foi foco de uma sequência didática. Este trabalho assume pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, que auxiliou na construção e delineamento desta pesquisa. A análise de tal organização possibilitou uma investigação, na BNCC, de habilidades e objetos de conhecimento que podem ser desenvolvidos durante a construção e exploração matemática do fractal. A pesquisa foi implementada em uma turma do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do município de União da Vitória – PR. As análises *a posteriori* evidenciaram que os estudantes empregaram técnicas para as resoluções das subtarefas que permitiram a validação da Organização Matemática prevista em nossa análise *a priori*. Além disso, identificou-se que as técnicas empregadas na Organização Matemática direcionam às habilidades; analogamente, as tecnologias utilizadas para justificar as técnicas podem indicar objetos de conhecimento da matemática; e por fim, as teorias que regem as tecnologias conduzem às unidades temáticas. A conclusão é que a elaboração e a escolha de tarefas que proporcionem o trabalho com a Geometria dos Fractais nas aulas de Matemática podem contribuir com o ensino e a aprendizagem desta componente curricular em diferentes anos de ensino, integrando aprendizagens propostas pela BNCC, como por exemplo os objetos de conhecimento *Linguagem algébrica: variável e incógnita* e *Relações métricas no triângulo retângulo*, que tiveram destaque em nossas análises, e também as habilidades *Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas* e *Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes*. Estes e outros objetos de conhecimento, bem como outras habilidades foram possíveis de ser desenvolvidos pelos estudantes no decorrer da implementação da presente proposta.

Palavras-chave: Educação Matemática; Teoria Antropológica do Didático; Geometria dos Fractais; BNCC.

ABSTRACT

This research has as aim at investigating, through mathematics praxeology, skills and knowledge objects in Mathematics area and its Technologies mobilized by High School students during the construction of Pythagorean Tree fractal in GeoGebra software. Such objective was elaborated to answer the following research problem: *which skills and knowledge objects present in the Mathematics area and its Technologies recommended in the National Common Curricular Base (BNCC in its Portuguese acronym) are mobilized by high school students during the construction of Pythagorean Tree fractal in GeoGebra software?* As a theoretical-methodological contribution, this work is based on Anthropological Theory of Didactics - ATD principles, which allowed elaborating a praxeological organization for modeling the mathematical object focused on a didactic sequence. This work assumes methodological assumptions of Didactic Engineering that helped building and delineate this research. Analysis of such organization enabled an investigation on BNCC of skills and knowledge objects which might be developed during building and mathematical exploring of fractal. The research was implemented in a High School class in a state school of the municipality of *União da Vitória* – PR. A posteriori analysis made evident that students used technics to solve the subtasks that allowed the validation of the Mathematical Organization foreseen in our a priori analysis. In addition, it was identified that techniques used in Mathematical Organization direct to skills; similarly, the technologies used to justify the techniques may indicate mathematics knowledge objects; and finally, theories which conduct technologies lead to thematic units. Findings show that elaboration and choice of tasks that provide work with Fractal Geometry in Mathematics classes may contribute to teaching and learning this component in different teaching grades, integrating learning proposed by the BNCC, for example the knowledge objects *Algebraic language: variable and unknown* and *Metric relations in the right triangle*, and the skills *Using algebraic symbology to express regularities found in numerical sequences* and *Solving and elaborating problems of application of the Pythagorean theorem or proportionality relations involving parallel lines cut by secants*. These and other knowledge objects and other skills as well were possible to be developed by students during this proposal implementation.

Keywords: Mathematics Education; Anthropological Theory of Didactics; Fractal geometry; BNCC.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
CHS	Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
CNT	Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
CREP	Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná
DCE	Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná
ED	Engenharia Didática
EF	Ensino Fundamental
EI	Educação Infantil
EM	Ensino Médio
FECILCAM	Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
LGG	Linguagens e suas Tecnologias
LP	Língua Portuguesa
MAT	Matemática e suas Tecnologias
MEC	Ministério da Educação
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PNE	Plano Nacional de Educação
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento livre e esclarecido

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática pode fornecer, ao professor e ao estudante, prazeres oriundos de várias formas de pensar, ver e agir, seja pela superação de dificuldades ao resolver problemas, seja exploração de objetos geométricos, ou ainda por meio de situações contextualizadas associadas ao cotidiano, dentre outras maneiras.

Desse modo, unidades temáticas da Matemática, como a Geometria, permitem ao professor a exploração e contemplação de objetos matemáticos que possuem certos aspectos harmoniosos na arte, na pintura, na arquitetura e na natureza. Por exemplo, a noção de simetria é presente no campo da Arte e da Arquitetura. A simetria é um fator determinante de emoções, ordem e ritmo estático.

Observar o belo e apresentar senso estético se faz presente em temas da Matemática. Um desses temas que contribui para o desenvolvimento do senso estético e apreciar do belo é o Fractal, mais especificamente a Geometria dos Fractais.

A Geometria dos Fractais foi iniciada por Benoit Mandelbrot e refere-se ao estudo de formas irregulares, salientes, fragmentadas. Mandelbrot denominou-as fractais porque se baseou na palavra *fractus*, cuja origem vem do latim, correspondente a quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar (BARBOSA, 2005).

Segundo Barbosa (2005, p. 9, grifo do autor),

> [...] essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma das suas partes. Segue que suas partes são semelhantes; propriedade conhecida como *autossimilaridade*.

As três principais características de um fractal são autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita. Autossimilaridade diz respeito às partes do fractal que se assemelham ao seu todo, podendo ser de forma aproximada ou exata (BARBOSA, 2005).

A complexidade infinita refere-se ao número infinito de iterações de um fractal, que podem ser realizadas por meio de um procedimento recursivo ou iterativo, e dessa forma, não é possível representar completamente um fractal, pois sempre haverá uma próxima iteração a ser realizada (CARVALHO, 2005).

Já a dimensão de um fractal não necessariamente é um número inteiro: ela representa o grau de ocupação do fractal no espaço e está relacionada com o seu grau de irregularidade ou fragmentação (CARVALHO, 2005).

Barbosa (2005, p. 19) justifica a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula baseado em

> [...] conexões com outras ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para estudo de formas da natureza [...]; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Entendemos que esse tema possui relevância para ser abordado na Educação Básica, considerando que ele apresenta ligações com diversas áreas do conhecimento, como Medicina (SEDIVY *et al*., 1999), Computação (MARTINS; LIBRANTZ, 2006) e Economia (HAYASHI, 2002), além de ser evidenciado em documentos oficiais de orientações curriculares, como o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, em âmbito estadual; e na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, em âmbito nacional.

O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná sugere o estudo dos fractais porque “permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades” (PARANÁ, 2021, p. 541).

Nesse sentido, nota-se que a temática dos fractais está presente em uma das habilidades na parte da BNCC para o Ensino Médio, referindo-se à primeira competência para a área de Matemática e suas Tecnologias:

> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BRASIL, 2018, p. 533)

Pesquisas como a de Rezende *et al*. (2018) defendem a exploração de fractais geométricos em sala de aula, bem como reconhecem, na Geometria dos Fractais, a possibilidade de aprendizagem de conceitos matemáticos, como área e perímetro de figuras planas, funções, ângulos, entre outros. A esse respeito, a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula e a construção de fractais utilizando um software como o GeoGebra proporcionam aos professores a exploração de diversos conteúdos matemáticos, e propiciam aos alunos perpassar diferentes representações semióticas durante a exploração de entes geométricos, por exemplo, do fractal Hexagonal Tipo Dürer (MORAN; REZENDE, 2020).

Compreendemos que, por meio da Geometria dos Fractais, é possível abordar diferentes conteúdos matemáticos, como progressão geométrica, função logarítmica, equivalência de frações, dentre outros. Dessa forma, despertou-nos uma inquietação em investigar se é possível desenvolver propostas para o ensino e a aprendizagem desses objetos geométricos nas aulas de matemática, de forma a estudar objetos matemáticos preconizados na BNCC.

Para aporte teórico-metodológico da proposta de construção do fractal Árvore Pitagórica, embasamo-nos na Teoria Antropológica do Didático - TAD, desenvolvida por Yves Chevallard (1998), que nos permite realizar uma Organização Matemática e Didática de modo a identificar os objetos de conhecimento que podem ser estudados quando se explora esse fractal geométrico e algebricamente.

A Organização Matemática - OM consiste em um quarteto, composto por um tipo de tarefa (T), que é realizada a partir da mobilização de uma técnica (τ). Para isso, é preciso que seja justificada por uma tecnologia (θ) e tenha uma teoria (Θ) que rege a tecnologia em si (CHEVALLARD, 2018). No que diz respeito à Organização Didática - OD, que são as escolhas que o professor faz referente à OM, ela "permite estudar o modo como é apresentada e estruturada a praxeologia matemática" (FREITAS; BITTAR, 2016, p. 9). Dessa forma, não se estuda organização didática sem investigar a organização matemática.

Para a realização da proposta, escolhemos como objeto geométrico de estudo, dentre uma variedade de fractais, a Árvore Pitagórica. A primeira razão de escolha pelo fractal Árvore Pitagórica é a apreciação do seu belo irradiante e da observação da regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades. A segunda razão de escolha desse ente geométrico é que fractais de árvores pitagóricas podem variar o triângulo inicial em outros ternos pitagóricos, por exemplo: Árvore Pitagórica Isósceles Retangular, Árvore Pitagórica Isósceles Obtusângula e Árvore Pitagórica Equilátera.

A terceira razão se deve às possibilidades de exploração desse fractal em sala de aula. O trabalho com a construção da Árvore Pitagórica possibilita uma exploração relativa à contagem, de forma a contar o número de quadrados, induzindo o estudante a expressar uma fórmula relacionada a esse aspecto. Além disso, tendo em vista a autossimilaridade dos triângulos, podemos explorar a medida do comprimento dos lados

dos triângulos e a relação entre os catetos e a hipotenusa. Por fim, consideramos pertinente uma exploração relacionada ao cálculo da medida do perímetro e da área do fractal em suas etapas, investigando uma expressão que represente o cálculo a partir do modelo gerador com lado de comprimento unitário.

Portanto, esta pesquisa tem como objetivo investigar, com base na TAD, praxeologias matemáticas mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra. Tal objetivo foi elaborado com o intuito de responder ao seguinte problema de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?*

Para a realização deste estudo, pautados na Engenharia Didática, dividimos nosso texto em quatro momentos: Análises preliminares e Encaminhamentos teóricos; Percurso metodológico e Desenvolvimento da pesquisa; Análise dos dados; e Considerações Finais e Reflexões.

No capítulo de Análises preliminares e Encaminhamentos teóricos, realizamos um estudo preliminar a respeito da Geometria dos Fractais, em especial da Árvore Pitagórica. Para mais, discutimos constructos teóricos da TAD e apresentamos uma revisão de literatura a respeito da TAD no contexto do ensino de Geometria. Depois, abordamos elementos da BNCC e da utilização do software GeoGebra.

Em relação ao capítulo de Percurso metodológico e Desenvolvimento da pesquisa, descrevemos as fases da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa que permitiu delinear este estudo. Além disso, informamos a descrição do contexto, os participantes da pesquisa, os procedimentos e os instrumentos de produção e análise dos dados.

No que diz respeito ao capítulo de Análise dos dados, apresentamos a análise *a posteriori*, e é nesse momento que confrontamos os dados produzidos pelos estudantes do Ensino Médio com o *design* da tarefa elaborado na análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados. Por fim, apresentamos as Considerações Finais e Reflexões acerca da investigação desenvolvida.

1 ANÁLISES PRELIMINARES E ENCAMINHAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentamos as análises preliminares, primeira fase da metodologia de investigação escolhida para o desenvolvimento deste trabalho, quando realizamos um estudo preliminar a respeito da Geometria dos Fractais, em especial da Árvore Pitagórica.

Ademais, discutimos constructos teóricos da Teoria Antropológica do Didático - TAD desenvolvida por Yves Chevallard (1998). Essa teoria possui contribuições para o estudo da Didática das Ciências e para a Matemática, e é o aporte teórico-metodológico que norteia esta pesquisa. Em seguida, apresentamos uma revisão de literatura a respeito da TAD no contexto do ensino de Geometria. Por último, abordamos brevemente elementos da Base Nacional Comum Curricular - BNCC e da utilização do software GeoGebra.

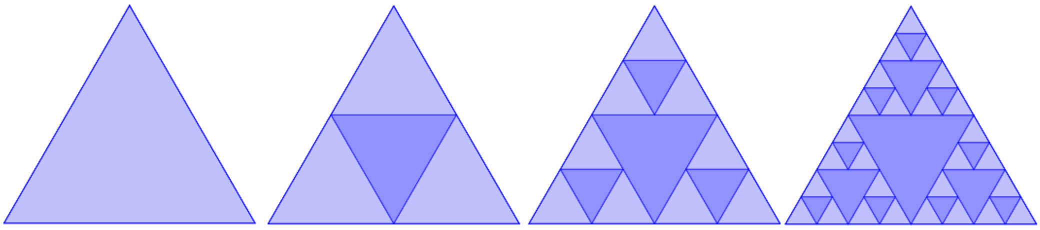
1.1 A Geometria dos Fractais

O matemático polonês Benoit Mandelbrot foi o iniciador do estudo dos objetos geométricos chamados *fractais*. Essas entidades geométricas possuem propriedades particulares, e entre elas destacam-se a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária (BARBOSA, 2005). Mandelbrot denominou esses objetos de fractais baseando-se na palavra *fractus*, adjetivo do latim, do verbo *frangere*, que corresponde a quebrar, fragmentar.

A Geometria dos Fractais está relacionada a uma ciência chamada *Caos*. As estruturas fragmentadas, belas e complexas, fornecem uma ordem ao Caos, buscando padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório (BARBOSA, 2005). Tanto a Geometria dos Fractais quanto a ciência do Caos desenvolveram-se pelo aprimoramento das técnicas computacionais. De acordo com Barbosa (2005), na natureza existem formas irregulares, e tentar simplificá-las usando formas da Geometria Euclidiana é considerado inadequado. Nesse sentido, a Geometria dos Fractais pode oferecer aproximações para essas formas.

Um fractal possui suas partes semelhantes ao conjunto como um todo, de forma exata ou aproximada, e isso é chamado de autossimilaridade (BARBOSA, 2005). A autossimilaridade exata é possível através de instrumentos de desenho, como o lápis, o compasso, a régua e o esquadro, ou por meio de softwares de geometria dinâmica. Tomemos como exemplo a construção do fractal Triângulo de Sierpinski feita no GeoGebra, conforme mostra a figura a seguir.

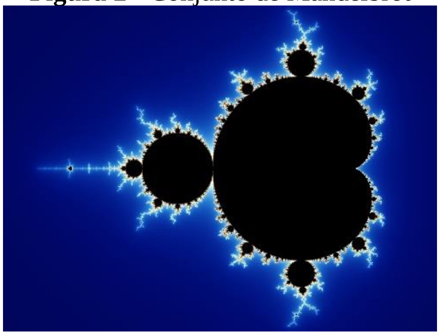
Figura 1 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: o autor (2022).

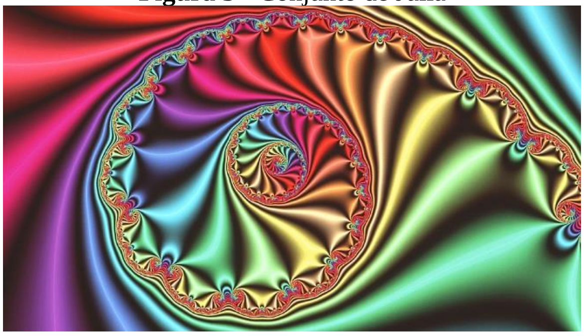
O estudo da Geometria dos Fractais não poderia deixar de fora o conceito de comportamento caótico, e por esta razão estamos nos referindo ao fenômeno da imprevisibilidade. O Fractal de Mandelbrot ou Conjunto de Mandelbrot já foi considerado o mais complexo objeto da matemática (BARBOSA, 2005). Em suas regiões, os pontos são plotados escapando para o infinito, e as cores dependem do número de iterações que o ponto levou para escapar para o infinito (Figura 2). Na Figura 3, podemos observar o Conjunto de Julia, obtido a partir de pontos do Conjunto de Mandelbrot.

Figura 2 - Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Wikipédia (2018).

Figura 3 - Conjunto de Julia



Fonte: BBC News (2019).

Em relação à noção de autossimilaridade aproximada, em que os padrões não se repetem com exatidão, podemos observar esses aspectos em elementos presentes na natureza, como nos brócolis e na samambaia, conforme ilustram as Figura 4 e Figura **5**.

Figura 4 - Brócolis

Fonte: O Blog do Mestre (2022).

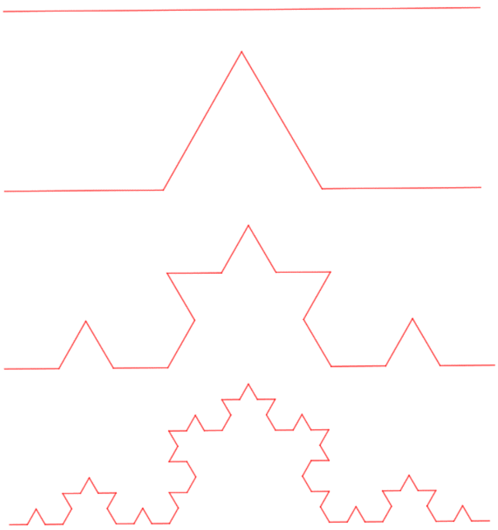
Figura 5 - Samambaia

Fonte: Fractal Matemático (2011).

O ramo da samambaia é semelhante à folha da samambaia, que por sua vez é semelhante à samambaia como um todo, consistindo em uma forma de autossimilaridade aproximada.

Outra característica do fractal é a complexidade infinita, expressada através do processo gerador dos fractais, podendo ser recursivo ou iterativo (BARBOSA, 2005). Em um fractal, podemos realizar um número infinito de iterações e nunca obteremos a imagem final desse fractal. A Figura 6 apresenta o fractal Curva de Koch com iterações até a sua terceira etapa.

Figura 6 - Curva de Koch



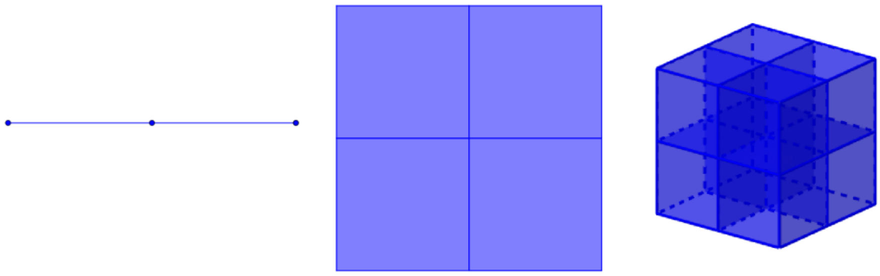
Fonte: o autor (2022).

O fractal será a figura limite do seu processo gerador, e vale ressaltar que esses objetos geométricos não perdem sua definição formal na medida em que são ampliados, mantendo a estrutura idêntica à original. É possível observar que, a cada segmento do fractal Curva de Koch, é realizada sua divisão em 3 partes de mesma medida, e na segunda parte constrói-se um triângulo equilátero. Tal iteração pode ser repetida infinitamente, dependendo da limitação do recurso utilizado para a representação do fractal.

Já a dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro. Ela representa o grau de ocupação do fractal no espaço e está ligada ao grau de irregularidade ou fragmentação (BARBOSA, 2005).

Podemos recordar o conceito de dimensão a partir de objetos da Geometria Euclidiana. Por exemplo, um ponto possui dimensão zero, um segmento de reta possui dimensão 1, um quadrado tem dimensão 2, e um cubo apresenta dimensão 3. Para entender melhor, vamos considerar um segmento de reta, um quadrado e um cubo repartidos em objetos autossimilares (Figura 7).

Figura 7 - Segmento, quadrado e cubo

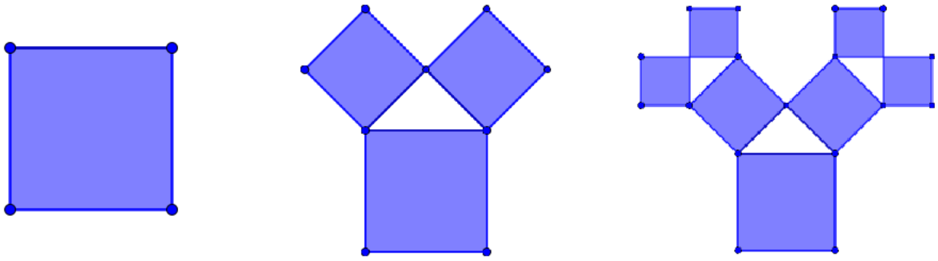


Fonte: o autor (2022).

O segmento foi dividido em 2 peças; o quadrado, em 4 peças (repartindo o lado em dois); e o cubo, em 8 peças (dividindo a aresta em duas). Cada uma das peças é autossimilar ao objeto como um todo, e essa divisão é feita a partir de um fator de aumento também chamado coeficiente de proporcionalidade (BARBOSA, 2005). O número de peças em cada caso é igual: ao fator de aumento (2), para o segmento de reta; ao *quadrado* do fator de aumento (2^2), para o quadrado; e ao *cubo* (2^3), para o cubo. Com efeito, o número de peças é dado por $n = m^D$, onde *m* é o fator de aumento e *D* é a dimensão.

Vamos agora para o cálculo da dimensão a respeito do fractal Árvore Pitagórica. Considerando inicialmente a Árvore Pitagórica como um quadrado de comprimento unitário, teremos, da primeira para a segunda iteração, o número de peças $n = 3$; e o fator de aumento $m = 2$ (Figura 8**Figura 7**).

Figura 8 - Número de peças e fator de aumento da Árvore Pitagórica



Fonte: o autor (2022).

Abaixo, apresentamos o cálculo da dimensão referente à primeira iteração realizada:

$$n = m^D$$

$$3 = 2^D$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D \cong \frac{0{,}47712}{0{,}30103}$$

$$D \cong 1{,}585$$

Assim, temos a seguinte fórmula para os fractais: Dimensão = log (número de peças) / log (fator de aumento) ou $D = \frac{\log n}{\log m}$, chamada *Dimensão Fractal*.

Embora a Geometria dos Fractais seja uma temática nova no cenário educacional brasileiro, trazida à tona nos últimos anos, especialmente no Estado do Paraná (PEREIRA; BORGES, 2017), ela já havia sido recomendada nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008) e está presente no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná - CREP (PARANÁ, 2021). Este último recomenda sua abordagem na unidade temática de Geometria, nas noções de Geometrias Não Euclidianas.

Barbosa (2005, p. 19) justifica a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula baseado em

> [...] conexões com outras ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para estudo de formas da natureza [...]; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

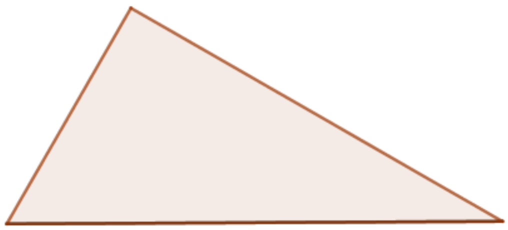
O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná sugere o estudo dos fractais porque ele “permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades” (PARANÁ, 2021, p. 541). K. J. Falconer sugeriu o entendimento de fractal como um conjunto F que possui autossimilaridade aproximada ou estatística, uma dimensão fractal maior que a sua dimensão topológica, e que pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo (BARBOSA, 2005).

Nesse sentido, a Geometria dos Fractais possibilita o uso de softwares de geometria dinâmica para o estudo de conceitos matemáticos. Sendo assim, objetivamos investigar a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra.

1.1.1 *A Árvore Pitagórica*

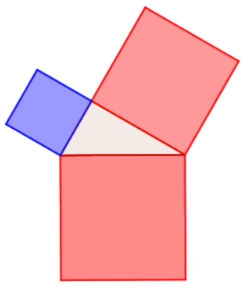
O fractal Árvore Pitagórica consiste inicialmente em um triângulo retângulo, cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (Figura 9). A partir da hipotenusa e dos catetos, os quadrados que formam o fractal são construídos. O quadrado, que tem como medida a hipotenusa, é o tronco inicial da árvore, e os quadrados que têm os catetos como medida constituem o iniciador-gerador[1] (Figura 10).

Figura 9 - Triângulo pitagórico



Fonte: o autor (2022).

Figura 10 - Tronco inicial e iniciador-gerador



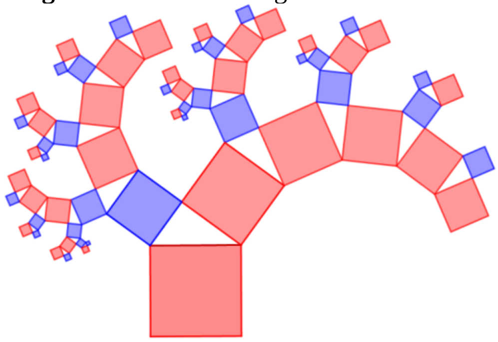
Fonte: o autor (2022).

Para cada nova etapa são construídos, sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto, novos triângulos retângulos semelhantes ao inicial, tendo a medida da hipotenusa como aquela do lado do quadrado em que o triângulo está justaposto. A cada nova iteração, cada cateto se transforma em um lado de um novo quadrado, que se transforma em hipotenusa.

[1] De acordo com Barbosa (2005), entende-se por iniciador-gerador o modelo gerador para todas as novas partes.

Conforme explica Barbosa (2005, p. 62), “[...] para se obter a autossimilaridade, os novos triângulos retângulos precisam ser semelhantes ao inicial, isto é, seus lados devem ser proporcionais aos números 3, 4 e 5” (Figura 11).

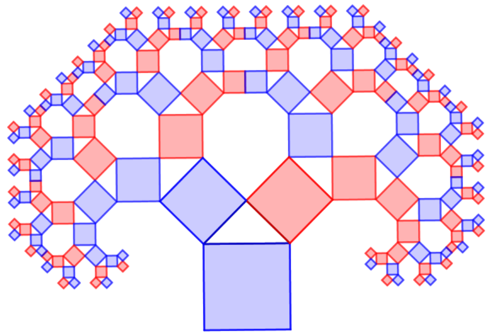
Figura 11 - Árvore Pitagórica Fundamental



Fonte: o autor (2022).

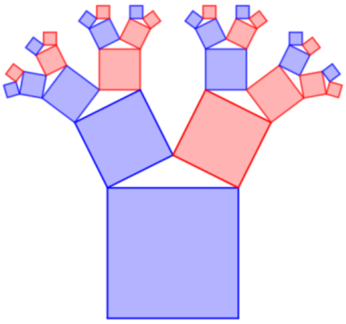
A primeira razão de escolha pelo fractal Árvore Pitagórica é a apreciação do belo irradiante e da observação da regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades. A segunda razão de escolha desse ente geométrico é que fractais de árvores pitagóricas podem variar o triângulo inicial em outros ternos pitagóricos, por exemplo: Árvore Pitagórica Isósceles Regular (Figura 12), Árvore Pitagórica Isósceles Obtusângula (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**) e Árvore Pitagórica Equilátera (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**).

Figura 12 - Árvore Pitagórica Isósceles Regular



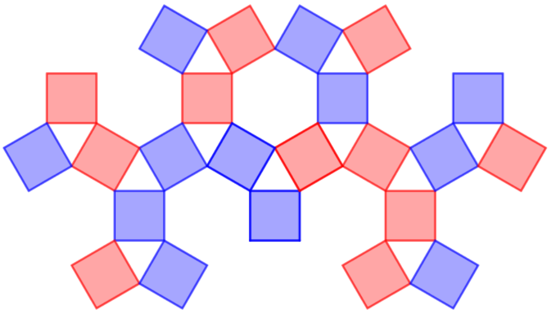
Fonte: o autor (2022).

Figura 13 - Árvore Pitagórica Obtusângula



Fonte: o autor (2022).

Figura 14 - Árvore Pitagórica Equilátera



Fonte: o autor (2022).

A terceira razão se deve às possibilidades de exploração desse fractal em sala de aula. O trabalho com a construção da Árvore Pitagórica possibilita uma exploração relativa à contagem, de forma a contar o número de quadrados, que se inicia com 1 + 2. No nível 1, acrescentam-se $2^2 = 4$ quadrados; então, teremos o total de 7, isto é $2^3 - 1$, e assim sucessivamente, induzindo o estudante a expressar uma fórmula relacionada a esse aspecto. Além disso, tendo em vista a autossimilaridade dos triângulos, podemos explorar a medida do comprimento dos lados dos triângulos e a relação entre os catetos e a hipotenusa. Por fim, consideramos pertinente uma exploração relacionada ao cálculo da medida do perímetro e da área do fractal em suas etapas, investigando uma expressão que represente o cálculo a partir do modelo gerador com lado de comprimento unitário.

Para a implementação proposta nesta pesquisa, realizada com alunos do Ensino Médio de uma escola pública no interior do Paraná, optamos por construir a Árvore Pitagórica com o iniciador-gerador formado a partir de um triângulo retângulo isósceles.

1.2 Noções sobre a Teoria Antropológica do Didático

A Didática da Matemática é a ciência que estuda situações que se propõem à aquisição de conhecimento pelos estudantes. Ela estuda condições que favorecem a aquisição de conceitos matemáticos por parte dos alunos. Dentre os constructos teóricos desenvolvidos no campo da Didática da Matemática, situa-se a TAD. Neste primeiro momento, discutimos noções primitivas dessa teoria, tais como objetos, pessoas, instituições e relações, sendo tais noções necessárias para melhor compreensão da TAD.

O primeiro conceito fundamental na TAD é o de *objeto*, que é qualquer entidade que existe, seja ela material ou imaterial. Como exemplos, podemos citar o *nome* sete, ou até mesmo *número* 7; a noção de pai, bem como um jovem pai andando com seu filho; o conceito de derivada, assim como o símbolo ∂ (CHEVALLARD, 2018). Portanto, qualquer produto da atividade humana é considerado um objeto.

Nos pressupostos da TAD, Chevallard (2018) considera que a segunda noção fundamental é a de *relação pessoal* de um indivíduo *x* a um objeto *o*, denominando $R(x, o)$ todas as interações que o indivíduo *x* pode ter com o objeto *o*.

O terceiro conceito fundamental é o de *pessoa*, dupla formada por um indivíduo *x* e o sistema de suas relações pessoais $R(x, o)$, em um dado momento da história do indivíduo *x* (CHEVALLARD, 2018). Conforme esclarece Chevallard (2018), o sistema de relações pessoais de *x* evoluiu com o tempo: objetos que não existiam para ele, passam a existir; outros deixam de existir; para outros, o relacionamento pessoal de *x* muda.

No momento em que um objeto *o* existe para uma pessoa *x*, é possível afirmar que *x conhece o*, e temos a relação $R(x, o)$ especificando *como x conhece o*. Chamamos *universo cognitivo de x* o conjunto $U(x) = \{(o, R(x; o))/R(x; o) \neq \emptyset\}$.

A quarta noção fundamental é a de *instituição*. Uma instituição *I* é um dispositivo social que impõe aos seus sujeitos *x* que, ao ocupar as diferentes posições *p* em *I*, são modos próprios de fazer e de pensar (CHEVALLARD, 2018). Desse modo, Chevallard (2018) considera que a sala de aula é uma instituição (cujas duas posições essenciais são as de *professor* e *aluno*). Nessa mesma linha, Bittar (2017, p. 366) considera o livro didático “uma instituição para alunos e professores que o utilizam (a depender do objetivo da pesquisa realizada)”.

Chevallard (2018) explica que, dado um objeto *o*, uma instituição *I*, e uma posição *p* em *I*, chamamos de *relação institucional* com *o* na posição *p*, e denotamos por $R_I(p, o)$ a relação com o objeto *o*, que deveria ser idealmente a dos sujeitos de *I* na posição *p*.

Além do mais, ao afirmar que x é um bom sujeito de I na posição p, temos $R(x, o) \cong R_I(p, o)$, onde o símbolo $\cong$ designa a *conformidade* da relação pessoal de x para a relação institucional na posição p (CHEVALLARD, 2018). Cabe destacar que, de acordo com Chevallard (2018), as atividades das quais sujeitos x de uma instituição I realizam em uma posição p são reguladas por praxeologias que conduzem à formação, à modificação, ou à confirmação de relações pessoais de x em um objeto o, $R(x, o)$.

No caso de nossa pesquisa, entendemos que o *objeto* o é o fractal Árvore Pitagórica; a *pessoa* x corresponde aos alunos e ao professor, ou seja, a todos os envolvidos na pesquisa; e x estabelece uma *relação pessoal* com o *objeto* o, designada $R(x, o)$, pertencente à *instituição* I, sala de aula, e ocupam uma posição p, constituindo a *relação institucional* que designaremos por $R_I(p, o)$.

1.2.1 *Sobre praxeologia*

A TAD situa a atividade de matemática e o estudo de Matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais, conforme observa Chevallard (1998). Diante disso, o postulado básico da TAD corresponde à possibilidade de analisar toda atividade humana por meio de um modelo único, denominado praxeologia.

O trabalho direcionado para o ensino da Matemática pode ser moldado em termos de praxeologia, composta por uma Organização Matemática - OM e uma Organização Didática - OD, que contribui para uma construção do conhecimento, de modo a possibilitar avanço na compreensão dos assuntos propostos. Para tal, é possível estabelecer uma estrutura praxeológica em prol do ensino e da investigação desse conhecimento.

Santos e Freitas (2017, p. 53) destacam que “a OM caracteriza o estudo do objeto matemático em um esboço praxeológico das atividades matemáticas”, e

> [...] no desenvolvimento da OM, o professor faz as suas escolhas sobre como introduzir o conteúdo, os conceitos valorizados e as atividades tidas como essenciais, entre outras escolhas, que são compreendidas por meio da Organização Didática (OD), ou seja, as escolhas metodológicas da forma de apresentação, ou da aula de matemática.

A estrutura praxeológica consiste em um quarteto composto por um tipo de tarefa (T), que é realizada a partir da mobilização de uma técnica (τ), que precisa ser justificada por uma tecnologia (θ), que tenha uma teoria (Θ) que rege a tecnologia em si (CHEVALLARD, 2018). Uma determinada praxeologia matemática é denotada por [T /

τ / θ / Θ], que comporta a parte prático-técnica ou *práxis* (também chamada de bloco do *saber-fazer*), denotada por ∏ = [T / τ]; e a parte tecnológico-teórica ou *logos* (também identificada como bloco do *saber*), é denotada por Λ = [θ / Θ] (CHEVALLARD, 2018).

Segundo Chevallard (1998), as noções de tarefa (t) e os tipos de tarefa (T) podem ser expressos por meio de um verbo que designa ação e está associada a um objeto, como por exemplo, varrer a sala, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ler um manual, subir as escadas, integrar a função $f(x) = x \ln x$. Ademais, o pesquisador (CHEVALLARD, 1998, p. 2, tradução nossa) esclarece que a noção de tipo de tarefa supõe um objeto relativamente preciso, e que "calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas calcular, muito simplesmente, é o que chamaremos de gênero de tarefas, que exige um determinado substantivo".

Assim, um determinado tipo de tarefa (T) exige um modo de fazer ou modo de realizar as tarefas (t): a ele damos o nome de técnica. De acordo com Chevallard (1998, p. 3, tradução nossa), "uma técnica (τ) não é necessariamente de natureza algorítmica". Nesse sentido, por exemplo, pintar uma paisagem e fundar uma família são tarefas que não exigem uma técnica algorítmica.

Com relação à tecnologia (θ), discurso que tem o objetivo de justificar racionalmente a técnica (τ), ela possui uma racionalidade que varia de acordo com o espaço institucional em que a técnica é desenvolvida (DIAS; SANTOS JÚNIOR, 2018).

