UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO E O CUISENAIRE FÍSICO E DIGITAL

Ingrid Ponvequi Oliveira

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

Campo Mourão,

2022

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO E O CUISENAIRE FÍSICO E DIGITAL

Ingrid Ponvequi Oliveira

Orientadora:
Maria Ivete Basniak, Dra.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, Diversidade e Cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

Campo Mourão
Março de 2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Ingrid Ponvequi
Frações na perspectiva de medição e o cuisenaire físico e digital / Ingrid Ponvequi Oliveira. -- Campo Mourão-PR,2023.
86 f.: il.

Orientador: Maria Ivete Basniak.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2023.

1. Matemática-Ensino. 2. Medida. 3. Barras Cuisenaire. 4. Frações. I - Basniak, Maria Ivete (orient). II - Título.

Ingrid Ponvequi Oliveira

FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO E O CUISENAIRE FÍSICO E DIGITAL

Comissão Examinadora:

Dra. Maria Ivete Basniak – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná

Dra. Nilce Fatima Scheffer - Membro da Banca
Universidade Federal da Fronteira Sul

Sérgio C. Dantas

Dr. Sérgio Carrazedo Dantas - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: APROVADA

Campo Mourão
Março de 2023

RESUMO

O estudo está alicerçado nas frações como medida e no uso das Barras Cuisenaire, seguindo a questão norteadora: Há diferentes contribuições no uso das barras Cuisenaire físicas e digitais para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição? Se sim, quais? Para responder à questão, foi assumida a perspectiva qualitativa de pesquisa de cunho interpretativo. A pesquisa foi realizada em uma escola pública no interior do Paraná com 6 alunos do 7º ano, também contando com dados empíricos utilizados na análise advindos de vídeos e transcrições de gravações de aulas desenvolvidas no modelo do Ensino Remoto de Emergência em uma escola pública estadual do interior do Paraná, com 22 alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Os estudos revelam que, atualmente, o ensino de frações se baseia na perspectiva de partição, no modelo que *fração é parte de um todo*, trazendo problemas epistemológicos assentes dos conceitos dos Números Naturais. A perspectiva adotada neste estudo refere que, para a compreensão dos Números Racionais, é preciso entender suas interpretações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador, que necessitam ser ensinadas durante o Ensino Fundamental e Ensino Médio, e indicam o ensino de frações como medida. Esta interpretação coincide com a gênese histórica das frações, que emergiu da necessidade de medir quantidades contínuas, sendo imprescindível estabelecer uma unidade de medida para realizar comparações multiplicativas, e a equivalência de frações é fundamentada na magnitude numérica. O estudo é amparado por Rabardel (1995), que desenvolveu a perspectiva teórico-metodológica chamada Gênese Instrumental, utilizada com intuito de olhar o desempenho do sujeito (aluno) mediado por um artefato (Cuisenaire físico e digital) que, utilizando esquemas mentais, transforma o artefato em instrumento para resolver tarefas propostas. As análises evidenciaram que os alunos, ao manusearem e compararem, identificaram diferenças entre as barras e perceberam suas relações, desenvolveram conceitos matemáticos a respeito do conteúdo de frações. Também compreenderam a diferença de magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, além de estabelecerem as relações multiplicativas. Em relação à Gênese Instrumental, as barras físicas e digitais não são somente um artefato em que são visualizados atributos de cores e tamanhos, mas se transformam em um artefato que foi usado para medir, e que contribuiu para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição~~.~~ Além disso, permitiram ao aluno utilizar estratégias em que as barras assumem posição de instrumento para realizar as medidas conforme os objetivos das tarefas, e assim, por meio de esquemas de utilização, tornam-se instrumentos utilizados na aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo de fração.

Palavras-chave: Frações; Barras Cuisenaire; Medida.

ABSTRACT

The study is grounded on fractions as measures and the usage of Cuisenaire Rods, following the guiding question: Are there different contributions in the use of physical and digital Cuisenaire rods for learning fractions in the measurement perspective? What? To answer the question, qualitative perspective was assumed in the interpretative research. Research was carried out in a public school localized in Paraná countryside with 6 students enrolled in the 7th grade, also with empirical data used in the analyses which come from video and transcripts of class recordings developed in the Remote Emergence Teaching Model Ensino in a public school in Paraná countryside, with 22 students at Elementary School 6th grade. Studies reveal that currently teaching fractions is based on the partition perspective, in a model in which *fraction is part of a whole*, bringing epistemological problems grounded in Natural Numbers concept. The perspective adopted in this study refers that to understand of Rational Numbers, understanding their interpretations is necessary: measure, part-whole, quotient, ratio, and operator, which need to be taught during the Elementary School and High School, and indicate teaching fraction as measure. This interpretation meets the historical genesis of fractions, which emerged from the need for measure continuous quantities, and it is paramount to establish a measure unity to perform multiplicative comparisons, also fractions equivalence is grounded on numerical magnitude. The study is based on the work by Rabardel (1995), who developed the theoretical-methodological perspective called Instrumental Genesis, used look at the performance of the subject (student) mediated by an artifact (physical and digital Cuisenaire), who when using mental schemes, transforms the artifact into an instrument to solve proposed tasks. Analyses made evident that students, when manipulating and comparing, identified differences among rods and noticed out their relation, developed mathematic conceptions on the fraction contents. They also understood the difference between numerical magnitude of natural numbers regarding fraction ones, further established multiplicative relations. Regarding Instrumental Genesis, physical and digital rods are not only an artifact in which attributes such as colors and sizes are visualized, but they are transformed into an artifact that was used to measure and which contributed for learning fractions in the measurement perspective. Besides, they allowed the student using strategies in which rods assume position of instrument to perform measurements according to the task's objectives, and then through usage schemes, they become instruments used for student's learning regarding the fraction content.

Keywords: Fractions; Cuisenaire Rods; Measure.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCT	Discussão Coletiva da Tarefa
IT	Introdução da Tarefa
MD	Materiais Didáticos
OMS	Organização Mundial da Saúde
OMS	Organização Mundial da Saúde
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
RT	Realização da Tarefa
SAM	Sistematização das Aprendizagens Matemáticas
TD	Tecnologias Digitais

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A pesquisadora, durante a realização de estágios de regência, participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e Residência Pedagógica em sua graduação, vivenciou experiências positivas junto aos alunos da Educação Básica, ao adotar metodologias de ensino que permitiram alcançar os objetivos planejados para sua aula. Entretanto, também conheceu aspectos negativos do ambiente escolar, como a infraestrutura, o desinteresse dos alunos, a falta de participação dos pais e as dificuldades dos alunos referentes ao ensino e à aprendizagem em relação ao conteúdo de frações. Assim, o aprendizado do aluno é um anseio da, hoje, professora e pesquisadora, e foi o principal fator que motivou a autora a desenvolver a presente pesquisa.

Há linhas da Educação Matemática investigam alternativas e metodologias para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos (GODOY, 2015; PINTO, 2005). Essas linhas buscam uma Matemática que esteja ao alcance de todos os alunos, porque se almeja "[...] um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulações de ideias" (PARANÁ, 2008, p. 48).

No que se refere à aprendizagem e ensino de frações, pesquisadores têm voltado esforços em busca de entender as falhas e entraves no ensino e na aprendizagem, apontando ideias e abordagens possíveis para superar as dificuldades (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c). Powell (2018a, p. 79) evidencia a importância do entendimento de frações, ressaltando-o como um dos conhecimentos notáveis em razão de desempenhar papel importante, não apenas para a vida escolar do aluno, influenciando seu futuro acadêmico e social, sendo "crucial para a justiça social e o alcance da equidade social". Desse modo, negligenciar essa temática afeta a aprendizagem do aluno para apreensão de estudos posteriores, também para a aprendizagem da Álgebra (BAILEY *et al*., 2012; TORBEYNS *et al*., 2014; POWELL, 2018a; 2020).

Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983), Escolano (2007) e Lamon (2012) discutem os Números Racionais sob diferentes perspectivas: medida, parte-todo, quociente, operador e razão. O ensino brasileiro tem se apoiado predominantemente na perspectiva parte-todo (SCHEFFER; POWELL, 2019SI), que segundo alguns autores (BERTONI, 2008; POWELL, 2018a; POWELL, 2019a) podem gerar problemas aprendizagem.

É comum professores relacionarem essa perspectiva à divisão de alimentos, objetos do cotidiano, o que não contribui para a aprendizagem de frações, pois essas relações implicam em "[...] um desafio conceitual é que a divisão em partes iguais de um objeto não atribui significado a uma fração imprópria, uma fração cujo numerador é maior que o seu denominador" (POWELL, 2019b, p. 702). Logo, os alunos não compreendem frações impróprias, como $\frac{5}{4}$, pois não entendem como ter 5 partes de um objeto que é divido em 4. Existe, ainda, a dificuldade cognitiva referente ao quesito de partes iguais: "contar partes não-congruentes para nomear uma fração de um terço em um círculo que está dividido ao meio e dois quartos" (NI; ZHOU, 2005, p. 29).

Em relação a sala de aula, a aula expositiva, que consiste na transmissão de informações e conceitos pelos professores para os alunos, ainda predomina no ensino de matemática (PONTE, 2005). D'Ambrósio (1989) exemplifica essa questão citando uma sala de aula na qual o professor explica o conteúdo no quadro e o aluno faz uma cópia em seu caderno. Assim, no decorrer da aula, o docente transcreve para os discentes exercícios de fixação, acreditando que eles aprenderão por meio da reprodução, sendo evidenciada a "realização de atividades com repetição dos procedimentos por parte dos alunos" (FRANKE; KAZEMI; BATTEY, 2007, p. 256).

Sob o olhar do aluno, a Matemática se resume em padrões e regras, como se representasse uma *receita* (SILVA; CABRAL; SALES, 2018). Para Berh *et al.* (1983), alguns alunos apresentam dificuldades na aprendizagem porque há ênfase nas habilidades procedimentais para Números Racionais na grade escolar, e que o "desempenho geralmente ruim pode ser um resultado direto dessa ênfase curricular nos procedimentos, em vez do desenvolvimento cuidadoso de importantes entendimentos funcionais" (BERH *et al.*, 1983, p. 92).