Desse modo, Chevallard (1998) enfatiza que, em uma determinada instituição (I), qualquer que seja o tipo de tarefas (T), a técnica (τ) relativa à T é sempre acompanhada por um resquício de tecnologia (θ). Além disso, elementos tecnológicos podem estar integrados às técnicas, conforme podemos observar no exemplo de Dias e Santos Júnior (2018, p. 537):

> [...] dada uma função afim, ao calcular o valor numérico dessa função para determinado valor de x, o mesmo discurso tem a dupla função, técnica e tecnológica, pois quando dizemos 'substituir o valor de x na fórmula, efetuar as operações indicadas e determinar o valor de y', este discurso permite, ao mesmo tempo, que se encontre o resultado pedido (função técnica) e que se justifique que é o resultado esperado (função tecnológica).

Chevallard (1998) esclarece que o fato de existir uma técnica canônica, em princípio a única reconhecida e a única utilizada, confere a essa técnica a virtude de ser *autotecnológica*: utilizá-la não exige justificação, pois é o jeito certo de fazer isso (em *I*).

Podemos tomar como exemplo, conforme explicam Dias e Santos Júnior (2018, p. 537), quando introduzimos a função afim:

> [...] se consideramos apenas a técnica que, dados dois pontos, permite determinar a taxa de variação da função e o coeficiente linear por meio da construção de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas, esta será boa maneira de realizar esta tarefa para a instituição (I) e assim a técnica não precisa ser justificada quando a utilizamos.

Além da função de justificar a técnica, a tecnologia pode assumir uma segunda função, que é a de explicar a técnica. Com essa função, pretende-se explicar o porquê é assim; as técnicas precisam ser inteligíveis e esclarecidas. Nesse sentido, temos o exemplo dado por Dias e Santos Júnior (2018, p. 537):

> [...] sabemos que o gráfico de uma função afim é uma linha reta. Podemos explicar este resultado tomando três pontos e calculando a distância entre dois pontos. Assim, se tomamos as abscissas de três pontos em ordem crescente, o que sempre é possível, podemos mostrar que a distância do primeiro ponto ao terceiro é igual à soma da distância do primeiro ponto ao segundo com a distância do segundo ponto ao terceiro.

Uma terceira função da tecnologia corresponde à produção de técnicas. Conforme Chevallard (1998), existem tecnologias potenciais, à espera de técnicas, que ainda não são tecnologias de nenhuma técnica ou de pouquíssimas técnicas. Assim, deve-se destacar o modo insuficiente de explorar as tecnologias disponíveis, tanto do ponto de vista da justificação ou explicação quanto da produção. Quanto à função de produção de técnicas, podemos observar o exemplo de Dias e Santos Júnior (2018, p. 537):

> [...] ao demonstrarmos que o gráfico de uma função afim é uma linha reta, temos uma tecnologia que possibilita associar a taxa de variação da função afim à inclinação desta reta, que denominamos coeficiente angular, e a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo OY, que será o coeficiente linear desta reta, ou seja, temos assim uma nova técnica que torna possível representar, algebricamente, uma função afim por meio de sua fórmula $f(x) = ax + b$, onde *a* é a taxa de variação da função ou o coeficiente angular da reta que representa o gráfico desta função e *b* é o coeficiente linear que corresponde ao valor da função para $x = 0$ ou ao ponto em que a reta intercepta o eixo OY.

Por sua vez, Chevallard (2018) elucida que o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, para as quais podemos pedir razões. Passamos, então, para um nível superior de justificação-explicação-produção, o da teoria (Θ), que assume, em relação à tecnologia, o papel que ela desempenha em relação à técnica, ou seja, a tecnologia da tecnologia. De acordo com o autor, a regressão de justificativa pode ser infinita, mas três níveis são suficientes (técnica/ tecnologia/ teoria) para explicar uma atividade analisada.

Assim, conforme Chevallard (1998, p. 16, tradução nossa) explica, a OM está associada à OD, e a OD diz respeito a respostas de questões do tipo “Como estudar a questão $q = \tau_T$?”, ou “Como estudar o trabalho O?”. Ainda, o autor indaga: que tipos de tarefas se enquadram em uma praxeologia didática? Ou então, que *gestos* podem ser considerados didáticos?

Nesse sentido, as respostas para essas questões dependem da organização do estudo. Chevallard (1998) considera que as formas de caracterizar o caminho a ser seguido para o estudo de objetos matemáticos são denominados *momentos didáticos* ou *momentos de estudo*.

Dentre os momentos didáticos apresentados por Chevallard (1998), destacamos seis.

O primeiro momento de estudo é caracterizado pelo *primeiro encontro com a organização matemática* e pode ocorrer de diversas maneiras. Desde um encontro mimético, no qual o estudante deve imitar o prático pela manipulação real do objeto da organização matemática, até um encontro a partir de situações fundamentais, em que o aluno é o ator principal, e que produz respostas para perguntas específicas.

O segundo momento de estudo é caraterizado pela *exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica*. Esse momento corresponde ao desenvolvimento de técnicas e está no centro da atividade matemática. O estudo e a resolução de um problema de um determinado tipo constituem pelo menos um embrião de técnica, do qual poderá surgir uma técnica mais desenvolvida. O estudo de um problema particular aparece como um meio para que tal técnica de resolução se constitua. Assim, estudar problemas é um meio de criar e desenvolver uma técnica relativa a problemas do mesmo tipo; uma técnica que será, então, o meio de resolver problemas desse tipo de maneira quase rotineira.

O terceiro momento de estudo é caracterizado pela *constituição do ambiente tecnológico teórico* relativo à técnica. Esse momento está intimamente relacionado com cada um dos outros momentos. Desse modo, desde o primeiro encontro com a organização matemática, geralmente há uma conexão com um ambiente teórico-tecnológico previamente elaborado, que vai se concretizar em uma relação dialética com o surgimento da técnica.

O quarto momento de estudo, caracterizado pelo *trabalho com a técnica*, corresponde ao aprimoramento dessa técnica, tornando-a mais eficiente e confiável. Esse momento de testar a técnica pressupõe verificar seu alcance e se ela resolve um conjunto de tarefas *t* para um tipo T de tarefa.

O quinto momento de estudo é caraterizado pela *institucionalização*. A finalidade desse momento é que o professor especifique exatamente o que o aluno deve saber sobre o conteúdo proposto depois de realizar as tarefas solicitadas. Dessa forma, espera-se que o aluno possa distinguir os elementos que, tendo contribuído para a construção da organização matemática, não serão integrados, e os elementos que entrarão definitivamente na organização matemática pretendida.

O sexto momento de estudo é caraterizado pela *avaliação*. Esse momento se articula com o momento de institucionalização, porque o professor analisa a praxeologia com os alunos, bem como seus limites e possibilidades de utilização. É o momento em que é preciso fazer um balanço.

Valendo-nos das explicações apresentadas, neste trabalho, propomos uma Organização Praxeológica da construção do fractal Árvore Pitagórica utilizando o software GeoGebra. A TAD permitirá investigar praxeologias matemáticas mobilizadas pelos estudantes participantes da pesquisa. Espera-se que tais praxeologias emerjam das resoluções de tarefas *t* do tipo T, por exemplo: *qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 1*? Para isso, técnicas τ serão mobilizadas com a finalidade de resolver as tarefas. Cada técnica, por sua vez, será justificada por uma tecnologia θ, que fundamenta e embasa seu emprego. Por fim, a teoria Θ tem a atribuição de justificar a tecnologia. Com isso, pretendemos responder nosso problema de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?*

1.3 Revisão de literatura

Realizamos uma revisão de literatura na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações[2] - BDTD com o intuito de investigar como as pesquisas e estudos brasileiros

[2] http://bdtd.ibict.br

têm apresentado e discutido a Teoria Antropológica do Didático no contexto do ensino de Geometria.

Para a coleta dessas informações foram indicados, na ferramenta de busca avançada, os seguintes critérios:

1. **Temática:** *Teoria Antropológica do Didático* e *Geometria*;
2. **Idioma:** estudos em português;
3. **Tipo de documento:** dissertações e teses; e
4. **Ano de defesa:** pesquisas defendidas de 1990 a 2021.

A data de acesso foi 17 de dezembro de 2021. Foram encontrados 25 estudos, sendo 15 dissertações e 10 teses. O Quadro 1[3] apresenta o panorama dos estudos realizados, estruturado por título, tipo de documento, ano de defesa, autores, área e instituição. Esse quadro foi organizado em ordem crescente a partir do ano de defesa do trabalho.

[3] Acrescentamos ao Quadro 1 a dissertação de Pescini (2021), pois aborda a Geometria dos Fractais e a Teoria Antropológica do Didático e não constava no banco de dados da BDTD no momento do levantamento bibliográfico. Além disso, a pesquisa de Pescini (2021) foi desenvolvida sob orientação da mesma orientadora deste trabalho.

Quadro 1 - Dissertações e teses

(Continua)

Título	**Tipo de documento**	**Ano da defesa**	**Autor**	**Programa de Pós-Graduação**	**Instituição de defesa**
Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias	Tese	2006	ROSSINI, R.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio	Dissertação	2007	ANDRADE, R. C. D.	Educação em Ciências e Matemáticas	Universidade Federal do Pará
Um estudo sobre o Ensino de Transformações Geométricas: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais	Dissertação	2007	LUZ, V. de A.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental	Dissertação	2008	FARIAS, K. S. C. dos S.	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Práticas argumentativas no estudo da geometria de acadêmicos de Licenciatura em Matemática	Tese	2010	SALES, A.	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prova e demonstração em Geometria Analítica: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos	Dissertação	2010	VARELLA, M.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Prova e demonstração em Geometria: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª série de Moçambique	Dissertação	2010	ORDEM, J.	Ensino de Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático	Dissertação	2011	SILVA, J. V. G. da	Educação Matemática e Tecnológica	Universidade Federal de Pernambuco
Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “Construção do plano de Poincaré” com o uso do *software* Geogebra	Dissertação	2011	FERREIRA, L.	Educação para a Ciência e a Matemática	Universidade Estadual de Maringá

(Continua)

As Construções Geométricas e a Gênese Instrumental: o caso da mediatriz	Tese	2012	JESUS, G. B. de	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Polígonos regulares inscritos no círculo: uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental	Dissertação	2012a	ALMEIDA, G. dos A.	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso
Progressões Aritméticas e Geométricas: Praxeologias em livros didáticos de Matemática	Dissertação	2012b	ALMEIDA, E. A. M. de	Educação	Universidade Federal de Mato Grosso
Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projovem urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático	Dissertação	2012	CARVALHO, D. G. de	Educação Matemática e Tecnológica	Universidade Federal de Pernambuco
A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários de licenciatura: um estudo da função exponencial	Dissertação	2015	FREITAS, R. L.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático	Tese	2015	SANTOS, M. R. dos	Ensino das Ciências	Universidade Federal Rural de Pernambuco
Geometria Analítica no espaço: Análise das Organizações Matemática e Didática em Materiais Didáticos	Tese	2015	COSTA, A. C.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
A integração das tecnologias digitais ao ensino e aprendizagem de geometria no ensino fundamental – anos finais: uma proposta com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas planas	Dissertação	2016	FERREIRA, E. F. P.	Educação Matemática	Universidade Federal de Juiz de Fora
Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental	Dissertação	2016	CIABOTTI, V.	Educação	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Origami Euclidiano	Dissertação	2016	FRANÇA, E. M. de	Educação Matemática e Tecnológica	Universidade Federal de Pernambuco
Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas	Tese	2016	FERREIRA, M. B. C.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

(Conclusão)

Análises dos conteúdos de sistemas de representação no curso de licenciatura em expressão gráfica da UFPE à luz da teoria antropológica do didático	Dissertação	2018	NEVES JÚNIOR, C. A.	Educação Matemática e Tecnológica	Universidade Federal de Pernambuco
Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro	Tese	2018	FERREIRA, L. de F. D.	Educação Matemática e Tecnológica	Universidade Federal de Pernambuco
Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas	Tese	2019	BENITO, R. N.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Estudo das três dimensões do problema didático de inequações	Tese	2019	MINEIRO, R. M.	Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Possibilidades e limitações de micropercursos de estudo e pesquisa em geometria: uma experiência de formação continuada com professores da rede pública	Tese	2019	SANTOS, C. M. dos	Educação Matemática	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Uma análise praxeológica da geometria dos fractais em livros didáticos de matemática do ensino médio	Dissertação	2021	PESCINI, A. E.	Educação Matemática	Universidade Estadual do Paraná

Fonte: o autor (2022).

Dentre os trabalhos apresentados no quadro, 11 estudos estão relacionados à análise de organizações praxeológicas de conceitos de Geometria presentes em livros didáticos. Dessa forma, optamos por considerar apenas os estudos que apresentam aspectos relacionados à proposta desta pesquisa, e o critério de seleção foi baseado nos seguintes assuntos: trabalhos que analisam livros didáticos com o aporte teórico da TAD e abordam documentos normativos para o ensino, e trabalhos que realizaram experimentações em sala de aula com a abordagem da Geometria Não Euclidiana. Assim, em conformidade com os textos encontrados, dividimos os textos em duas categorias: 1) trabalhos que analisam organizações matemáticas do conteúdo de Geometria em livros didáticos sob a perspectiva de recomendações prescritas em documentos oficiais; e 2) proposta de organização didática referente aos conteúdos de Geometrias Não Euclidianas.

A primeira categoria é composta pelos seguintes trabalhos: Almeida (2012b), Farias (2008), Luz (2007) e Pescini (2021). A pesquisa de Almeida (2012b) teve por objetivo investigar como os livros didáticos propõem o estudo das progressões aritméticas e geométricas no primeiro ano do Ensino Médio. Fundamentaram o trabalho a Teoria Antropológica do Didático - TAD, proposta por Chevallard (1999); e a Teoria dos Jogos de Quadros, de Douady (1992).

Almeida (2012b) identificou, nas praxeologias apresentadas nos livros didáticos, tarefas, técnicas, discurso tecnológico-teórico e quadros numérico, geométrico e algébrico. A partir disso, a autora verificou se tais praxeologias condizem com as propostas dos documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - 1999, Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais - 2002, e Orientações Curriculares para o Ensino Médio - 2006), e com as intencionalidades dos autores que estavam expostas nos manuais.

Os resultados da pesquisa de Almeida (2012b) possibilitaram um diagnóstico de livros didáticos, os quais evidenciaram que as organizações praxeológicas de dois dos livros analisados não explicitam a estreita relação entre progressões e funções. Também foi observado que os livros não contemplam todas as recomendações dos documentos oficiais.

No que diz respeito à pesquisa de Farias (2008), ela teve como objetivo principal descrever e analisar a representação do espaço geométrico a partir de dados obtidos em livros didáticos, nas orientações fornecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e no Guia de Livros Didáticos (2007) para os anos iniciais do Ensino Fundamental. A teoria que fundamentou o estudo de Farias (2008) foi a TAD, e os resultados evidenciaram valorização crescente do estudo da Geometria, valorização da contextualização do saber escolar e da diversificação da linguagem usada no ensino da representação do espaço e da sistematização do conhecimento geométrico, além de destaque a respeito da importância da realização de diferentes tipos de articulações no estudo da Geometria.

Com o objetivo de realizar uma análise de organizações matemáticas das transformações geométricas e de organizações didáticas em livros didáticos, a partir dos anos 1960, do Estado de São Paulo, a pesquisa de Luz (2007) examinou as completudes das organizações matemáticas locais conforme a TAD, e comparou as propostas de ensino de isometrias e homotetias vigentes à época do movimento da Matemática Moderna com aquelas vigentes após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais. A análise foi feita por agrupamentos de tipos de tarefas, para identificação da técnica e distinção da tecnologia de justificativa. As conclusões do trabalho de Luz (2007) indicam que as orientações observadas em cada um dos períodos não garantiriam que importantes problemas de transformações fossem resolvidos: o período do movimento da Matemática Moderna evidenciou a estrutura matemática, e o período após a publicação dos Parâmetros Curriculares destacou a relação de isometrias e homotetias com os níveis superiores de determinação matemática.

Em relação à pesquisa de Pescini (2021), ela teve por objetivo caracterizar praxeologias didáticas e matemáticas da abordagem do conteúdo Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio. Para isso, a autora analisou quatro coleções de livros didáticos aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático - PNLD de 2018, e que foram as mais adotadas entre as 5 maiores cidades, em termos de habitantes, do Estado do Paraná. A análise dos dados produzidos foi realizada sob o ponto de vista das organizações praxeológicas, com embasamento teórico-metodológico da TAD, que oportunizou investigar escolhas matemáticas e didáticas dos autores das coleções. Nesse sentido, a autora aponta que o conteúdo Geometria dos Fractais se faz presente em 4 dos 16 livros didáticos analisados, e é articulado com outros conteúdos matemáticos, como Números e Álgebra.

Na segunda categoria, selecionamos somente o trabalho de Ferreira (2011), pois segundo o autor, a motivação da pesquisa surgiu do interesse em pesquisar condições de trabalho com o assunto de Geometrias Não Euclidianas. O principal objetivo do estudo de Ferreira (2011) foi elaborar uma Organização Didática e identificar possíveis obstáculos que aparecem durante a construção do modelo do plano de Poincaré. Ferreira (2011) realizou um minicurso de Geometria Hiperbólica, e optou por utilizar o software GeoGebra durante uma proposta aplicada com alunos do 4°ano de licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (Fecilcam), Paraná.

A dissertação de Ferreira (2011) apresenta a parte teórica com um resgate da história da Geometria Euclidiana, até a aparição das Geometrias Não Euclidianas. Ainda na parte teórica, são apresentados elementos da TAD, teoria que fundamentou a elaboração da proposta. Com a pesquisa, Ferreira (2011) concluiu que é possível ensinar Geometria Hiperbólica usando um software de geometria dinâmica, como o GeoGebra, desde que se respeitem os conteúdos das séries escolares dos aprendizes e se tome cuidado na construção do conceito de métrica.

Não foram identificados trabalhos que propusessem ou apresentassem uma organização praxeológica relacionada à Geometria dos Fractais, nem que pudessem estabelecer uma discussão articulada com o documento que atualmente (desde 2018) norteia a Educação Básica em âmbito federal (Base Nacional Comum Curricular - BNCC), conforme proposto nesta pesquisa.

De modo geral, tal levantamento possibilitou concluir a existência de uma concentração de estudos voltados para as Geometrias Euclidianas. Observa-se que a escolha por conceitos das Geometrias Euclidianas deve-se pela importância dada a esses objetos nas recomendações de documentos oficiais (nacional e estadual). Por outro lado, é possível evidenciar a necessidade de trabalhos envolvendo as Geometrias Não Euclidianas, em especial a Geometria dos Fractais, visto que não foram encontrados trabalhos a respeito do assunto, quando procurados pelos termos *Teoria Antropológica do Didático* e *Geometria dos Fractais,* ao mesmo tempo, ou por *Teoria Antropológica do Didático* e *Geometria Fractal*.

Em relação à TAD, as pesquisas apontam que ela forneceu elementos para realizar análises de materiais, bem como para a modelação de situações de ensino. No trabalho de Almeida (2012b), por exemplo, a TAD permitiu realizar uma análise das progressões, remetendo a reflexões no que diz respeito às praxeologias apresentadas nos livros didáticos que são capazes de influenciar as praxeologias dos professores, bem como possíveis efeitos sobre a aprendizagem dos alunos.

Embora a Geometria dos Fractais seja uma temática nova no cenário educacional brasileiro, trazida à tona nos últimos anos, especialmente no Estado do Paraná (PEREIRA; BORGES, 2017), ela já havia sido recomendada nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008) e está presente também no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná - CREP (PARANÁ, 2021).

Desse modo, esta pesquisa anseia investigar a possibilidade estudar a Geometria dos Fractais em sala, de forma a contemplar objetos do conhecimento localizados nas habilidades e competências preconizadas na BNCC para o Ensino Médio. Para isso, definimos o seguinte objetivo: investigar, por meio de praxeologias matemáticas, habilidades e objetos de conhecimentos da área de Matemática e suas Tecnologias que são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra. Tais praxeologias matemáticas foram investigadas para responder à seguinte questão de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?*

A seguir, descrevemos aspectos relacionados à BNCC com o intuito de explicar como ela é composta e seus principais aspectos que se relacionam com este trabalho.

1.4 A Base Nacional Comum Curricular

O Plano Nacional de Educação - PNE preceitua que todos os alunos da Educação Básica tenham assegurados seus direitos de desenvolvimento e aprendizagem. Dessa forma, a BNCC é um documento de caráter normativo que define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação escolar (BRASIL, 2018).

A BNCC contribui com o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbitos federal, estadual e municipal, referentes à elaboração de currículos e propostas pedagógicas (BRASIL, 2018). Portanto, espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, garantindo um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes.

A BNCC apoia-se em dois fundamentos pedagógicos: o compromisso com a educação integral e o desenvolvimento de competências. As aprendizagens que estão definidas na BNCC devem contribuir para que os estudantes desenvolvam competências gerais.

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8)

Embora a discussão sobre a diferença entre competência e habilidade seja ampla, tentaremos diferenciá-las: suponha que você precisa ir a um determinado lugar, mas ainda não sabe como chegar lá. Então, é provável que você consulte um mapa para chegar no destino, pesquise na internet o transporte mais rápido, decida se vale a pena ir de táxi ou ônibus. Nessa ação, a competência exigida é *deslocar-se em uma grande cidade*. As habilidades mobilizadas são *pesquisar o local*, *avaliar o trânsito*, *escolher o transporte mais rápido*, e *definir o melhor horário para o deslocamento* (CURSOS MEC, 2018).

No quadro a seguir, apresentamos as dez Competências Gerais da Educação Básica descritas na BNCC (BRASIL, 2018).

Quadro 2 - Competências Gerais

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: Brasil (2018, p. 9-10).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), as Competências Gerais da Educação Básica se inter-relacionam no tratamento didático proposto para os três níveis da Educação Básica

(Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB.

Além disso, no documento que compõe a BNCC são estabelecidas cinco áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso.

1.4.1 *A Estrutura da BNCC*

A BNCC está estruturada de acordo com os seguintes itens: *competências gerais* que os alunos devem desenvolver ao longo de todos os níveis da Educação Básica; *competências específicas* de cada área do conhecimento e dos componentes curriculares; e *habilidades* relativas a diversos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) que os alunos devem desenvolver em cada nível da Educação Básica (BRASIL, 2018).

Para cada área do conhecimento, são estabelecidas competências específicas, e cada competência específica explicita como as dez competências gerais se articulam nessa área. Nesse sentido, para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, um conjunto de habilidades é relacionado. As habilidades possuem a finalidade de expressar as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares. Além disso, relacionam os chamados objetos de conhecimento, que podem ser entendidos como conteúdos, conceitos e processos.

A Base expressa aprendizagens por meio de um código, conforme a Figura 15.

Figura 15 - Exemplo do código de aprendizagem

EM 13 LGG 103

Fonte: Brasil (2018, p. 34).

O primeiro par de letras indica o nível de Ensino (EI, EF ou EM), no caso do exemplo apresentado, Ensino Médio. O primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos. A segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras): LGG = Linguagens e suas Tecnologias; LP = Língua Portuguesa; MAT = Matemática e suas Tecnologias; CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias; CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. O último par de números indica a posição da aprendizagem ou da habilidade na numeração sequencial do ano (ou do bloco de anos). Cabe ressaltar que a numeração sequencial dos códigos alfanuméricos não sugere ordem ou hierarquia entre os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento.

A seguir, trazemos aspectos referentes à parte da BNCC para o Ensino Fundamental.

1.4.2 *Ensino Fundamental*

O Ensino Fundamental - EF é o nível mais longo da Educação Básica, com nove anos de duração. Esse nível atende estudantes entre 6 e 14 anos e é o período em que acontece uma série de mudanças na vida dos estudantes, relacionadas a aspectos emocionais, sociais, físicos, cognitivos e afetivos (BRASIL, 2018).

O nível do EF é dividido em duas fases: anos iniciais e anos finais. A BNCC dos anos iniciais do EF aponta a necessidade de articular as experiências vivenciadas na Educação Infantil - EI (BRASIL, 2018). Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), essa articulação precisa prever a progressiva sistematização dessas experiências e o desenvolvimento de novas formas de relação com o mundo.

No que diz respeito à aprendizagem de Matemática, a BNCC (BRASIL, 2018) explica que ela deve ser vista como um processo em permanente construção, e que o estudante deve ser motivado a formular, testar e validar hipóteses, questionar, construir modelos e a desenvolver a linguagem matemática, levando-o a pensar, refletir e agir de maneira crítica sobre as questões do seu cotidiano.

Sobre os anos finais do EF, a BNCC (BRASIL, 2018) esclarece que os estudantes são confrontados com desafios mais complexos, e nessa fase é importante retomar e ressignificar as aprendizagens dos anos iniciais. Além disso, o documento considera importante fortalecer a autonomia desses estudantes, oferecendo-lhes condições e ferramentas para interagir criticamente com diferentes conhecimentos (BRASIL, 2018).

Nos anos finais do EF, "a escola pode contribuir para o delineamento do projeto de vida dos estudantes, ao estabelecer uma articulação não somente com os anseios desses jovens em relação ao seu futuro, como também com a continuidade dos estudos no Ensino Médio" (BRASIL, 2018, p. 62).

1.4.3 *A BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental: Matemática e suas Tecnologias*

Com relação às aprendizagens da área de Matemática do EF, a BNCC articula as competências gerais da Educação Básica com o desenvolvimento de oito competências específicas. A seguir, apresentamos o Quadro 3 com as competências específicas para o Ensino Fundamental.

Quadro 3 - Competências específicas da área Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Fundamental

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, além de dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: o autor, baseado na BNCC (BRASIL, 2018).

Nos anos finais do EF, assim como ocorre nos anos iniciais, o componente é trabalhado por meio de cinco unidades temáticas: Álgebra, Números, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Cabe destacar que a organização em unidades temáticas foi feita para pontuar o que é essencial ser trabalhado, e para que o professor tenha uma visão geral dos aspectos específicos a serem abordados. No entanto, essa forma de apresentação não indica que essas unidades devam ser trabalhadas uma a uma: as habilidades agrupadas em diferentes unidades temáticas se inter-relacionam e são interdependentes.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), a leitura do componente Matemática deve considerar os objetos de conhecimento e as habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas. Nesse sentido, esse cuidado permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes unidades temáticas. Além disso, sugere que o professor identifique como foi estabelecida a progressão das habilidades, em cada unidade temática, ao longo do Ensino Fundamental. Dessa forma, esse olhar é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema, a serem efetivadas em determinado ano escolar, com as aprendizagens propostas em anos anteriores, também para reconhecer em que medida elas se articulam com aquelas indicadas para os anos posteriores (BRASIL, 2018).

A seguir, trazemos aspectos referentes à parte da BNCC para o Ensino Médio.

1.4.4 *Ensino Médio*

O Ensino Médio – EM está organizado em quatro áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e um componente (Língua Portuguesa), além dos Itinerários Formativos (BRASIL, 2018). Ainda segundo a BNCC (BRASIL, 2018), trata-se de um nível cujas aprendizagens estão articuladas com as do Ensino Fundamental, e cujos principais objetivos são: consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral.

O público-alvo do EM é formado por adolescentes e jovens. Por isso, uma das premissas do nível é a adoção de uma noção ampliada e plural de juventude, a ser implementada em escolas que ofereçam ambientes de estudos que acolham as diversidades, que garantam aos estudantes o protagonismo do seu processo de escolarização, e que estejam alinhadas com os projetos de vida deles (BRASIL, 2018).

Na BNCC, o nível EM pretende promover a elevação da qualidade do ensino no país, por meio de uma referência comum obrigatória para todas as escolas de Educação Básica, respeitando a autonomia dos entes federados e das escolas (BRASIL, 2018). Sendo assim, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), o EM é um instrumento que contribuirá na inserção dos jovens no mundo do trabalho e para que se tornem cidadãos plenos.

As habilidades presentes na Base são exibidas sem indicação de seriação, e em cada área do conhecimento é explicitado seu papel na formação dos estudantes do Ensino Médio e as particularidades relacionadas ao tratamento de seus objetos de conhecimento, as aprendizagens e as especificidades, e demandas desse nível da escolarização.

Diante do que apresenta a BNCC (BRASIL, 2018), para atender as demandas da sociedade contemporânea, espera-se que o EM proporcione experiências e processos que garantam aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento de desafios sociais, econômicos e ambientais, e a tomada de decisões éticas e fundamentadas.

1.4.5 *A BNCC para o Ensino Médio: Matemática e suas Tecnologias*

A área de Matemática e suas Tecnologias do EM propõe a consolidação e o aprofundamento de um conjunto de conceitos e procedimentos que favorecem a compreensão da realidade, desde situações cotidianas até questões de outras ciências e raciocínio lógico (BRASIL, 2018). Conforme estabelece o documento da BNCC (BRASIL, 2018), é necessário que a Matemática, no EM, contribua para o desenvolvimento das capacidades de argumentação, generalização e abstração.

Cabe destacar que, no nível do EM, não há um aumento significativo do número de objetos de conhecimento em relação ao nível do EF. No EM, uma ideia importante é a mobilização dos conhecimentos já adquiridos pelos estudantes para a resoluções de situações mais complexas e para o aprendizado de novas noções matemáticas (BRASIL, 2018). De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 528-529),

> [...] a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

Diante disso, para a área da Matemática e suas Tecnologias, são propostas cinco competências, e cada habilidade está associada à determinada competência. Na Matemática do EM, as habilidades são apresentadas sem indicação de seriação, conforme já mencionado, o que permite flexibilizar a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola (BRASIL, 2018).

As competências da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio estão dispostas no quadro abaixo.

Quadro 4 - Competências específicas da área Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados às situações de saúde, de sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outras, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.) na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil (2018, p. 531).

As habilidades estão organizadas de acordo com as unidades temáticas da área: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

As competências 1 e 2 estão voltadas para a interpretação e compreensão de aspectos da realidade. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), a primeira competência específica pressupõe habilidades que favorecem a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes. Essa competência propõe a utilização de conceitos matemáticos como suporte para julgamentos bem fundamentados.

A segunda competência está voltada para a proposição e participação em investigação de questões de impacto social, identificando, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, aspectos consensuais ou não na discussão, favorecendo a interação e a cooperação entre os estudantes para aprender e ensinar Matemática de forma significativa (BRASIL, 2018).

Para o desenvolvimento dessa competência, conforme a BNCC (BRASIL, 2018), também se deve considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

A terceira competência traz conceitos e procedimentos matemáticos específicos. Para essa competência, está previsto o desenvolvimento de habilidades relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas (BRASIL, 2018). Essas habilidades envolvem noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

A quarta competência prevê que os estudantes ampliem seu repertório de representações matemáticas ao utilizar e compreender as ideias que elas expressam (BRASIL, 2018). Além disso, a BNCC (BRASIL, 2018) espera que os alunos façam a conversão entre as diferentes representações, dominem um conjunto de ferramentas que potencialize sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), a quinta competência prevê a ampliação de recursos para que os estudantes possam melhor estruturar seu pensamento algébrico, identificando as relações existentes entre os objetos matemáticos, representando e analisando essas relações de modo geral e abstrato.

A seguir, listamos as habilidades que possibilitam o desenvolvimento de competências apresentadas e estão relacionadas às unidades de conhecimento da área de Geometria e Medidas. Entendemos que tais áreas poderiam ser exploradas no desenvolvimento desta pesquisa.

Quadro 5 - Habilidades de Geometria e Medidas

(Continua)

Referência da Habilidade	**Habilidades a serem desenvolvidas**
(EM13MAT105)	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT307)	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes, etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(Conclusão)

(EM13MAT308)	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT313)	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT505)	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Fonte: o autor, baseado na BNCC (BRASIL, 2018).

O assunto Geometria dos Fractais não é sugerido em competências ou habilidades da BNCC. Assim, esta pesquisa investiga habilidades e objetos de conhecimento presentes na BNCC mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra.

Durante a produção de dados de nossa pesquisa, contamos com o apoio do software GeoGebra, que nos auxiliou no decurso da construção da Árvore Pitagórica. Por isso apresentamos, a seguir, aspectos relacionados a esse software.

1.5 Sobre o software GeoGebra

A integração das tecnologias aos processos educativos não ocorre naturalmente. As tecnologias, quando apropriadas, podem ser empregadas no sentido de favorecer os processos de ensino e aprendizagem. Para isso, é necessário ter em mente que o uso de recursos tecnológicos no campo educacional não seja apenas de caráter técnico, mas que remeta a pressupostos teoricamente fundamentados.

Nesse sentido, Valente (1991) realiza uma importante diferenciação entre o ensino de informática e o ensino pela informática. O ensino de informática refere-se àquele sobre computadores, sua história, seu funcionamento, softwares que podem ser utilizados, etc. O ensino pela informática remete ao de praticamente qualquer área do conhecimento por intermédio do computador.

Segundo o autor, o computador pode ser útil no processo de ensino-aprendizado em razão da quantidade de programas educacionais e das diferentes modalidades de uso do computador (VALENTE, 1991). Para Valente (1991), o computador passa a ser uma ferramenta educacional de possível mudança na qualidade de ensino, e traz consigo um questionamento da função da escola e do papel do professor.

Desse modo, Valente (1991, p. 17) explica que

> a função do aparato educacional não deve ser a de ensinar mas a de promover o aprendizado. Isto significa que o professor deixa de ser o repassador de conhecimento - o computador pode fazer isto e o faz muito mais eficientemente do que o professor - para ser criador de ambientes de aprendizado e de facilitador do processo pelo qual o aluno adquire conhecimento.

O computador, como ferramenta educacional, será o instrumento com o qual o aluno desenvolve algo e, dessa forma, o aprendizado ocorre pela realização de uma tarefa por seu intermédio (VALENTE, 1991). Conforme apresenta Valente (1991), essas tarefas podem ser resolução de problemas de diversos campos do conhecimento; elaboração de textos; produção de música; comunicação e telecomunicação; pesquisa de/em banco de dados ou criação de um novo banco de dados; controle de processos em tempo real; e controle administrativo da classe e dos alunos.

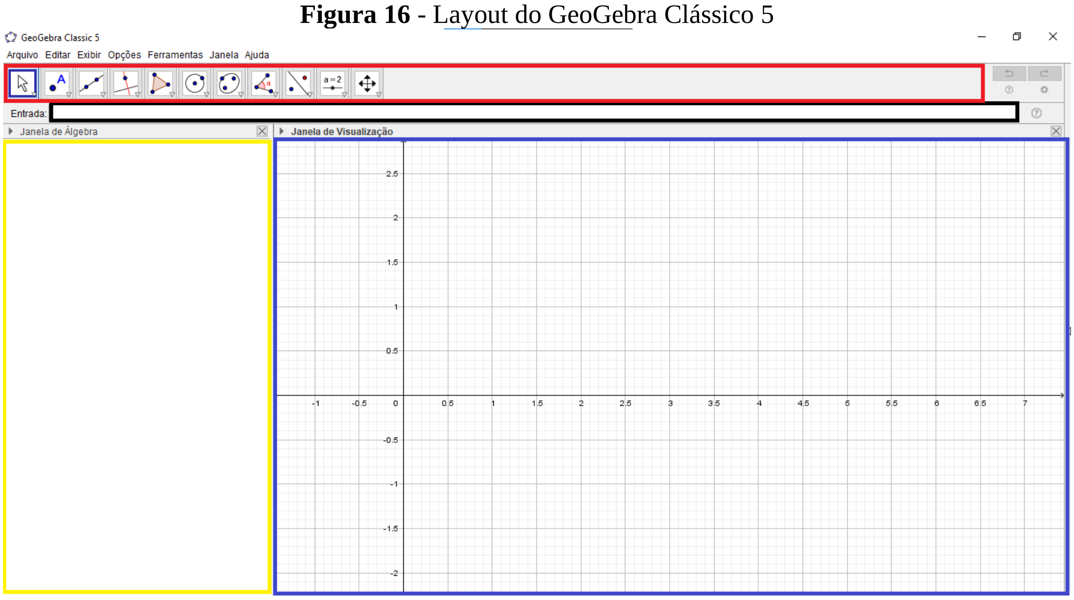
Dentre os softwares que se destacam no contexto do ensino de Matemática, o GeoGebra é uma ferramenta educacional que se caracteriza como software de Geometria dinâmico, além de ser livre e gratuito[1], e que combina álgebra, gráficos, geometria, tabelas, cálculos e estatística.

O software GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, e possui destaque no campo de ensino e de aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. O software é disponibilizado para as plataformas iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux, além de possuir a versão online, o GeoGebra Clássico[2], e todas essas versões estão disponíveis em português. A seguir, apresentamos o layout do GeoGebra Clássico 5 (Figura 16).

---

[1] Disponível em: www.geogebra.org
[2] Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

Figura 16 - Layout do GeoGebra Clássico 5

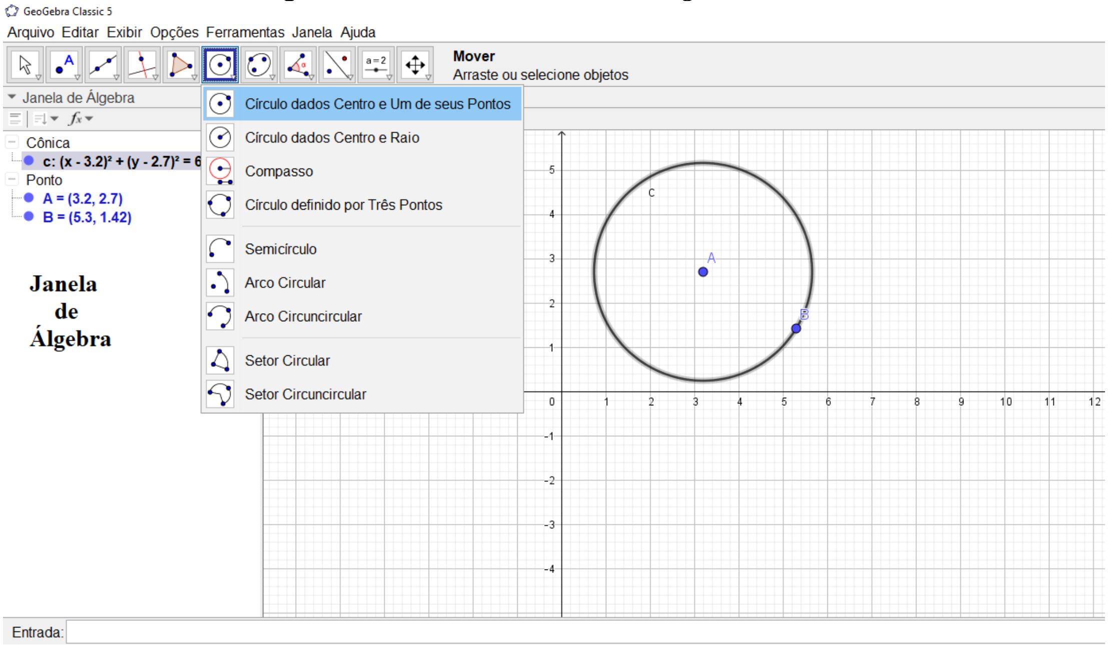


Fonte: o autor (2022).

Na Figura 3 é possível observar quatro regiões destacadas. Usando ferramentas disponíveis na *Barra de Ferramentas*, há uma região destacada em vermelho. Também é possível criar construções geométricas na área da *Janela Gráfica* ou *Janela de Visualização*, destacada em azul. Ao mesmo tempo, coordenadas e equações correspondentes são exibidas na *Janela de Álgebra*, destacada em amarelo. Por outro lado, é possível inserir entradas, comandos e funções algébricas usando o teclado, diretamente na *Barra de Entrada* ou *Caixa de Entrada*, destacada em preto. Enquanto a representação gráfica de todos os objetos é exibida na *Janela de Visualização*, sua representação algébrica ou numérica é mostrada na *Janela de Álgebra*.

Na *Barra de Ferramentas* estão inúmeras ferramentas para construção de diferentes conceitos geométricos. Cada ícone na barra representa uma caixa de ferramentas que contém outro conjunto de ferramentas. Depois de inseridos nessa janela, o GeoGebra converte a construção realizada na forma algébrica e apresenta os resultados na *Janela de Álgebra* (Figura 17).

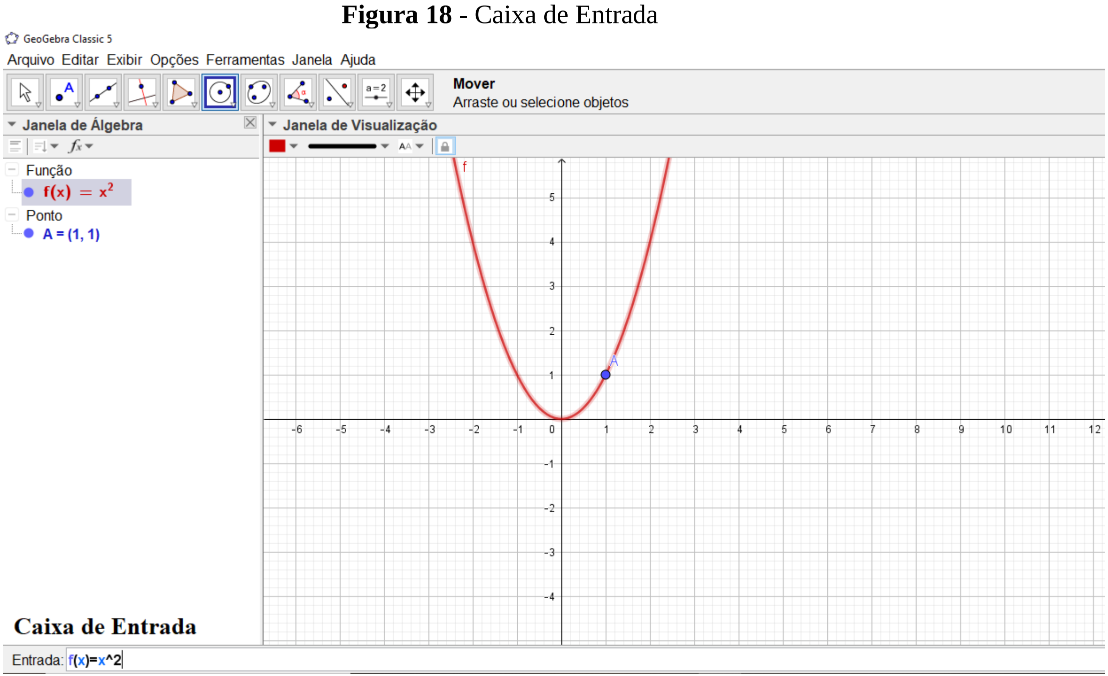
Figura 17 - Ferramentas e Janela de Álgebra



Fonte: o autor (2022).

As mesmas construções criadas utilizando o mouse e as ferramentas podem ser originadas usando a *Caixa de Entrada* (Figura 18). Nela, é possível inserir comandos que, após confirmados, aparecem na *Janela de Álgebra*. Dependendo do tipo de informação digitada, também é representada na *Janela Gráfica*, como pontos, funções, etc.

Figura 18 - Caixa de Entrada



Fonte: o autor (2022).

O programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com as mais avançadas da álgebra e do cálculo. Assim, existe a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. Essa possibilidade de integrar ferramentas de geometria e álgebra em um mesmo software configura ao GeoGebra uma posição de destaque no campo de softwares educacionais, aliada, ainda, à condição de software livre e multiplataforma.

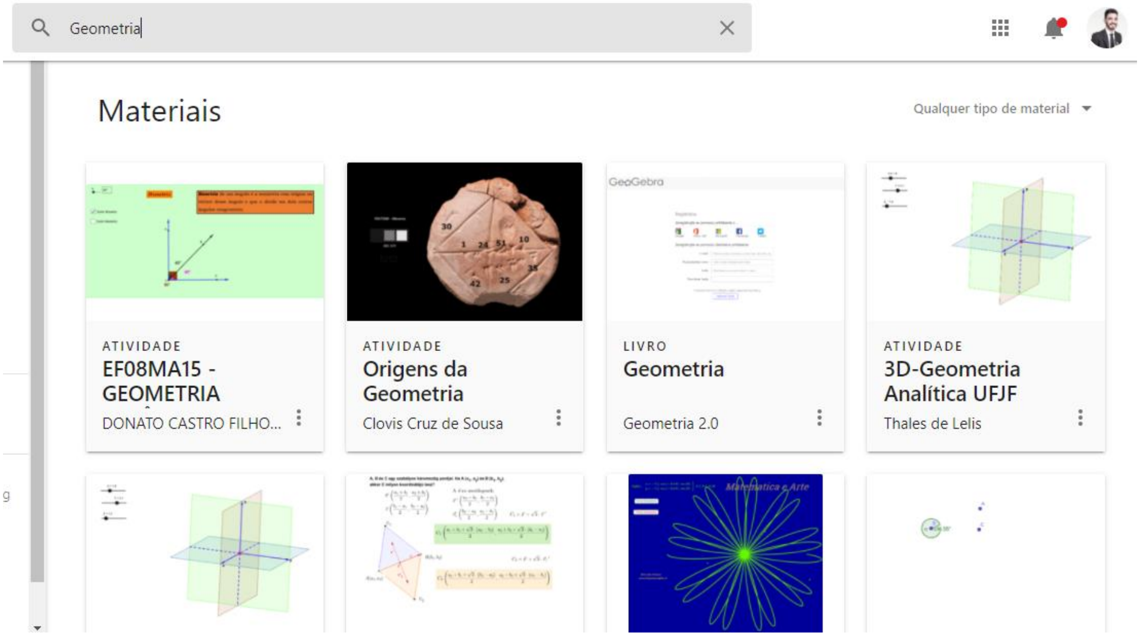
1.5.1 *O GeoGebra Classroom*

Durante a pesquisa piloto, utilizamos o recurso do *GeoGebra Classroom*. Esse é um dos recursos presentes no site do GeoGebra, sendo uma plataforma virtual através da qual os professores podem atribuir tarefas interativas para os alunos, acompanhar seu progresso durante o desenvolvimento de uma tarefa, monitorar quais tarefas foram iniciadas e realizadas pelos alunos no ambiente do software, fazer perguntas para os alunos e ver as respostas instantaneamente, além de realizar trabalhos em equipe.

Para criar uma lição no *GeoGebra Classroom*, o usuário precisa encontrar uma Atividade do GeoGebra[1] que possa ser transformada em uma tarefa. O usuário pode encontrar uma Atividade GeoGebra utilizando a barra de pesquisa do site do GeoGebra (Figura 19), ou pode escolher uma atividade presente na sua conta de usuário.

[1] Uma Atividade do GeoGebra ou Atividade GeoGebra é uma atividade interativa (online) que combina diferentes elementos (por exemplo, texto, *applets*, perguntas, vídeos, imagens) em um layout flexível.

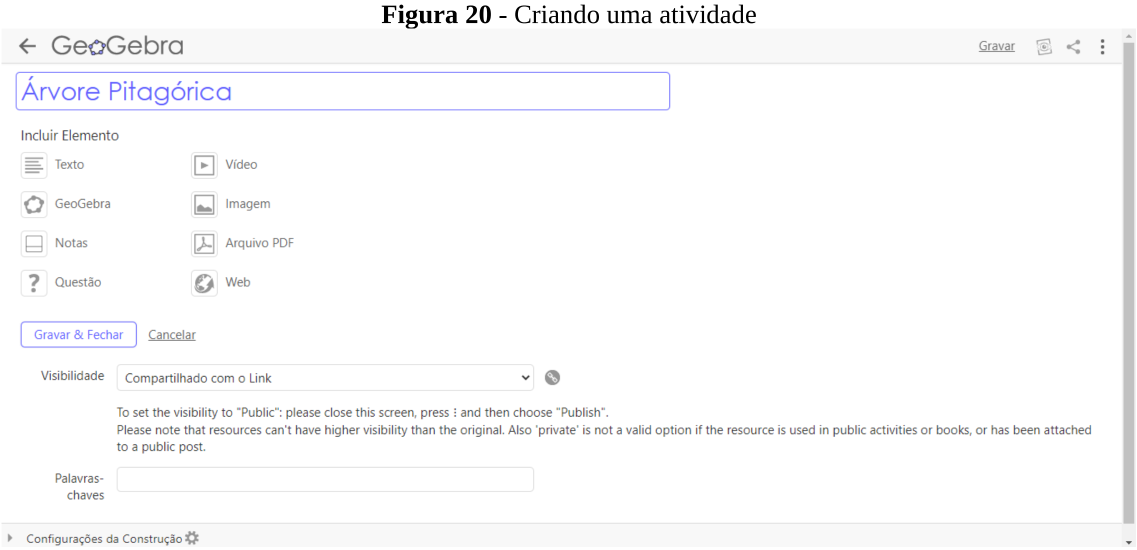
Figura 19 - Atividades no site GeoGebra



Fonte: o autor (2022).

Conforme ilustra a Figura 19, podemos encontrar diversas atividades construídas por outros usuários para utilizar em uma lição no *GeoGebra Classroom*. Elementos como perguntas abertas, questões de múltipla escolha, GeoGebra Calculadora Gráfica, GeoGebra Calculadora Científica, GeoGebra Clássico e GeoGebra Notas podem se tornar uma tarefa no *GeoGebra Classroom* (Figura 20).

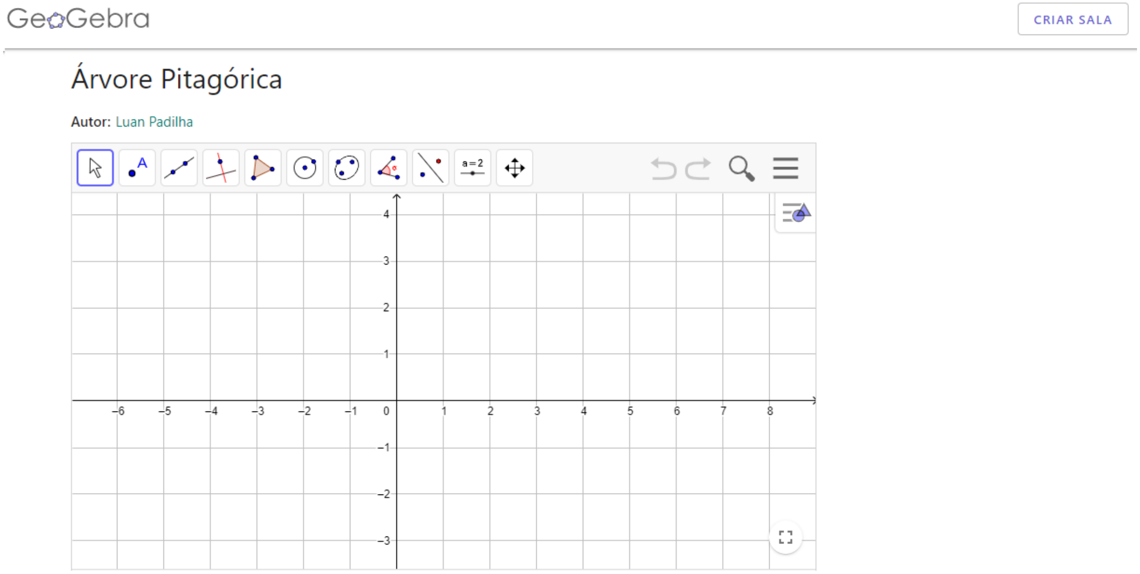
Figura 20 - Criando uma atividade



Fonte: o autor (2022).

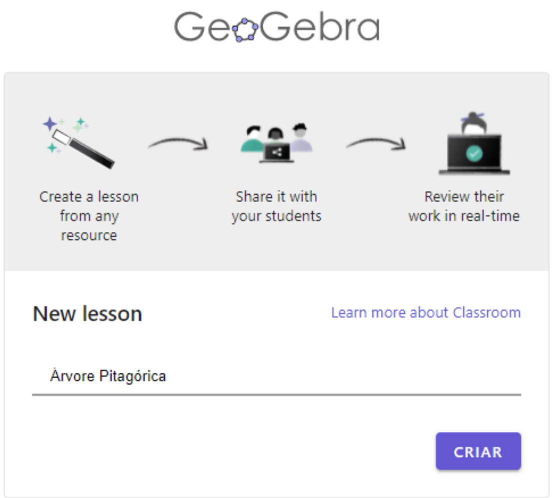
Depois de encontrar a atividade, para criar uma lição a partir dela, é necessário selecionar o botão *Criar Sala*, no canto superior direito (Figura 21). Em seguida, basta digitar o nome da tarefa e selecionar a opção *Criar* para que a lição seja salva no seu perfil (Figura 22).

Figura 21 - Criando uma lição



Fonte: o autor (2022).

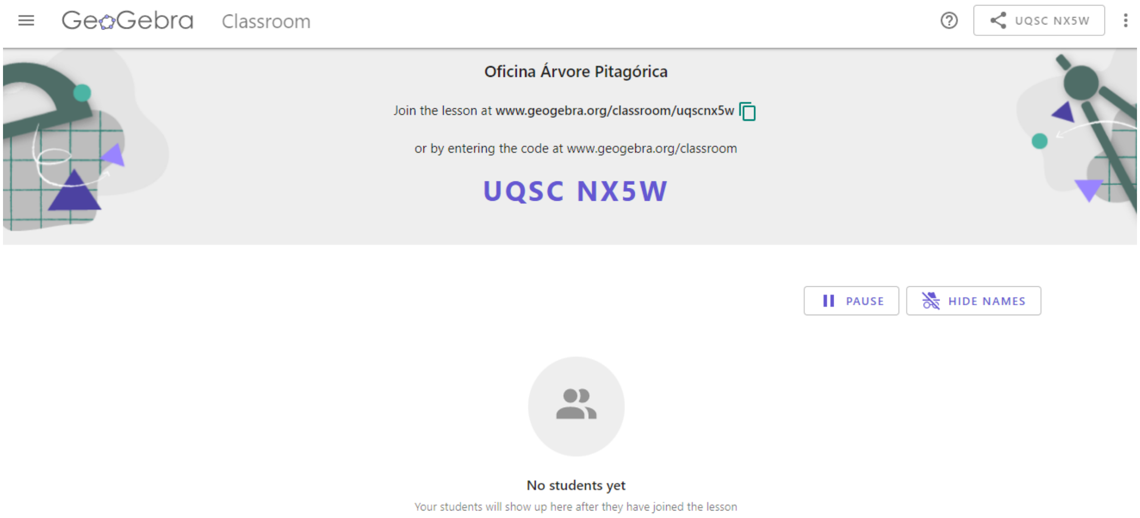
Figura 22 - Criando a sala no GeoGebra Classroom



Fonte: o autor (2022).

Quando o usuário cria uma sala de aula no *GeoGebra Classroom*, um código é gerado aleatoriamente, e ele será necessário para os estudantes acessarem a sala (Figura 23).

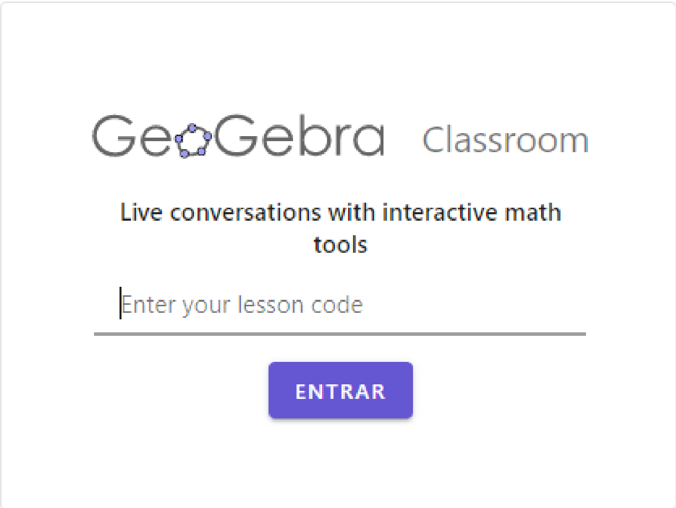
Figura 23 - Sala com código



Fonte: o autor (2022).

Para convidar os estudantes a participarem da lição proposta, o usuário pode enviar o código da lição, e os estudantes podem acessar o endereço do *GeoGebra Classroom* e inserir o código para participar (Figura 24).

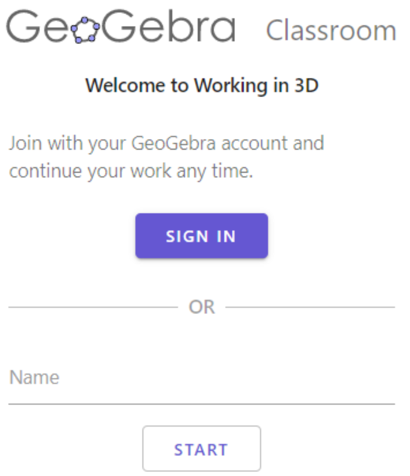
Figura 24 - Código da lição



Fonte: o autor (2022).

Outra forma de convidar os participantes para acessar a sala é copiando o link direto para a lição e enviá-lo para seus estudantes. Após os estudantes inserirem o código da lição e ingressarem na sala, ou seguirem o link direto para a sala, eles poderão fazer login com uma conta do GeoGebra ou inserir seu nome (Figura 25). Vale lembrar que os participantes que optarem por fazer login com sua conta do GeoGebra terão os progressos das atividades salvos e poderão acessá-los posteriormente.

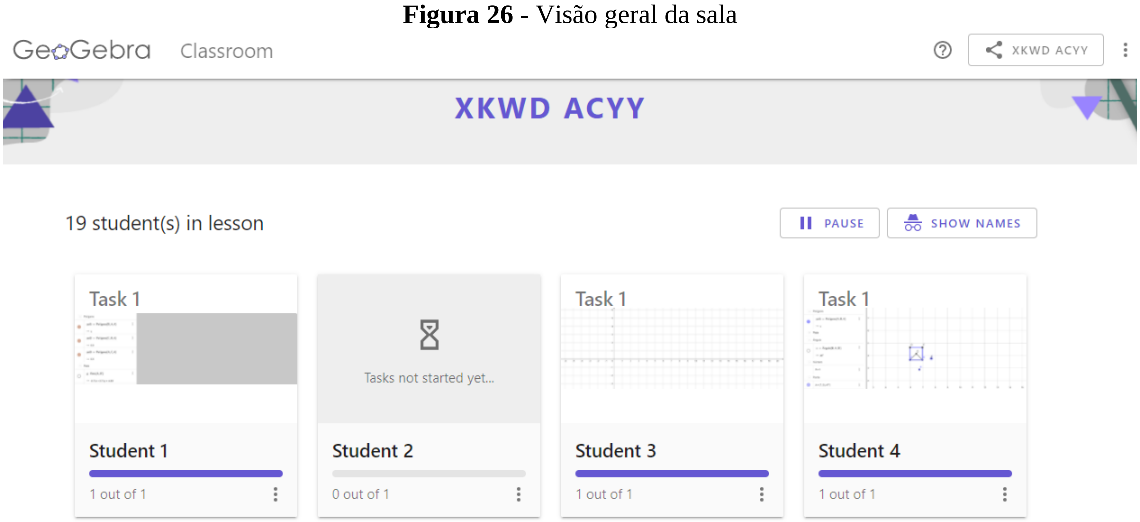
Figura 25 - Login para acessar a sala



Fonte: o autor (2022).

Feito isso, os alunos já poderão iniciar as tarefas. O professor terá uma visão geral da sala, e na medida em que os alunos entrarem, seus nomes aparecerão na visão geral da sala. O professor pode monitorar o progresso dos alunos conforme realizam as tarefas (Figura 26).

Figura 26 - Visão geral da sala



Fonte: o autor (2022).

Vale lembrar que o professor pode escolher a tarefa de um aluno para acessar, e caso queira compartilhar a tela com os demais, ele poderá ocultar os nomes para preservar a identidade dos alunos.

O software traz consigo várias ferramentas que oferecem diversos meios para trabalhar, dependendo do objetivo de cada professor. As possibilidades quanto ao seu uso na matemática podem trazer resultados positivos ao professor e aos alunos. O GeoGebra permite que professores e alunos trabalhem com diversos níveis de ensino, associando diretamente os conceitos geométricos e algébricos.

Para a realização deste trabalho, escolhemos utilizar o GeoGebra como ferramenta educacional por apresentar indícios para uma boa abordagem, por exemplo, do conteúdo de Geometria dos Fractais, uma vez que o software possibilita realizar a construção de ferramentas que auxiliam, dando maior agilidade às suas iterações. Principalmente, quando comparado a uma construção feita à mão utilizando régua e compasso, também porque é possível explorar aspectos geométricos e algébricos ao mesmo tempo, devido às janelas de visualização e de álgebra.

2 PERCURSO METODOLÓGICO E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo, descrevemos o percurso metodológico utilizado no delineamento desta pesquisa: seu desenvolvimento, a descrição do contexto, os sujeitos participantes, os critérios de análise dos dados, os critérios para elaboração da sequência didática, os instrumentos de produção dos dados e a implementação.

2.1 Problema de pesquisa

Por meio da Geometria dos Fractais, é possível abordar diferentes conceitos matemáticos, como progressão geométrica, função logarítmica, equivalência de frações, dentre outros. Dessa forma, despertou-nos uma inquietação em investigar se é possível trabalhar com esses objetos geométricos em sala, de forma a contemplar objetos do conhecimento descritos nas habilidades e competências preconizadas na BNCC para o Ensino Médio.

Para isso, buscamos responder nosso problema de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?*

2.2 Objetivo geral

Com base no problema de pesquisa, definimos o seguinte objetivo: investigar, por meio de praxeologias matemáticas, habilidades e objetos de conhecimentos da área de Matemática e suas Tecnologias que são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra.

2.3 Sobre a Engenharia Didática

Para o desenvolvimento deste estudo, utilizamos a metodologia de pesquisa Engenharia Didática - ED. O termo Engenharia Didática remete ao trabalho de pesquisador de um engenheiro que, baseado em conhecimentos científicos de sua área, “[...] aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos da ciência” (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 65).

A ED é uma metodologia de pesquisa em Educação Matemática que iniciou com investigações na década de 1970, na França. Tais investigações analisavam sequências didáticas em sala de aula, mas sem uma metodologia que auxiliasse os pesquisadores a preparar e analisar essas sequências, pois as metodologias originadas da Educação não atendiam às necessidades do conteúdo matemático (BITTAR, 2017).

Diante disso, estudos começaram a ser sistematizados, a partir da década de 1980, por Guy Brousseau, Yves Chevallard e Régine Douady (BITTAR, 2017). De acordo com Bittar (2017, p. 102), as experimentações realizadas em salas de aula seguiam padrões quanto ao seu preparo, à realização com estudantes e à análise dos dados. Essas experimentações "[...] tinham em comum o desejo de levar o aluno a construir seu conhecimento" (BITTAR, 2017, p. 2). Ao final da década de 1980, Michèle Artigue publicou um artigo na *Recherches en Didactique des Mathématiques*, a fim de sistematizar e disseminar a ED como metodologia de pesquisa.

Almouloud e Silva (2012) apresentam a ED como uma metodologia de pesquisa capaz de ressaltar os fenômenos didáticos em condições próximas ao funcionamento de uma sala de aula.

A seguir, apresentamos as quatro fases da ED, conforme esclarecem Almouloud e Silva (2012) e Bittar (2017).

Análise preliminar: essa fase consiste em um estudo epistemológico do objeto matemático que será foco da sequência didática, e fornecerá subsídios ao pesquisador para a elaboração da sequência didática. Nessa fase, é necessário realizar um estudo do ponto de vista do ensino habitual, que pode ser feito por meio de análise de livros didáticos, orientações curriculares e outros. Além disso, é importante buscar pesquisas a respeito do objeto de estudo, que abordem as concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos. Nesse primeiro momento, são formuladas hipóteses de pesquisa que fundamentarão a construção da sequência didática.

Concepção e análise *a priori* das situações a serem propostas: essa fase corresponde à discussão e descrição de como o conteúdo, que será foco da sequência didática, é considerado ou modelado dentro da pesquisa didática. Nessa fase, é realizada uma análise de como o aluno pode resolver as atividades; quais conceitos são utilizados nas estratégias de resolução; quais dificuldades os alunos podem ter; o que o aluno precisa saber para resolver a atividade; e que tipo de controle o aluno tem sobre sua ação. Em síntese, o objetivo da análise *a priori* é determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos.

Realização da sequência didática: essa fase é o momento da implementação do processo didático, aplicação da sequência didática, ou de realizar a chamada experimentação. Nesse momento é desenvolvida uma análise *in vivo*, ao se interpretar em tempo real o que está ocorrendo na sala de aula. Ao realizar a sequência didática, o pesquisador irá observar os alunos e refletir sobre questões do tipo: é essa a sessão prevista? Que regras norteiam as interações entre os diferentes atores na turma? É possível identificar as regras estáveis e as regras variáveis?

Análise *a posteriori* e validação: essa quarta fase da ED é organizada em confronto com o previsto na análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados. Essa comparação deve ser realizada como forma de validar ou não as hipóteses formuladas na investigação.

Conforme afirma Bittar (2017), a ED é uma metodologia de pesquisa aberta, ou seja, o pesquisador, durante a realização da sequência didática e ao analisar os resultados obtidos, pode planejar outra situação ou alterar uma situação planejada, com base no confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, e constatar que o estudante, por exemplo, pode estar mobilizando uma falsa concepção.

A ED é uma metodologia de pesquisa cujo objetivo é promover a construção do conhecimento pelo aluno. O professor possui papel importante, pois essa metodologia propõe analisar o que ocorre ao longo do processo de ensino, conforme a situação vai se desenvolvendo em sala de aula. Nesse sentido, o pesquisador pode, com apoio dos estudos realizados na fase das análises preliminares, executar quaisquer mudanças na sequência didática que sejam necessárias para favorecer a aprendizagem do estudante (BITTAR, 2017).

Assim, é primordial que o pesquisador conheça dúvidas e concepções que os alunos normalmente apresentam, relacionados ao conceito que é objeto de estudo. Dessa forma, Bittar (2017) ressalta que, para tudo isso, uma análise criteriosa da sequência didática é fundamental, bem como das atividades propostas e das estratégias possíveis de serem usadas pelos alunos, justificando a importância de uma análise *a priori* bem realizada.

Correções durante o percurso não implicam que sejam feitas mudanças para obrigar o aluno a seguir determinado caminho, de acordo com o previsto na análise *a priori* (BITTAR, 2017). Caso o pesquisador perceba que o aluno está mobilizando uma concepção errônea, o pesquisador deve propor a ele situações que lhe permitam confrontar suas concepções. Bittar (2017) explica que não se deseja cumprir ou aplicar uma sequência didática inteira, tal como foi prevista. Segundo a autora já citada, a análise *a priori* não é uma receita a ser seguida, mas um exercício de reflexão e preparo para a atuação do pesquisador no momento da realização das atividades com os alunos.

No que diz respeito ao uso da ED no contexto desta pesquisa, as ações realizadas em cada uma das fases são descritas nas subseções a seguir, com exceção das análises preliminares, pois foram apresentadas no capítulo 1.

2.4 Contexto da pesquisa

2.4.1 *A pesquisa-piloto*

Com o objetivo de melhorar as tarefas e preparar os integrantes que fizeram parte da equipe para a implementação da sequência didática, realizamos uma *pesquisa-piloto*, também denominada *pré-teste*, conforme apresentam Lakatos e Marconi (1992). Segundo as autoras, "[...] a pesquisa-piloto tem, como uma das principais funções, testar o instrumento de coleta de dados" (LAKATOS; MARCONI, 1992, p. 129). Entendemos que esse processo de teste permite corrigir equívocos presentes nas tarefas, pois "uma vez constatadas as falhas, reformula-se o instrumento, conservando, modificando, ampliando, desdobrando ou alterando itens" (LAKATOS; MARCONI, 1992, p. 129).

Ainda, Lakatos e Marconi (1992) esclarecem que a pesquisa-piloto pode evidenciar três elementos importantes: a) fidedignidade - diz respeito à autenticidade dos resultados, ou seja, se serão obtidos sempre os mesmos resultados, independentemente da pessoa que o aplica; b) validade - refere-se ao que é esperado de dados; isto é, se os dados que foram obtidos serão todos necessários à pesquisa, e se nenhum fato, dado ou fenômeno foi deixado de lado na coleta; e c) operatividade - está relacionada ao vocabulário utilizado, se ele é acessível a todos os entrevistados, e se o significado das questões é claro.

Desse modo, compreendemos que a pesquisa-piloto também pode contribuir com a análise *a priori*, pois permite prever possíveis estratégias de resolução. Lakatos e Marconi (1992, p. 130) ressaltam que "o pré-teste permite também a obtenção de uma estimativa sobre os futuros resultados, podendo, inclusive, alterar hipóteses, modificar variáveis e a relação entre elas. Dessa forma, haverá maior segurança e precisão para a execução da pesquisa".

A pesquisa-piloto foi realizada na forma de curso de extensão da construção do fractal Árvore Pitagórica, utilizando o *GeoGebra Classroom*. Tal oficina foi realizada em 01 de dezembro de 2021 com 8 alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória. A experiência ocorreu de forma remota, em virtude da suspensão das atividades presenciais das universidades estaduais do Estado do

Paraná, em razão da pandemia da Covid-19. Foram utilizadas as plataformas *GeoGebra Classroom*, *Google Forms* e *Google Meet*, e o curso teve duração de 3 horas-aulas.

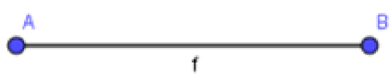
Para a preparação e realização da oficina, o autor deste trabalho formou uma equipe composta por quatro professoras e três alunas da graduação. Os integrantes da equipe do curso de extensão tiveram a função de realizar intervenções com o intuito de auxiliar os cursistas que apresentassem dificuldades quanto à utilização do *GeoGebra Classroom* e à resolução das tarefas matemáticas.

Para a inscrição no curso de extensão, foi disponibilizado um formulário do *Google Forms* aos alunos da graduação. Os inscritos receberam por e-mail links de acesso à sala de aula do *GeoGebra Classroom* e à reunião no *Google Meet*. No início da oficina, uma das professoras realizou uma breve apresentação em slides sobre aspectos básicos da Geometria dos Fractais. Em seguida, enviamos por e-mail um tutorial da construção, considerando que os alunos poderiam consultar o material quando precisassem.

Após a apresentação, iniciou-se a construção do fractal Árvore Pitagórica no *GeoGebra Classroom*. O *applet* utilizado no curso de extensão foi o *GeoGebra Calculadora Gráfica*, pois possibilita aos usuários o acesso a diversas categorias de ferramentas, e acompanhamento dos elementos na janela de álgebra durante a criação de novos objetos na janela gráfica.

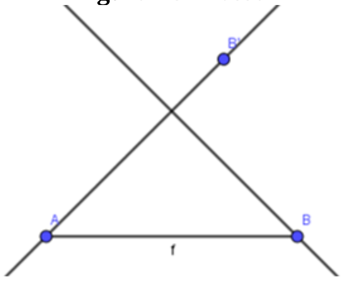
A construção do fractal Árvore Pitagórica aconteceu em etapas, e ao final de cada uma, os participantes responderam a tarefa correspondente àquela etapa. Podemos tomar como exemplo a construção até a *Etapa 0*, conforme mostram as figuras a seguir.