Porém, diferentes metodologias e materiais para o ensino de frações, como Régua de Frações, Barras Cuisenaire, jogos e softwares podem auxiliar o professor a assumir papel de mediador, e o aluno, o de protagonista do seu aprendizado (BRASIL, 1998; PARANÁ, 2008).

Portanto, a habilidade matemática, é potencializada se o estudante "for sujeito a uma experiência matemática rica e diversificada, em que lhe seja possível refletir através da realização de tarefas tais como resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos" (BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 254). Consequentemente, o aluno torna-se instruído para sanar diversas situações-problema e pode refletir sobre desenvolver noções matemáticas em diversas situações (BOTAS; MOREIRA, 2013).

Botas e Moreira (2013) afirmam, em seus estudos, que um dos modos de impulsionar variadas experiências de aprendizagem matemática é por meio do material didático, o qual desempenha papel importante na matemática abstrata/complexa. Utilizar material didático apropriado permite a interação do aluno com o material, pois desperta o interesse e implica em situações de aprendizagem. Isto porque "os materiais podem constituir um suporte físico através do qual as crianças vão explorar, experimentar, manipular e desenvolver a observação" (BOTAS; MOREIRA, p. 254, 2013). Além disso, diversos estudiosos, como

> Castelnuovo, Dienes, Montessori e Gattegno já defendiam o uso de materiais didáticos no ensino da Matemática e, desde então, a utilização de materiais tem vindo não só a ser sustentada por psicólogos e educadores, como também fortemente veiculada nos currículos e programas de Matemática em diferentes países (BOTAS; MOREIRA, p. 254, 2013).

O docente precisa ter conhecimento sobre como utilizar esses materiais, e atualmente, também recursos associados às Tecnologias Digitais (TD). A tecnologia está em constante evolução, presente no cotidiano da sociedade, sendo seu uso indispensável para o trabalho humano. No ensino, o uso de recursos tecnológicos adequados pode facilitar a prática do professor em diversos aspectos, como chamar atenção dos alunos e deixar a aprendizagem mais interativa, além de ajudar na visualização dos conteúdos. Partindo disso, Guimarães (2015) salienta que é possível ampliar seu uso, e uma das suas possibilidades de utilização é no processo de ensino e de aprendizagem da matemática.

A partir disso, a(s) questão(ões) problema(s) que impulsionou(aram) esta pesquisa: *Há diferentes contribuições no uso das barras Cuisenaire físicas e digitais para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição? Em caso afirmativo, quais?* Com base nas pesquisas de Powell (2018b), que trabalha com as barras de Cuisenaire Físicas; e de Oliveira (2021), que desenvolveu sua pesquisa com o Cuisenaire digital, delineou-se o seguinte objetivo geral de pesquisa: Investigar diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição. Logo, para responder à questão-problema, delinearam-se os objetivos específicos:

- Compreender as diferenças e as similaridades entre Cuisenaire digital e físico;
- Compreender as diferenças entre as barras Cuisenaire e os demais materiais para o ensino de frações; e
- Analisar contribuições das barras Cuisenaire físicas e digitais para o ensino e aprendizagem de frações.

Apresentamos o Cuisenaire físico e digital no Capítulo 1 desta dissertação e aprofundamos as discussões sobre as diferentes perspectivas de frações, com ênfase na perspectiva de fração como medida adotada por Powell (2018b), que propõe o estudo de fração como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o Brasil se encontrou em meio à pandemia ocasionada pelo Sars CoV-2, denominada Coronavírus ou Covid-19. A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomendou o distanciamento social devido à alta dissipação do vírus, a fim de reduzir a contaminação entre a população. Dessa forma, foram necessárias mudanças de hábitos e comportamentos em todos os campos. Nesse cenário pandêmico, nas escolas do Paraná, os professores precisaram adaptar suas aulas para que ocorressem remotamente. Esse fato intensificou a necessidade e a importância do uso da tecnologia digital no ensino, e métodos e metodologias educacionais diferentes dos tradicionais, requerendo enorme dedicação e empenho de professores e alunos. Algumas instituições utilizaram a proposta do envio do material impresso para os alunos que não possuíam acesso à internet, e outras por realizar atividades por meio de videoconferências, utilizando plataformas digitais, como *Google Meet, Google Drive*.

O ensino de frações nesse período, de modo remoto e utilizando esses recursos, foi investigado (OLIVEIRA, 2020)[1] por meio de tarefas de natureza exploratória, utilizando o material Cuisenaire digital para ensinar frações na perspectiva de medição para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Esses trabalhos foram alicerce desta dissertação, pois utilizamos os dados coletados pela professora/pesquisadora em nossas análises, além dos coletados pela própria pesquisadora, que desenvolveu as mesmas tarefas adaptadas para o Cuisenaire físico com alunos de uma turma do 7° ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública localizada no interior do Paraná, quando as aulas já haviam retornado para o modo presencial, mas com as normas estabelecidas de distanciamento entre cada aluno e professor.

No capítulo 2, tratamos mais detalhadamente quanto ao contexto e coleta dos dados da pesquisa e sobre a Gênese Instrumental, que sustenta as análises e resultados das tarefas e aulas desenvolvidas, que se encontram no Capítulo 3. Por fim, apresentamos nossas conclusões e considerações finais que respondem à nossa problemática.

[1] A dissertação de Oliveira ainda se encontra no prelo. Como possui formato multipaper, a autora já publicou três capítulos, os quais estamos utilizando como dados de pesquisa.

CAPÍTULO 1 – ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS RACIONAIS

Uma das limitações da aprendizagem está centrada no ensino baseado em regras e em procedimentos/métodos, pois se orienta em preceitos de normas, e não em que o aluno consiga entender e abstrair o significado do conteúdo que está estudando. O ensino dos Números Racionais com esse método não favorece que os discentes compreendam que os Naturais são utilizados para a contagem e os Racionais para medir. Logo, os estudantes não compreendem o rompimento do vínculo do conjunto dos Naturais com suas propriedades e noções (DONEDA DE OLIVEIRA; BASNIAK, 2021a).

Segundo Kieren (1976, p. 109-110, tradução nossa) os Números Racionais possuem diferentes interpretações e relações:

> 1. Os números racionais são frações, que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.
> 2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (pelo nosso sistema numérico) para os números inteiros.
> 3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ...\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, ...\}$ são números Racionais.
> 4. Os números racionais são números na forma $\frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e q $\neq 0$. Nessa forma, os números Racionais são números de "proporção".
> 5. Os números racionais são operadores multiplicativos.
> 6. Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$.
> 7. Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica.

Kieren (1976) também discute que a falta de compreensão pelos alunos acerca dos Números Racionais pode estar relacionada à forma como são trabalhados, utilizando exercícios de memorização de procedimentos como, por exemplo, na adição de frações com denominadores diferentes, em que se calcula o mínimo múltiplo comum entre seus denominadores, e utiliza-se o famoso jargão: *divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima*.

Para Kieren (1980), é preciso fornecer experiências por meio de uma diversidade de situações nas quais os alunos têm pouca vivência, principalmente relacionadas à mudança de conjunto numérico, como medir quantidades contínuas, incluindo aquelas que podem ser divididas, também em comparações quantitativas.

Powell (2018b) realizou um estudo em que os alunos tiveram inicialmente o contato com frações na perspectiva medida, utilizando as *Barras Cuisenaire*[2]. O autor verificou que "os participantes se apropriaram da ideia de magnitude de frações-de-quantidade com base nas imagens evocadas das barras e, por si mesmo, construindo expressões de comparações fracionárias" (POWELL, 2019b, p. 50).

Entretanto, publicações brasileiras "fundamentam-se em autores que se referem à construção do conceito e da noção de fração, principalmente aqueles que estabelecem relação com a interpretação parte-todo" (SCHEFFER; POWELL, 2020, p. 18).

Assim, a dificuldade dos alunos em compreender frações pode estar relacionada à perspectiva de ensino adotada, como discutimos na subseção que segue.

1.1 Ensino e Aprendizagem dos Números Racionais

Para Behr *et al.* (1983, p. 91), "os conceitos de número racional estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante seus anos de ensino pré-secundário". Segundo os autores, as ideias matemáticas associadas aos Números Racionais podem ser vistas em três perspectivas: prática, psicológica e matemática.

A perspectiva prática é aquela em que a compreensão do conceito de Número Racional desenvolve competências nos alunos que auxiliam a resolver problemas do dia a dia: "a capacidade de lidar efetivamente com esses conceitos e aumenta enormemente a capacidade da criança de entender e lidar com situações e problemas no mundo real" (BEHR *et al*., 1983, p. 91).

A perspectiva psicológica desenvolve a capacidade do intelecto do aluno, e confirma que "os Números Racionais fornecem uma arena rica dentro da qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual contínuo" (BEHR *et al*., 1983, p. 91).

A perspectiva matemática salienta que a compreensão do conjunto dos Racionais é base para entendimentos e fundamentos para novos conceitos, inclusive de operações elementares (BEHR *et al*., 1983).

Enquanto os Números Naturais estão presentes no dia a dia das crianças, porque estão relacionados ao princípio da contagem, os Números Racionais nem sempre estão, pois são relacionados às diferentes representações, como as dízimas periódicas, os decimais e a

[2] As informações sobre as barras de *Cuisenaire* estão detalhadas no Capítulo 2.

porcentagem. Além disso, os alunos não estão acostumados com termos relacionados a frações, como *quinto*, *quarto*, etc. (KIEREN, 1980).

De acordo com Lamon (2012), o sentido de frações e Números Racionais é um assunto complexo que confunde professores e alunos. A razão para isso é que todo Número Racional pode ser escrito na forma de fração, mas nem todo número escrito em forma de fração pertence aos Números Racionais (ROCHA, 2013). A fração é um Número Racional, quando escrita na forma $\frac{a}{b}$, em que: a e b são números naturais e b é diferente 0. Porém, se substituirmos o valor de a ou de b por um número irracional, a fração não representa um número racional. Entretanto, a fração para representar o conjunto dos Irracionais não é comumente usada (SILVA, 2005).

Powell (2018b) reafirma a complexidade das frações, salientando ser seu conceito um dos conhecimentos matemáticos notáveis, pois conforme avançamos na escolarização, sua compreensão se torna importante e está presente em conteúdos mais avançados de matemática. Segundo o autor, negligenciar esse conteúdo traz implicações negativas na aprendizagem da Álgebra, pois os Racionais são uma base para esse ramo da Matemática (POWELL, 2018b). Isso influencia no futuro acadêmico, profissional e social dos alunos.

Logo, compreende-se que frações são um conceito complexo, considerando sua relação com as diversas interpretações/ideias, as quais servem de apoio para a compreensão dos Racionais, como discutimos a seguir.

1.2 Interpretações das frações

Kieren (1980) organizou as interpretações de frações como: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador. Para o autor, a relação parte-todo é pertinente quando se tem um todo que é dividido em partes *iguais*.

A interpretação razão corresponde a "comparações quantitativas de duas qualidades" (KIEREN, 1980, p. 135, tradução nossa). Em outras palavras, refere-se a comparações multiplicativas entre duas quantidades de grandezas iguais ou diferentes. Ela inclui noções de equivalência e classe de equivalência. Essa última relação exige a habilidade da criança em "lidar com a equivalência simbolicamente e de 'transferir' conceitos de linha numérica para esses números de proporção" (KIEREN, 1976, p. 116, tradução nossa).

Na interpretação quociente, existe vínculo com a parte-todo. Contudo, o quociente baseia-se em quotização, pois utiliza a ideia de que "o número total de elementos de cada grupo já está definido e o que temos que determinar é o número de grupos que podem ser constituídos com o todo" (ROCHA, 2013, p. 40). Portanto, há uma quantidade de elementos que precisa ser distribuída com uma quantidade mínima a determinado grupo. A quotização anuncia a ideia de qual seria a quantidade possível para se distribuir nesse grupo, por exemplo: Pablo quer dividir quarenta balas distribuídas em saquinhos contendo quatro unidades. Quantos amigos ele conseguiria presentear? A interpretação parte-todo se diferencia por dividir o todo de maneira igual.

Na interpretação medida, há relação entre parte-todo, mas utiliza a unidade como contínua ou discreta. Sendo assim, divide o todo em iguais tamanhos, mas a medida é usada para medir algo e depois separá-la em tamanhos adequados.

> [...] as tarefas de medição significam a atribuição de um número a uma região (tomada aqui no sentido geral desta palavra; pode ser 1-, 2- ou tridimensional ou ter alguma outra característica). Isso geralmente ocorre por meio de uma iteração do processo de contagem do número de unidades inteiras utilizáveis para "cobrir" a região e, em seguida, subdividir igualmente uma unidade para fornecer o ajuste apropriado. O foco aqui está na unidade arbitrária e sua subdivisão, e não nas relações parte-todo (KIEREN, 1980, p. 136, tradução nossa).

Por último, Kieren (1980, p. 137, tradução nossa) ressalta que a interpretação do operador "concentra a atenção nos Racionais como elementos da álgebra de funções. A composição de operadores fornece uma base muito simples para a multiplicação de números Racionais", e retrata os Racionais "[...] como mecanismos que mapeiam um conjunto (ou região) multiplicativamente em outro conjunto". O autor esclarece, ainda, que o operador remete à ideia de função.

Berh *et al.* (1983) realizaram uma redefinição dos estudos de Kieren (1976) sobre as interpretações das frações, as quais denominaram subconstrutos.

> 1) O subconstruto da razão do número racional expressa uma relação entre duas quantidades.
> 2) O subconstruto da taxa do número racional define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades.
> 3) O subconstruto quociente do número racional interpreta um número racional como um quociente indicado. Ou seja, $\frac{a}{b}$ é interpretado como a dividido por b.
> 4) O subconstruto de coordenadas lineares do número racional é semelhante à noção de interpretação de medidas de Kieren. Ele enfatiza as propriedades associadas à topologia métrica da linha numérica racional, como intermediação, densidade, distância e (não) completude. Os números Racionais são interpretados como pontos em uma linha numérica, enfatizando que os números Racionais são um subconjunto dos números reais.
> 5) A subconstrução decimal do número racional enfatiza as propriedades associadas ao sistema de numeração da base dez.
> 6) A subconstrução do operador do número racional impõe ao número racional um

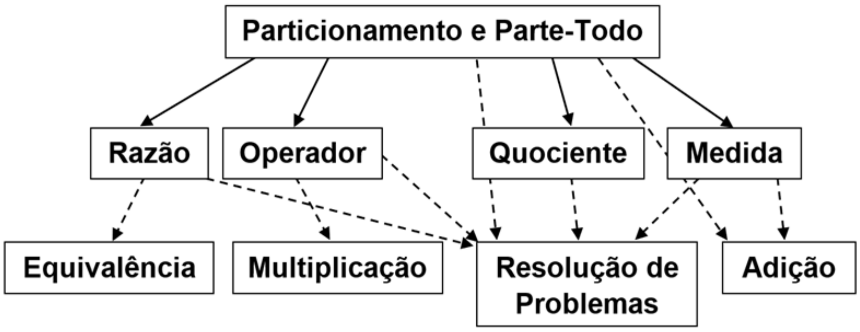
> conceito de função; um número racional é uma transformação (BEHR *et al*., 1983, p. 100- 101).

Behr *et al.* (1983) ressaltam que todos os subconstrutos são importantes para progredir os conceitos de frações com os alunos:

> [...] parece plausível que todo o subconstruto inteiro, baseado tanto em quantidades contínuas quanto discretas, represente uma construção fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional. Além disso, é um ponto de partida para o ensino envolvendo outros subconstrutos (BEHR *et al*., 1983, p. 101, tradução nossa).

Partindo disso, Behr *et al*. (1983) apresentam a conceituação preliminar das inter-relações entre as várias interpretações de frações (Figura 1).

Figura 1 – Conceituação preliminar das inter-relações entre as várias interpretações



Fonte: Behr *et al.* (1983, p. 101, tradução nossa).

Por meio da Figura 1, entendemos que o subconstruto parte-todo é utilizado como alicerce para os demais subconstrutos.

Discutimos, na seção a seguir, o ensino de frações na perspectiva da medição, que favorece a compreensão da fração e sua relação com Álgebra associada às expressões simbólicas matemáticas. Não descartamos a perspectiva parte-todo, mas quando se inicia a aprendizagem por essa perspectiva, associa-se a contagem, e isso não favorece a mudança de campo numérico, da contagem para a medição, sendo importante na continuidade dos estudos dos outros conjuntos numéricos.

1.2.1 Parte-Todo

A perspectiva partição, também denominada parte/todo, foca em dividir tudo em partes iguais, no princípio da contagem e/ou soma (POWELL, 2018a; POWELL, 2019a). Ela é comumente utilizada para introduzir o ensino de frações, o que pode trazer problemas epistemológicos assentes nos conceitos dos números naturais, chamado *viés do número natural*, (NI; ZHOU, 2005). Conforme citado por Powell (2018a), esse viés ocorre quando os alunos fazem uma ligação das propriedades dos Números Naturais com relação às frações, de forma que, quando efetuam a soma de fração, por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$, somam os denominadores e os numeradores.

Mack (1990) exemplifica que, quando se pergunta qual é o maior, se $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{16}$, o discente responde que $\frac{1}{16}$, em razão de o denominador ter maior valor absoluto. Assim, os discentes confundem as propriedades dos dois campos numéricos, não entendendo que um conjunto é utilizado para contar e o outro para medir, sem compreender essa mudança de campo numérico.

No Brasil, a perspectiva predominante no ensino de frações é a de partição, que beneficia o parte-todo (LAMON, 2012).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC – BRASIL, 2018), documento orientador do ensino de Matemática no Brasil, o ensino de frações aparece no objeto de conhecimento que se refere a conteúdos e conceitos organizados em distintas unidades temáticas – com frações direcionadas à perspectiva parte-todo e quociente.

Scheffer e Powell (2019) investigaram como o conceito de fração é apresentado nos livros didáticos brasileiros de Matemática do 4º ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2019. Os autores ressaltam, após a análise da coleção, que existem diversas atividades que "evidenciam ideias de frações, relacionando o conceito a aspectos intuitivos que se voltam à divisão e à visualização de alimentos" (SCHEFFER; POWELL, 2019, p. 499), fato considerado limitante para o ensino do número racional.

Por exemplo, normalmente, em sala de aula, ao abordar frações, a forma geométrica do círculo é associada a uma pizza e a questões do tipo: "João comprou uma pizza. Estava com muita fome e comeu metade. Que fração corresponde à parte que foi consumida?" Nesse sentido, a abordagem parte do contexto de uma fração não simbólica (objeto, figura, alimento), a fim de que o aluno associe que aquele número representa uma fração simbólica, o valor referente àquela porção da pizza que foi comida.

No entanto, há dificuldades nessa perspectiva, porque baseada em uma concepção aditiva, ocasiona problemas que geram dificuldades para que os alunos compreendam que as frações são um campo diverso dos Naturais, que estão relacionados à contagem, evidenciando que, ao não entenderem quando o numerador é maior que o denominador, os alunos se concentram em contar figuras, em vez de analisar a comparação.

A perspectiva parte-todo faz com que os alunos confundam outro conjunto, o dos Inteiros, pois compreendem que a fração é formada por dois elementos numéricos diferentes. Isso leva a utilizar propriedades dos inteiros de modo errôneo:

> a) o número de partes em uma partição com o tamanho de cada parte; portanto, $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{4}$, pois 5 é maior que 4; 2) a adição de frações com adição de números inteiros: $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$; 3) a exigência de partes iguais, "contar partes não congruentes para nomear uma fração de um terço em um círculo que está dividido ao meio e dois quartos (NI; ZHOU, 205, p. 29).