Figura 27 - Passo 1



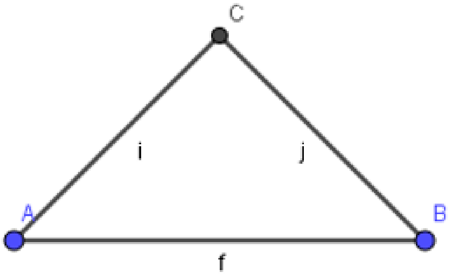
Fonte: o autor (2022).

Figura 28 - Passo 2



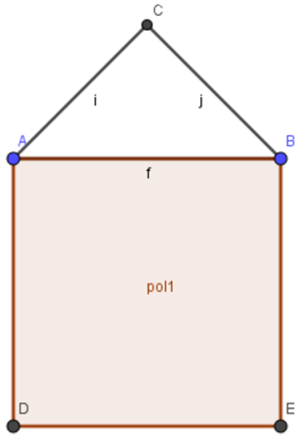
Fonte: o autor (2022).

Figura 29 - Passo 3



Fonte: o autor (2022).

Figura 30 - Passo 4



Fonte: o autor (2022).

Os cursistas construíram o triângulo retângulo inicial e o tronco da Árvore Pitagórica; em seguida, responderam a questionamentos semelhantes aos apresentados a seguir:

Tarefa 0

1) Qual é a quantidade de quadrados na Etapa 0? Considere l como a medida do lado do quadrado. Essa informação será útil posteriormente para o cálculo do perímetro nas próximas etapas.

2) Qual é a medida do perímetro de cada quadrado na Etapa 0? Considere A_0 *como a medida da área de cada quadrado nessa etapa. Essa informação será útil posteriormente para o cálculo da área nas próximas etapas.*

Os cursistas tiveram de 5 a 10 minutos para enviar as respostas por meio de um formulário do Google. Após o envio das respostas, o formulário foi travado para não aceitar mais envios, e ficou disponível apenas na próxima tarefa.

Ao final de cada etapa e envio das repostas, foi realizada uma discussão das respostas da respectiva tarefa. Para isso, duas professoras da equipe revezaram a apresentação e explicação de cada resolução. No momento da discussão, os alunos foram questionados sobre as respostas apresentadas e incentivados a explicar o raciocínio utilizado. Os alunos apresentaram um comportamento tímido durante todo o desenvolvimento do curso de extensão, e três deles ligaram o microfone para falar a respeito das soluções obtidas; os demais utilizaram o chat para interagir.

Durante o desenvolvimento da oficina foi possível observar, por intermédio do recurso de visão geral da sala do *GeoGebra Classroom*, as tentativas de construção da Árvore Pitagórica pelos cursistas, quando eles apagavam os objetos construídos e refaziam as etapas.

Após a conclusão da oficina, os participantes responderam um formulário com questionamentos relacionados à utilização do GeoGebra, manuseio do software, conhecimentos a respeito da Geometria dos Fractais, pontos positivos e negativos do curso de extensão, e possíveis aprendizados. Esse formulário teve como finalidade evidenciar elementos que poderiam contribuir com a análise e aperfeiçoamento da sequência didática.

Em relação às respostas dos cursistas, o curso evidenciou que nem todos os participantes conheciam o GeoGebra. No que se refere aos alunos que conheceram o GeoGebra apenas na oficina, eles informaram que ficaram surpresos com a quantidade de ferramentas disponíveis para a realização de cálculos e construções.

Em vista disso, cabe destacar que todos os participantes mencionaram que o curso de extensão proporcionou aprendizado acerca do GeoGebra, bem como de novas alternativas e perspectivas de utilização do software. Evidenciamos, ainda, que seis aprendizes tiveram dificuldade em compreender a interface do GeoGebra. Entretanto, consideram sua habilidade no manuseio do software como regular.

Sobre conhecer a Geometria dos Fractais, quatro participantes afirmaram nunca ter ouvido falar do assunto, e os outros quatro informaram conhecer o tema de forma superficial. Quando questionados sobre como conheceram a Geometria dos Fractais, os estudantes relataram que foi mediante: conversas com amigos e professores; disciplinas de Instrumentalização (Triângulo de Sierpinski) e Ensino de Matemática (Hexágono de Dürer); curiosidade; e Educação Básica.

Ademais, dentre várias noções novas que não conheciam de Geometria dos Fractais, um participante salientou que as breves explicações da professora sobre o assunto o deixaram curioso para buscar mais sobre o assunto. Em suas palavras, entendeu questões que envolvem a Árvore Pitagórica e cálculos possíveis de desenvolver em uma análise de fractal.

Outros pontos do curso de extensão destacados pelos participantes foram a abordagem dinâmica, clara e objetiva para socialização e compartilhamento de ideias e métodos durante o desenvolvimento da oficina, e a possibilidade de o estudante conhecer assuntos que não são apresentados em sala de aula.

A respeito de aspectos negativos, os estudantes consideraram curto o tempo disponibilizado para responder os formulários, bem como insuficiente o período de 3 horas de curso para explorar elementos do GeoGebra, sugerindo a realização em dois momentos, além de relatarem que a realização do curso de forma remota tornou a implementação difícil.

Dessa forma, com base no desenvolvimento do minicurso e nos apontamentos apresentados pelos participantes, identificamos a necessidade de realizar a implementação da sequência didática em um período maior que as 3 horas disponibilizadas no curso de extensão. Além disso, a realização da experimentação foi organizada para ocorrer de forma presencial.

Consideramos, com base no desenvolvimento do minicurso, que os enunciados das tarefas e o passo a passo da construção estavam bem esclarecidos, e assim não foi necessário fazer alterações. Ademais, não mudamos a ordem da introdução do assunto, realização das tarefas e formalização.

2.4.2 *Caracterização do colégio e participantes da pesquisa*

Antes da realização dos encontros para a implementação da sequência didática, o pesquisador realizou um período exploratório com duração de 8 horas-aulas, cujo objetivo foi proporcionar uma imersão no contexto geral do colégio.

Para isso, o pesquisador acompanhou as aulas de Matemática da professora regente, observando aspectos relacionados ao desenvolvimento do estudo. Esse período exploratório permitiu que o pesquisador definisse procedimentos adequados à investigação.

O colégio do campo de pesquisa localiza-se na cidade de União da Vitória – PR e oferta as modalidades de Ensino Fundamental – Anos Finais, Ensino Médio, Formação de Docentes da Educação Infantil, e os cursos de Técnico em Enfermagem e Técnico em Segurança do Trabalho. Além disso, o colégio comporta 32 turmas e atende 785 alunos.

Dentre os aspectos observados, destacamos que o colégio possui apenas um laboratório de informática para todas as turmas. Isso fez com que o pesquisador e a professora regente precisassem reservar o laboratório de informática para utilização, sempre em consenso com os outros professores do colégio para não ocorrer conflitos de horários e prejudicar o desenvolvimento da investigação.

Uma das possibilidades de construção do fractal Árvore Pitagórica é com a utilização do *GeoGebra Classroom*. Contudo, em um dos dias que o pesquisador acompanhou as aulas da professora regente, o colégio ficou sem energia elétrica, e em outro dia, a rede de internet do colégio apresentou instabilidade. Por esses motivos, o pesquisador e a professora regente optaram por instalar o software *GeoGebra* nos computadores do laboratório de informática, para o caso de o colégio ficar sem acesso à internet, prejudicando a utilização do *GeoGebra Classroom*.

Outro aspecto observado foi que os estudantes da turma da professora regente já haviam trabalhado com o software GeoGebra em sala de aula. Isso colaborou com o desenvolvimento da sequência didática.

A implementação foi realizada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio e contava com 34 estudantes. Todos desenvolveram as tarefas propostas, mas apenas 17 estudantes devolveram os Termos de Assentimento Livre e Esclarecido - TALE e Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE assinados. Por esse motivo, as análises realizadas são com base nas tarefas desses 17 estudantes.

A equipe que aplicou a sequência didática foi composta pelo pesquisador, pela professora regente da turma e por duas professoras colaboradoras que auxiliaram no decorrer do desenvolvimento das tarefas.

2.4.3 *Implementação e produção dos dados*

A implementação ocorreu nos dias 12 e 26 de abril e 03 de maio de 2022, com duração de 8 horas-aulas, dividida em 3 horas-aulas para os dois primeiros encontros e 2 horas-aulas para o último.

As tarefas que compõem a sequência didática foram divididas em cinco etapas (Etapa 0, Etapa 1, Etapa 2, Etapa 3 e Etapa *N*), perpassando as etapas da construção do fractal Árvore Pitagórica.

A seguir, elencamos os objetivos dos itens das tarefas:

- Encontrar a quantidade de quadrados construídos na etapa;
- Encontrar a quantidade total de quadrados na etapa;
- Encontrar a medida do lado do quadrado construído na etapa;
- Encontrar a medida do perímetro dos quadrados construídos na etapa;
- Encontrar a medida da área dos quadrados construídos na etapa; e
- Encontrar a medida da área total da figura na etapa.

Cabe observar que, na Etapa *N*, os itens tinham por objetivo construir uma generalização (fórmula).

No primeiro encontro da implementação, o pesquisador apresentou uma introdução teórica a respeito da Geometria dos Fractais, em especial do fractal Árvore Pitagórica. Dentre as noções apresentadas, podemos citar o aspecto histórico do estudo dos fractais e as principais propriedades: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionária.

Após a introdução feita pelo pesquisador, os estudantes formaram duplas para a realização das tarefas. A construção do fractal foi conduzida por uma das professoras colaboradoras. A aula teve o seguinte desenvolvimento:

- ➢ Construção da etapa do fractal;
- ➢ Resolução da tarefa, pelo estudante, correspondente àquela etapa;
- ➢ Discussão da resolução da tarefa;

- Fechamento da tarefa correspondente à etapa; e
- Construção da próxima etapa.

Assim, sucessivamente, as atividades ocorreram até chegar à tarefa correspondente à Etapa *N*, que não necessita do software para a construção, uma vez que indica o fractal em sua *n*-ésima etapa.

Assim, durante o desenvolvimento das tarefas, a equipe que aplicou sequência didática realizou observações no diário de campo acerca das estratégias e dificuldades apresentadas pelos estudantes. Além disso, a equipe também auxiliou os estudantes que apresentaram dificuldades, tanto na utilização do GeoGebra, por exemplo, na manipulação dos recursos do software durante a parte de criação dos polígonos e da ferramenta que agiliza a construção do fractal; quanto na resolução das tarefas matemáticas, por exemplo, ao demonstrarem dúvidas referentes ao procedimento de generalização.

No primeiro dia de implementação, foi possível realizar a construção da Etapa 0[1], sua resolução e discussão, e a Etapa 1 e sua resolução. No segundo encontro da implementação ocorreu o prosseguimento ao planejamento da investigação, e realizou-se a discussão da Etapa 1, construção da Etapa 2, sua resolução e discussão, construção da Etapa 3, sua resolução e discussão, e resolução da tarefa correspondente à Etapa *N*. No último encontro realizou-se a discussão e formalização da tarefa correspondente à Etapa *N*.

Na subseção seguinte, apresentamos os critérios adotados para a análise dos dados coletados, considerando o aporte teórico-metodológico escolhido para o desenvolvimento desta pesquisa.

2.5 Critérios de análise

Com base na TAD, analisamos os dados produzidos na implementação da sequência didática. Nesse sentido, conforme Chevallard (1998) observa, a TAD possibilita analisar qualquer atividade humana por meio de uma organização praxeológica.

Assim, a análise *a priori* neste estudo modela, em termos de praxeologia, o conteúdo matemático que é foco da sequência didática, ou seja, assuntos possíveis de serem abordados a partir da Geometria dos Fractais, mais especificamente da Árvore Pitagórica.

---

[1] Nos apêndices deste trabalho apresentamos o tutorial que foi utilizado para a construção da Árvore Pitagórica no software GeoGebra e as tarefas que compõem a sequência didática. No tutorial estão descritos o passo a passo da construção e o momento previsto para a realização das tarefas. Por esse motivo, aqui não descrevemos no que consiste cada uma das etapas. Sugerimos a leitura desses materiais contidos nos apêndices.

No que diz respeito à análise *a posteriori*, que consiste na análise dos dados produzidos, ela é realizada em termos de contraste, validação e comparação com as hipóteses de investigação das etapas anteriores.

Embora sejam apresentados os momentos didáticos que fazem parte da OD, neste trabalho, o nosso foco é a análise da OM. Para tanto, realizamos a análise da OM, apresentamos os quartetos praxeológicos mobilizados pelos estudantes durante a resolução das tarefas, e confrontamos com os quartetos praxeológicos modelados em nossa análise *a priori*.

Em seguida, de posse do quarteto praxeológico que pode ser identificado na OM elaborada no contexto da sequência didática implementada, estabelecemos uma relação com a BNCC, com o propósito de responder ao problema de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?*

Na subseção seguinte, apresentamos a análise *a priori* da Organização Praxeológica.

2.6 Análise *a priori*

Nesta subseção, realizamos a análise *a priori,* caracterizando o conteúdo matemático dentro da sequência didática, no caso deste trabalho, a OM para o cálculo da medida do perímetro e da área do fractal Árvore Pitagórica. Com o objetivo de sistematizar as análises que modelam praxeologias mobilizadas pelos estudantes do EM, elaboramos quadros relacionando os quartetos praxeológicos.

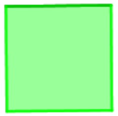
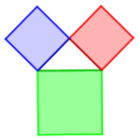
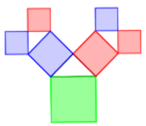
Para a organização da análise *a priori*, identificamos as tarefas e as enumeramos como t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, e t_6, pois elaboramos seis tarefas que nos permitiram alcançar o objetivo de calcular as medidas do perímetro e da área do fractal Árvore Pitagórica. Além disso, elaboramos cinco subtarefas[1] para cada tarefa; e depois, indicamos a técnica, tecnologia e teoria correspondente a cada subtarefa.

A seguir, apresentamos o Quadro 6 com o tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria previstas para os estudantes durante o desenvolvimento da sequência didática, de modo a explorar a generalização para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

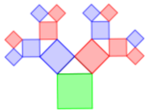
[1] Utilizamos o termo *subtarefa* para nos referirmos a tarefas menores, necessárias para resolver uma tarefa maior.

Quadro 6 - Análise *a priori* do Tipo de Tarefa T_1

(Continua)

Tipo de Tarefa T_1	Generalizar o cálculo da quantidade de quadrados construídos em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_1	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{1.1}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{1.1.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{1.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{1.1.1}$: Aritmética e Geometria.
 **1**	$t_{1.2}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{1.2.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{1.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{1.2.1}$: Aritmética e Geometria.
 **2**	$t_{1.3}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{1.3.1}$: Contar os quadrados um a um. $\tau_{1.3.2}$: Multiplicar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1 por 2.	$\theta_{1.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem. $\theta_{1.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de proporção e multiplicação aritmética.	$\Theta_{1.3.1}$: Aritmética e Geometria. $\Theta_{1.3.2}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.

(Conclusão)

 **3**	$t_{1.4}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{1.4.1}$: Contar os quadrados um a um. $\tau_{1.4.2}$: Multiplicar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2 por 2.	$\theta_{1.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem. $\theta_{1.4.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de proporção e multiplicação aritmética.	$\Theta_{1.4.1}$: Aritmética e Geometria. $\Theta_{1.4.2}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.
N	$t_{1.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de quadrados construídos na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{1.5.1}$: Identificar o padrão figural do fractal, identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados construídos e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em uma etapa qualquer.	$\theta_{1.5.1}$: Identificação da complexidade infinita do fractal, noção de relação de recorrência e potenciação.	$\Theta_{1.5.1}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.

Fonte: o autor (2022).

Em vista do que foi apresentado no Quadro 6, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação às subtarefas $t_{1.1}$ e $t_{1,2}$, escolhemos a contagem um a um dos quadrados construídos como estratégia de resolução. Para a subtarefa $t_{1.1}$, o total de quadrados construídos é igual a um; e para a subtarefa $t_{1.2}$, o total de quadrados construídos é igual a dois.

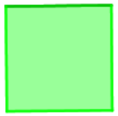
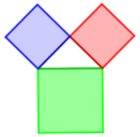
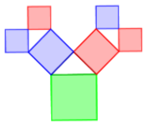
No que diz respeito às subtarefas $t_{1.3}$ e $t_{1.4}$, escolhemos duas estratégias de resolução: a contagem um a um dos quadrados construídos, e multiplicar a quantidade de quadrados construídos na etapa anterior por dois. A razão para essa escolha é que em cada iteração são construídos dois novos quadrados em cada quadrado da etapa anterior. Para a subtarefa $t_{1.3}$, o total de quadrados construídos é igual a quatro; e para a subtarefa $t_{1.4}$, o total de quadrados construídos é igual a oito.

Para a subtarefa $t_{1.5}$, a estratégia de resolução foi identificar o padrão figural do fractal; em seguida, identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados construídos e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em uma etapa qualquer. O padrão figural do fractal e a relação numérica entre a quantidade de quadrados construídos e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a quantidade de quadrados construídos passa de um para dois; da Etapa 1 para a Etapa 2, a quantidade de quadrados construídos passa de dois para quatro; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a quantidade de quadrados construídos passa de quatro para oito. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em uma etapa qualquer na forma 2^n, em que n corresponde ao nível do fractal.

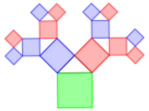
A seguir, apresentamos o Quadro 7, com a análise praxeológica do tipo de tarefa T_2, referente à tarefa t_2, de modo a explorar a generalização para o cálculo da quantidade total de quadrados em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 7 - Análise *a priori* do Tipo de Tarefa T_2

(Continua)

Tipo de Tarefa T_2	Generalizar o cálculo da quantidade total de quadrados em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_2	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade total de quadrados em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{2.1}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{2.1.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{2.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{2.1.1}$: Aritmética e Geometria.
 **1**	$t_{2.2}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{2.2.1}$: Contar os quadrados um a um. $\tau_{2.2.2}$: Somar os quadrados construídos nessa etapa com o total de quadrados da Etapa 0.	$\theta_{2.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem. $\theta_{2.2.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de soma aritmética.	$\Theta_{2.2.1}$: Aritmética e Geometria.
 **2**	$t_{2.3}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{2.3.1}$: Contar os quadrados um a um. $\tau_{2.3.2}$: Somar os quadrados construídos nessa etapa com o total de quadrados da Etapa 1.	$\theta_{2.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem. $\theta_{2.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de soma aritmética.	$\Theta_{2.3.1}$: Aritmética e Geometria.

(Conclusão)

 **3**	$t_{2.4}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{2.4.1}$: Contar os quadrados um a um. $\tau_{2.4.2}$: Somar os quadrados construídos nessa etapa com o total de quadrados da Etapa 2.	$\theta_{2.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem. $\theta_{2.4.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de soma aritmética.	$\Theta_{2.4.1}$: Aritmética e Geometria.
N	$t_{2.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade total de quadrados da Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{2.5.1}$: Identificar o padrão figural do fractal, identificar uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer.	$\theta_{2.5.1}$: Identificação da complexidade infinita do fractal, noção de relação de recorrência e potenciação.	$\Theta_{2.5.1}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.

Fonte: o autor (2022).

Diante da descrição realizada no Quadro 7, apresentamos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação à subtarefa $t_{2.1}$, a estratégia de resolução escolhida foi a contagem um a um dos quadrados da Etapa 0, totalizando um quadrado.

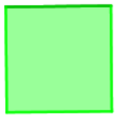
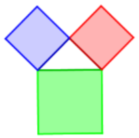
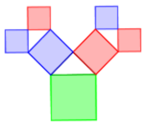
Em relação às subtarefas $t_{2.2}$, $t_{2.3}$ e $t_{2.4}$, optamos por resolvê-las utilizando duas estratégias: a primeira foi a contagem um a um dos quadrados da respectiva etapa; e a segunda foi somar a quantidade de quadrados construídos na respectiva etapa com a quantidade de quadrados da etapa anterior. Para a subtarefa $t_{2.2}$, o total de quadrados é três (2 + 1); para a subtarefa $t_{2.3}$, o total de quadrados é sete (4 + 3); e para a subtarefa $t_{2.4}$, o total de quadrados é quinze (8 + 7).

No que diz respeito à subtarefa $t_{2.5}$, a estratégia de resolução foi identificar o padrão figural do fractal; depois, identificar uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer. Dessa forma, o padrão figural do fractal identificado e a relação numérica entre a quantidade total de quadrados e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a quantidade total de quadrados passa de um para três; da Etapa 1 para a Etapa 2, a quantidade total de quadrados passa de três para sete; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a quantidade total de quadrados passa de sete para quinze. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer na forma $2^{n+1} - 1$, em que *n* corresponde ao nível do fractal.

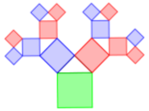
A seguir, apresentamos o Quadro 8, com a análise praxeológica do tipo de tarefa T_3, referente à tarefa t_3, de modo a explorar a generalização para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 8 – Análise *a priori* do Tipo de Tarefa T_3

(Continua)

Tipo de Tarefa T_3	Generalizar o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_3	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica, considerando 1 cm como a medida do lado do quadrado inicial.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{3.1}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{3.1.1}$: Considerar a medida apresentada no enunciado da tarefa.	$\theta_{3.1.1}$: Interpretação do enunciado matemático.	$\Theta_{3.1.1}$: Aritmética.
 **1**	$t_{3.2}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{3.2.1}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado do quadrado da Etapa 0 como a hipotenusa do triângulo formado, aplicar o Teorema de Pitágoras, operar algebricamente e operar números irracionais.	$\theta_{3.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais.	$\Theta_{3.2.1}$: Álgebra, Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
 **2**	$t_{3.3}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{3.3.1}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado dos quadrados construídos na Etapa 1 como a hipotenusa dos triângulos formados, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar algebricamente.	$\theta_{3.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais.	$\Theta_{3.3.1}$: Álgebra, Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

(Conclusão)

 **3**	$t_{3.4}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{3.4.1}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado dos quadrados construídos na Etapa 2 como a hipotenusa dos triângulos formados, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar algebricamente.	$\theta_{3.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais.	$\Theta_{3.4.1}$: Álgebra, Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
N	$t_{3.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{3.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do lado de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{3.5.1}$: Noção de relação de recorrência; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; e de progressão geométrica.	$\Theta_{3.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: o autor (2022).

Em vista do que foi apresentado no Quadro 8, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação à subtarefa $t_{3.1}$, a estratégia de resolução utilizada foi considerar a medida apresentada no enunciado da tarefa; logo, a medida do lado do quadrado é 1 cm.

Para as subtarefas $t_{3.2}$, $t_{3.3}$ e $t_{3.4}$, a estratégia de resolução utilizada foi reconhecer o triângulo retângulo isósceles formado entre os quadrados construídos a partir do modelo gerador, e aplicar o Teorema de Pitágoras. Considerando que a medida do lado do quadrado da Etapa 0 é 1 cm e que um dos lados desse quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo isósceles formado, aplicamos o Teoremas de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde $a = 1$ e sabendo que o triângulo é isósceles, temos que $b = c$, onde b e c são os catetos do triângulo. Temos:

$$1^2 = b^2 + b^2$$

$$1^2 = 2b^2$$

Resolvendo a equação, teremos:

$$1 = \sqrt{2b^2}$$

$$1 = b\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = b$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = b$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = b$$

Logo, a medida do lado do quadrado construído na Etapa 1 é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

Repetimos o mesmo processo para as subtarefas $t_{3.3}$ e $t_{3.4}$. Considerando que a medida do lado do quadrado da Etapa 1 é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm, e que um dos lados desse quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo isósceles formado, aplicamos o Teoremas de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 + b^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2b^2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2b^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = b\,\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = b$$

$$\frac{1}{2} = b$$

Assim, a medida do lado do quadrado construído na Etapa 2 é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

Em relação à subtarefa $t_{3.4}$, considerando que a medida do lado do quadrado da Etapa 2 é $\frac{1}{2}$ cm, e que um dos lados desse quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo isósceles formado, aplicamos o Teoremas de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = b^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2b^2$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2b^2}$$

$$\frac{1}{2} = b\,\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = b$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = b$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = b$$

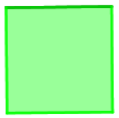
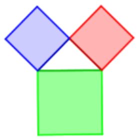
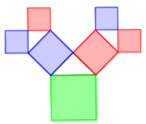
Portanto, a medida do lado do quadrado construído na Etapa 3 é $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

Para a subtarefa $t_{3.5}$, a estratégia de resolução escolhida foi identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do lado de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em uma etapa qualquer. O fator comum entre as subtarefas anteriores e relação numérica entre a quantidade de quadrados construídos e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a medida do lado quadrado construído passa de 1 cm para $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; da Etapa 1 para a Etapa 2, a medida do lado quadrado construído passa de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm para $\frac{1}{2}$ cm; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a medida do lado quadrado construído passa de $\frac{1}{2}$ cm para $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado do quadrado construído em uma etapa qualquer na forma $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, em que n corresponde ao nível do fractal.

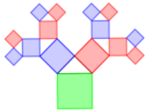
A seguir, apresentamos o Quadro 9, com a análise praxeológica do tipo de tarefa T_4, referente à tarefa t_4, de modo a explorar a generalização para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 9 – Análise *a priori* do Tipo de Tarefa T_4

(Continua)

Tipo de Tarefa T_4	Generalizar o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_4	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{4.1}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{4.1.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{4.1.1}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.1.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
 **1**	$t_{4.2}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{4.2.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{4.2.1}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.2.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
 **2**	$t_{4.3}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{4.3.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{4.3.1}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.3.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.

(Conclusão)

 **3**	$t_{4.4}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{4.4.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{4.4.1}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.4.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
N	$t_{4.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{4.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{4.5.1}$: Noção de relação de recorrência; noção de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; e noção de progressão geométrica.	$\Theta_{4.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: o autor (2022).

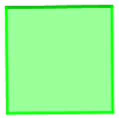
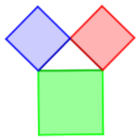
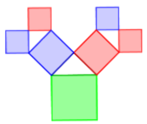
Diante do que foi apresentado no Quadro 9, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação às subtarefas $t_{4.1}$, $t_{4.2}$, $t_{4.3}$ e $t_{4.4}$, optamos por utilizar a mesma estratégia de resolução que corresponde a multiplicar por quatro a medida do lado do quadrado construído. Isso porque foi considerado que a medida do perímetro é dada pela soma da medida de todos os lados, e que o quadrado possui quatro lados. Dessa forma, para a subtarefa $t_{4.1}$, teremos 4×1, resultando em um perímetro de medida 4 cm; para a subtarefa $t_{4.2}$, teremos $4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtendo $2\sqrt{2}$ cm como a medida do perímetro; para a subtarefa $t_{4.3}$, teremos $4 \times \frac{1}{2}$, resultando em um perímetro de medida 2 cm; e para a subtarefa $t_{4.4}$, teremos $4 \times \frac{\sqrt{2}}{4}$, obtendo $\sqrt{2}$ cm como a medida do perímetro.

Para a subtarefa $t_{4.5}$, a estratégia de resolução escolhida foi identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro do quadrado construído em uma etapa qualquer. O fator comum entre as subtarefas anteriores e relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a medida do perímetro quadrado construído passa de 4 cm para $2\sqrt{2}$ cm; da Etapa 1 para a Etapa 2, a medida do perímetro do quadrado construído passa de $2\sqrt{2}$ cm para 2 cm; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a medida do perímetro do quadrado construído passa de 2 cm para $\sqrt{2}$ cm. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro do quadrado construído em uma etapa qualquer na forma $4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, em que n corresponde ao nível do fractal.

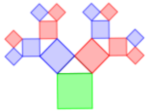
A seguir, apresentamos o Quadro 10, com a análise praxeológica do tipo de tarefa T_5, referente à tarefa t_5, de modo a explorar a generalização para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 10 – Análise *a priori* do Tipo de Tarefa T_5

(Continua)

Tipo de Tarefa T_5	Generalizar o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_5	Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{5.1}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{5.1.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{5.1.1}$: Noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{5.1.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
 **1**	$t_{5.2}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{5.2.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{5.2.1}$: Noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{5.2.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
 **2**	$t_{5.3}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{5.3.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{5.3.1}$: Noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{5.3.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.

(Conclusão)

 **3**	$t_{5.4}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{5.4.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{5.4.1}$: Noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{5.4.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
N	$t_{5.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{5.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida da área de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{5.5.1}$: Noção de relação de recorrência; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; noção de multiplicação e de progressão geométrica.	$\Theta_{5.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: o autor (2022).

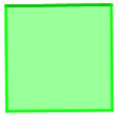
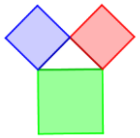
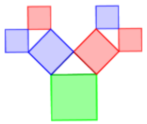
Em vista do que foi apresentado no Quadro 10, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação às subtarefas $t_{5.1}$, $t_{5.2}$, $t_{5.3}$ e $t_{5.4}$, optamos por utilizar a mesma estratégia de resolução que corresponde a multiplicar a medida de um lado do quadrado construído pela medida do outro lado do quadrado, pois a medida da área do quadrado é dada por lado vezes lado. Dessa forma, para a subtarefa $t_{5.1}$, teremos 1×1, resultando em uma área de medida 1 cm^2; para a subtarefa $t_{5.2}$, teremos $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtendo $\frac{1}{2}\, cm^2$ como a medida da área; para a subtarefa $t_{5.3}$, teremos $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, resultando em uma área de medida $\frac{1}{4}\, cm^2$; e para a subtarefa $t_{5.4}$, teremos $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{4}$, obtendo $\frac{1}{8}\, cm^2$ como a medida da área.

Para a subtarefa $t_{5.5}$, a estratégia de resolução escolhida foi identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida da área de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida da área do quadrado construído em uma etapa qualquer. O fator comum entre as subtarefas anteriores e relação numérica entre a medida da área de cada quadrado construído e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a medida da área do quadrado construído passa de 1 cm^2 para $\frac{1}{2}\, cm^2$; da Etapa 1 para a Etapa 2, a medida da área do quadrado construído passa de $\frac{1}{2}\, cm^2$ para $\frac{1}{4}\, cm^2$; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a medida da área do quadrado construído passa de $\frac{1}{4}\, cm^2$ para $\frac{1}{8}\, cm^2$. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida da área do quadrado construído em uma etapa qualquer na forma $\frac{1}{2^n}$, em que *n* corresponde ao nível do fractal.

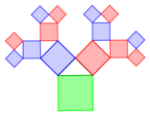
A seguir, apresentamos o Quadro 11, com a análise praxeológica do tipo de tarefa T_6, referente à tarefa t_6, de modo a explorar a generalização para o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 11 – Análise *a priori* do Tipo de Tarefa T_6

(Continua)

Tipo de Tarefa T_6	Generalizar o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_6	Construir uma fórmula para o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{6.1}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{6.1.1}$: Considerar a medida da área do quadrado encontrada no item anterior.	$\theta_{6.1.1}$: Noção geométrica de área.	$\Theta_{6.1.1}$: Grandezas e medidas.
 **1**	$t_{6.2}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{6.2.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0).	$\theta_{6.2.1}$: Noção geométrica de área, de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{6.2.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
 **2**	$t_{6.3}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{6.3.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 4 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 1).	$\theta_{6.3.1}$: Noção geométrica de área, de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{6.3.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.

(Conclusão)

 **3**	$t_{6.4}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{6.4.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 8 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 2).	$\theta_{6.4.1}$: Noção geométrica de área, de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{6.4.1}$: Aritmética e Grandezas e medidas.
N	$t_{6.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida total da área da figura na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{6.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.	$\theta_{6.5.1}$: Noção de relação de recorrência.	$\Theta_{6.5.1}$: Álgebra.

Fonte: o autor (2022).

Diante do que foi apresentado no Quadro 11, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Para a subtarefa $t_{6.1}$, a estratégia de resolução foi considerar a medida da área do quadrado encontrada no item anterior, ou seja, 1 cm^2.

Em relação às subtarefas $t_{6.2}$, $t_{6.3}$ e $t_{6.4}$, optamos por utilizar a mesma estratégia de resolução que corresponde a multiplicar a medida da área do quadrado construído na etapa correspondente pela quantidade de quadrados construídos nessa etapa, e somar com a área obtida na etapa anterior. Assim, para a subtarefa $t_{6.2}$, teremos $\frac{1}{2} \times 2 + 1$, obtendo 2 cm^2 como a medida da área; para a subtarefa $t_{6.3}$, teremos $\frac{1}{4} \times 4 + 2$, resultando em uma área de medida de 3 cm^2; e para a subtarefa $t_{5.4}$, teremos $\frac{1}{8} \times 8 + 3$, obtendo 4 cm^2 como a medida da área.

Para a subtarefa $t_{6.5}$, a estratégia de resolução escolhida foi identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer. O fator comum entre as subtarefas anteriores e relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a medida total da área da figura passa de 1 cm^2 para 2 cm^2; da Etapa 1 para a Etapa 2, a medida total da área da figura passa de 2 cm^2 para 3 cm^2; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a medida total da área da figura passa de 3 cm^2 para 4 cm^2. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer na forma $n + 1$, em que *n* corresponde ao nível do fractal.

Na próxima seção, apresentamos a análise *a posteriori* e validação dos dados produzidos, de modo a realizar uma análise praxeológica das resoluções efetivadas pelos estudantes do Ensino Médio.

3 ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Análise *a posteriori* e validação

Nesta seção, realizamos a análise *a posteriori* e validação das hipóteses de pesquisa. Nesse momento, confrontamos os dados produzidos pelos estudantes do EM com o *design* da tarefa elaborado na análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados.

Com o objetivo de organizar e sistematizar as análises das praxeologias mobilizadas pelos estudantes do EM, elaboramos quadros relacionando os quartetos praxeológicos e os respectivos estudantes que mobilizaram a praxeologia indicada. Igualmente, elaboramos quadros relacionando as praxeologias e as habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas correspondentes. De modo a preservar a identidade dos estudantes, identificamos cada participante com a letra *E*, referindo a *estudante*, seguido de um número subscrito de 1 a 16, da seguinte forma: E_1, E_2, ..., E_{16}.

Os estudantes E_1 e E_8 optaram por realizar as tarefas individualmente, os demais estudantes formaram duplas. A dupla formada pelas estudantes E_{15} e E_{16} não compareceu ao primeiro encontro da implementação, e por esse motivo suas resoluções são a partir da construção da Etapa 2 do fractal.

Iniciamos com a apresentação do Quadro 12, contendo a análise *a posteriori* das praxeologias do tipo de tarefa T_1 referente à tarefa t_1.

Quadro 12 - Análise *a posteriori* do Tipo de Tarefa T_1

(Continua)

Tipo de Tarefa T_1		Generalizar o cálculo da quantidade de quadrados construídos em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.		
Tarefa t_1		Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.		
Estudantes	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$t_{1.1}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{1.1.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{1.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{1.1.1}$: Aritmética e Geometria.
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$t_{1.2}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{1.2.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{1.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{1.2.1}$: Aritmética e Geometria.
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (16 participantes)	$t_{1.3}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{1.3.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{1.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{1.3.1}$:Aritmética e Geometria.

(Conclusão)

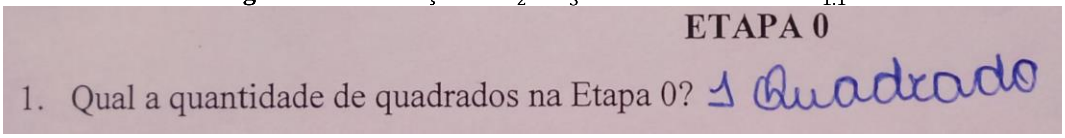
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (16 participantes)	$t_{1.4}$: Encontrar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{1.4.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{1.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{1.4.1}$: Aritmética e Geometria.
Nenhum participante.	$t_{1.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de quadrados construídos na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{1.5.1}$: Identificar o padrão figural do fractal, uma relação numérica entre a quantidade de quadrados construídos e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade de quadrados construídos em uma etapa qualquer.	$\theta_{1.5.1}$: Identificação da complexidade infinita do fractal, noção de recorrência e potenciação.	$\Theta_{1.5.1}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.