Em outras palavras, os alunos compreendem que o todo é dividido em partes iguais.

Oliveira (2016) acrescenta que as principais dificuldades dos alunos estão relacionadas a identificar frações e decimais na reta numérica e em relação à posição do número decimal ou fracionário entre dois números inteiros. Sob o mesmo ponto de vista, o autor aborda outras dificuldades, como identificar qual o numerador e o denominador das frações, e entender as diferentes formas que as frações podem ser apresentadas, ou seja, as frações equivalentes. Similarmente, aponta adversidades na manipulação das quatro operações básicas da matemática em atividades com expressões numéricas (OLIVEIRA, 2016).

Logo, considerando essas pesquisas que mostram que a perspectiva parte-todo pode ocasionar problemas epistemológicos para a compreensão dos Números Racionais (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2018a; SCHEFFER; POWELL, 2018), discutimos, na subseção que segue, uma alternativa a partir dos estudos de Powell (2019a), a qual defende a fração na perspectiva de medição, em que é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa. Também com a perspectiva de Lamon (2012), que aborda a noção de medida, fazendo menção a pontos na reta numérica, indicando a ideia de que o posicionamento da fração na reta numérica ampara os estudantes a desenvolver a noção de densidade, magnitude dos Números Racionais, de senso de ordem, além de aperfeiçoar a ação de medir na reta mencionada.

1.2.2 Medição

Para Lamon (2012), a interpretação medida diz respeito a pontos na reta numérica, considerando que "é improvável que qualquer outra interpretação de fração possa chegar perto do poder da linha numérica para construir o sentido de número" (LAMON, 2012, p. 213, tradução nossa). A autora pontua que indicar a fração na reta numérica favorece os alunos desenvolverem noção de densidade, de magnitudes relativas dos Números Racionais, de senso de ordem, além de refinar a ação de medir na determinada reta. Lamon (2012) aponta essas características como senso de fração.

Quando utilizamos frações como medidas, Lamon (2012) menciona que é importante particionar a unidade continuamente; logo, o número de partes iguais pode diversificar conforme a quantidade de vezes de particionar seja necessária para realizar o processo. Assim, relaciona-se com partição, mas se diferencia pela medição por ter um número fixo de partes iguais no mesmo elemento. A autora indica, ainda, a perspectiva de medição como a abordagem para introduzir as frações.

Os estudos de Powell (2019b) mostram que a perspectiva de medição, sob uma abordagem alternativa, é "[...] uma concepção diferenciada, uma fração refere-se a uma relação, uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis" (POWELL, 2019a, p. 57). Essa perspectiva é fundamentada em medidas contínuas que surgiram há milhares de anos no Egito e na Mesopotâmia, devido à necessidade de medir, com aplicações principalmente na agricultura.

Explicando de outra forma, é diferente da perspectiva parte-todo, que se baseia em dupla contagem do conjunto dos Naturais, pois a perspectiva de medição realiza comparações de quantidades. Segundo Powell (2018b), poucas pesquisas abordam essa perspectiva, pois países como Brasil e Estados Unidos indicam a predominância da perspectiva parte-todo (SCHEFFER; POWELL, 2020).

Powell (2018b) menciona quatro benefícios da epistemologia associada ao conhecimento de fração por meio da perspectiva de medição: i) associar frações com seus princípios históricos e, como tal, restaurar suas raízes ontológicas; ii) sanar dificuldades conceituais da concepção de frações dominante parte/todo, visto que o ato de medir desafia o prosseguimento instrucional atual, que coloca números mistos no final do aprendizado de fração e faz com que as frações tenham resultados próprios de comparações multiplicativas entre pares de quantidades; iii) auxiliar a conceber um quociente de dois números naturais como uma magnitude holística; e iv) atenuar a chamada base do número inteiro ou natural.

O estudo de Powell (2019a) constatou que a perspectiva da medição auxiliou no entendimento do conceito de magnitudes relativas e absolutas. Assim, a perspectiva da medição de Powell pode ajudar a desenvolver o senso numérico e fracionário, como discutimos na subseção que segue.

1.3 Senso numérico e Senso fracionário

Powell e Ali (2018) explicam que senso numérico requer habilidade de aproximar e julgar o tamanho dos números. Portanto, inclui a compreensão sobre números, suas operações e lidar com seu envolvimento para resolver problemas.

> Possuir senso numérico permite que o indivíduo possa alcançar desde a compreensão do significado dos números até o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas complexos de matemática; desde as comparações simples de magnitudes até a invenção de procedimentos para a realização de operações numéricas; desde o reconhecimento de erros numéricos grosseiros até o uso de métodos quantitativos para comunicar, processar e interpretar informação (CORSO; DORNELES, 2010, p. 299).

Magnitude, conforme Powell (2019d, p. 3), fundamentado em Carraher (1996), "é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida". Portanto, magnitude é um tamanho no sentido que o valor corresponde, ou seja, uma quantidade, e assim, todos os conjuntos que estão contidos nos conjuntos dos reais, apresentam essa característica (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2019a).

> As magnitudes numéricas podem ser representadas de forma simbólica, recorrendo a dígitos que estejam associados a determinadas quantidades (como é o exemplo dos numerais árabes – 1, 20, 33) e por isso requerem linguagem, ou de forma não simbólica, recorrendo a conjunto de pontos ou outros itens que representam uma quantidade de forma abstrata e que não requerem linguagem (ESPADINHA, 2015, p. 3).

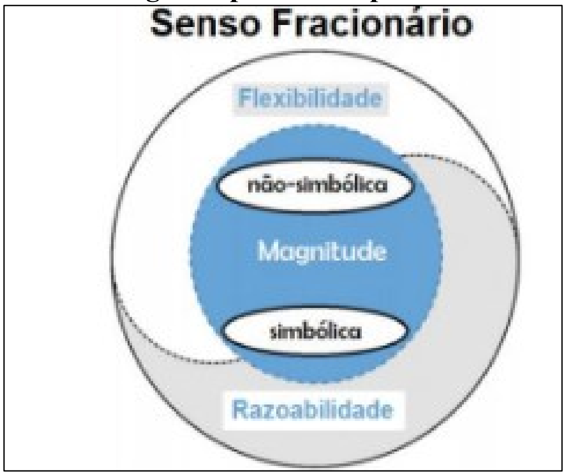
Powell (2019a, p. 57) afirma que "a magnitude é fundamental para compreender frações não-simbólicas e simbólicas", elucidando que números correspondem a um tamanho e podem ser medidos, e com isso, as frações podem ser estimadas, ordenadas. Desse modo, magnitude é de suma importância para a compreensão numérica, pois é o entendimento de quanto o número significa em seu valor, e não no seu símbolo.

Powell e Ali (2018) informam que as particularidades do senso numérico constituem o senso fracionário, pois frações são caracterizadas como números, mas elas podem assumir outras interpretações, como relações parte-todo, proporções, quocientes, medidas ou operadores (KIEREN, 1980).

Powell e Ali (2018) discutem o senso fracionário em três categorias, que se sobrepõem e interagem entre si: flexibilidade, razoabilidade e magnitude, tanto não-simbólica quanto simbólica. De acordo com os autores, "flexibilidade se refere a conceitos, representações e estratégias de cálculo. Isso implica na habilidade de trabalhar com frações, sejam elas concebidas como relação parte-todo, quociente, medida, razão ou operador" (POWELL; ALI, 2018, p. 236, tradução nossa). Engloba, ainda, as frações simbólicas e não-simbólicas, permitindo uma mudança de representação da forma escrita e visualização dessas frações para a mais adequada.

A razoabilidade decorre da avaliação dos resultados ao operar, aproximar ou comparar frações, identificar frações equivalentes, entender a posição da fração na reta numérica, pensar e ponderar como uma operação envolvendo frações pode modificar um número, ou então, qual o resultado de desenvolver uma operação com um número fracionário, em que esse número é menor, maior ou igual a 1. À vista disso, "uma vez que o cálculo tenha sido realizado, a razoabilidade do resultado seria considerada. Como uma continuação da expressão de senso fracionário, a razoabilidade chama plausibilidade para a questão" (POWELL; ALI, 2018, p. 236). Logo, as três categorias: flexibilidade, razoabilidade e magnitude, em conjunto, são os conceitos centrais do senso fracionário (Figura 2).

Figura 2 – Categorias para a compreensão de frações



Fonte: Powell e Ali, 2018, p. 237 (tradução nossa).

Para que o senso fracionário seja desenvolvido, o professor deve promover situações que possibilitem experimentações dos diversos significados para os Números Racionais, de forma que as interconexões possam ser estabelecidas e compreendidas.

Siegler *et al.* (2013) pontuam que crianças precisam entender que algumas propriedades dos números inteiros não podem ser usadas para todos os conjuntos ou números, e ainda, que

> [...] Os números inteiros têm sucessores únicos, podem ser representados por um único símbolo, são contáveis, nunca diminuem com a multiplicação, nunca aumentam com a divisão e assim por diante. Nenhuma dessas propriedades é verdadeira para frações, no entanto, e, portanto, nenhuma é verdadeira para todos os números reais (SIEGLER *et al*., 2013, p.13, tradução nossa).

Ademais, Siegler *et al.* (2013) relatam outras dificuldades, como a confusão com os procedimentos aritméticos de fração no desenvolvimento das operações básicas da matemática. Isso porque a adição e a subtração não ocorrem da mesma forma que nos naturais, sendo complexo para o aluno saber *quando* e *por que* se pode repetir o denominador, quando não compreende os Racionais como campo numérico diferente dos Naturais. Siegler *et al*. (2013) apontam a terceira dificuldade, que está relacionada ao fato de que os alunos recebem praticamente só instruções de fração na perspectiva de parte-todo, causando adversidades, como por exemplo, nas frações impróprias, pois muitas vezes o aluno não entende menções como "Você não pode ter quatro partes de um objeto que é dividido em três partes" (SIEGLER *et al*., 2013, p. 13, tradução nossa).

Os autores afirmam que, para o conhecimento de frações, é preciso entender o desenvolvimento (conceitual e processual) e as diferenças individuais desse conceito. A primeira diferença é entre conhecimento conceitual e procedimental. O conhecimento conceitual envolve a compreensão das frações com magnitudes, princípios e notações; já o conhecimento processual necessita de habilidades com as quatro operações aritméticas fracionárias (SIEGLER *et al*., 2013). A segunda distinção requer conhecimento não-simbólico e simbólico: "O conhecimento não-simbólico envolve competências com estímulos concretos (por exemplo, qual conjunto tem maior proporção de pontos azuis); conhecimento simbólico envolve competências com representações convencionais (o que é maior $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{9}$?)" (SIEGLER *et al*., 2013, p. 14, tradução nossa).

Dessa forma, as diferenças individuais possuem relação com o desenvolvimento conceitual e processual, pois

> O conhecimento de frações varia muito entre as crianças de mesma idade. Diferenças individuais consistentes foram encontradas em diferentes tipos de conhecimento de frações, em frações e outros tipos de conhecimento matemático, através do conhecimento de frações e processos gerais de domínio, e nas mesmas crianças ao longo do tempo (SIEGLER *et al*., 2013, p. 16, tradução nossa).

Assim, esses conhecimentos se fortalecem reciprocamente, pois conforme há aquisição de informações para crianças com maior conhecimento conceitual inicial de frações, maior será a compreensão de procedimentos aritméticos fracionários. Portanto, observam-se relações positivas consistentes entres ambos os conhecimentos – conceitual e procedimental – sobre frações, sendo uma ajuda mútua para adquirir o outro.

Powell (2019b) apresenta a concepção alternativa de fração utilizando a perspectiva da medição com o uso das barras Cuisenaire. O objetivo é que os estudantes se apropriem da noção de magnitude e fração-de-quantidade para ampliar os conceitos de magnitude de frações, recordadas mentalmente por meio das imagens das barras, e assim, compondo expressões de comparações fracionárias.

Nessa concepção, Powell (2018b) realizou uma pesquisa nos Estados Unidos, com alunos do segundo ano do Ensino Fundamental. Os discentes não possuíam o conceito inicial de frações, e dessa forma, o pesquisador ensinou os alunos o conteúdo de frações por outra perspectiva: medição utilizando as barras de Cuisenaire, que é um material didático composto por barras de diferentes tamanhos e cores, como discutimos no capítulo que segue.

CAPÍTULO 2 – MATERIAIS DIDÁTICOS – CUISENAIRE

Lorenzato (2006) define que materiais didáticos (MD) são aqueles que podem ser usados no ensino e na aprendizagem, podendo ser giz, calculadora, filmes, livros, jogos ou materiais concretos. Em seus estudos, o autor explica que um material didático pode assumir diversas finalidades, cabendo ao professor estabelecer os objetivos de uso, trazendo consigo algumas indagações, como: Qual conteúdo vou abordar com esse material? O material vai ajudar na fixação do conteúdo? Assim, com essas e outras indagações, o professor escolhe melhor o material que irá utilizar em sua aula. Isto porque, "por trás de cada material, se esconde uma visão de Educação, de Matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica" (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 2). O MD é um coadjuvante no ensino e, portanto, não supre o lugar do professor e nem garante o ensino e a aprendizagem, porque para que isso aconteça, é necessário a atividade mental do aluno. Assim,

> [...] a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. E o MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático (LORENZATO, 2006, p. 21).

O uso de MD é frequente no ensino de matemática, buscando torná-lo menos abstrato para o aluno. Ademais, docentes também relatam que utilizar MD torna as aulas dinâmicas e descontraídas (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

Assumimos que todo MD tem tecnologia, e que "a educação como processo de apropriação cultural não pode ser desvinculada da interferência que a tecnologia exerce na sociedade" (BASNIAK, 2014, p. 49).

Estudos mostram que a tecnologia pode contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois ela pode ser uma ferramenta que, segundo Bittar (2010, p. 158), "ajuda à compreensão do raciocínio do aluno, de suas dificuldades e compreensões, além de ser uma poderosa ferramenta na elaboração de atividades que favoreçam a aprendizagem e até mesmo a individualização da aprendizagem, contribuindo com a autonomia do aluno". A mesma autora ainda afirma que integrar a tecnologia pode ser "[...] uma poderosa ferramenta na elaboração de atividades que favoreçam a aprendizagem e até mesmo a individualização da aprendizagem, contribuindo com a autonomia do aluno" (BITTAR, 2011, p. 158). Rocha *et al.* (2018) sugere que se utilizem instruções para que os alunos usem a tecnologia, realizem trabalhos em conjunto, e coloquem em prática atividades na escola.

Lorenzato (2006) explicita que há diversos modelos de Materiais Didáticos (MD): aqueles dos quais não pode ser alterada a forma, os estáticos que oportunizam somente a contemplação, como por exemplo, os sólidos geométricos; materiais que conseguem envolver a participação do aluno, como o ábaco e o Cuisenaire; materiais dinâmicos, com os quais os alunos podem fazer redescobertas, entender propriedades, como jogos dos palitos. No entanto, um material não precisa necessariamente ocupar somente uma classificação, ou seja, não precisa ser somente estático: ele pode ser moldado e dinâmico.

Dentre os materiais didáticos estão os manipuláveis, os quais Reys (1971, *apud* NACARATO, 2005, p. 3) destaca que são "objetos ou coisas que o estudante é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". Vale (2002, p. 2) designa material manipulável como

> [...] todo o material concreto, de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento activo [*sic*] dos alunos p.e. ábaco, geoplano, folhas de papel, etc. Na literatura revista é muitas vezes utilizado a designação de material manipulável como sinónimo de material concreto, mas ter atenção de que nem todos os materiais concretos são materiais manipuláveis.

Assim, "a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações" (NACARATO, 2005, p. 1). Portanto, o foco está na ação, na percepção do indivíduo perante o objeto, em que o aluno deve ser considerado o protagonista, valorizando suas ações, as quais podem ser desenvolvidas por meio de situações recreativas, jogos e artifícios que possam estabelecer boa relação entre o ensino e a aprendizagem.

Segundo Nacarato (2005), no Brasil, foi somente na década de 20 que a ideia de material manipulável começou a ser conhecida e passou a ser tema de discussões. Lorenzato (2006) afirma que o sucesso do aluno e até mesmo seu fracasso tem relação com o docente, pois ter o material manipulável não assegura a aprendizagem, mas é preciso saber mediar a sua utilização correta em sala de aula.

Matos e Serrazina (1996) compactuam dessa ideia, pois é o professor que escolhe o material minuciosamente, com foco no que quer ensinar para que se alcancem os objetivos com a atividade manipulativa. Os autores ainda corroboram que, "mais importante que os materiais com que está a trabalhar, a experiência que o aluno está a realizar deve ser significativa para ele" (MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 197).

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam (PASSOS, 2006, p. 81).

Clements (1996, p. 47) complementa que, "embora os manipuláveis tenham um lugar importante na aprendizagem, sua fisicalidade não carrega o significado da ideia matemática". Dessa forma, é possível realizar atividades pensadas, que possam sair do concreto para algo complexo/abstrato.

Para trabalhar conceitos matemáticos, Berh *et al.* (1983) reportam que materiais manipuláveis são importantes para resolver distintas situações-problema do mundo real, e destacam que podem ser úteis no desenvolvimento do conceito do número racional. Assim, o material manipulável pode ser um interposto entre uma situação real e símbolos escritos. Em seus estudos, Berh *et al.* (1983) relatam que os indivíduos conseguiram realizar simulações sólidas utilizando o material manipulável, e que isso foi benéfico por facilitar a compreensão de conceitos complexos. Os autores complementam que, realizadas as investigações, concluíram que as análises psicológicas denotam que o ato de manipular é um elemento para desenvolver sistemas representacionais, e afirmam que outros modos de representar também possuem sua importância na aprendizagem.

Clements (1996) aponta que, com o uso do material manipulável, há um aumento na resolubilidade de problemas, e quando defrontados com a matemática, conciliada com o material, os discentes estabelecem uma relação harmônica entre o conceito e o material ofertado, corroborando para o aprendizado. Complementando, Turrioni e Perez (2006, p. 61) explicitam que o material manipulável é essencial para a aprendizagem, visto que "facilita a observação, análise, desenvolve o raciocínio lógico e crítico, sendo excelente para auxiliar o aluno na construção dos seus conhecimentos".

Dessa forma, com critérios estabelecidos, há vantagens do uso do material manipulável para a aprendizagem, pois nomeadamente:

> b) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa

a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas (SARMENTO, 2010, p. 4).

Sarmento (2010) expõe que um material pode ser utilizado em diversas atividades, com os mais variados níveis de abstrações, mas é preciso considerar os objetivos e situações distintas. Sendo assim, é interessante estudar seu uso para conhecer as alternativas e relacioná-las com os objetivos propostos e planejados.

Clements (1996) alerta que o uso do material manipulável não garante êxito. Segundo sua pesquisa, o foco seria a aprendizagem com compreensão, no sentido de a aprendizagem estar além da manipulação. O resultado de seu trabalho evidenciou que, quando os alunos se deparam com material manipulável, eles podem usá-los apenas de maneira mecânica, robotizada, demonstrando que outros alunos que não usufruíram do material se sobressaem (CLEMENTS, 1996).

Outro fator que pode dificultar a aprendizagem com o material manipulável refere-se a "[...] sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados" (NACARATO, 2005, p. 3). Segundo a autora, o professor utiliza certos materiais quando consegue estabelecer relações/conexões com o conceito. Contudo, isso é algo subjetivo, pois o que é evidente para alguém, pode ser algo atípico e inusitado para outro, não conseguindo estabelecer a conexão desejada (MATOS; SERRAZINA, 1996). Em virtude disso, é possível perceber consequências negativas ao utilizar estes materiais: "1) a distância entre o material concreto e as relações matemáticas a serem representadas; 2) o material "toma as características de um símbolo arbitrário em vez de uma concretização natural" (HIEBERT; CARPENTER, 1992, *apud* MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 197).