Fonte: o autor (2022).

Em vista do que foi apresentado no Quadro 12, é possível observar que os estudantes conseguiram responder às questões referentes às subtarefas $t_{1.1}$, $t_{1.2}$, $t_{1.3}$ e $t_{1.4}$, conforme previsto na análise *a priori*.

Para a resolução da subtarefa $t_{1.1}$, todos os estudantes apresentaram uma solução que se assemelha à resposta de E_2 e E_3:

Figura 31 - Resolução de E_2 e E_3 referente à subtarefa $t_{1.1}$



Fonte: acervo do autor (2022).

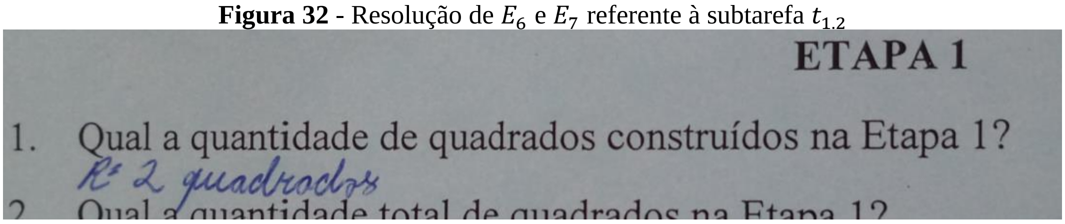
Podemos observar que os estudantes responderam à questão com a quantidade de quadrados correta. Por esse motivo, entendemos que possivelmente realizaram uma contagem dos quadrados construídos na Etapa 0, enquadrando-se na técnica $\tau_{1.1.1}$, uma vez que, para esta subtarefa, não há outra possibilidade.

Logo, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{1.1.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{1.1.1}, \Theta_{1.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{1.1.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. Em relação à teoria $\Theta_{1.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade deles. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.1.1}, \theta_{1.1.1}, \Theta_{1.1.1}]$.

Com relação à resolução da subtarefa $t_{1.2}$, os estudantes E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; e E_{11} e E_{12} apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar a forma de resolver (

Figura **32**).

Figura 32 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{1.2}$

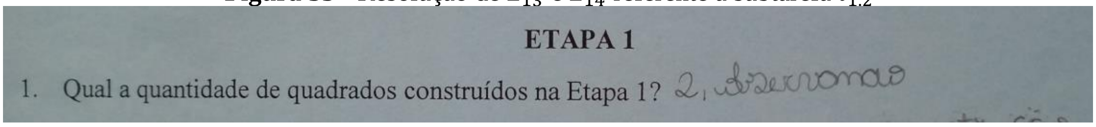


Fonte: acervo do autor (2022).

Com base na resposta dos estudantes, entendemos que possivelmente realizaram uma contagem dos quadrados construídos, enquadrando-se na técnica $\tau_{1.2.1}$, uma vez que, para esta subtarefa, não há outra possibilidade. Os estudantes E_8; e E_9 e E_{10} apresentaram descrições semelhantes às das estudantes E_{13} e E_{14} (

Figura **33**).

Figura 33 - Resolução de E_{13} e E_{14} referente à subtarefa $t_{1.2}$


ETAPA 1

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1? 2, observando

Fonte: acervo do autor (2022).

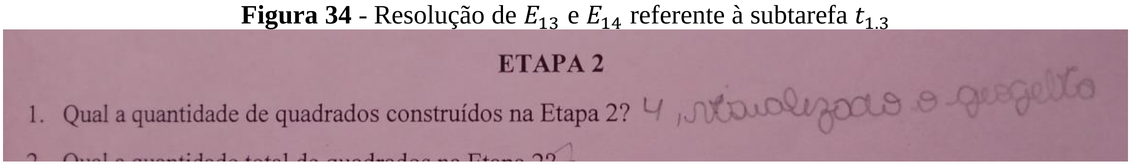
A técnica utilizada pelos estudantes para determinar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1 foi a contagem dos quadrados um a um, a partir da observação ou visualização do elemento figural quadrado na *Janela de Visualização* do GeoGebra.

Portanto, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{1.2.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{1.2.1}, \Theta_{1.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{1.2.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. No que diz respeito à teoria $\Theta_{1.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade deles. Desse modo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.2.1}, \theta_{1.2.1}, \Theta_{1.2.1}]$.

Cabe destacar que os estudantes foram orientados a explicitar as estratégias utilizadas nas resoluções das tarefas, mas apresentaram dificuldades em expor sua forma de pensar. A professora regente salientou que, em suas atividades com a turma, sempre exige que os estudantes tentem detalhar ao máximo suas respostas.

A respeito da resolução referente à subtarefa $t_{1.3}$, os estudantes E_{13} e E_{14} apresentaram a seguinte resolução:

Figura 34 - Resolução de E_{13} e E_{14} referente à subtarefa $t_{1.3}$


ETAPA 2

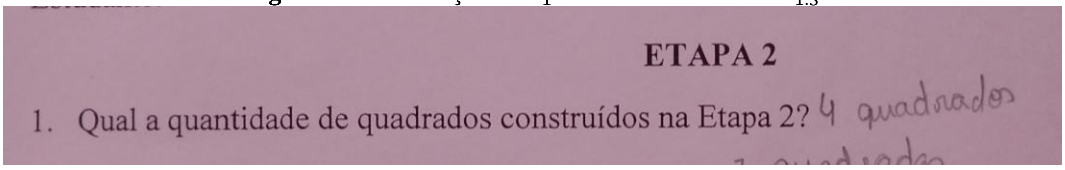
1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2? 4, visualizando o geogebra

Fonte: acervo do autor (2022).

A técnica utilizada pelas estudantes para determinar a quantidade de quadrados construídos na etapa correspondente foi a contagem dos quadrados um a um, a partir da observação ou visualização do elemento figural quadrado na *Janela de Visualização* do GeoGebra.

Os estudantes E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; e E_{15} e E_{16} apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar a forma de resolver (Figura 35).

Figura 35 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{1.3}$


ETAPA 2

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2? 4 quadrados

Fonte: acervo do autor (2022).

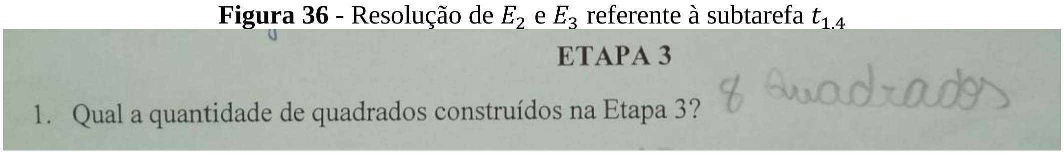
No que se refere ao cálculo da quantidade de quadrados construídos na Etapa 2, na análise *a priori*, previmos duas técnicas que podem resolver essa subtarefa: a técnica $\tau_{1.3.1}$, que consiste em *contar os quadrados um a um*; e a técnica $\tau_{1.3.2}$, que equivale a *multiplicar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1 por 2*.

Valendo-nos das soluções apresentadas, entendemos que possivelmente os estudantes realizaram a contagem dos quadrados construídos, podendo se enquadrar na técnica $\tau_{1.3.1}$, pois segue uma linha de raciocínio idêntica àquela utilizada para a resolução do mesmo item nas etapas anteriores. Logo, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{1.3.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{1.3.1}, \Theta_{1.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{1.3.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. Em relação à teoria $\Theta_{1.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade deles. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.3.1}, \theta_{1.3.1}, \Theta_{1.3.1}]$.

A respeito da resolução referente à subtarefa $t_{1.4}$, todos os estudantes apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar a estratégia de resolução. Esse tipo de situação, em que os estudantes não explicitaram a técnica empregada, também é possível observar na pesquisa desenvolvida por Fratucci (2022). As resoluções apresentadas pelos estudantes assemelham-se à solução de E_2 e E_3 conforme ilustra a

Figura **36**.

Figura 36 - Resolução de E_2 e E_3 referente à subtarefa $t_{1.4}$


ETAPA 3

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 3? 8 Quadrados

Fonte: acervo do autor (2022).

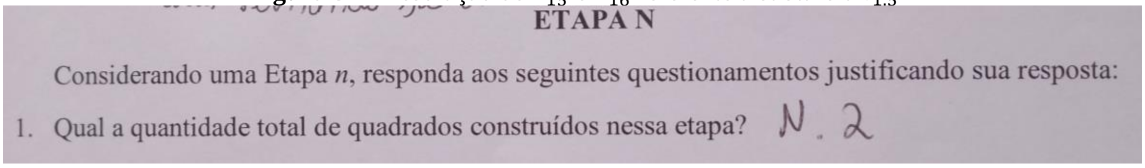
Em relação ao cálculo da quantidade de quadrados construídos na Etapa 3, previmos, na análise *a priori*, duas técnicas que podem resolver essa subtarefa. A técnica $\tau_{1.4.1}$, que consiste em *contar os quadrados um a um*; e a técnica $\tau_{1.4.2}$, que equivale a *multiplicar a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2 por 2*.

Com base nas respostas dos estudantes, entendemos que eles possivelmente realizaram a contagem dos quadrados construídos, podendo se enquadrar na técnica $\tau_{1.4.1}$, pois segue uma linha de raciocínio idêntica àquela utilizada para a resolução do mesmo item nas etapas anteriores. Portanto, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{1.4.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{1.4.1}, \Theta_{1.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{1.4.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. Com relação à teoria $\Theta_{1.4.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade de objetos. Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.4.1}, \theta_{1.4.1}, \Theta_{1.4.1}]$.

Para a resolução da subtarefa $t_{1.5}$, nenhum estudante conseguiu construir uma fórmula para expressar o cálculo da quantidade de quadrados construídos em uma etapa qualquer. Para esse item, apenas a dupla E_{15} e E_{16} apresentou uma resolução, conforme mostra a

Figura **37**.

Figura 37 - Resolução de E_{15} e E_{16} referente à subtarefa $t_{1.5}$


ETAPA N

Considerando uma Etapa *n*, responda aos seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual a quantidade total de quadrados construídos nessa etapa? N . 2

Fonte: acervo do autor (2022).

Podemos observar que a resolução apresentada pelas estudantes é equivocada, uma vez que a expressão $n.2$ não permite calcular a quantidade total de quadrados construídos em uma etapa qualquer, pois se *n* corresponde à *n-ésima* etapa do fractal, e quando tivermos *n* = 0, por exemplo, não obteremos 1, que corresponde à quantidade de quadrados construídos na Etapa 0.

Elaboramos o Quadro 13 com base no quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes nas resoluções da tarefa t_1, no qual buscamos relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Quadro 13 - Elementos da BNCC relacionados à tarefa t_1

(Continua)

Estudantes	Técnica τ	Habilidades relacionadas	Tecnologia θ	Objetos de conhecimento relacionados	Teoria Θ	Unidades temáticas relacionadas
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$\tau_{1.1.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{1.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{1.1.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$\tau_{1.2.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{1.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{1.2.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.

(Conclusão)

E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (16 participantes)	$\tau_{1.3.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{1.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{1.3.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (16 participantes)	$\tau_{1.4.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar, de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{1.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{1.4.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.

Fonte: o autor (2022).

Conforme o Quadro 13, é possível observar, com base nas praxeologias empregadas pelos estudantes para a resolução das subtarefas do Tipo de tarefa T_1, a mobilização de habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Podemos notar, por exemplo, a mobilização das habilidades "(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos" (BRASIL, 2018, p. 279) e "(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos" (BRASIL, 2018, p. 279), que estão associadas com a técnica de contagem um a um dos quadrados.

Para o emprego dessa técnica, o estudante precisa reconhecer o elemento figural quadrado e ter conhecimento da noção de contagem. Dessa forma, entendemos que ocorre a mobilização dos objetos de conhecimento "Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação" (BRASIL, 2018, p. 278) e "Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais" (BRASIL, 2018, p. 278), descritos nas unidades temáticas Números e Geometria, respectivamente.

Em relação à subtarefa $t_{1.5}$, os estudantes não conseguiram empregar uma técnica para resolvê-la. Sendo assim, não foi possível relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas para essa subtarefa.

A seguir, apresentamos o Quadro 14, com a análise *a posteriori* das praxeologias do Tipo de Tarefa T_2, referentes à tarefa t_2.

Quadro 14 - Análise *a posteriori* do Tipo de Tarefa T_2

(Continua)

<table>
<tr><td>Tipo de Tarefa T_2</td><td colspan="4">Generalizar o cálculo da quantidade total de quadrados em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.</td></tr>
<tr><td>Tarefa t_2</td><td colspan="4">Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade total de quadrados em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.</td></tr>
<tr><td>Estudantes</td><td>Subtarefa</td><td>Técnica τ</td><td>Tecnologia θ</td><td>Teoria Θ</td></tr>
<tr><td>E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}.

(14 participantes)</td><td>$t_{2.1}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 0 do fractal.</td><td>$\tau_{2.1.1}$: Contar os quadrados um a um.</td><td>$\theta_{2.1.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado e noção de contagem.</td><td>$\Theta_{2.1.1}$: Aritmética e Geometria.</td></tr>
<tr><td>E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}.

(14 participantes)</td><td>$t_{2.2}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 1 do fractal.</td><td>$\tau_{2.2.1}$: Contar os quadrados um a um.</td><td>$\theta_{2.2.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado e noção de contagem.</td><td>$\Theta_{2.2.1}$: Aritmética e Geometria.</td></tr>
<tr><td>E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}.

(14 participantes)

E_6 e E_7.

(2 participantes)</td><td>$t_{2.3}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 2 do fractal.</td><td>$\tau_{2.3.1}$: Contar os quadrados um a um.

$\tau_{2.3.2}$: Somar os quadrados construídos nessa etapa com o total de quadrados da Etapa 1.</td><td>$\theta_{2.3.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado e noção de contagem.

$\theta_{2.3.2}$: Conhecimento do elemento figural quadrado e noção de soma aritmética.</td><td>$\Theta_{2.3.1}$: Aritmética e Geometria.</td></tr>
</table>

(Conclusão)

E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (16 participantes)	$t_{2.4}$: Encontrar a quantidade total de quadrados na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{2.4.1}$: Contar os quadrados um a um.	$\theta_{2.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	$\Theta_{2.4.1}$: Aritmética e Geometria.
E_6 e E_7. (2 participantes)	$t_{2.5.2}$: Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade total de quadrados da Etapa N do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{2.5.2}$: Identificar o padrão figural do fractal, uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e a quantidade de quadrados construídos na etapa, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer.	$\theta_{2.5.2}$: Identificação da complexidade infinita do fractal e noção de relação de recorrência.	$\Theta_{2.5.2}$: Álgebra e Geometria.

Fonte: o autor (2022).

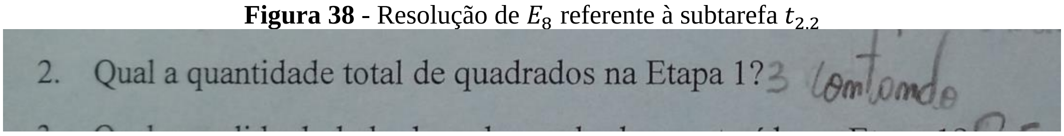
Diante do que é apresentado no Quadro 14, em relação às subtarefas da tarefa t_2, os estudantes apresentaram resoluções conforme previsto na análise *a priori*, com exceção da subtarefa $t_{2.5}$, pois apenas a dupla E_6 e E_7 apresentou uma resolução para a subtarefa, que foi diferente da técnica prevista em nossa análise. Para tal resolução, identificamos o seguinte quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.5.2}, \theta_{2.5.2}, \Theta_{2.5.1}]$.

A respeito da resolução da subtarefa $t_{2.1}$, todos os estudantes apresentaram uma solução da forma *1* ou *1 quadrado*. Desse modo, entendemos que os estudantes realizaram a contagem do total de quadrados da Etapa 0, enquadrando-se na técnica $\tau_{2.1.1}$, uma vez que, para esta subtarefa, não há outra possibilidade.

Assim, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{2.1.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{2.1.1}, \Theta_{2.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{2.1.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. A respeito da teoria $\Theta_{2.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade total de quadrados. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.1.1}, \theta_{2.1.1}, \Theta_{2.1.1}]$.

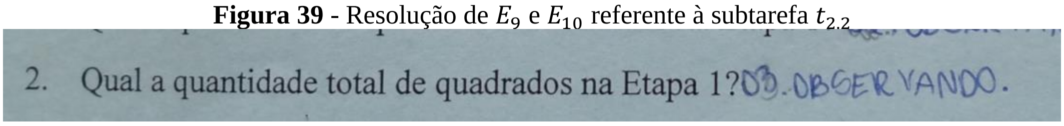
Para a resolução da subtarefa $t_{2.2}$, os estudantes E_8; E_9 e E_{10}; e E_{13} e E_{14} apresentaram resoluções semelhantes (Figuras 38, 39 e 40, respectivamente).

Figura 38 - Resolução de E_8 referente à subtarefa $t_{2.2}$


2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa 1? 3 Contando

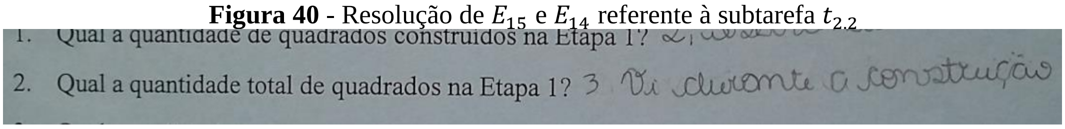
Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 39 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{2.2}$


2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa 1? 03. OBSERVANDO.

Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 40 - Resolução de E_{15} e E_{14} referente à subtarefa $t_{2.2}$

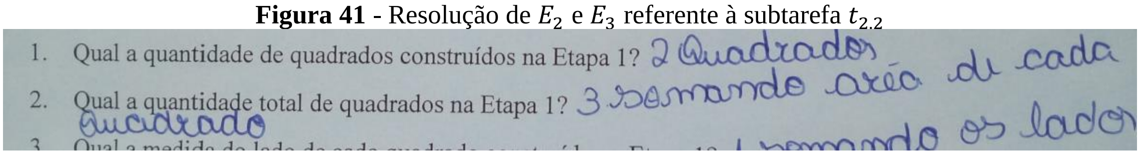

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1?
2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa 1? 3 Vi durante a construção

Fonte: acervo do autor (2022).

Conforme mostram as figuras, E_8 evidenciou que realizou a contagem dos quadrados para responder a essa subtarefa. As estudantes E_9 e E_{10}; e E_{13} e E_{14} também utilizaram a técnica de contagem dos quadrados um a um, a partir da observação ou visualização do elemento figural quadrado na *Janela de Visualização* do GeoGebra.

Já a dupla E_2 e E_3, que também apresentou a resposta correta (3 quadrados), enunciou uma justificativa que consideramos inadequada para resolução dessa subtarefa (Figura 41).

Figura 41 - Resolução de E_2 e E_3 referente à subtarefa $t_{2.2}$



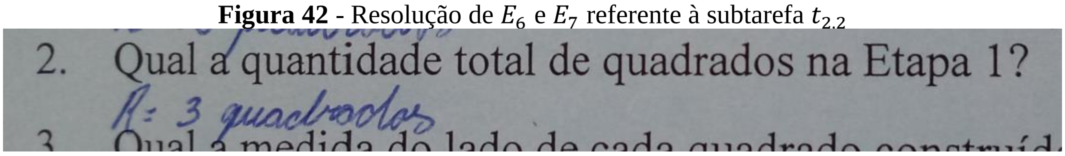
Fonte: acervo do autor (2022).

A soma das áreas dos quadrados da Etapa 2 não é uma justificativa para a quantidade total de quadrados da etapa. Com isso, corroboramos com Dias e Santos Júnior (2018, p. 537) no que se refere à necessidade da explicação da técnica:

> As técnicas além de justificadas, ou seja, quando se mostra que elas permitem realizar o que se pretende, precisam ser explicadas, inteligíveis e esclarecidas, o que corresponde a explicitar, por meio da tecnologia, porque é assim que funciona. Segundo Chevallard, em Matemática, a função de justificativa traz tradicionalmente com ela, pela exigência da demonstração, a função explicativa.

Com relação aos estudantes E_1; E_4 e E_5; E_6 e E_7; e E_{11} e E_{12}, eles responderam à subtarefa $t_{2.2}$ apenas com *3* ou *3 quadrados* (Figura 42).

Figura 42 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.2}$



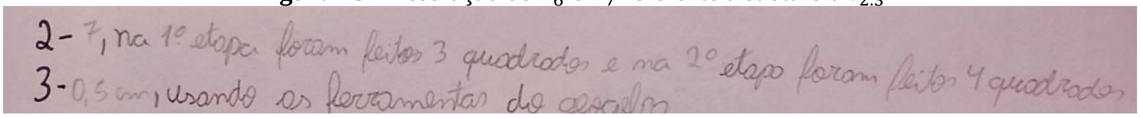
Fonte: acervo do autor (2022).

No que se refere ao cálculo da quantidade total de quadrados construídos na Etapa 1, previmos, na análise *a priori,* duas técnicas que podem resolver essa subtarefa. A técnica $\tau_{2.2.1}$, que consiste em *contar os quadrados um a um*; e a técnica $\tau_{2.2.2}$, que equivale a *somar os quadrados construídos nessa etapa com o total de quadrados da Etapa 0*.

Com base nas soluções apresentadas pelos estudantes, entendemos que eles possivelmente realizaram a contagem total dos quadrados, podendo se enquadrar na técnica $\tau_{2.2.1}$, pois segue uma linha de raciocínio idêntica àquela utilizada para a resolução do mesmo item nas etapas anteriores. Desse modo, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{2.2.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{2.2.1}, \Theta_{2.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{2.2.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. Em relação à teoria $\Theta_{2.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade de objetos. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.2.1}, \theta_{2.2.1}, \Theta_{2.2.1}]$.

Em relação à subtarefa $t_{2.3}$, a dupla E_6 e E_7 descreveu a seguinte resposta:

Figura 43 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.3}$



2- 7, na 1º etapa foram feitos 3 quadrados e na 2º etapa foram feitos 4 quadrados
3- 0,5 cm, usando as ferramentas do [illegible]

Fonte: acervo do autor (2022).

Os estudantes encontraram o total de 7 quadrados: eles empregaram a técnica de somar os 3 quadrados da 1ª etapa com os 4 quadrados construídos ou feitos na 2ª etapa. Podemos enquadrar essa resolução na técnica $\tau_{2.3.2}$, prevista na análise *a priori*. Essa técnica pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{2.3.2}, \Theta_{2.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{2.3.2}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de soma aritmética. Com relação à teoria $\Theta_{2.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e o método de somar para determinar a quantidade de objetos. Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.3.2}, \theta_{2.3.2}, \Theta_{2.3.1}]$.

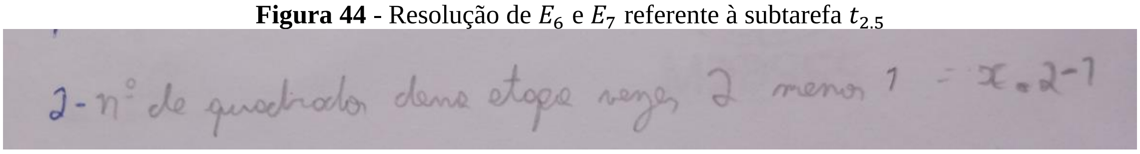
Os demais estudantes responderam apenas *7* ou *7 quadrados*. Assim, entendemos que eles possivelmente realizaram a contagem total dos quadrados, podendo se enquadrar na técnica $\tau_{2.3.1}$, pois segue uma linha de raciocínio idêntica àquela utilizada para a resolução do mesmo item nas etapas anteriores. Logo, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{2.2.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{2.3.1}, \Theta_{2.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{2.3.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. A respeito da teoria $\Theta_{2.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade de objetos. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.3.1}, \theta_{2.3.1}, \Theta_{2.3.1}]$.

Para a resolução da subtarefa $t_{2.4}$, a dupla E_{13} e E_{14} apresentou uma resposta inadequada, 16, como a quantidade total de quadrados na Etapa 3. Não foi possível determinar qual o erro cometido pelos estudantes, uma vez que não explicitaram a estratégia de resolução na folha de registro.

Os demais estudantes apresentaram a resposta correta (15 quadrados), mas sem evidenciar a estratégia utilizada. Diante disso, entendemos que eles possivelmente realizaram a contagem total dos quadrados, podendo se enquadrar na técnica $\tau_{2.4.1}$, pois segue uma linha de raciocínio idêntica àquela utilizada para a resolução do mesmo item nas etapas anteriores. Assim, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{2.4.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{2.4.1}, \Theta_{2.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{2.4.1}$ pautou-se no conhecimento do elemento figural quadrado e na noção de contagem. Com relação à teoria $\Theta_{2.4.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria, pois os estudantes identificaram o objeto geométrico quadrado e utilizaram o método de contar para determinar a quantidade de objetos. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.4.1}, \theta_{2.4.1}, \Theta_{2.4.1}]$.

A respeito da resolução da subtarefa $t_{2.5}$, apenas E_6 e E_7 apresentaram uma resposta. A figura a seguir mostra a estratégia utilizada pelos estudantes:

Figura 44 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.5}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Nesse caso, para encontrar a quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer, E_6 e E_7 estabeleceram uma relação com a quantidade de quadrados construídos na etapa, utilizando a expressão $x.2 - 1$, em que x corresponde à quantidade de quadrados construídos na etapa. Nesse sentido, a relação numérica estabelecida pelos estudantes foi entre os quadrados construídos na etapa e total de quadrados, e não entre o nível do fractal e o total de quadrados, conforme estava previsto na análise *a priori*.

Enquadramos a resolução de E_6 e E_7 no quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.5.2}, \theta_{2.5.2}, \Theta_{2.5.2}]$, em que a técnica $\tau_{2.5.2}$ corresponde a identificar o padrão figural do fractal, uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e a quantidade de quadrados construídos na etapa, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer. Essa técnica pode ser justificada pela tecnologia $\theta_{2.5.2}$, pautada na identificação da complexidade infinita do fractal e noção de relação de recorrência. Em relação à teoria $\Theta_{2.5.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra e Geometria, pois os estudantes construíram uma fórmula para o cálculo da quantidade total de quadrados da Etapa *N* do fractal.

Elaboramos o Quadro 15 com base no quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes nas resoluções da tarefa t_2, no qual buscamos relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Quadro 15 - Elementos da BNCC relacionados à tarefa t_2

(Continua)

Estudantes	**Técnica τ**	**Habilidades relacionadas**	**Tecnologia θ**	**Objetos de conhecimento relacionados**	**Teoria Θ**	**Unidades temáticas relacionadas**
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$\tau_{2.1.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar, de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{2.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{2.1.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$\tau_{2.2.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar, de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{2.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{2.2.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.

(Conclusão)

E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (14 participantes) E_6 e E_7. (2 participantes)	$\tau_{2.3.1}$: Contar os quadrados um a um. $\tau_{2.3.2}$: Somar os quadrados construídos nessa etapa com o total de quadrados da Etapa 1.	(EF01MA02) Contar, de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora.	$\theta_{2.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem. $\theta_{2.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de soma aritmética.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.	$\Theta_{2.3.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.

(Conclusão)

E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}; E_{15} e E_{16}. (14 participantes)	$\tau_{2.4.1}$: Contar os quadrados um a um.	(EF01MA02) Contar, de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias, como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	$\theta_{2.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de contagem.	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	$\Theta_{2.4.1}$: Aritmética e Geometria.	Geometria e Números.
E_6 e E_7. (2 participantes)	$\tau_{2.5.2}$: Identificar o padrão figural do fractal, uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e a quantidade de quadrados construídos na etapa, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer.	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	$\theta_{2.5.2}$: Identificação da complexidade infinita do fractal e noção de relação de recorrência.	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	$\Theta_{2.5.1}$: Álgebra e Geometria.	Álgebra.

Fonte: o autor (2022).

Em vista do que foi apresentado no Quadro 15, é possível observar, com base nas praxeologias empregadas pelos estudantes para a resolução das subtarefas do Tipo de tarefa T_2, a mobilização de habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Destacamos, por exemplo, a mobilização da habilidade "(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas" (BRASIL, 2018, p. 307), que está associada com a técnica de identificar o padrão figural do fractal, uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e a quantidade de quadrados construídos na etapa, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer.

Para o emprego da técnica supracitada, o estudante precisa identificar que existe uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e a quantidade de quadrados construídos na etapa. Também é necessário expressar algebricamente uma fórmula para o cálculo da quantidade total de quadrados em uma etapa qualquer, por exemplo, utilizando a expressão $x.2-1$, em que x corresponde à quantidade de quadrados construídos na etapa. Nesse sentido, entendemos que ocorre a mobilização do objeto de conhecimento "Linguagem algébrica: variável e incógnita" (BRASIL, 2018, p. 306), descrita na unidade temática Álgebra.

Cabe ressaltar que não foi possível identificar habilidades na BNCC que apresentassem relação com a identificação da complexidade infinita do fractal. Desse modo, também não são descritos objetos de conhecimento e unidades temáticas relacionadas a ela. Por esse motivo, enunciamos apenas os elementos da BNCC que possuem relação com a noção de relação de recorrência, conforme apresentado anteriormente.

A seguir, apresentamos o Quadro 16, com a análise *a posteriori* das praxeologias do Tipo de Tarefa T_3, referentes à tarefa t_3.

Quadro 16 - Análise *a posteriori* do Tipo de Tarefa T_3

(Continua)

Tipo de Tarefa T_3	Generalizar o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_3	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica, considerando 1 cm como a medida do lado do quadrado inicial.			
Estudantes	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$t_{3.1}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{3.1.1}$: Considerar a medida apresentada no enunciado da tarefa.	$\theta_{3.1.1}$: Interpretação do enunciado matemático.	$\Theta_{3.1.1}$: Aritmética.
E_9 e E_{10}. (2 participantes) E_6 e E_7. (2 participantes)	$t_{3.2}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{3.2.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, utilizar os *eixos* e a *malha* para identificar a medida da altura e da hipotenusa, aplicar o Teorema de Pitágoras, operar números racionais. $\tau_{3.2.3}$: Utilizar a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído e considerar a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado.	$\theta_{3.2.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. $\theta_{3.2.3}$: Conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*.	$\Theta_{3.2.2}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

(Continua)

E_9 e E_{10}. (2 participantes) E_6 e E_7. (2 participantes) E_1. (1 participante)	$t_{3.3}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{3.3.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar números racionais. $\tau_{3.3.3}$: Utilizar a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído e considerar a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado. $\tau_{3.3.4}$: Utilizar os *eixos* e a *malha* para identificar a medida do lado do quadrado construído.	$\theta_{3.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. $\theta_{3.3.3}$: Conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. $\theta_{3.3.4}$: Reconhecimento da medida do lado do quadrado construído na *Janela de Visualização*.	$\Theta_{3.3.2}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

(Conclusão)

E_{15} e E_{16}. (2 participantes) E_9 e E_{10}. (2 participantes) E_6 e E_7. (2 participantes) E_1. (1 participante)	$t_{3.4}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{3.4.1}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado dos quadrados construídos na Etapa 2 como a hipotenusa dos triângulos formados, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar algebricamente. $\tau_{3.4.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar números racionais. $\tau_{3.4.3}$: Utilizar a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído e considerar a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado. $\tau_{3.4.4}$: Utilizar a *malha* para identificar a medida do lado do quadrado construído.	$\theta_{3.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais. $\theta_{3.4.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. $\theta_{3.4.3}$: Conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. $\theta_{3.4.4}$: Reconhecimento da medida do lado do quadrado construído na *Janela de Visualização*.	$\Theta_{3.4.1}$: Álgebra, Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas. $\Theta_{3.4.2}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
Nenhum participante.	$t_{3.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{3.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do lado de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{3.5.1}$: Noção de relação de recorrência; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; e de progressão geométrica.	$\Theta_{3.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: o autor (2022).

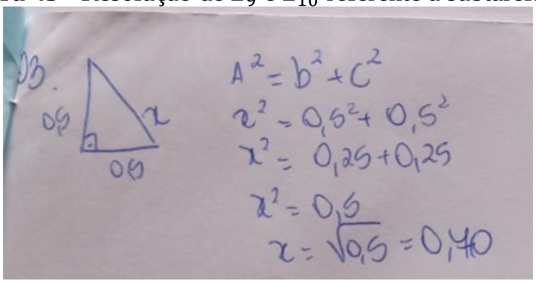
Em conformidade com o que foi apresentado no Quadro 16, a respeito das subtarefas da tarefa t_3, é possível observar que, para a subtarefa $t_{3.1}$, todos os estudantes consideraram a medida informada no enunciado da tarefa. Desse modo, essa resolução enquadra-se na técnica $\tau_{3.1.1}$, uma vez que, para essa subtarefa, não há outra possibilidade.

Sendo assim, os estudantes mobilizaram a técnica $\tau_{3.1.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.1.1}, \Theta_{3.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.1.1}$ pautou-se na interpretação do enunciado matemático. A respeito da teoria $\Theta_{3.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, pois os estudantes deveriam considerar o valor 1 (um) como a medida inicial do lado do quadrado. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.1.1}, \theta_{3.1.1}, \Theta_{3.1.1}]$.

Com relação à subtarefa $t_{3.2}$, as duplas E_9 e E_{10}; e E_6 e E_7 apresentaram resoluções diferentes da técnica prevista na análise *a priori*. Para tais resoluções, identificamos os seguintes quartetos praxeológicos $[T_3, \tau_{3.2.2}, \theta_{3.2.2}, \Theta_{3.2.1}]$ e $[T_3, \tau_{3.2.3}, \theta_{3.2.3}, \Theta_{3.2.1}]$, respectivamente.

Na figura seguinte, apresentamos a resolução apresentada pela dupla E_9 e E_{10}.

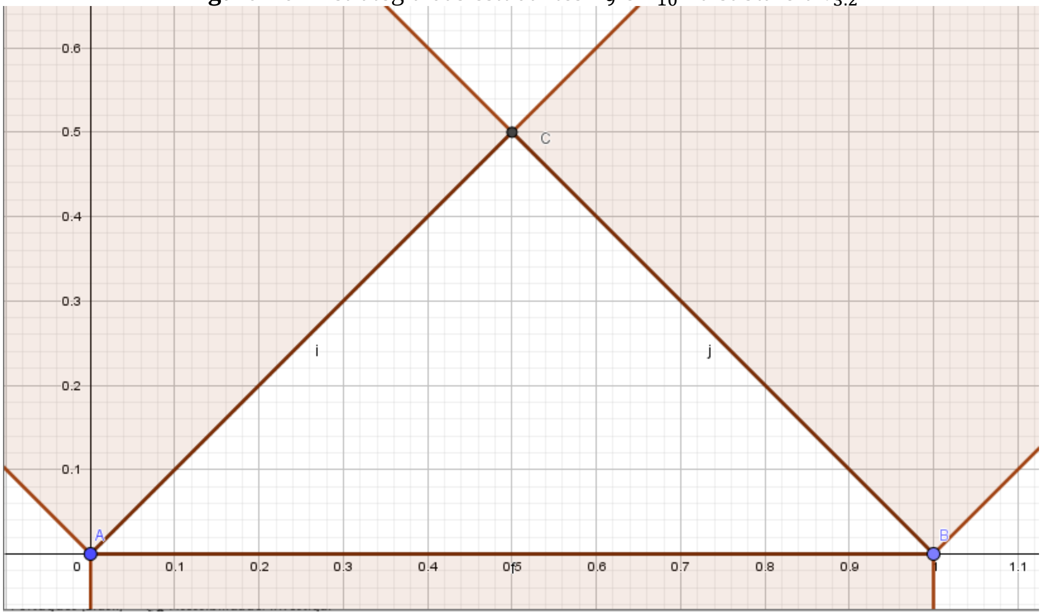
Figura 45 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{3.2}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Os estudantes E_9 e E_{10} representaram um triângulo retângulo na folha de respostas e com as medidas que identificaram ao utilizar a *malha* e os *eixos* da *Janela de Visualização* do GeoGebra, e aplicaram o Teorema de Pitágoras. A estratégia utilizada pelos estudantes foi de posicionar a construção sobre os *eixos* *X* e *Y*, de forma que a graduação dos *eixos* possibilitou a identificação da medida da altura e da hipotenusa (Figura 46). Cabe destacar que os estudantes representaram o valor correto para a solução, com a ressalva de estar na forma decimal (0,7), uma vez que havíamos previsto o emprego na forma fracionária $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Figura 46 - Estratégia das estudantes E_9 e E_{10} na subtarefa $t_{3.2}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Os estudantes não descreveram a estratégia na folha de respostas, mas explicaram o procedimento realizado quando foram questionados pelo pesquisador. Logo, a dupla mobilizou a técnica $\tau_{3.2.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.2.2}, \Theta_{3.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.2.2}$ fundamenta-se no conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. Com relação à teoria $\Theta_{3.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Diante disso, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.2.2}, \theta_{3.2.2}, \Theta_{3.2.1}]$.