Assim, destacamos novamente que ensinar matemática por meio do material manipulável, sem objetivos previamente estabelecidos, não contribui para a aprendizagem e pode se tornar algo maçante.

Nacarato (2005, p. 4) reforça que o "uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los".

Então, dentre os materiais didáticos, é possível encontrar os MD concretos manipuláveis e digitais. Neste trabalho, salientamos as barras Cuisenaire, objeto de nosso estudo.

2.1 O CUISENAIRE E O ENSINO DE FRAÇÕES

As barras de Cuisenaire foram criadas por Georges Cuisenaire Hottelet. O material físico possui barras em variadas cores e tamanhos, nas formas de paralelepípedos, podendo ser de madeira ou plástico. O material é composto pelas seguintes cores e comprimentos: branca – 1 centímetro; vermelha – 2 centímetros; verde-clara – 3 centímetros; roxa – 4 centímetros; amarela – 5 centímetros; verde-escura – 6 centímetros; preta – 7 centímetros; marrom – 8 centímetros; azul – 9 centímetros; e laranja – 10 centímetros. As barras não apresentam marcações, como podemos ver na Figura 3, para que seja possível manuseá-las tomando uma barra como unidade de medida, e assim, realizar comparações e estabelecer seu comprimento. Entretanto, possuem como padrão a diferença de um centímetro de uma barra para outra.

Figura 3 – Barras Cuisenaire Física

Fonte: Powell (2019c, p. 704).

Para se habituar com as barras e as relações entre elas, Powell (2018b) relata que é importante as crianças interagirem, tanto em brincadeiras quanto em tarefas, nas quais os estudantes possam vislumbrar duas características do material: o palpável e a visualização das cores. O autor complementa que, quando os alunos estão realizando as tarefas matemáticas, o Cuisenaire não tem uma sobrecarga cognitiva, pois durante a manipulação, o estudante compreende a relação entre as barras, mas o material ainda contribui para criar noções sobre números inteiros, frações, etc.

Por meio do uso das barras Cuisenaire, é possível desenvolver imagens mentais sobre frações, suas operações e relações. Depois que o aluno se apropria do material, ele é capaz de evocar imagens mentais das barras para responder às situações matemáticas. Ademais, pode contribuir para a construção de significados matemáticos, pois o aluno pode compreender as ideias de frações e, assim, relacionar outras noções/ideias matemáticas por meio do uso do material.

O Cuisenaire encontra-se em várias publicações relativas à pesquisa de Powell (2018a, 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) sobre frações na perspectiva de medição, nas quais ele discute a possibilidade em progredir das frações não-simbólicas para as simbólicas. Powell (2019b, p. 5) compreende a perspectiva da medição como “[...] uma concepção diferenciada, uma fração refere-se a uma relação, uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis”. Nesse sentido, esse material “se torna propício para a abordagem dos números fracionários com base na perspectiva de medição com suas duas partes: fração-de-quantidade e fração-como-número” (POWELL, 2019b, p. 59).

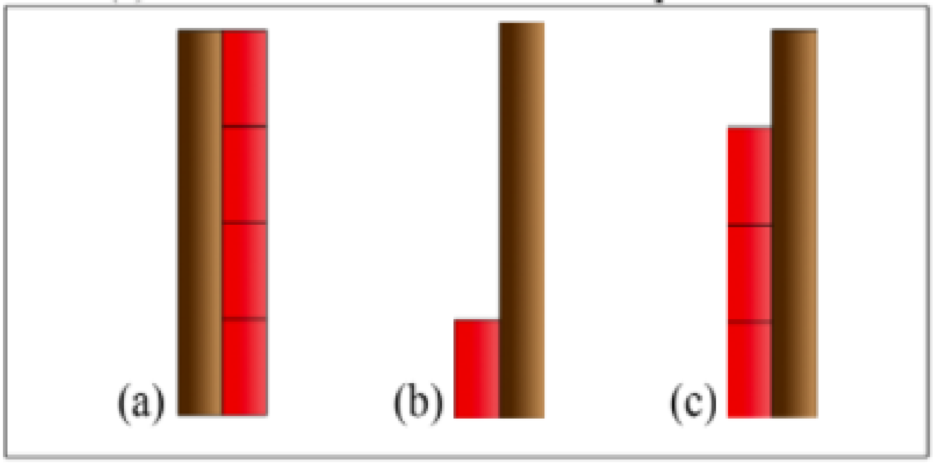
Essa concepção é fundamentada em medidas contínuas que surgiram há milhares de anos, no Egito e na Mesopotâmia, da necessidade de medir, com aplicações principalmente na agricultura. Assim, “com base nessa nova indispensabilidade para medir, os babilônios e os egípcios introduziram as frações” (POWELL, 2019b, p. 51).

Sob ponto de vista de Gattengo (1974/2010, p. 196, grifo do autor):

> A medida, no trabalho com as barras, é emprestada da física e introduz a contagem pela porta dos fundos, pois é necessário saber *quantas* vezes a unidade foi usada para associar um número a um determinado comprimento. Mas a medida também é a fonte de frações e números mistos e serve mais tarde para introduzir números reais. Assim, a medida é uma ferramenta mais poderosa do que a contagem, a qual é usada como gerador de matemática. Contar … pode ser interpretado novamente como sendo uma medida com barras brancas. Medida também é naturalmente uma interpretação da iteração [...].

Assim, as cores e os comprimentos são características importantes a serem consideradas, pois é por meio delas que Powell (2019c) trabalha a relação comparativa multiplicativa com o uso das barras de Cuisenaire. Logo, é possível elucidar um exemplo de como se trabalha com o material. A Figura 4 mostra a barra vermelha e a barra marrom. Powell (2019c) utiliza como unidade de medida a barra vermelha, ilustrada na Figura 4 (a), de forma que, quando comparada com a barra marrom, podemos relatar que uma barra marrom é igual à medida/tamanho de quatro vermelhas. Ademais, ainda é possível utilizar a barra marrom como unidade de medida.

Figura 4 – (a) A barra marrom é igual a quatro barras vermelhas. (b) A barra vermelha é um quarto da barra marrom. (c) Três barras vermelhas são três-quartos da barra marrom



Fonte: Powell (2019c, p. 705).

Na Figura 4 (b), o autor considera, como referência, a barra marrom como unidade de medida, mas a medida/tamanho de uma barra vermelha é um quarto da medida de uma barra marrom. Na sequência (Figura 4 (c), o tamanho de três barras vermelhas é o tamanho de três quartos da barra marrom. O pesquisador continua, e indica que é possível continuar o modelo, pois o tamanho de seis barras vermelhas, representa seis quartos do tamanho da barra marrom. Então, "comparando o comprimento de duas quantidades – com uma quantidade considerada como a unidade de medida e usada para medir a outra quantidade – é como uma fração recebe seu nome." (POWELL, 2019c, p. 706). Por meio desse exemplo, podemos trabalhar frações como medida, e frações impróprias de forma dinâmica.

Powell (2019c) complementa que cada barra pode ser representada por uma letra: branca – b; vermelho – v; verde clara – c; verde-escura, etc., pois essas representações podem ser as declarações verbais demonstradas simbolicamente, utilizando a notação matemática. No Quadro 1, na página seguinte, estão catalogadas as declarações verbais associando as barras (Figura 4) às expressões simbólicas matemáticas.

Quadro 1 – Correspondência entre expressões verbais e simbólicas

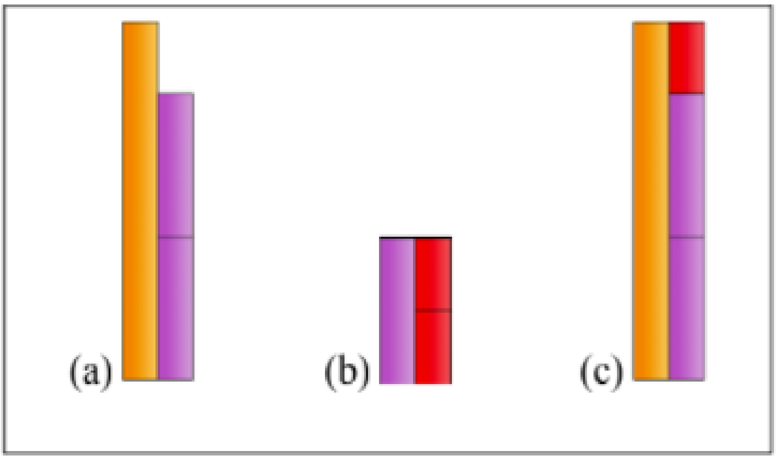
Expressões	
Verbal	Simbólico
1. O comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas. 2. Quando medida por barras vermelhas, a barra marrom equivalente a quatro barras vermelhas. 3. Uma barra marrom mede quatro barras vermelhas.	$m = 4v$
4. Uma barra marrom medida por barras vermelhas é igual a quatro.	$\frac{m}{v} = 4$
5. O comprimento de uma barra vermelha é igual a um quarto do comprimento de uma barra marrom. 6. A vermelha é um quarto da marrom.	$v = \frac{1}{4} \times m$
7. A barra vermelha medida por barras marrons é igual a um quarto.	$\frac{v}{m} = \frac{1}{4}$

Fonte: Powell (2019c, p. 705).

Assim, “algumas expressões matemáticas correspondem a mais de uma afirmação verbal” (POWELL, 2019c, p. 706), como ao expressar, “quando medida por barras vermelhas, a barra marrom equivalente a quatro barras vermelhas”, assim como “o comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas”, que são registradas com a seguinte expressão matemática: *m= 4v*.

Powell (2019c) aborda outro exemplo (Figura 5), desta vez utilizando como unidade de medida a barra roxa para realizar a medida do comprimento da barra laranja.

Figura 5 – Medir o comprimento da barra laranja tendo a barra roxa como a unidade de medida



Fonte: Powell (2019c, p. 705).

Quando a barra laranja é comparada com a barra roxa, compreendemos que não é possível medir a barra laranja por um número inteiro de barras roxas (Figura 5 (a)). Logo, remete à ideia de que a barra roxa é igual a duas barras vermelhas, e assim, utiliza a ideia de a barra vermelha ser uma subunidade da barra roxa, pois a “barra vermelha, que é uma parte da barra roxa, é exatamente o comprimento que completa a medida da barra laranja" (POWELL, 2019c, p. 707), como é possível observar na Figura 5 (c).

Além disso, qualquer barra de Cuisenaire pode ser utilizada para realizar medidas do comprimento de outra barra:

> [...] se d não for igual a um múltiplo exato de u, poderá existir uma subunidade da medida v, de modo que d seja igual a exatamente m subunidades de v, isto é, $d = m \times v$; e u é igual a exatamente n subunidades de v, ou seja, $u = n \times v$, o que implica que $v = \frac{1}{n} \times u$. Como $d = m \times v$, então $d = m \times \frac{1}{n} \times u$; isto é, $d = \frac{m}{n} \times u$. Assim, a distância d é igual à razão m enésimos (ou m um-enésimo) da unidade de medida u, onde $\frac{m}{n}$ é uma fração. Essa expressão — $d = \frac{m}{n} \times u$ — representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis d e u (POWELL, 2019c, p. 708).

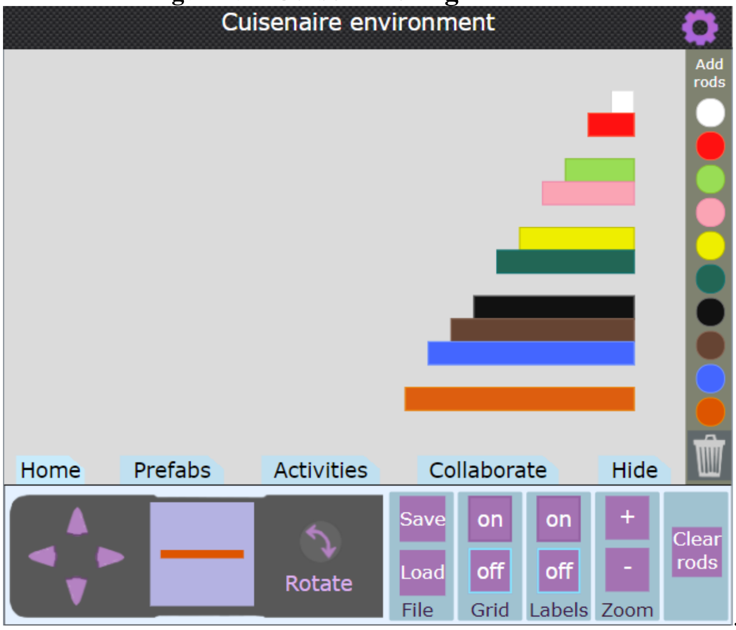
Por existir uma comparação multiplicativa entre d e u, ambos os comprimentos são comensuráveis, cuja medida pode ser semelhante a medida de outra barra. Logo, a "relação é da proporção ou comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que têm uma unidade de comensurabilidade" (POWELL, 2019b, p. 60). Diante disso, o material manipulável Cuisenaire é empregado para simbolizar quantidades contínuas e comensuráveis, e por não possuir marcações ou valores, direciona o foco para seus comprimentos, e assim, possibilita representar uma fração com base na perspectiva de medição (POWELL, 2018a).

2.1.1 O Cuisenaire digital

O *Cuisenaire*[3] digital pode ser acessado por meio de um *applet* (Figura 6, na página seguinte). Possui as mesmas características do Cuisenaire físico, com algumas diferenças. Para visualizar as barras, é preciso selecionar os círculos coloridos na coluna à direita, com atenção, pois se clicar mais de uma vez em um determinado círculo, as barras podem ficar sobrepostas, podendo, por exemplo, sobrepor uma barra menor. São várias barras que possuem as seguintes cores: branca; vermelha; verde-clara; rosa; amarela; verde-escura; preta; marrom; azul; laranja, de diferentes tamanhos em formato de retângulos.

[3] *Applet* com Barras Cuisenaire disponível em: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html.

Figura 6 – Cuisenaire Digital



Fonte: Acervo da autora (2021).

Podemos perceber se houve sobreposição de barras quando passamos o cursor em cima delas (Figura 7). Assim, é possível clicar na barra e arrastar para levá-la em alguma direção.

Figura 7 – Sobreposição da barra azul sobre a barra a laranja

Fonte: Acervo da autora (2021).

Quando é necessário excluir a barra, podemos clicar sobre ela e arrastar até a direção da lixeira, que está localizada na coluna à direita (Figura 6). Em relação ao fundo/malha do *applet*, existe a opção de movimentar a tela do jogo, clicando na região cinza da tela e arrastando. Ainda em relação à tela, existe a opção de permitir e ocultar a visibilidade da malha quadriculada na coluna Grid, escolhendo *on* para deixar visível e *off* para ocultar a malha.

Existe a possibilidade de aumentar ou diminuir o zoom, pressionando os botões + ou – na coluna Zoom (Figura 6), uma ferramenta útil para encaixar as medidas das barras como, por exemplo, medir o tamanho da tela. Se a barra completar a medida daquele segmento, podemos aproximar ou diminuir a tela para poder medir todo o espaço que se deseja. Por fim, para salvar o arquivo, é preciso ir até a coluna *File* e clicar em *Save,* e para anexar um arquivo, clicar em *Load*.

Gattegno e Hoffman (1976) defende que as barras Cuisenaire são um dos melhores materiais para trabalhar frações, pois é possível construir significados matemáticos, ordem, igualdade, desigualdade e trabalhar as operações com frações (POWELL, 2018a).

2.2 POR QUE O CUISENAIRE?

O Cuisenaire difere de outros materiais que podem ser usados no ensino de frações, principalmente porque os demais favorecerem a perspectiva parte-todo. O material denominado Régua de Frações, que pode ser encontrado em madeira ou recortes de E.V.A., é composto por 10 réguas de variados tamanhos e nas cores preta, marrom, branca, verde-clara, verde-escura, roxa, azul, amarelo, laranja e vermelho, como podemos ver na Figura 8. A principal diferença para o Cuisenaire é que, em muitos casos, o material em si é integrado por representações de frações, que em suas réguas possuem marcações divisórias.

Figura 8 – Ilustração do material Régua de Frações e suas demarcações/divisórias

Fonte: Nascimento e Junior (2017).

Uma forma de trabalhar com o material e relacionar o conteúdo de frações pode ser como feito por Polese (2011), que realizou uma tarefa com tiras de cartolinas que, no decorrer da aula, os alunos dividiram ao meio, em quatro partes, etc. Assim, tomavam a tira como um todo e a dividiam em partes iguais, e poderiam usar/tomar uma ou até mesmo mais partes dessa mesma unidade (POLESE, 2011).

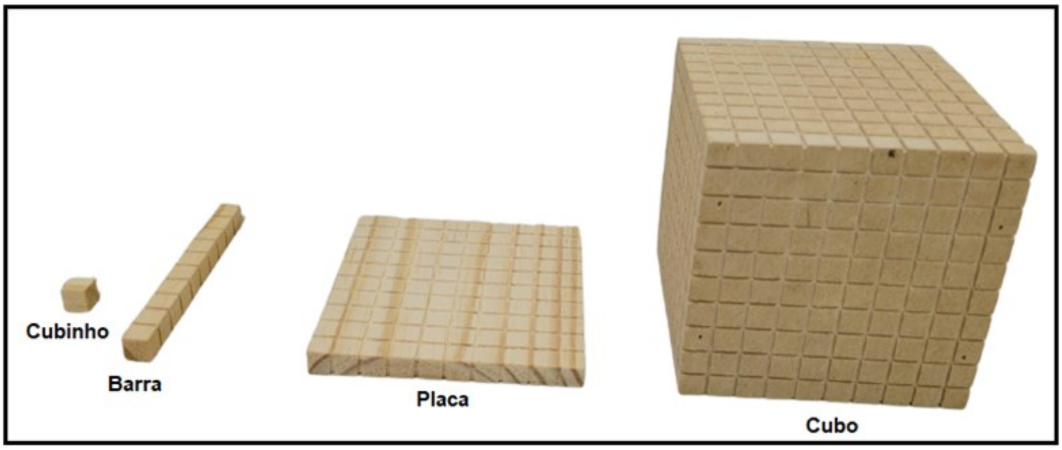
> [...] pedi que falassem sobre o que entenderam que fizemos e o que representam as partes das tiras divididas em relação à tira inteira. Alguns falaram que representam partes da tira, ou seja, frações da tira. Em conjunto, interagindo com os alunos e aproveitando suas falas, destaquei que a fração é uma parte de um todo e é representada por números fracionários (no caso das tiras, ½, 1/3, ¼). Esse todo a que se refere uma fração é chamado de inteiro (no caso, o todo foi a tira inteira) (POLESE, 2011, p. 38).

Assim, indica a perspectiva parte-todo, que utiliza a contagem, pois contam a parte de um todo que já foi divido (KIEREN, 1980). Dessa forma, esse material manipulável se diferencia do Cuisenaire, porque além de trabalhar em outra perspectiva, não apresenta divisórias em suas barras. Outro material didático bastante conhecido é o Material Dourado. De acordo com Röhrs (2010), o Material Dourado foi elaborado pela italiana Maria Tecla Artemisia Montessori (1870-1952), que desenvolveu materiais manipuláveis que denominava *materiais sensoriais*, pois acreditava que a aprendizagem acontecia por meio dos sentidos e experimentação da criança (RÖHRS, 2010). Montessori desenvolveu o material dourado com o objetivo de

> desenvolver na criança a independência, a confiança em si mesma, a concentração, a coordenação e a ordem; gerar e desenvolver experiências concretas estruturadas para conduzir, gradualmente, a abstrações cada vez maiores; fazer com que a criança perceba os possíveis erros que comete ao realizar uma determinada ação com o material; trabalhar com os sentidos da criança (FREITAS, 2004, p. 59).