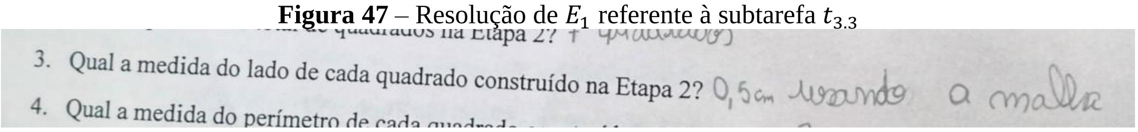
No que se refere à resolução da subtarefa $t_{3.2}$, a dupla E_6 e E_7 apresentou a resposta correta, mas na forma decimal (0,7). Entendemos que possivelmente os estudantes utilizaram a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído, e consideraram a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado, pois intuímos que segue a mesma linha de raciocínio identificada para a resolução do mesmo item na Etapa 3, a qual apresentamos posteriormente, para a subtarefa $t_{3.4}$.

Desse modo, os estudantes E_6 e E_7 mobilizaram a técnica $\tau_{3.2.3}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.2.3}, \Theta_{3.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.2.3}$ pautou-se no conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. A respeito da teoria $\Theta_{3.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.2.3}, \theta_{3.2.3}, \Theta_{3.2.1}]$.

A respeito da subtarefa $t_{3.3}$, os estudantes E_1; E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} apresentaram resoluções diferentes da técnica prevista na análise *a priori*. Assim, identificamos os seguintes quartetos praxeológicos $[T_3, \tau_{3.3.4}, \theta_{3.3.4}, \Theta_{3.3.2}]$, $[T_3, \tau_{3.3.3}, \theta_{3.3.3}, \Theta_{3.3.2}]$ e $[T_3, \tau_{3.3.2}, \theta_{3.3.2}, \Theta_{3.3.2}]$, respectivamente.

No que diz respeito à resolução apresentada pelo estudante E_1, é possível observar que ele recorre a uma estratégia que se aproxima da resolução da dupla E_9 e E_{10}, ao utilizar a *malha* da *Janela de Visualização* para identificar a medida do lado do quadrado (Figura 47).

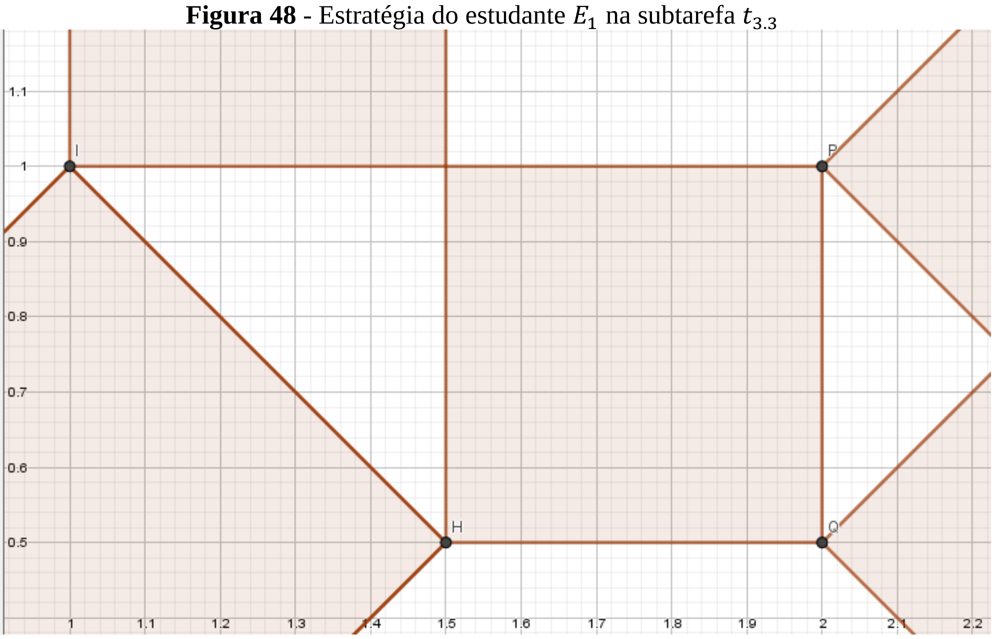
Figura 47 – Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{3.3}$


3. Qual a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 2? 0,5cm usando a malha
4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado

Fonte: acervo do autor (2022).

Apesar de não detalhar o processo realizado, ao ser questionado pelo pesquisador, o estudante E_1 explicou como resolveu o item da tarefa, e mostrou que utilizou a ferramenta *zoom* para aproximar a construção e identificar a medida do lado do quadrado com o auxílio da graduação dos *eixos* X e Y, conforme mostra a figura seguinte.

Figura 48 - Estratégia do estudante E_1 na subtarefa $t_{3.3}$



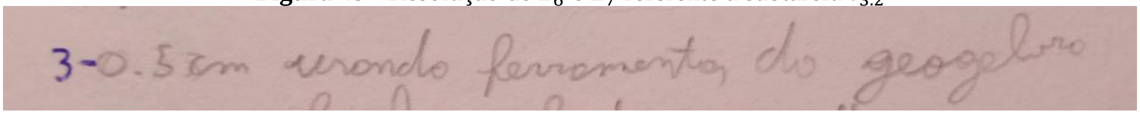
Fonte: acervo do autor (2022).

Assim, o estudante E_1 mobilizou a técnica $\tau_{3.3.4}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.3.4}, \Theta_{3.3.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.3.4}$ fundamenta-se no reconhecimento da medida do lado do quadrado construído na *Janela de Visualização*. Em relação à teoria $\Theta_{3.3.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética e a Geometria.

Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.3.4}, \theta_{3.3.4}, \Theta_{3.3.2}]$.

Para a subtarefa $t_{3.3}$, os estudantes E_6 e E_7 apresentaram resolução considerada correta, mas na forma decimal (0,5). Do mesmo modo que a resposta da subtarefa $t_{3.2}$, a dupla não apresentou detalhes para a explicação da estratégia, conforme ilustra a Figura 49.

Figura 49 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{3.2}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Intuímos que possivelmente os estudantes utilizaram a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído, e consideraram a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado, pois compreendemos que segue a mesma linha de raciocínio identificada para a resolução do mesmo item na Etapa 3, a qual apresentamos posteriormente, para a subtarefa $t_{3.4}$.

Logo, a dupla E_6 e E_7 mobilizou a técnica $\tau_{3.3.3}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.3.3}, \Theta_{3.3.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.3.3}$ ampara-se conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. No que diz respeito à teoria $\Theta_{3.3.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Diante disso, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.3.3}, \theta_{3.3.3}, \Theta_{3.3.2}]$.

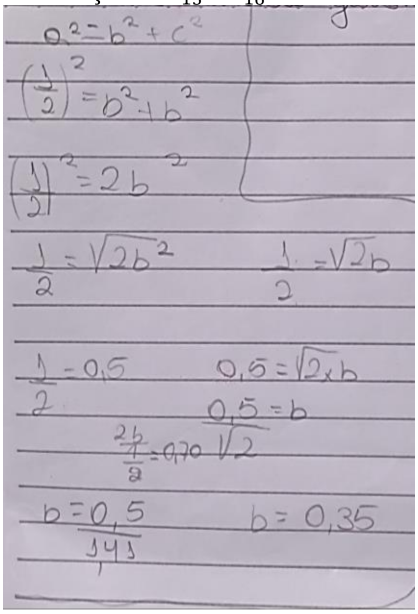
Já os estudantes E_9 e E_{10} representaram um triângulo retângulo na folha de respostas e, com base no processo realizado na etapa anterior, aplicaram o Teorema de Pitágoras. Cabe destacar que os estudantes representaram o valor correto para a solução com a ressalva de estar na forma decimal (0,5), uma vez que havíamos previsto o emprego na forma fracionária $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Assim, a dupla E_9 e E_{10} mobilizou a técnica $\tau_{3.3.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.3.2}, \Theta_{3.3.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.3.2}$ fundamenta-se no conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. Em relação à teoria $\Theta_{3.3.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.3.2}, \theta_{3.3.2}, \Theta_{3.3.2}]$.

Acerca da subtarefa $t_{3.3}$, os estudantes E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10} apresentaram resoluções diferentes da técnica prevista na análise *a priori*. Desse modo, identificamos os seguintes quartetos praxeológicos $[T_3, \tau_{3.4.4}, \theta_{3.4.4}, \Theta_{3.4.2}]$, $[T_3, \tau_{3.4.3}, \theta_{3.4.3}, \Theta_{3.4.2}]$, e $[T_3, \tau_{3.4.2}, \theta_{3.4.2}, \Theta_{3.4.2}]$, respectivamente.

A dupla E_{15} e E_{16} apresentou a resolução da subtarefa $t_{3.4}$ conforme previmos em nossa análise. Cabe ressaltar que os estudantes expressaram a resposta na forma decimal (0,35). A figura a seguir ilustra a estratégia utilizada.

Figura 50 - Resolução de E_{15} e E_{16} referente à subtarefa $t_{3.4}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Perante o exposto, os estudantes E_{15} e E_{16} mobilizaram a técnica $\tau_{3.4.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.4.1}, \Theta_{3.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.4.1}$ pauta-se no conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais. A respeito da teoria $\Theta_{3.4}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra, a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.4.1}, \theta_{3.4.1}, \Theta_{3.4.1}]$.

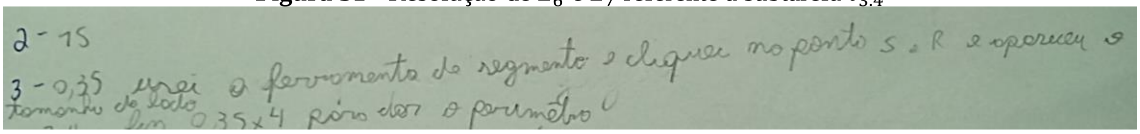
No que se refere à resolução apresentada pela dupla E_9 e E_{10}, do mesmo modo que nas etapas anteriores, representaram um triângulo retângulo na folha de respostas e, com base no processo realizado na etapa anterior, aplicaram o Teorema de Pitágoras. Destacamos que os estudantes representaram o valor correto para a solução, com a ressalva de estar na forma decimal (0,35).

Dessa maneira, a dupla E_9 e E_{10} mobilizou a técnica $\tau_{3.4.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.4.2}, \Theta_{3.4.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.4.2}$ ampara-se no conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na

Janela de Visualização, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. Com relação à teoria $\Theta_{3.4.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra, a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Sendo assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.4.2}, \theta_{3.4.2}, \Theta_{3.4.2}]$.

Para a subtarefa $t_{3.4}$, os estudantes E_6 e E_7 apresentaram a seguinte resolução:

Figura 51 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{3.4}$

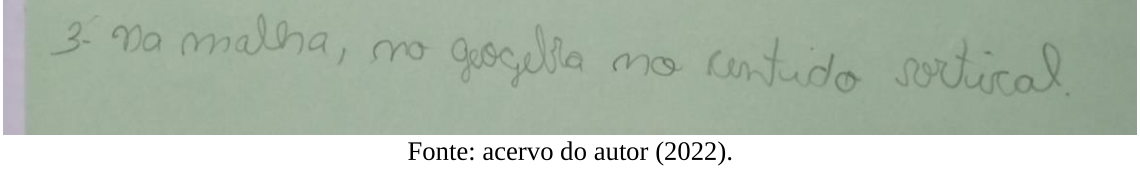


Fonte: acervo do autor (2022).

Após a dupla ser questionada pelo pesquisador sobre a estratégia utilizada, foi possível compreender que os estudantes utilizaram a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído, e consideraram a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado. Logo, a dupla E_6 e E_7 mobilizou a técnica $\tau_{3.4.3}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.4.3}, \Theta_{3.4.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.4.3}$ pauta-se no conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e no reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. Com relação à teoria $\Theta_{3.4.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra, a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Em vista disso, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.4.3}, \theta_{3.4.3}, \Theta_{3.4.2}]$.

No que diz respeito à resolução apresentada pelo estudante E_1, ele recorre à estratégia empregada na etapa anterior, utilizando a *malha* da *Janela de Visualização* para identificar a medida do lado do quadrado (Figura 52).

Figura 52 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{3.4}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Conforme ilustra a figura, o estudante E_1 não detalhou o processo realizado. Ao ser questionado pelo pesquisador, o estudante E_1 explicou que resolveu o item da tarefa com a ferramenta *zoom* para aproximar a construção e identificar a medida do lado do quadrado com o auxílio da graduação dos *eixos X* e *Y*. Dessa maneira, o estudante E_1 mobilizou a técnica $\tau_{3.4.4}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{3.4.4}, \Theta_{3.4.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{3.4.4}$ ampara-se no reconhecimento da medida do lado do quadrado construído na *Janela de Visualização*. No que se refere à teoria $\Theta_{3.4.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra, a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.4.4}, \theta_{3.4.4}, \Theta_{3.4.2}]$.

Para a resolução da subtarefa $t_{3.5}$, nenhum estudante conseguiu construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.

Elaboramos o Quadro 17, com base no quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes nas resoluções da tarefa t_3, no qual buscamos relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Quadro 17 - Elementos da BNCC relacionados à tarefa t_3

(Continua)

Estudantes	**Técnica τ**	**Habilidades relacionadas**	**Tecnologia θ**	**Objetos de conhecimento relacionados**	**Teoria Θ**	**Unidades temáticas relacionadas**
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14}. (14 participantes)	$\tau_{3.1.1}$: Considerar a medida apresentada no enunciado da tarefa.	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora.	$\theta_{3.1.1}$: Interpretação do enunciado matemático.	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.	$\Theta_{3.1.1}$: Aritmética.	Números.

(Continua)

E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$\tau_{3.2.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, utilizar os *eixos* e a *malha* para identificar a medida da altura e da hipotenusa, aplicar o Teorema de Pitágoras, operar números racionais. $\tau_{3.2.3}$: Utilizar a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído e considerar a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	$\theta_{3.2.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. $\theta_{3.2.3}$: Conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Potências com expoentes negativos e fracionários. Relações métricas no triângulo retângulo.	$\Theta_{3.2.2}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas, e Números.

(Continua)

E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (5 participantes)	$\tau_{3.3.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar números racionais. $\tau_{3.3.3}$: Utilizar a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído e considerar a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado. $\tau_{3.3.4}$: Utilizar os *eixos* e a *malha* para identificar a medida do lado do quadrado construído.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	$\theta_{3.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. $\theta_{3.3.3}$: Conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. $\theta_{3.3.4}$: Reconhecimento da medida do lado do quadrado construído na *Janela de Visualização*.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Potências com expoentes negativos e fracionários. Relações métricas no triângulo retângulo.	$\Theta_{3.3.2}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Conclusão)

E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{15} e E_{16}. (7 participantes)	$\tau_{3.4.1}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado dos quadrados construídos na Etapa 2 como a hipotenusa dos triângulos formados, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar algebricamente. $\tau_{3.4.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar números racionais. $\tau_{3.4.3}$: Utilizar a ferramenta *segmento* para ligar os pontos que determinam um dos lados do quadrado construído e considerar a medida do segmento criado como medida do lado do quadrado. $\tau_{3.4.4}$: Utilizar a *malha* para identificar a medida do lado do quadrado construído.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas utilizando as propriedades das operações. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	$\theta_{3.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais. $\theta_{3.4.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecimento da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma, multiplicação e radiciação de números racionais. $\theta_{3.4.3}$: Conhecimento de utilização da ferramenta *segmento* e reconhecimento da medida do segmento na *Janela de Álgebra*. $\theta_{3.4.4}$: Reconhecimento da medida do lado do quadrado construído na *Janela de Visualização*.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Valor numérico de expressões algébricas. Potências com expoentes negativos e fracionários. Relações métricas no triângulo retângulo.	$\Theta_{3.4.1}$: Álgebra, Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas. $\Theta_{3.4.2}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Números.

Fonte: o autor (2022).

A respeito do que é apresentado no Quadro 17, é possível observar, com base nas praxeologias empregadas pelos estudantes para a resolução das subtarefas do Tipo de tarefa T_3, a mobilização de habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Como exemplo, cabe destacar a mobilização das seguintes habilidades:

> (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (BRASIL, 2018, p. 279).
> [...] (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (BRASIL, 2018, p. 307).
> [...] (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários (BRASIL, 2018, p. 317).
> [...] (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (BRASIL, 2018, p. 319).

Essas habilidades estão associadas com a técnica de reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, utilizar os *eixos* e a *malha* para identificar a medida da altura e da hipotenusa, aplicar o Teorema de Pitágoras, além de operar números racionais.

Para o emprego dessa técnica, compreendemos que o estudante precisa ter conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo*, reconhecer da medida da altura e hipotenusa na *Janela de Visualização*, aplicar o Teorema de Pitágoras, e operar números racionais. Nesse sentido, entendemos que ocorre a mobilização dos seguintes objetos de conhecimento:

> Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais (BRASIL, 2018, p. 278).
> [...] Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações (BRASIL, 2018, p. 306).
> [...] Potências com expoentes negativos e fracionários (BRASIL, 2018, p. 316).
> [...] Relações métricas no triângulo retângulo (BRASIL, 2018, p. 318).

Tais objetos de conhecimento estão descritos nas unidades temáticas Geometria, Grandezas, e medidas e Números, não necessariamente nessa ordem.

A seguir, apresentamos o Quadro 18, com a análise *a posteriori* das praxeologias do Tipo de Tarefa T_4, referentes à tarefa t_4.

Quadro 18 - Análise *a posteriori* do Tipo de Tarefa T_4

(Continua)

Tipo de Tarefa T_4	Generalizar o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_4	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Estudantes	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
E_6 e E_7. (2 participantes) E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}. (9 participantes)	$t_{4.1}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{4.1.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4. $\tau_{4.1.2}$: Somar a medida de todos os lados do quadrado.	$\theta_{4.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. $\theta_{4.1.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$t_{4.2}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{4.2.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{4.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$t_{4.3}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{4.3.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{4.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. $\theta_{4.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

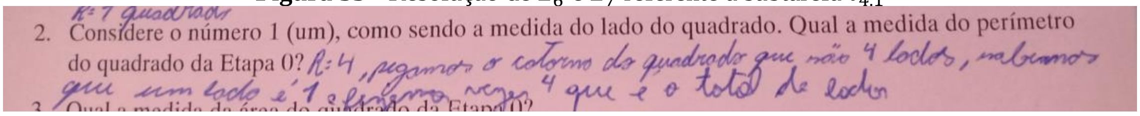
(Conclusão)

E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{15} e E_{16}. (7 participantes) E_{11} e E_{12}. (2 participantes)	$t_{4.4}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{4.4.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4. $\tau_{4.4.2}$: Somar a medida de todos os lados do quadrado.	$\theta_{4.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. $\theta_{4.4.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{4.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
Nenhum participante.	$t_{4.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{4.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{4.5.1}$: Noção de relação de recorrência; noção de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; e noção de progressão geométrica.	$\Theta_{4.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: o autor (2022).

De acordo com o que foi apresentado no Quadro 18, a respeito das subtarefas da tarefa t_4, é possível observar que, para a subtarefa $t_{4.1}$, os estudantes E_6 e E_7 empregaram a técnica prevista na análise *a priori* (Figura 53).

Figura 53 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{4.1}$



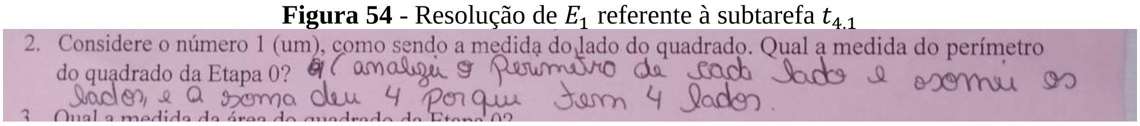
R: 7 quadrados
2. Considere o número 1 (um), como sendo a medida do lado do quadrado. Qual a medida do perímetro do quadrado da Etapa 0? R: 4, pegamos o contorno do quadrado que são 4 lados, sabemos que um lado é 1 e fizemos vezes 4 que é o total de lados

Fonte: acervo do autor (2022).

A dupla explicou que considerou a medida do lado do quadrado como 1 (um), conforme informado no enunciado, e multiplicou pelo total de lados do quadrado (4 lados). Desse modo, os estudantes E_6 e E_7 mobilizaram a técnica $\tau_{4.1.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{4.1.1}, \Theta_{4.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{4.1.1}$ pautou-se na noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. A respeito da teoria $\Theta_{4.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes deveriam considerar o valor 1 (um) como a medida do lado do quadrado e multiplicar pelo número de lados do quadrado (4 lados). Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.1.1}, \theta_{4.1.1}, \Theta_{4.1.1}]$.

Os estudantes E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_9 e E_{10}; e E_{11} e E_{12} apresentaram resoluções semelhantes. As descrições ilustradas nas figuras a seguir são dos estudantes E_1; e E_{11} e E_{12}, respectivamente:

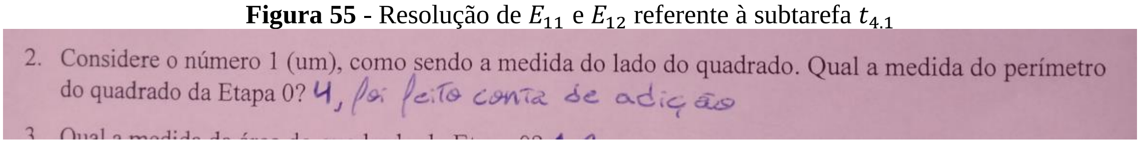
Figura 54 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{4.1}$



2. Considere o número 1 (um), como sendo a medida do lado do quadrado. Qual a medida do perímetro do quadrado da Etapa 0? R: (analisei o perímetro de cada lado e somei os lados, e a soma deu 4 porque tem 4 lados.

Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 55 - Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{4.1}$



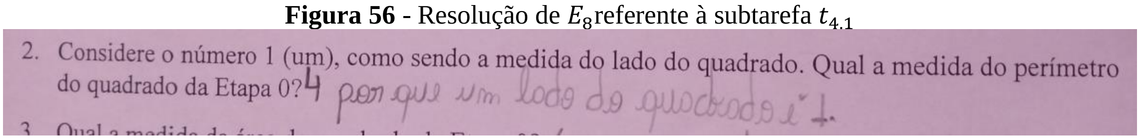
2. Considere o número 1 (um), como sendo a medida do lado do quadrado. Qual a medida do perímetro do quadrado da Etapa 0? 4, foi feito conta de adição

Fonte: acervo do autor (2022).

Para respostas como essas, que se referem à *soma dos lados* ou *conta de adição*, identificamos o seguinte quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.1.2}, \theta_{4.1.2}, \Theta_{4.1.1}]$, pois não havíamos previsto essa técnica em nossas análises. Assim, os estudantes E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_9 e E_{10}; e E_{11} e E_{12} mobilizaram a técnica $\tau_{4.1.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{4.1.2}, \Theta_{4.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{4.1.2}$ ampara-se na noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro. A respeito da teoria $\Theta_{4.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes deveriam considerar o valor 1 (um) como a medida do lado do quadrado e somar a medida de todos os lados do quadrado (4 lados). Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.1.2}, \theta_{4.1.2}, \Theta_{4.1.1}]$.

Ressaltamos que os estudantes E_8; E_{13} e E_{14} apresentaram a resposta correta, mas sem detalhar a estratégia utilizada. Nesse sentido, não conseguimos evidenciar nem intuir a técnica empregada, pois nas resoluções do mesmo item para as etapas posteriores isso se repetiu. Portanto, não foi possível fazer a caracterização do quarteto praxeológico. A seguir, a Figura 56 ilustra a resolução apresentada pelo estudante E_8.

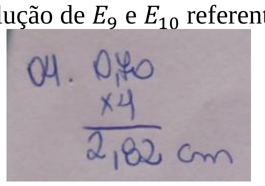
Figura 56 - Resolução de E_8referente à subtarefa $t_{4.1}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Com relação à subtarefa $t_{4.2}$, os estudantes E_9 e E_{10} apresentaram uma resolução que se enquadra na técnica prevista na análise *a priori*, com a ressalva de apresentarem a resposta na forma decimal e com valor aproximado (2,82) (Figura 57), ao invés da resposta na forma de radiciação ($2\sqrt{2}$).

Figura 57 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{4.2}$



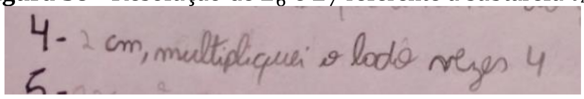
Fonte: acervo do autor (2022).

Já os estudantes E_6 e E_7 apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar a estratégia utilizada. Intuímos que a dupla empregou a mesma técnica utilizada no mesmo item da etapa anterior, *multiplicar a medida do lado do quadrado por 4*.

Assim, os estudantes E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{4.2.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{4.2.1}, \Theta_{4.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{4.2.1}$ fundamenta-se na noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. Em relação à teoria $\Theta_{4.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes deveriam considerar a medida do lado do quadrado e multiplicar pelo número de lados do quadrado (4 lados). Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.2.1}, \theta_{4.2.1}, \Theta_{4.2.1}]$.

No que diz respeito à subtarefa $t_{4.3}$, os estudantes E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} empregaram a técnica prevista na análise *a priori*. As figuras a seguir ilustram as resoluções das duplas:

Figura 58 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{4.3}$



Fonte: acervo do autor (2022).

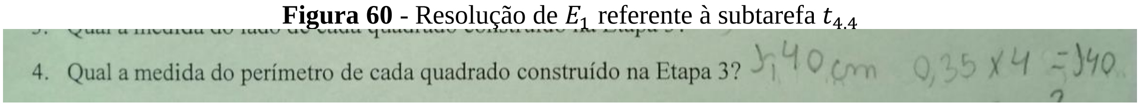
Figura 59 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{4.3}$

Fonte: acervo do autor (2022).

Diante disso, as duas duplas mobilizaram a técnica $\tau_{4.3.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{4.3.1}, \Theta_{4.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{4.3.1}$ pauta-se na noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. Em relação à teoria $\Theta_{4.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes deveriam considerar a medida do lado do quadrado e multiplicar pelo número de lados do quadrado (4 lados). Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.3.1}, \theta_{4.3.1}, \Theta_{4.3.1}]$.

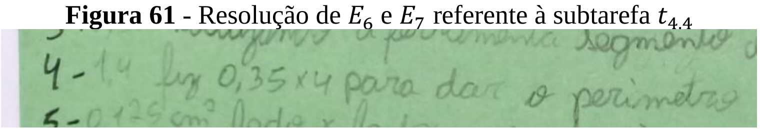
No que se refere à subtarefa $t_{4.4}$, os estudantes E_1; E_6 e E_7; E_{15} e E_{16} empregaram a técnica prevista na análise *a priori*, com a ressalva de apresentarem a resposta na forma decimal e com o valor aproximado (1,4), ao invés da forma de radiciação ($\sqrt{2}$). As figuras seguintes mostram as respostas dos estudantes:

Figura 60 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{4.4}$



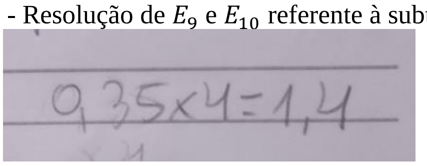
Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 61 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{4.4}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 62 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{4.4}$



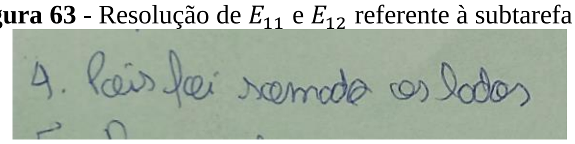
Fonte: acervo do autor (2022).

Os estudantes E_9 e E_{10} apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar a estratégia utilizada. Nesse sentido, intuímos que possivelmente os estudantes empregaram a mesma técnica do item da etapa anterior, *multiplicar a medida do lado do quadrado por 4*.

Dessa forma, os estudantes E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; e E_{15} e E_{16} mobilizaram a técnica $\tau_{4.4.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{4.4.1}, \Theta_{4.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{4.4.1}$ pauta-se na noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. No que se refere à teoria $\Theta_{4.4.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria e Grandezas e medidas, pois os estudantes deveriam considerar a medida do lado do quadrado e multiplicar pelo número de lados do quadrado (4 lados). Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.4.1}, \theta_{4.4.1}, \Theta_{4.4.1}]$.

Já os estudantes E_{11} e E_{12} apresentaram a resolução correta na forma decimal e com valor aproximado (1,4), e recorreram à estratégia da *soma dos lados*, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 63 - Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{4.4}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Desse modo, identificamos o seguinte quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.4.2}, \theta_{4.4.2}, \Theta_{4.4.2}]$, pois não havíamos previsto essa técnica em nossas análises. Logo, os estudantes E_{11} e E_{12} mobilizaram a técnica $\tau_{4.4.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{4.4.2}, \Theta_{4.4.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{4.4.2}$ fundamenta-se na noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro. No que se refere à teoria $\Theta_{4.4.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes deveriam considerar a medida do lado do quadrado e somar a medida de todos os lados do quadrado (4 lados). Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_4, \tau_{4.4.2}, \theta_{4.4.2}, \Theta_{4.4.2}]$.

Com relação à subtarefa $t_{4.5}$, nenhum estudante conseguiu construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro do quadrado construído em uma etapa qualquer.

Elaboramos o Quadro 19, com base no quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes nas resoluções da tarefa t_4, no qual buscamos relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Quadro 19 - Elementos da BNCC relacionados à tarefa t_4

(Continua)

Estudantes	**Técnica τ**	**Habilidades relacionadas**	**Tecnologia θ**	**Objetos de conhecimento relacionados**	**Teoria Θ**	**Unidades temáticas relacionadas**
E_1; E_2 e E_3; E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}. (11 participantes)	$\tau_{4.1.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4. $\tau_{4.1.2}$: Somar a medida de todos os lados do quadrado.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora.	$\theta_{4.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. $\theta_{4.1.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.	$\Theta_{4.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Continua)

E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$\tau_{4.2.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	$\theta_{4.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Potências com expoentes negativos e fracionários.	$\Theta_{4.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.
E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$\tau_{4.3.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	$\theta_{4.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Potências com expoentes negativos e fracionários.	$\Theta_{4.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Conclusão)

E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; E_{15} e E_{16}. (9 participantes)	$\tau_{4.4.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4. $\tau_{4.4.2}$: Somar a medida de todos os lados do quadrado.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	$\theta_{4.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. $\theta_{4.4.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Potências com expoentes negativos e fracionários.	$\Theta_{4.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

Fonte: o autor (2022).

Com relação ao que se apresenta no Quadro 19, podemos observar, com base nas praxeologias empregadas pelos estudantes para a resolução das subtarefas do Tipo de tarefa T_4, a mobilização de habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Nesse contexto, evidenciamos a mobilização das habilidades:

> (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (BRASIL, 2018, p. 279).
> [...] (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (BRASIL, 2018, p. 307).
> [...] (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários (BRASIL, 2018, p. 317).

Essas habilidades estão associadas com as técnicas de multiplicar a medida do lado do quadrado por 4 e somar a medida de todos os lados do quadrado, as quais foram utilizadas pelos estudantes para a resolução da subtarefa $t_{4.4}$.

Para empregar a técnica mencionada, o estudante precisa ter conhecimento do elemento figural quadrado, noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro. No caso do emprego da técnica de somar a medidas de todos os lados do quadrado, o estudante precisa ter conhecimento do elemento figural quadrado, noção de soma aritmética e noção geométrica de perímetro. Dessa forma, compreendemos que ocorre a mobilização dos objetos de conhecimento:

> Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais (BRASIL, 2018, p. 278).
> [...] Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações (BRASIL, 2018, p. 306).
> [...] Potências com expoentes negativos e fracionários (BRASIL, 2018, p. 316).

Tais objetos de conhecimento encontram-se descritos na unidade temática Geometria e Números. Ressaltamos que não conseguimos identificar habilidades relacionadas com noção geométrica de perímetro. Por esse motivo, não enunciamos objetos de conhecimento e unidades temáticas relacionadas a ela. Assim, apresentamos apenas os elementos da BNCC que possuem relação com conhecimento do elemento figural quadrado e noção de soma aritmética, conforme já apresentado.

A seguir, apresentamos o Quadro 20, com a análise *a posteriori* das praxeologias do Tipo de Tarefa T_5, referentes à tarefa t_5.

Quadro 20 - Análise *a posteriori* do Tipo de Tarefa T_5

(Continua)

<table>
<tr><td>Tipo de Tarefa T_5</td><td colspan="4">Generalizar o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.</td></tr>
<tr><td>Tarefa t_5</td><td colspan="4">Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.</td></tr>
<tr><td>Estudantes</td><td>Subtarefa</td><td>Técnica τ</td><td>Tecnologia θ</td><td>Teoria Θ</td></tr>
<tr><td>E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}.

(6 participantes)</td><td>$t_{5.1}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.</td><td>$\tau_{5.1.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.</td><td>$\theta_{5.1.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.</td><td>$\Theta_{5.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.</td></tr>
<tr><td>E_6 e E_7; E_9 e E_{10}.

(4 participantes)</td><td>$t_{5.2}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.</td><td>$\tau_{5.2.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.</td><td>$\theta_{5.2.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.</td><td>$\Theta_{5.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.</td></tr>
<tr><td>E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}.

(5 participantes)

E_2 e E_3.

(2 participantes)</td><td>$t_{5.3}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.</td><td>$\tau_{5.3.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.

$\tau_{5.3.2}$: Identificar a relação numérica entre a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 e o quadrado construído na etapa anterior e dividir a medida da área do quadrado construído por 2.</td><td>$\theta_{5.3.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.

$\theta_{5.3.2}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área, relação de recorrência e divisão aritmética.</td><td>$\Theta_{5.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.</td></tr>
</table>

(Conclusão)

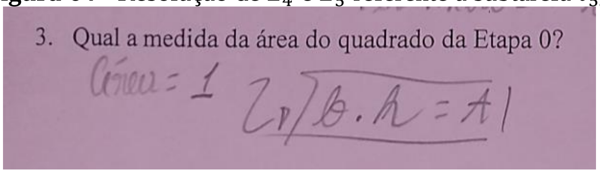
E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{15} e E_{16}. (7 participantes)	$t_{5.4}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{5.4.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{5.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{5.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
Nenhum participante.	$t_{5.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{5.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida da área de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{5.5.1}$: Noção de relação de recorrência; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; noção de multiplicação e de progressão geométrica.	$\Theta_{5.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: o autor (2022).

Após a leitura do Quadro 20, no que concerne às subtarefas da tarefa t_5, podemos observar que os estudantes apresentaram resoluções conforme previsto na análise *a priori*, com exceção da subtarefa $t_{5.5}$, pois nenhum estudante conseguiu construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.

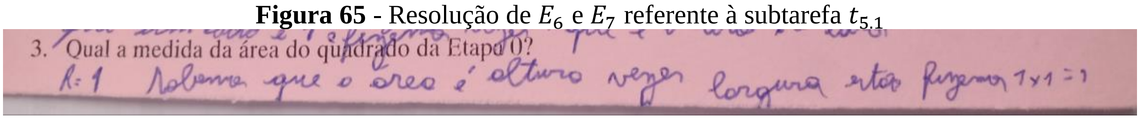
A respeito da resolução da subtarefa $t_{5.1}$, os estudantes E_4 e E_5; E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} apresentaram a solução correta e com a técnica *multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado*. As imagens a seguir mostram as repostas dos estudantes:

Figura 64 - Resolução de E_4 e E_5 referente à subtarefa $t_{5.1}$



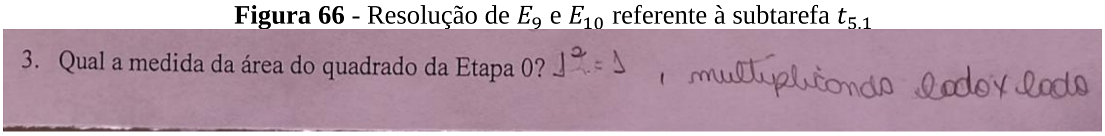
Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 65 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{5.1}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 66 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{5.1}$

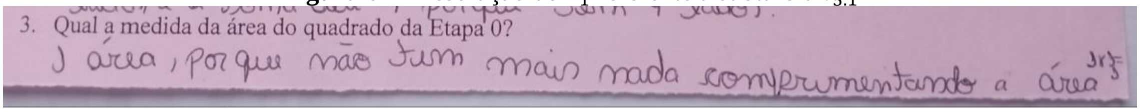


Fonte: acervo do autor (2022).

Assim, os estudantes E_4 e E_5; E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{5.1.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{5.1.1}, \Theta_{5.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{5.1.1}$ pautou-se na noção geométrica de área e de multiplicação aritmética. A respeito da teoria $\Theta_{5.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.1.1}, \theta_{5.1.1}, \Theta_{5.1.1}]$.

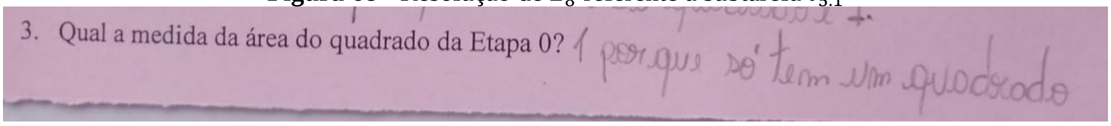
Os estudantes E_1; E_8; E_{11} e E_{12}; e E_{13} e E_{14} apresentaram a resposta correta, mas com justificativas que consideramos inadequadas, e por esse motivo não enquadramos a resposta em um quarteto praxeológico. A seguir, podemos ver as justificadas apresentadas pelos estudantes E_1 e E_8:

Figura 67 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{5.1}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 68 - Resolução de E_8 referente à subtarefa $t_{5.1}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Os estudantes E_{11} e E_{12}; E_{13} e E_{14} apresentaram uma justificativa idêntica à do estudante E_8. Poderíamos considerar essa justificativa, se ela fosse complementada, por exemplo, com o emprego da ferramenta *Área*, clicando sobre o quadrado para descobrir a área da figura, ou visualizando o valor da medida da área na *Janela de Álgebra*. Assim, em se tratando de apenas um quadrado para essa etapa, justificaria a resposta.

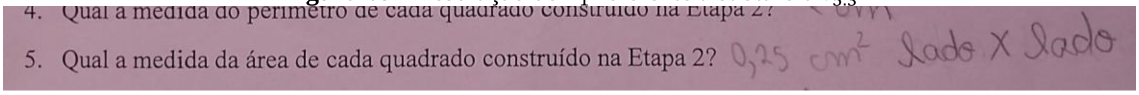
Para a resolução da subtarefa $t_{5.2}$, os estudantes E_6 e E_7; E_9 e E_{10} apresentaram a resposta correta, mas sem explicitar o processo utilizado. A resposta dos estudantes encontra-se na forma decimal e com valor aproximado, diferentemente do que previmos em nossa análise, uma vez que esperávamos a resposta na forma fracionária $\left(\frac{1}{2}\right)$. Intuímos que os estudantes empregaram, para essa subtarefa, a mesma estratégia do item da etapa anterior, *multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado*.

Nesse sentido, os estudantes E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{5.2.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{5.2.1}, \Theta_{5.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{5.2.1}$ ampara-se na noção geométrica de área e de multiplicação aritmética. No que se refere à teoria $\Theta_{5.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.2.1}, \theta_{5.2.1}, \Theta_{5.2.1}]$.

Já os estudantes E_3 e E_4; E_{11} e E_{12} apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar o processo utilizado. Por esse motivo, não conseguimos identificar nem intuir a técnica empregada e, portanto, as respostas não foram enquadradas em um quarteto praxeológico.

Para a subtarefa $t_{5.3}$ os estudantes E_1; E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} apresentaram resoluções semelhantes e que consideramos correta, mas na forma decimal, ao invés da forma fracionária $\left(\frac{1}{4}\right)$, conforme previmos em nossa análise. A seguir, apresentamos a resposta do estudante E_1:

Figura 69 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{5.3}$

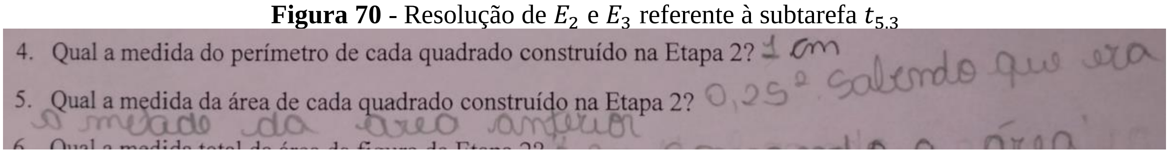

4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 2?
5. Qual a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2? 0,25 cm² lado X lado

Fonte: acervo do autor (2022).

Desse modo, os estudantes E_1, E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{5.3.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{5.3.1}, \Theta_{5.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{5.3.1}$ pauta-se na noção geométrica de área e de multiplicação aritmética. No que diz respeito à teoria $\Theta_{5.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.3.1}, \theta_{5.3.1}, \Theta_{5.3.1}]$.

Os estudantes E_2 e E_3 apresentaram a resposta correta, mas com uma técnica diferente da que havíamos previsto em nossa análise. Portanto, para a resposta dos estudantes, identificamos o seguinte quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.3.2}, \theta_{5.3.2}, \Theta_{5.3.1}]$. A Figura 70 mostra a resposta dos estudantes.

Figura 70 - Resolução de E_2 e E_3 referente à subtarefa $t_{5.3}$

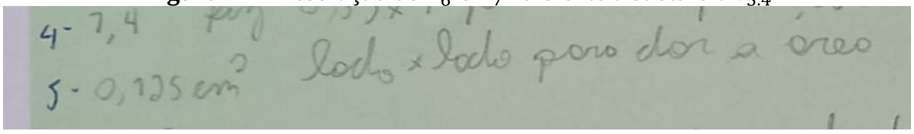

4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 2? 1 cm
5. Qual a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2? 0,25² sabendo que era a metade da área anterior

Fonte: acervo do autor (2022).

A justificativa é válida, pois ao reconhecer a relação de recorrência entre a medida da área do quadrado construído em cada etapa, é possível afirmar que a medida da área do quadrado construído na Etapa 2 equivale à metade da medida da área do quadrado construído na etapa anterior. Desse modo, os estudantes E_2 e E_3 mobilizaram a técnica $\tau_{5.3.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{5.3.2}, \Theta_{5.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{5.3.2}$ ampara-se na noção geométrica de área e de divisão aritmética. Com relação à teoria $\Theta_{5.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.3.2}, \theta_{5.3.2}, \Theta_{5.3.1}]$.

No que diz respeito à subtarefa $t_{5.4}$ os estudantes E_1; E_6 e E_7; e E_{15} e E_{16} apresentaram respostas semelhantes, além de expressarem o valor aproximado e na forma decimal. As soluções assemelham-se à resposta da dupla E_6 e E_7, conforme ilustra a figura abaixo.

Figura 71 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{5.4}$



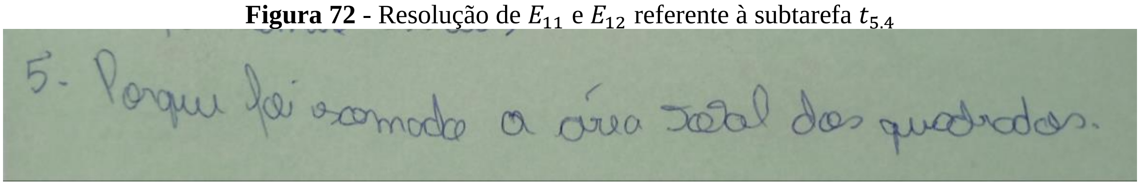
Fonte: acervo do autor (2022).

Já os estudantes E_9 e E_{10} apresentaram apenas a resposta correta, sem explicitar a estratégia utilizada. No entanto, haja vista as respostas desse mesmo item para as etapas anteriores, intuímos que os estudantes empregaram a mesma técnica, *multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado*.

Dessa forma, os estudantes E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; e E_{15} e E_{16} empregaram a técnica $\tau_{5.4.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{5.4.1}, \Theta_{5.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{5.4.1}$ fundamenta-se na noção geométrica de área e de multiplicação aritmética. Em relação à teoria $\Theta_{5.4.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.4.1}, \theta_{5.4.1}, \Theta_{5.4.1}]$.

Para a resolução da subtarefa $t_{5.4}$, os estudantes E_{11} e E_{12} apresentaram a resposta correta, mas com a justificativa que consideramos equivocada. A figura seguinte ilustra a resposta das estudantes.

Figura 72 - Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{5.4}$



Fonte: acervo do autor (2022).

A soma da área dos quadrados não justifica a resposta, ao determinar a medida da área do quadrado construído na Etapa 3. Entendemos que essa explicação poderia ser usada ao determinar a medida da área total da figura (item 6 da tarefa), mas os estudantes não recorreram a essa justificativa.

Por fim, os estudantes E_3 e E_4 apresentaram a resposta correta, mas com valor aproximado e na forma decimal. Destacamos que a dupla não descreveu nenhuma explicação para obter essa solução. Assim, não conseguimos identificar um quarteto praxeológico para a resposta dos estudantes.

Elaboramos o Quadro 21, com base no quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes nas resoluções da tarefa t_5, no qual buscamos relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Quadro 21 – Elementos da BNCC relacionados à tarefa t_5

(Continua)

Estudantes	**Técnica τ**	**Habilidades relacionadas**	**Tecnologia θ**	**Objetos de conhecimento relacionados**	**Teoria Θ**	**Unidades temáticas relacionadas**
E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (6 participantes)	$\tau_{5.1.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações, como determinar medida de terrenos.	$\theta_{5.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção geométrica de área e noção de multiplicação aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Área de figuras planas.	$\Theta_{5.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Continua)

E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$\tau_{5.2.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações, como determinar medida de terrenos.	$\theta_{5.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção geométrica de área e noção de multiplicação aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Área de figuras planas.	$\Theta_{5.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Continua)

E_1; E_2 e E_3; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (7 participantes)	$\tau_{5.3.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado. $\tau_{5.3.2}$: Identificar a relação de recorrência entre a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 e o quadrado construído na etapa anterior e dividir a medida da área do quadrado construído por 2.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações, como determinar medida de terrenos.	$\theta_{5.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção geométrica de área e noção de multiplicação aritmética. $\theta_{5.3.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção geométrica de área, relação de recorrência e divisão aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. Área de figuras planas.	$\Theta_{5.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Conclusão)

E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{15} e E_{16}. (7 participantes)	$\tau_{5.4.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações, como determinar medida de terrenos.	$\theta_{5.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção geométrica de área e noção de multiplicação aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação. Área de figuras planas.	$\Theta_{5.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

Fonte: o autor (2022).

Com o Quadro 21, podemos observar, com base nas praxeologias empregadas pelos estudantes para a resolução das subtarefas do Tipo de tarefa T_5, a mobilização de habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Podemos notar, por exemplo, a mobilização das seguintes habilidades:

> (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (BRASIL, 2018, p. 279).
> [...] (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (BRASIL, 2018, p. 307).
> [...] (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações, como determinar medida de terrenos (BRASIL, 2018, p. 315).

Tais habilidades estão associadas com a técnica multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado. Para o emprego dessa técnica, compreendemos que o estudante precisa reconhecer o elemento figural quadrado e ter conhecimento da noção geométrica de área e de multiplicação aritmética. Dessa forma, entendemos que, com base nessas noções, ocorre a mobilização dos seguintes objetos de conhecimento:

> Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação (BRASIL, 2018, p. 278).
> [...] Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais (BRASIL, 2018, p. 306).
> [...] Área de figuras planas (BRASIL, 2018, p. 314).

Os objetos de conhecimento supramencionados estão descritos nas unidades temáticas Números, Geometria, e Grandezas e medidas, respectivamente.

Em relação à subtarefa $t_{5.5}$, os estudantes não conseguiram empregar uma técnica para resolvê-la. Sendo assim, não foi possível relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas para essa subtarefa.

Na sequência, apresentamos o Quadro 22, contendo a análise *a posteriori* das praxeologias do tipo de tarefa T_6, referente à tarefa t_6.

Quadro 22 - Análise *a posteriori* do Tipo de Tarefa T_6

(Continua)

Tipo de Tarefa T_6	Generalizar o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_6	Construir uma fórmula para o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Estudantes	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (6 participantes)	$t_{6.1}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{6.1.1}$: Considerar a medida da área do quadrado encontrada no item anterior.	$\theta_{6.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção geométrica de área.	$\Theta_{6.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_6 e E_7. (2 participantes) E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}. (4 participantes)	$t_{6.2}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{6.2.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0). $\tau_{6.2.2}$: Somar a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0).	$\theta_{6.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação e soma aritmética. $\theta_{6.2.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de soma aritmética.	$\Theta_{6.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_1; E_6 e E_7. (3 participantes)	$t_{6.3}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{6.3.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 4 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 1).	$\theta_{6.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{6.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_1; E_6 e E_7. (3 participantes)	$t_{6.4}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{6.4.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 8 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 2).	$\theta_{6.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{6.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

(Conclusão)

E_6 e E_7. (2 participantes)	$t_{6.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida total da área da figura na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{6.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.	$\theta_{6.5.1}$: Noção de relação de recorrência.	$\Theta_{6.5.1}$: Álgebra.

Fonte: o autor (2022).

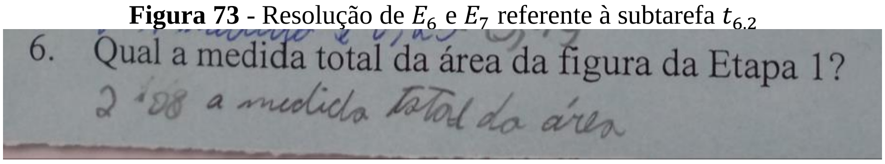
No que se refere ao que é apresentado no Quadro 22, verificamos que, para a subtarefa da tarefa $t_{6.1}$, os estudantes E_4 e E_5; E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} apresentaram a solução correta, com a técnica *multiplicar a medida de um lado do quadrado vezes a medida do outro lado do quadrado*. Ressaltamos que as soluções desse item também correspondem ao mesmo item da subtarefa $t_{5.1}$.

Deste modo, os estudantes E_4 e E_5; E_6 e E_7; e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{6.1.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{6.1.1}, \Theta_{6.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{6.1.1}$ ampara-se na noção geométrica de área e de multiplicação aritmética. No que diz respeito à teoria $\Theta_{6.1.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.1.1}, \theta_{6.1.1}, \Theta_{6.1.1}]$.

Os estudantes E_1; E_8; E_{11} e E_{12}; e E_{13} e E_{14} apresentaram a resposta correta, mas da mesma forma que na subtarefa $t_{5.1}$, consideramos as justificativas inadequadas, e por esse motivo, não enquadramos a resposta em um quarteto praxeológico.

Para a resolução da subtarefa $t_{6.2}$, os estudantes E_6 e E_7 apresentaram a resposta correta, mas não é possível identificar a técnica empregada. A seguir apresentamos a resposta da dupla:

Figura 73 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{6.2}$

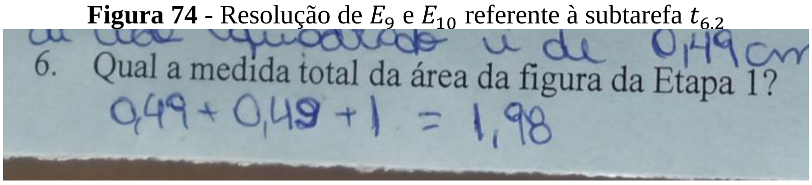


Fonte: acervo do autor (2022).

Com base nas respostas que os estudantes E_6 e E_7 apresentaram no mesmo item para as etapas posteriores, intuímos que, possivelmente, eles utilizaram a mesma estratégia, *multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0).* Dessa forma, os estudantes E_6 e E_7 empregaram a técnica $\tau_{6.2.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{6.2.1}, \Theta_{6.2.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{6.2.1}$ pauta-se na noção de multiplicação e soma aritmética. No que se refere à teoria $\Theta_{6.2.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.2.1}, \theta_{6.2.1}, \Theta_{6.2.1}]$.

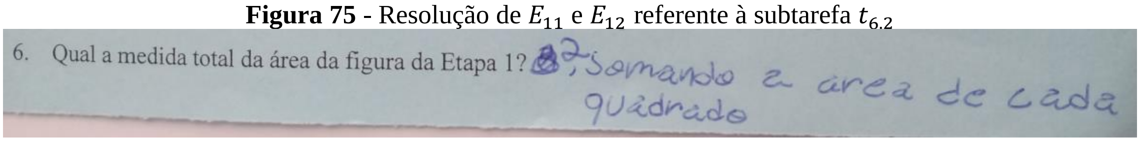
Sobre os estudantes E_9 e E_{10}; e E_{11} e E_{12}, eles apresentaram resoluções corretas, com o emprego da soma aritmética da área de todos os quadrados. Nesse sentido, não havíamos previsto essa técnica em nossa análise *a priori*, e para essa técnica, identificamos o quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.2.2}, \theta_{6.2.2}, \Theta_{6.2.2}]$. A técnica empregada pelas duplas é ilustrada na seguinte figura:

Figura 74 - Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{6.2}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 75 - Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{6.2}$

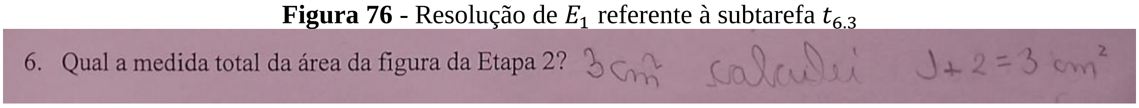


Fonte: acervo do autor (2022).

Assim, as estudantes E_9 e E_{10}; e E_{11} e E_{12} empregaram a técnica $\tau_{6.2.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{6.2.2}, \Theta_{6.2.2}]$, em que a tecnologia $\theta_{6.2.2}$ pauta-se na noção de soma aritmética. Em relação à teoria $\Theta_{6.2.2}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes somaram a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa, e depois somaram com a medida da área total da etapa anterior. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.2.2}, \theta_{6.2.2}, \Theta_{6.2.2}]$.

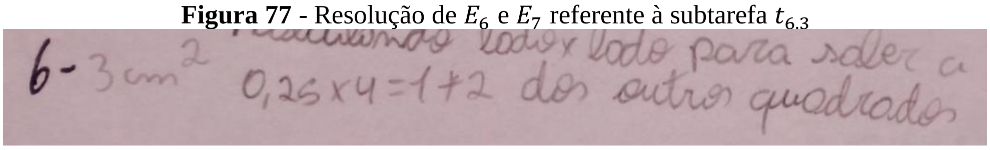
No que se refere à subtarefa $t_{6.3}$, os estudantes E_1; E_6 e E_7 apresentaram resoluções conforme previmos em nossa análise. A seguir apresentamos as respostas dos estudantes:

Figura 76 - Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{6.3}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Figura 77 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{6.3}$



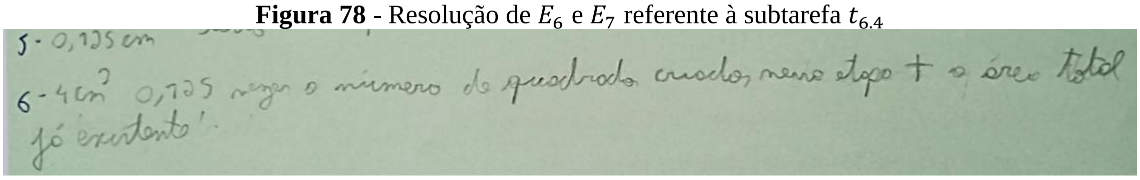
Fonte: acervo do autor (2022).

Conforme o que foi exposto, é possível observar que os estudantes E_1; E_6 e E_7 empregaram a técnica $\tau_{6.3.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{6.3.1}, \Theta_{6.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{6.3.1}$ ampara-se na noção de multiplicação e soma aritmética. No que se refere à teoria $\Theta_{6.3.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes utilizaram a multiplicação para determinar a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa, e depois somaram com a medida da área total da etapa anterior. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.3.1}, \theta_{6.3.1}, \Theta_{6.3.1}]$.

Cabe destacar que os estudantes E_{15} e E_{16} apresentaram apenas a resposta correta, sem evidenciar a estratégia utilizada. Dessa forma, não conseguimos identificar um quarteto praxeológico para essa solução.

No que concerne à subtarefa $t_{6.4}$, os estudantes E_1; E_6 e E_7 apresentaram resoluções conforme previmos em nossa análise. Os estudantes descreveram justificativas idênticas para esse item da tarefa e, portanto, na figura seguinte, apresentamos apenas a resolução da dupla E_6 e E_7:

Figura 78 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{6.4}$


5 - 0,125 cm
6 - 4cm² 0,125 vezes o número de quadrados criados nessa etapa + a área total já existente'.

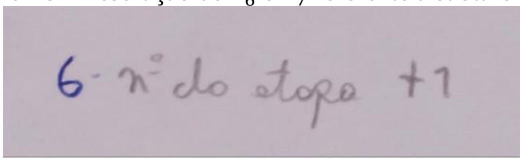
Fonte: acervo do autor (2022).

É possível observar que os estudantes justificaram que multiplicaram o valor *0,125* (medida do lado do quadrado construído nessa etapa) pelo número de quadrados construídos na etapa, e somam com a medida da *área total já existente*. Assim, os estudantes E_1; E_6 e E_7 empregaram a técnica $\tau_{6.4.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{6.4.1}, \Theta_{6.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{6.4.1}$ fundamenta-se na noção de multiplicação e soma aritmética. Com relação à teoria $\Theta_{6.4.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Aritmética, a Geometria, e Grandezas e medidas, pois os estudantes utilizaram a multiplicação para determinar a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa, e depois somaram com a medida da área total da etapa anterior. Por conseguinte, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.4.1}, \theta_{6.4.1}, \Theta_{6.4.1}]$.

Salientamos que os estudantes E_4 e E_5; E_8; E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}; e E_{15} e E_{16} apresentaram a resposta correta, mas não evidenciaram a estratégia utilizada. Em vista disso, não conseguimos identificar um quarteto praxeológico para as soluções dos estudantes.

Por último, para a subtarefa $t_{6.5}$, apenas os E_6 e E_7 apresentaram uma solução, e ela corresponde à resposta prevista na análise *a priori*. A seguir, apresentamos a resposta da dupla:

Figura 79 - Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{6.5}$



Fonte: acervo do autor (2022).

Como é possível observar, os estudantes E_6 e E_7 conseguiram empregar a técnica $\tau_{6.5.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{6.5.1}, \Theta_{6.5.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{6.5.1}$ embasa-se na noção de relação de recorrência. No que diz respeito à teoria $\Theta_{6.5.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra, pois os estudantes reconheceram um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escreveram algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer. Em vista disso, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_6, \tau_{6.5.1}, \theta_{6.5.1}, \Theta_{6.5.1}]$.

Elaboramos o Quadro 23, com base no quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes nas resoluções da tarefa t_6, no qual buscamos relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Quadro 23 - Elementos da BNCC relacionados à tarefa t_6

(Continua)

Estudantes	Técnica τ	Habilidades relacionadas	Tecnologia θ	Objetos de conhecimento relacionados	Teoria Θ	Unidades temáticas relacionadas
E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (6 participantes)	$\tau_{6.1.1}$: Considerar a medida da área do quadrado encontrada no item anterior.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora.	$\theta_{6.1.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção geométrica de área.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.	$\Theta_{6.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria e Números.

(Continua)

E_6 e E_7. (2 participantes) E_9 e E_{10}; E_{11} e E_{12}. (4 participantes)	$\tau_{6.2.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0). $\tau_{6.2.2}$: Somar a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0).	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.	$\theta_{6.2.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de multiplicação e soma aritmética. $\theta_{6.2.2}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado* e noção de soma aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	$\Theta_{6.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.
E_1; E_6 e E_7. (3 participantes)	$\tau_{6.3.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 4 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 1).	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.	$\theta_{6.3.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação e soma aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	$\Theta_{6.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.

(Conclusão)

E_1; E_6 e E_7. (3 participantes)	$\tau_{6.4.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 8 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 2).	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.	$\theta_{6.4.1}$: Conhecimento do elemento figural *quadrado*, noção de multiplicação e soma aritmética.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	$\Theta_{6.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.	Geometria, Grandezas e medidas e Números.
E_6 e E_7. (2 participantes)	$\tau_{6.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	$\theta_{6.5.1}$: Noção de relação de recorrência.	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	$\Theta_{6.5.1}$: Álgebra.	Álgebra.

Fonte: o autor (2022).

Em relação ao que é apresentado no Quadro 23, podemos observar, com base nas praxeologias empregadas pelos estudantes para a resolução das subtarefas do Tipo de tarefa T_6, a mobilização de habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas preconizadas na BNCC.

Em vista disto, para o emprego da técnica de identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer, compreendemos que ocorreu a mobilização da habilidade "(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas" (BRASIL, 2018, p. 307).

Para o emprego da técnica já mencionada, o estudante deve ter conhecimento da noção de relação de recorrência. Assim, compreendemos que ocorre a mobilização do objeto de conhecimento "Linguagem algébrica: variável e incógnita" (BRASIL, 2018, p. 306), descrito na unidade temática Álgebra.

Cabe ressaltar que, para o emprego da técnica $\tau_{6.1.1}$, que deve *considerar a medida da área do quadrado encontrada no item anterior*, entendemos que o estudante precisa ter conhecimento do elemento figural quadrado e da noção geométrica de área. Dessa forma, identificamos as teorias Aritmética, Geometria, e Grandezas e medidas, por entendermos que regem as noções mobilizadas para o emprego da técnica $\tau_{6.1.1}$. Apesar disso, não foi possível identificar habilidades e objetos de conhecimentos descritos na BNCC que tivessem relação com a teoria Grandezas e medidas de nossa análise *a priori*.

No decorrer de nossas análises, identificamos os elementos da BNCC que possuem relação com as praxeologias dos estudantes. Vale ressaltar que as técnicas e as tecnologias identificadas em nossas análises contemplam parcialmente os elementos descritos no documento normativo.

A seguir, como forma de esclarecer esse raciocínio, apresentamos uma explicação para técnica empregada pelos estudantes e a respectiva habilidade relacionada: *Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0)*. Para essa técnica, compreendemos que o estudante mobiliza a habilidade "(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos" (BRASIL, 2018, p. 279), pois é necessário que o estudante identifique o elemento figural quadrado. Contudo, a respectiva subtarefa não exige *identificar* e *nomear* as demais figuras planas (círculo, retângulo e triângulo) descritas na habilidade EF01MA14. Por esse motivo, compreendemos que a técnica contempla a habilidade citada de forma parcial. A seguir, apresentamos nossas considerações finais e reflexões.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E REFLEXÕES

Este estudo foi motivado pelo seguinte problema de pesquisa: *quais habilidades e objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias preconizados na Base Nacional Comum Curricular - BNCC são mobilizados por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra?* Desse modo, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático - TAD como aporte teórico-metodológico, que foi fundamental e permitiu a elaboração de uma Organização Praxeológica com o objetivo de explorar algebricamente o fractal Árvore Pitagórica.

Com base no problema de pesquisa, realizamos uma revisão de literatura que possibilitou concluir a existência de uma concentração de estudos voltados para as Geometrias Euclidianas. Por outro lado, foi possível evidenciar a necessidade de trabalhos envolvendo as Geometrias Não Euclidianas, em especial a Geometria dos Fractais, visto que não foram encontrados trabalhos a respeito do assunto, quando procurados pelos termos *Teoria Antropológica do Didático* e *Geometria dos Fractais*, ao mesmo tempo, ou por *Teoria Antropológica do Didático* e *Geometria Fractal*. Em relação à TAD, as pesquisas apontam que a teoria forneceu elementos para realizar análises de materiais, bem como para a modelação de situações de ensino.

Embasamo-nos em pressupostos metodológicos da Engenharia Didática - ED para delinear esta investigação. Tal metodologia de pesquisa permitiu realizar um estudo aprofundado a respeito do fractal Árvore Pitagórica, a elaboração de uma sequência de tarefas propiciadas pela TAD, a implementação do processo didático, e a análise *a posteriori* e validação das hipóteses de pesquisa. A TAD auxiliou na identificação das praxeologias matemáticas, permitindo a modelização dos quartetos praxeológicos.

Após a implementação, pudemos analisar as praxeologias mobilizadas pelos estudantes. Deste modo, no que se refere à análise *a posteriori* dos elementos da tarefa t_1, foi possível concluir que a OM empregada pelos estudantes para as subtarefas $t_{1.1}, t_{1.2}, t_{1.3}$ e $t_{1.4}$, do Tipo de tarefa T_1, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*. Em relação à subtarefa $t_{1.5}$, os estudantes não conseguiram mobilizar uma técnica para resolvê-la. Logo, não foi possível identificar um quarteto praxeológico e nem relacionar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas para essa subtarefa. A mesma situação aconteceu para as subtarefas $t_{3.5}$, $t_{4.5}$ e $t_{5.5}$.

Acerca da análise *a posteriori* da tarefa t_2, concluímos que a OM empregada pelos estudantes para as subtarefas $t_{2.1}, t_{2.2}, t_{2.3}$ e $t_{2.4}$, do Tipo de tarefa T_2, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*.

No que se refere à subtarefa $t_{2.5}$, os estudantes E_6 e E_7 mobilizaram uma técnica que não havíamos previsto em nossas análises. Diante disso, foi possível identificar o quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.5.2}, \theta_{2.5.2}, \Theta_{2.5.2}]$. Cabe destacar que os estudantes identificaram uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e a quantidade de quadrados construídos na etapa, ao invés de identificarem uma relação numérica entre a quantidade total de quadrados e os níveis do fractal.

A respeito da análise *a posteriori* da tarefa t_3, foi possível concluir que a OM empregada pelos estudantes para as subtarefas $t_{3.1}$ e $t_{3.4}$, do Tipo de tarefa T_3, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*.

Com relação às subtarefas $t_{3.2}$ e $t_{3.3}$, identificamos quartetos praxeológicos que não havíamos previsto em nossas análises. Como exemplo, podemos citar o quarteto praxeológico $[T_3, \tau_{3.2.2}, \theta_{3.2.2}, \Theta_{3.2.2}]$, em que os estudantes E_9 e E_{10} empregaram a técnica de reconhecer o *triângulo retângulo* formado pela altura e por metade da hipotenusa do triângulo do modelo gerador, utilizar os *eixos* e a *malha* para identificar a medida da altura e da hipotenusa, aplicar o Teorema de Pitágoras, e operar números racionais. Vale destacar o emprego que os estudantes fizeram dos recursos do GeoGebra, de modo a auxiliar na resolução da subtarefa.

No que se refere à análise *a posteriori* dos elementos da tarefa t_4, concluímos que a OM empregada pelos estudantes para as subtarefas $t_{4.1}, t_{4.2}, t_{4.3}$ e $t_{4.4}$, do Tipo de tarefa T_4, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*. Para as subtarefas $t_{4.1}$ e $t_{4.4}$, além dos quartetos praxeológicos previstos na análise *a priori*, ocorreu o emprego de somar a medida de todos os lados do quadrado, de modo que identificamos dois novos quartetos praxeológicos, $[T_4, \tau_{4.1.2}, \theta_{4.1.2}, \Theta_{4.1.2}]$ e $[T_4, \tau_{4.4.2}, \theta_{4.4.2}, \Theta_{4.4.2}]$.

No que diz respeito à análise *a posteriori* dos elementos da tarefa t_5, foi possível concluir que a OM empregada pelos estudantes para as subtarefas $t_{5.1}, t_{5.2}, t_{5.3}$ e $t_{5.4}$, do Tipo de tarefa T_5, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*. A única subtarefa em que ocorreu a mobilização de um quarteto praxeológico que não previmos em nossa análise foi a subtarefa $t_{5.3}$. Nessa subtarefa, os estudantes E_2 e E_3 empregaram a técnica de identificar a relação de recorrência entre a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 e o quadrado construído na etapa anterior, e dividir a medida da área do quadrado construído por 2. Nesse sentido, identificamos o quarteto praxeológico $[T_5, \tau_{5.3.2}, \theta_{5.3.2}, \Theta_{5.3.1}]$.

No que concerne à análise *a posteriori* dos elementos da tarefa t_6, concluímos que a OM empregada pelos estudantes para todas as subtarefas do Tipo de tarefa T_6 foi validada, devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*. Destacamos que, para a subtarefa $t_{6.5}$, apenas os estudantes E_6 e E_7 apresentaram uma solução. A técnica empregada por eles foi identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.

Ressaltamos que os estudantes foram orientados a explicitar as estratégias utilizadas nas resoluções das tarefas, mas apresentaram dificuldades em expor sua forma de pensar. Tal prática impossibilitou de identificar técnicas empregadas para resolver parte das subtarefas.

No interesse de aprofundar os estudos a respeito do objeto fractal Árvore Pitagórica, encontramos na TAD um suporte metodológico-teórico na identificação das praxeologias matemáticas, de forma que estabelecemos uma relação entre os quartetos praxeológicos e os elementos da BNCC.

Identificamos que as técnicas empregadas na OM nos direcionam às habilidades; analogamente, as tecnologias utilizadas para justificar as técnicas podem indicar objetos de conhecimento da matemática; e por fim, as teorias que regem as tecnologias conduzem às unidades temáticas. É possível notar uma associação entre a técnica e a habilidade, mas de modo que não são idênticas. A técnica indica a manifestação parcial das habilidades. Além disso, é possível interpretar que as teorias associadas às unidades temáticas não são necessariamente aquelas apresentadas nos livros didáticos da Educação Básica, mas em textos produzidos por instituições do saber sábio.

Cabe destacar uma concentração de habilidades e objetos de conhecimento identificados na análise praxeológica e descritos na área de Matemática e suas Tecnologias sugeridos na BNCC para o Ensino Fundamental, uma vez que essa área constante na BNCC para o Ensino Médio não possibilitou fazer tal investigação. O motivo é que as competências específicas e habilidades nela descritas não estão relacionadas com as técnicas e as tecnologias, tal qual as habilidades e objetos de conhecimento do documento do Ensino Fundamental, visto que se apresentam de um modo mais amplo, visando à prática do estudante como cidadão em formação profissional, diferentemente das especificidades contidas na BNCC do Ensino Fundamental.

As habilidades descritas na BNCC para o Ensino Médio direcionam ao emprego de procedimentos, conceitos e estratégias para interpretar situações em diversos contextos, como questões socioeconômicas ou tecnológicas e fatos das Ciências da Natureza e Humanas. Ainda sugerem a proposição e participação de ações que investigam os desafios do mundo, a tomada de decisões éticas e socialmente responsáveis, articulando procedimentos e conceitos da Matemática.

Salientamos que o software GeoGebra teve contribuição pertinente, no que se refere à construção da Árvore Pitagórica, além de se apresentar com um bom recurso para auxiliar no entendimento dos aspectos geométricos relacionados à visualização e às explorações matemáticas advindas desse fractal.

Por fim, consideramos que a Organização Praxeológica implementada e analisada nesta pesquisa pode ser incrementada nas aulas Matemática, proporcionando trabalho com a Geometria dos Fractais. Dessa forma, entendemos que a abordagem da Geometria dos Fractais pode contribuir com o ensino e a aprendizagem dessa componente em diferentes anos de ensino, uma vez que, em nossa investigação, foi possível perpassar diversas habilidades e objetos de conhecimentos propostos pela BNCC.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, G. dos A. **Polígonos regulares inscritos no círculo**: uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, MT, 2012a.

ALMEIDA, E. A. M. de. **Progressões aritméticas e geométricas**: praxeologias em livros didáticos de matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, MT, 2012b.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. Didactic engineering: evolution and diversity. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, p. 22, 2012.

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana:** praxeologias matemáticas no ensino médio. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Belém, PA, 2007.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal:** para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BBC NEWS. **Science photo library**. 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301. Acesso: 30 jan. 2022.

BENITO, R. N. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores**: o ensino de cônicas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2019.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez. 2017, p. 364-387.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal**: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pós-Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

CARVALHO, D. G. de. **Uma análise da abordagem da grandeza da área no figuras planas no guia de estudo do Projovem Urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático**. Recife. Dissertação (mestrado) - UFPE, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, PE, 2012.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques :** l'approche anthropologique. IUFM d'Aix-Marseille, 1998.

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Org.) **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. 1 ed. Curitiba_PR: CRV, 2018, p. 31-50.

CIABOTTI, V. **Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade**: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos**. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2015.

CURSOS MEC. **Diferença entre competências e habilidades**. YouTube, 2018. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JdFgXCQAebc. Acesso em: 09 maio 2022.

DIAS, M. A.; SANTOS JÚNIOR, V. B. dos. Elementos da Teoria Antropológica do Didático para Análise das Propostas Institucionais Brasileiras e Metodologias de Atividades e Percursos de Estudo e Pesquisa. In: ALMOULOUD, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Org.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. 1ed.Curitiba: CRV, 2018, p. 523-550.

FARIAS, K. S. C. dos S. **A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2008.

FERREIRA, L. de F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental**: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, CE, 2018.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2016.

FERREIRA, E. F. P. **A integração das tecnologias digitais ao ensino e aprendizagem de geometria no ensino fundamental – anos finais**: uma proposta com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas planas. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2016.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica:** “Construção do plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2011.

FRACTAL MATEMÁTICO. **Samambaia**. 2011. Disponível em: http://fractalmatematico.blogspot.com/2011/09/o-que-e-um-fractal.html. Acesso: 30 jan. 2022.

FRANÇA, E. M. de. **Origami Euclidiano**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, CE, 2016.

FRATUCCI, V. M. **Uma organização praxeológica para a construção de medidas de perímetro e área do fractal Ilha de Koch**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, PR, 2022.

FREITAS, M. V. C.; BITTAR, M. O Ensino de Volumes dos Sólidos Geométricos em Livros Didáticos do Ensino Médio Sob a Ótica da TAD. In: **1º Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemética**, 2016, Bonito-MS. Anais - Trabalhos 1º LADIMA, 2016.

FREITAS, R. L. **A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura**: um estudo da função exponencial. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2015.

GEOGEBRA. Disponível em: www.geogebra.org. Acesso em: 30 jan. 2022.

GEOGEBRA. Classic. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 30 jan. 2022.

HAYASHI, A. D. **Aplicação dos fractais ao mercado de capitais utilizando-se as Elliott Waves**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

JESUS, G. B. de. **As construções geométricas e a gênese instrumental**: o caso da mediatriz. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2012.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Metodologia do trabalho científico**: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos. 4 ed. São Paulo: Atlas, 1992.

LUZ, V. de A. **Um estudo sobre o Ensino de Transformações Geométricas**: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

MARTINS, A. M. S. M.; LIBRANTZ, A. F. H. A geometria fractal e suas aplicações em arquitetura e urbanismo. **Exacta**, v. 4, n. Esp, p. 91-93, 2006.

MINEIRO, R. M. **Estudo das três dimensões do problema didático de inequações**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2019.

MORAN, M.; REZENDE, V. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 8, n. 15, p. 109-127, 2020. DOI: 10.5965/2357724X08152020109. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/17141. Acesso em: 6 nov. 2022.

NEVES JÚNIOR, C. A. **Análises dos conteúdos de sistemas de representação no curso de licenciatura em expressão gráfica da UFPE à luz da teoria antropológica do didático**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

O BLOG DO MESTRE. **Bom Cultivo**. 2022. Disponível em: https://www.oblogdomestre.com.br/2021/10/Fractais.BrocolisRomanesco.Plantas.Mandelbrot.Matematica.html. Acesso: 30 jan. 2022.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria**: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2010.

PARANÁ. Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: Sistema Estadual de Ensino do Paraná, 2021. Disponível: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf. Acesso em: 26 jan. 2022.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008.

PEREIRA, T.; BORGES, F. A. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. In: **Acta Scientiae**. V.19, n.4, p.563-581, jul./ago. 2017.

PESCINI, A. E. **Uma organização praxeológica da Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, PR, 2021.

REZENDE, V.; MORAN, M.; MÁRTIRES, T. M.; PAIXÃO, F. C. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, p. 160, 2018.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema Função**: uma investigação das praxeologias. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006.

SALES, A. **Práticas argumentativas no estudo da geometria de acadêmicos de Licenciatura em Matemática**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2010.

SANTOS, C. M.; FREITAS, L. M. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v.13, n.27, p. 51-66, 2017.

SANTOS, C. M. dos. **Possibilidades e limitações de micropercursos de estudo e pesquisa em geometria**: uma experiência de formação continuada com professores da rede pública. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2019.

SANTOS, M. R. dos. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental**: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2015.

SEDIVY, R.; WINDISCHBERGER, C.; SVOZIL, K.; MOSER, E.; BREITENECKER, G. Fractal analysis: an objective method for identifying atypical nuclei in dysplastic lesions of the cervix uteri. **Gynecologic Oncology**, v. 75, n. 1, p. 78-83, 1999.

SILVA, J. V. G. da. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2011.

VALENTE, J. A. Usos do Computador na Educação. In: VALENTE, J. A. (Org) **Liberando a Mente**: Computadores na Educação Especial. Campinas, SP: UNICAMP, p. 16-31, 1991.

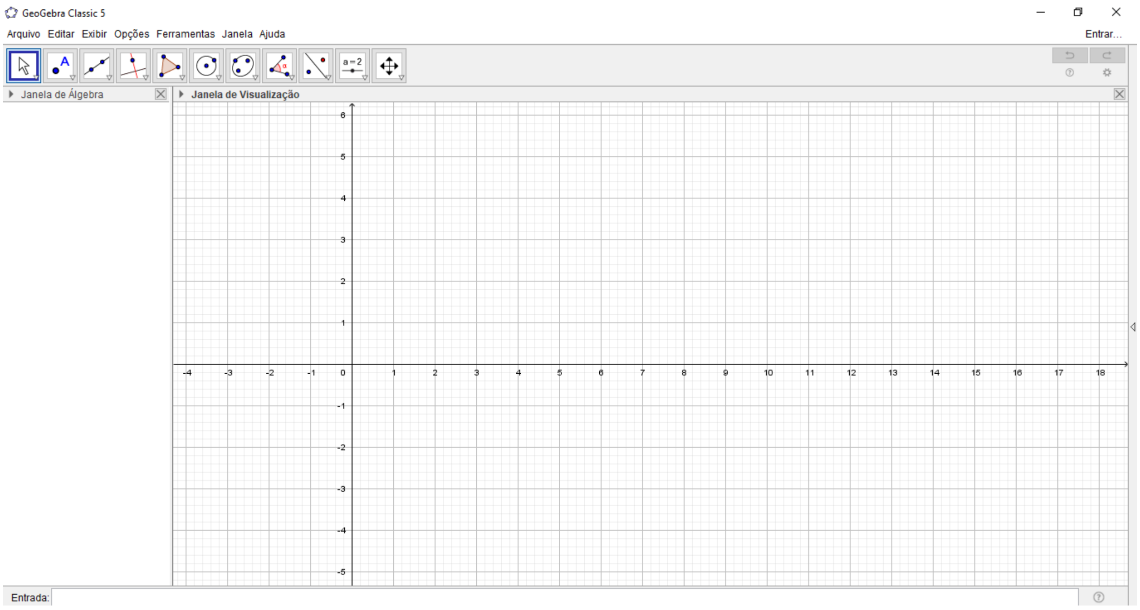
VARELLA, M. **Prova e demonstração na geometria analítica**: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2010.

WIKIPÉDIA. **Conjunto de Mandelbrot**. 2018. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal. Acesso: 30 jan. 2022.

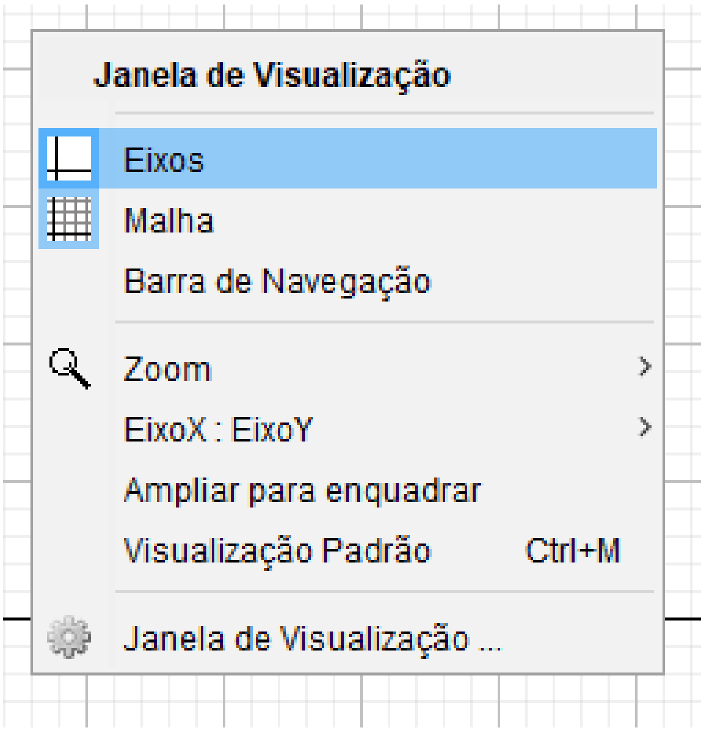
APÊNDICES

APÊNDICE A - Tutorial para a construção do Fractal Árvore Pitagórica (triângulo isósceles)

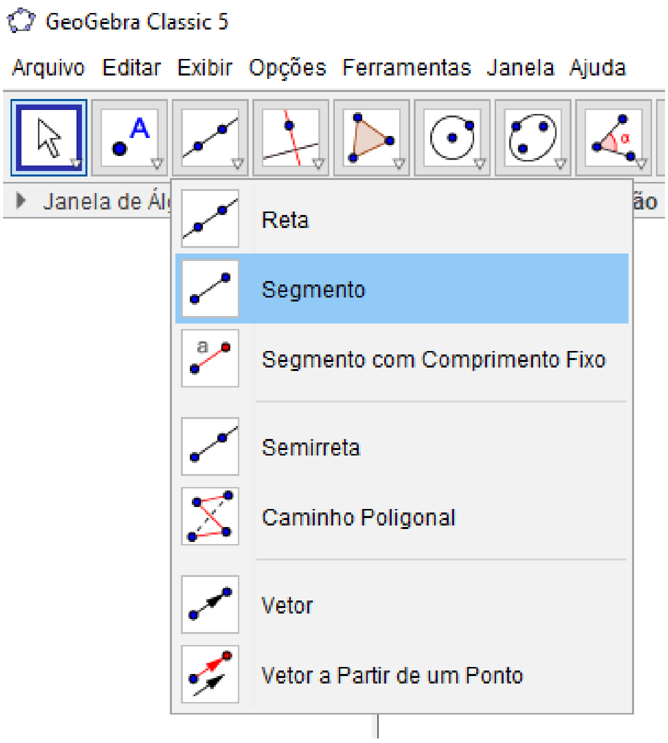
Passo 1: Abra o software GeoGebra.



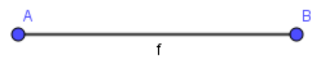
Passo 2: Com a ferramenta *Mover* selecionada, clique com o botão direito do mouse sobre a *Janela de Visualização*. Em seguida, aparecerá uma caixa de opções e clique em *Eixos*, para ocultá-los. Clique novamente com o botão direito do mouse sobre a *Janela de Visualização*. Em seguida, na caixa de opções clique na opção *Malha*, para ocultar a malha quadriculada.



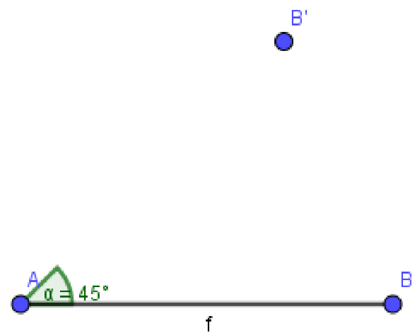
Passo 3: No terceiro ícone da *Barra de ferramentas*, selecione a ferramenta *Segmento*.



Passo 4: Na *Janela de Visualização*, construa um segmento de qualquer medida.

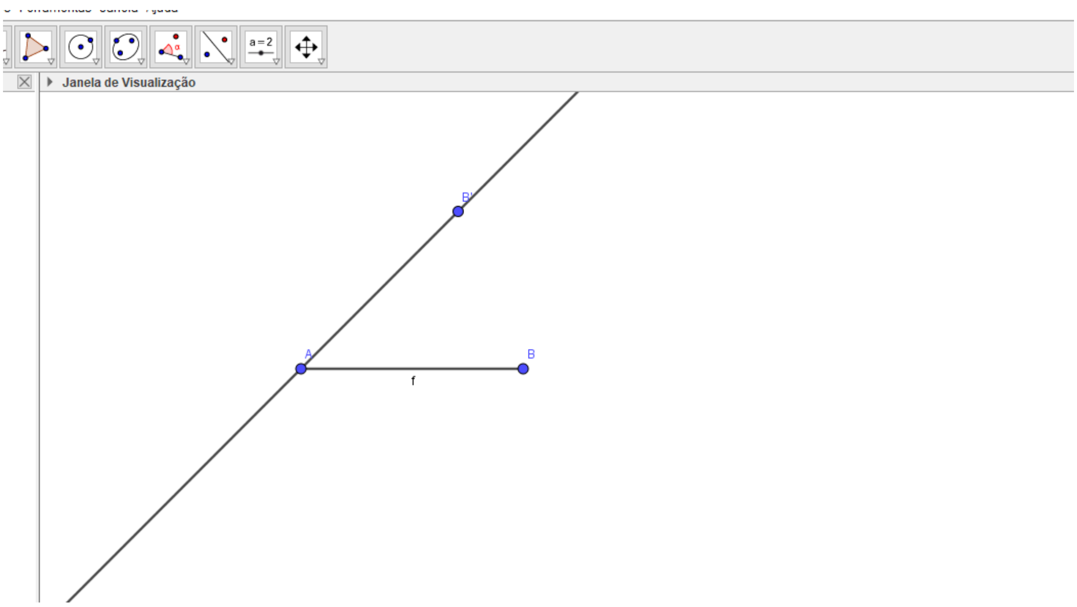


Passo 5: No oitavo ícone da *Barra de ferramentas*, selecione a ferramenta *Ângulo com amplitude fixa*. Em seguida, clique sobre o segmento criado, e na caixa de diálogo, digite 45°; selecione a opção *anti-horário* e clique em *OK*.

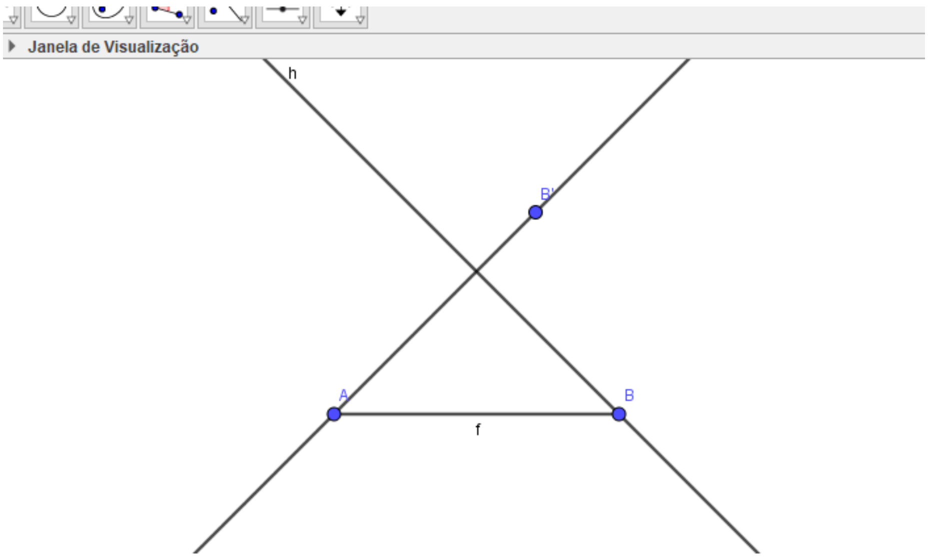


Passo 6: Na *Janela de álgebra*, oculte o ângulo criado.

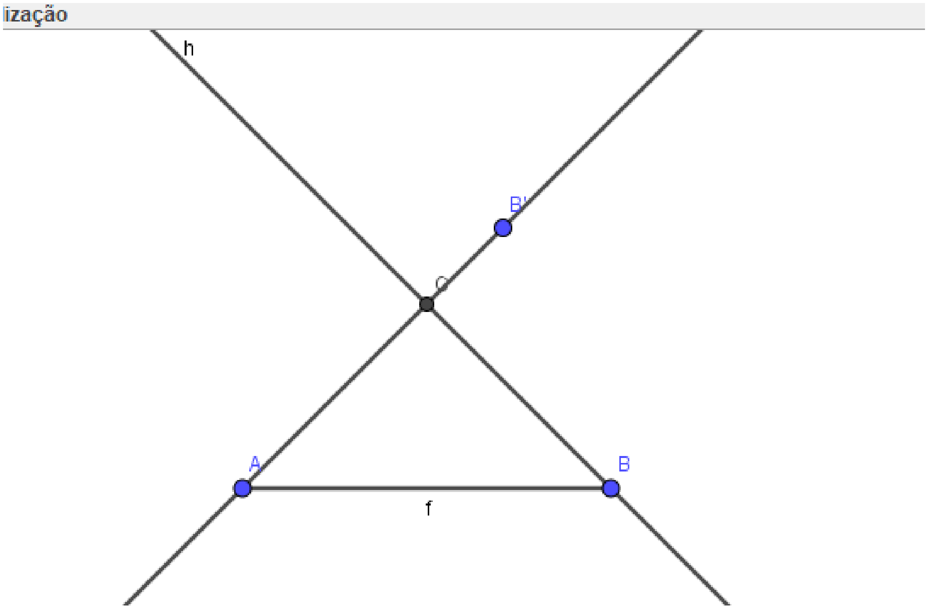
Passo 7: No terceiro ícone da *Barra de ferramentas*, selecione a ferramenta *Reta*, em seguida, clique no ponto A e no ponto B'.



Passo 8: No quarto ícone da *Barra de ferramentas*, selecione a ferramenta *Reta perpendicular*. Em seguida, clique sobre a reta g e depois sobre o ponto B.

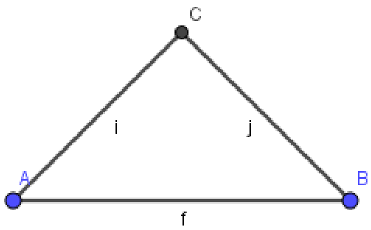


Passo 9: No segundo ícone da *Barra de ferramentas*, selecione a ferramenta *Interseção de dois objetos*. Em seguida, clique sobre a reta g e a reta h.

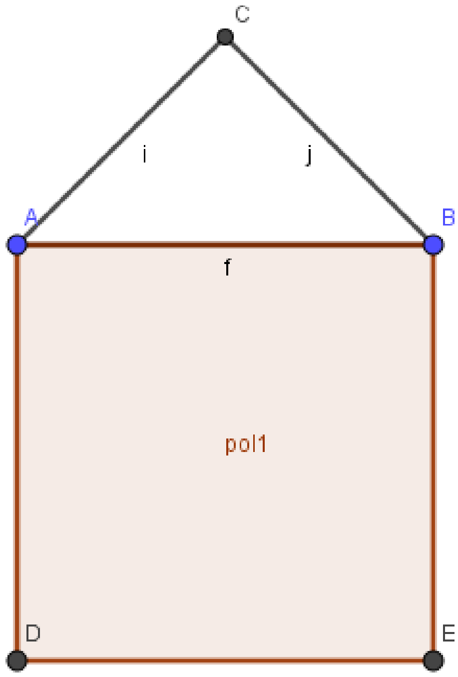


Passo 10: Na *Janela de álgebra*, oculte o ponto B’ e as retas g e h.

Passo 11: Selecione a ferramenta *Segmento*, crie um segmento ligando o ponto A e o ponto C, e outro segmento ligando o ponto C e o ponto B.

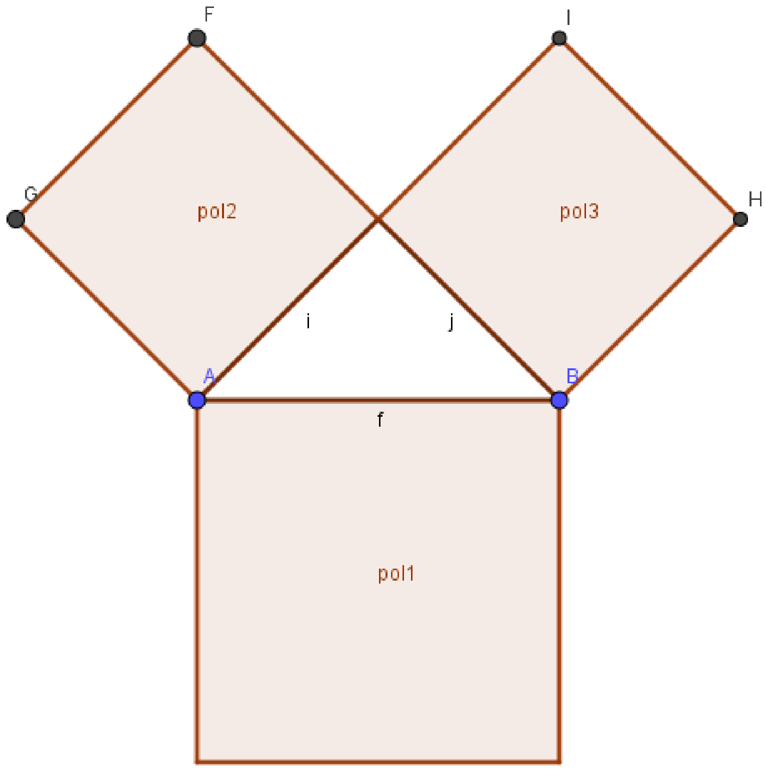


Passo 12: No quinto ícone da *Barra de ferramentas*, selecione a ferramenta *Polígono regular*. Em seguida, clique no ponto B e depois no ponto A, para criar um polígono no sentido anti-horário, para que fique fora do triângulo. Na caixa de diálogo, digite 4 e clique em *OK*.



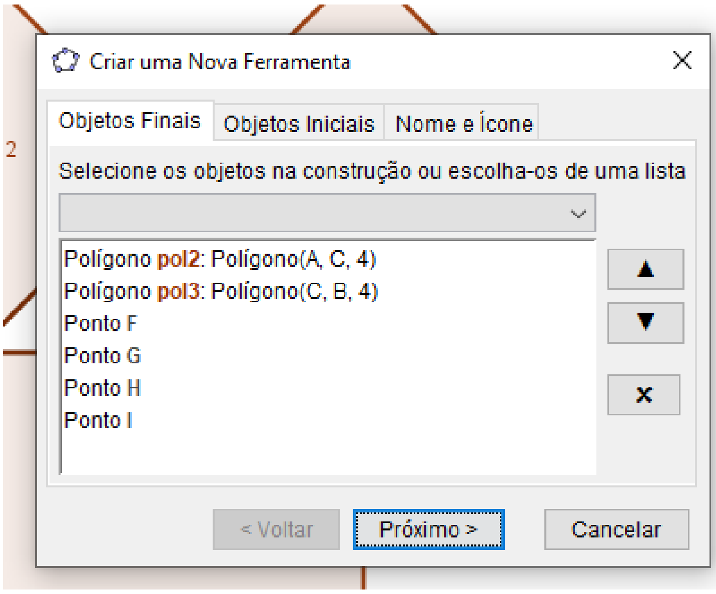
Passo 13: Ainda com a ferramenta *Polígono regular*, crie mais dois quadrados, o primeiro clicando no ponto C e depois no ponto B; e o segundo clicando no ponto A e depois no ponto C.

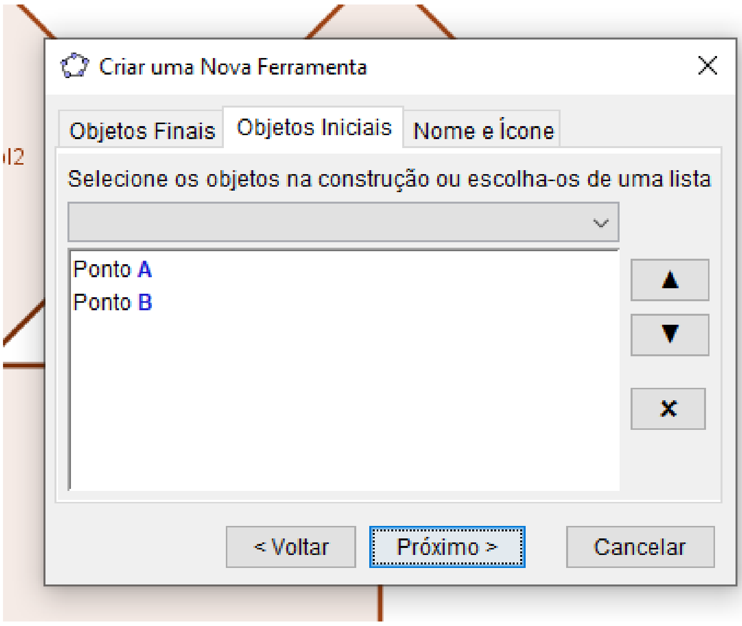
Passo 14: Selecione a ferramenta *Mover*, e com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto C. Na caixa de opções, selecione a opção *Exibir objeto* para ocultar o ponto C. Repita o mesmo procedimento para ocultar os pontos D e E.

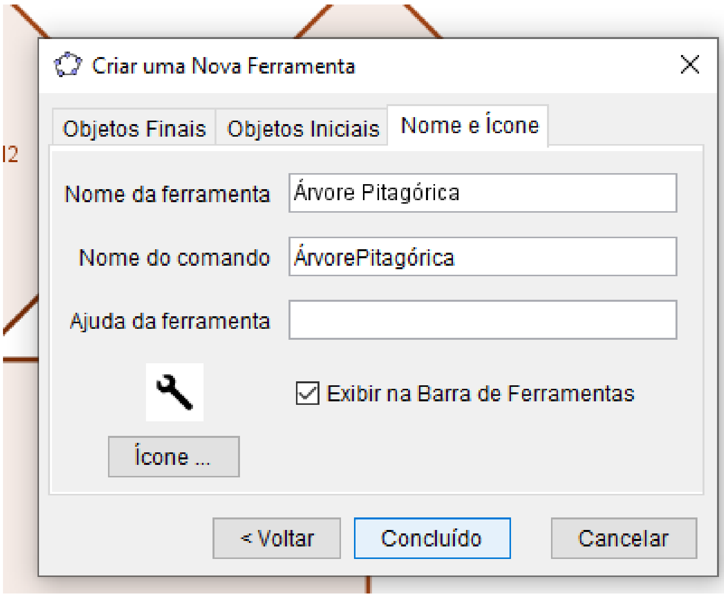


Passo 15: Na *Barra de menu*, clique em *Ferramenta* e selecione a opção *Criar uma nova ferramenta*.

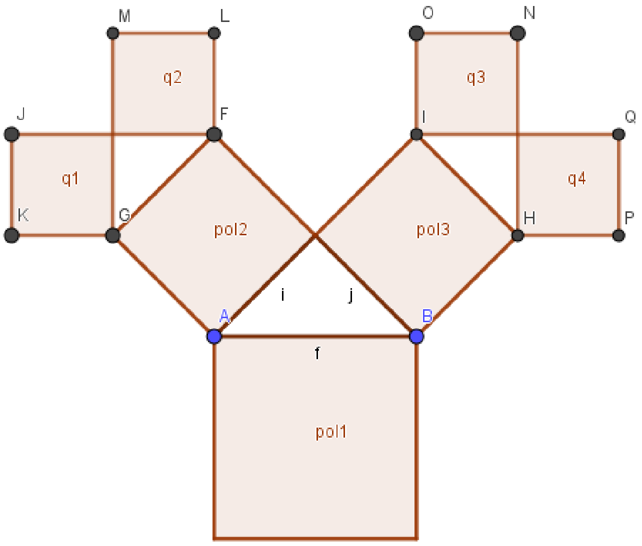
Passo 16: Na caixa de diálogo e na opção *Objetos Finais*, selecione os polígonos 2 e 3, e os pontos F, G, H e I. Em seguida, clique em *Próximo* e na opção *Objetos Iniciais* selecione os pontos A e b. Clique novamente em *Próximo*, nomeie a ferramenta como **Árvore Pitagórica** e clique em *Concluído*.

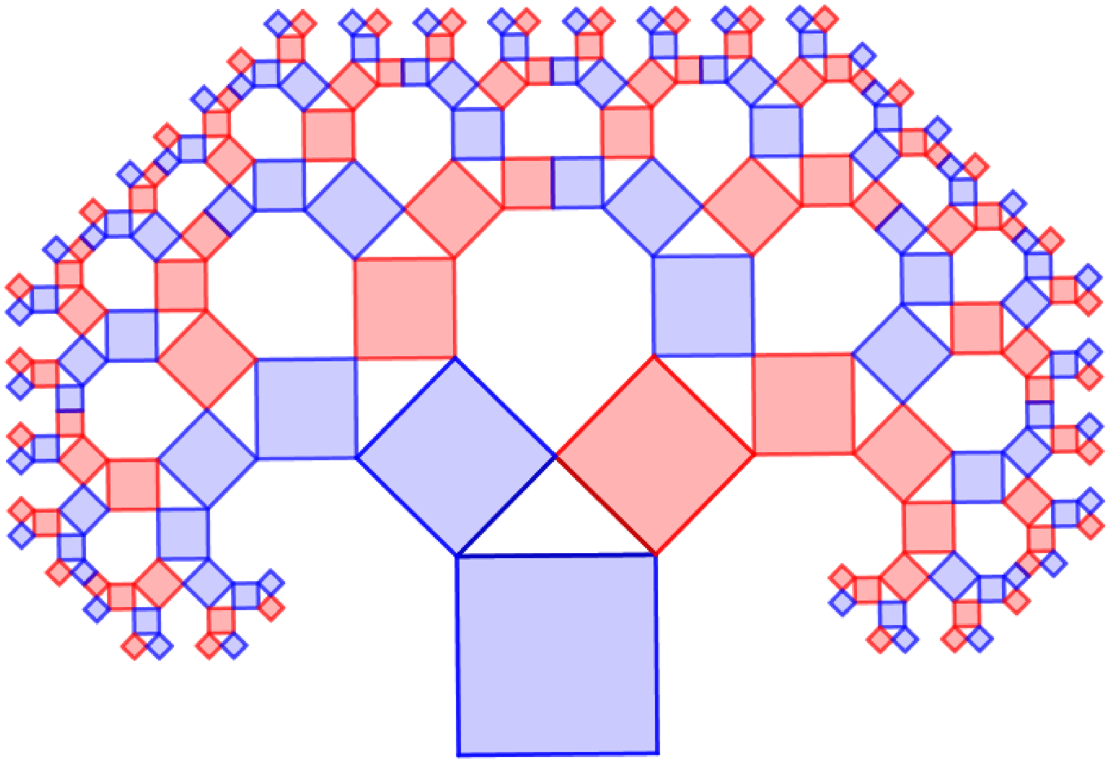






Passo 17: Selecione a nova ferramenta criada, clique no ponto I e depois no ponto H. Em seguida, clique no ponto G e no ponto F. Para cada nova interação, é necessário selecionar dois pontos distintos, respeitando o sentido anti-horário.


M
L
O
N
q2
q3
J
F
I
Q
q1
q4
K
G
pol2
pol3
H
P
i
j
A
B
f
pol1



APÊNDICE B – Tarefas da sequência didática

Estudante:

Estudante:

ETAPA 0

1. Qual a quantidade de quadrados na Etapa 0?
2. Considere o número 1 (um), como a medida do lado do quadrado. Qual a medida do perímetro do quadrado da Etapa 0?
3. Qual a medida da área do quadrado da Etapa 0?

Estudante:

Estudante:

ETAPA 1

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 1?
2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa 1?
3. Qual a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 1?
4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 1?
5. Qual a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 1?
6. Qual a medida total da área da figura da Etapa 1?

Estudante:

Estudante:

ETAPA 2

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 2?
2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa 2?
3. Qual a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 2?
4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 2?
5. Qual a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2?
6. Qual a medida total da área da figura da Etapa 2?

Estudante:

Estudante:

ETAPA 3

1. Qual a quantidade de quadrados construídos na Etapa 3?
2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa 3?
3. Qual a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 3?
4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 3?
5. Qual a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 3?
6. Qual a medida total da área da figura da Etapa 3?

Estudante:

Estudante:

ETAPA N

Considerando uma Etapa *n*, responda aos seguintes questionamentos, justificando sua resposta:

1. Qual a quantidade total de quadrados construídos nessa etapa?
2. Qual a quantidade total de quadrados na Etapa *n*?
3. Qual a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa *n*?
4. Qual a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa *n*?
5. Qual a medida da área de cada quadrado construído na Etapa *n*?
6. Qual a medida total da área da figura da Etapa *n*?

APÊNDICE C – Tabela para os resultados de cada Etapa

Etapa	Nº de quadrados construídos em cada etapa	Nº total de quadrados em cada etapa	Medida do lado de cada quadrado construído (cm)	Medida do perímetro de cada quadrado construído (cm)	Medida da área de cada quadrado construído (cm^2)	Medida total da área da figura em cada etapa (cm^2)
0						
1						
2						
3						
:	:	:	:	:	:	:

N						