Logo, o Material Dourado, que antigamente era nomeado *material das contas douradas,* era produzido com arames que estavam presos em objetos circulares dourados. Atualmente, podemos encontrar o material em E.V.A e em madeira, sendo composto por diversos cubos, com as seguintes peças no formato de: cubinhos com dimensões de 1 centímetro; barras, em que cada barra possui dez cubinhos sobrepostos; placas, em que a placa possui dez barrinhas/cem cubinhos justapostos; cubo, em que cada cubo pode ser constituído pela junção de dez placas (Figura 9). Além disso, as peças barras, placas e cubos, todas apresentam marcações das junções dos cubinhos.

Figura 9 – Material Dourado



Fonte: Acervo da autora (2021).

> O Material Dourado Montessori foi criado com o intuito de destinar-se a atividades que auxiliassem o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e dos métodos para efetuar as operações

> fundamentais (ou seja, os algoritmos). [...] hoje esse material pode ser utilizado para o estudo de frações, conceituação e cálculo de áreas e volumes, trabalho com números decimais, raiz quadrada e outras atividades criativas (FREITAS, 2004, p. 59).

No estudo de frações utilizando o Material Dourado, adota-se a perspectiva parte-todo, e Kieren (1980) afirma que é "[...] algum todo é dividido em partes 'iguais'. Ideias fracionárias são usadas para quantificar a relação entre o todo e um número designado de partes" (KIEREN, 1980, p. 134). Logo, o Material Dourado pode representar frações decimais, pois seus denominadores podem ser 10, 100 e 1000.

No entanto, Nunes e Bryant (1997) mencionam que, quando as crianças são sujeitas a buscarem a solução do problema por meio da dupla contagem – quando se conta as partes que estão pintadas (numerador) e a contagem da parte do todo que foi dividido (denominador) – ocorre que os alunos não compreendem a mudança do campo numérico dos naturais, pois se concentram em contar, o que evidencia desentendimento em perceber que a fração formada é um novo número, e não uma divisão de números naturais.

CAPÍTULO 3 – CONTEXTO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Inicialmente, a pesquisa seria desenvolvida com os alunos matriculados no Programa Mais Aprendizagem, sendo selecionados para o estudo preferencialmente os discentes do 6º e 7º ano que frequentavam regularmente o programa. Pretendia-se trabalhar a partir das pesquisas e resultados obtidos de acordo com o Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b), e realizar a análise de tarefas de frações não simbólicas e frações simbólicas com o Cuisenaire físico e seus possíveis resultados. No entanto, devido à pandemia da COVID-19 no período de 2020, houve mudanças nas aulas no Estado do Paraná.

A partir de março de 2020, na região em que seriam coletados os dados iniciou o ensino remoto, que ocorreu pelo Aula Paraná, de forma que os alunos poderiam assistir à aula pela TV aberta, YouTube e aplicativo desenvolvido pelo Estado. Então, o contato que o professor possuía com o aluno era por meio do *Google Classroom.* Já os alunos que não possuíam acesso à internet estudavam a partir de material impresso. No segundo semestre de 2020, além da comunicação por meio do *Google Classroom*, os professores migraram para o *Google Meet,* com aulas síncronas realizadas uma vez por semana com cada turma.

No primeiro semestre do ano de 2021, as aulas remotas permaneceram ocorrendo por meio do *Google Meet,* mas seguindo a carga horária de cada turma. Em meados de junho de 2021, a Secretaria do Estado da Educação do Paraná retornou às aulas em modelo híbrido[4], de modo que ocorria a alternância de turmas e alunos no presencial, além de continuar transmitindo as aulas via *Google Meet,* realizadas uma vez por semana e conforme a carga horária de sua disciplina. De imediato, os alunos que não possuíam transporte para chegar na escola ou que possuíam comorbidades, ou simplesmente não possuíam acesso à internet, continuaram estudando com material impresso, elaborado pelo professor. Esse material consistia em um resumo do conteúdo trabalhado pelo professor em sala de aula com alguns exercícios resolvidos, e outros para os alunos resolverem e devolverem para o professor realizar a correção.

Assim, frente à incerteza do retorno presencial das aulas, foi necessário adaptar a pesquisa, alterando os objetivos e a coleta de dados.

[4] Esse modelo correspondia à alternância de turmas/alunos, pois havia a pretensão de realizar as aulas presenciais com aqueles que estavam utilizando o material impresso para realizar os estudos em casa, considerando que não possuíam acesso à internet.

Consideramos, então, analisar dados de outra pesquisadora que os havia coletado no segundo semestre de 2020 para sua pesquisa, a qual estava relacionada ao mesmo tema deste trabalho, ensino de frações com barras Cuisenaire na perspectiva da medição. A professora, e também pesquisadora, elaborou e desenvolveu tarefas de natureza exploratória, abordando o conteúdo de frações na perspectiva da medição, utilizando as barras de Cuisenaire digitais com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de modo remoto. Inicialmente, havíamos considerado usar os dados da pesquisa de Powell relacionados ao Cuisenaire físico, para que pudéssemos responder à questão de pesquisa: *Há diferentes contribuições no uso das barras Cuisenaire físicas e digitais para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição? Em caso afirmativo, quais?*

Entretanto, com o retorno das aulas presenciais em outubro de 2021, avaliamos que teríamos dados mais consistentes se desenvolvêssemos algumas das mesmas tarefas desenvolvidas com o Cuisenaire digital.

Nesses cenários, os dados relacionados ao Cuisenaire digital foram coletados entre 15 de setembro e 16 de outubro de 2020, e consistem em dezenove gravações de aulas realizadas no Ensino Remoto de Emergência, utilizando a plataforma *Google Meet*. Para a pesquisa, a professora regente convidou setenta e um alunos de duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, da escola estadual do interior do Paraná em que trabalhava, para desenvolver as tarefas. De acordo com seu relato, dentre os alunos dessas duas turmas, trinta aceitaram preencher os termos de assentimento e consentimento da pesquisa, mas apenas vinte e dois alunos participaram da pesquisa até o final. Esses alunos foram divididos em quatro grupos para desenvolver as tarefas.

As aulas foram planejadas seguindo os pressupostos do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), seguindo as sugestões de Cyrino e Teixeira (2016): Introdução da Tarefa; Realização da tarefa; Discussão Coletiva da Tarefa; e Sistematização das Aprendizagens Matemáticas. Estevam e Basniak (2019) apontam o EEM como uma perspectiva inovadora de ensino e aprendizagem, contrapondo-se ao ensino tradicional, pois o professor assume papel de mediador e oportuniza tarefas desafiadoras, que exigem que os alunos assumam a postura de protagonistas de sua resolução, além de desenvolver capacidades como resolução de problemas, raciocínio e comunicação (CANAVARRO, 2011).

Assim, no EEM, as tarefas são planejadas e organizadas pelos professores de modo que sejam desafiadoras, mas que promovam a construção de conceitos e a compreensão dos procedimentos matemáticos. Portanto, ao elaborar tarefas na perspectiva do EEM, o docente precisa ter a noção dos conhecimentos prévios e considerar que as tarefas precisam

> ser um desafio e basear – se em uma situação concreta; possibilitar aos alunos a confiança em sua experiência quando resolvê-las e, portanto, fazer uso de várias estratégias com diferentes níveis de sofisticação matemática. Elas devem ser ancoradas no currículo e ser destinadas a uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos que têm uma forte ligação com o conhecimento que os alunos constroem durante as aulas (OLIVEIRA; CYRINO, 2013, p. 218).

Portanto, o papel do professor é de suma importância, pois o docente direciona desde a elaboração/escolha das tarefas até a organização do desenvolvimento da aula para que as dimensões[5] do EEM se evidenciem, além de guiar os conhecimentos matemáticos dos alunos.

De acordo com essa metodologia, Doneda de Oliveira e Basniak (2021c) elaboraram as tarefas de natureza exploratória para serem desenvolvidas em quatro fases: introdução da tarefa (IT), realização da tarefa (RT), discussão coletiva da tarefa (DCT) e sistematização das aprendizagens matemáticas (SAM). Durante as tarefas, as fases IT e RT foram realizadas somente em um encontro com cada grupo de modo separado. Já as fases DCT e a SAM foram realizadas com a participação de todos os alunos, em outra aula, com pelo menos um dia de intervalo em relação às duas primeiras fases. No Quadro 2 apresentamos as tarefas desenvolvidas, objetivos, datas em que foram desenvolvidas as tarefas com as fases e o tempo das gravações.

Quadro 2 - As Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados

(Continua)

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento das fases e minutos gravados		
		IT e RT		DCT e SAM
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	15/09/2020 G1: 124 min G3: 99 min	16/09/2020 G4: 100 min G5: 61 min	18/09/2020 Todos os alunos 91 min
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1)	-Compreender relações de equivalência e respondê-las algebricamente; -Compreender equivalência de frações; -Compreender a representação fracionária.	22/09/2020 G1: 107 min G3:87 min	23/09/2020 G4: 97 min G5: 80 min	25/09/2020 Todos os alunos 66 min
Tarefa 2: Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 2)	- Comparar frações; -Compreender a adição de frações com denominadores iguais.	29/09/2020 G1: 112 min G3: 75 min	30/09/2020 G4: 105 min G5: 82 min	02/10/2020 Todos os alunos 112 min

[5] As dimensões do Ensino Exploratório de Matemática são discutidas no trabalho de Estevam e Basniak (2019).

(Conclusão)

Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; -Compreender adição e subtração de frações com denominadores diferentes.	14/10/2020 G1:95 min	14/10/2020 G4: 96 min G5:53 min	16/10/2020 Todos os alunos 76 min

Fonte: Doneda de Oliveira e Basniak (2021b, p. 318).

Para estruturar os grupos, foram criados formulários do Google Formulários, para conciliar os dias e horários que os alunos das duas turmas tinham disponibilidade e acesso à internet. Isto porque muitos alunos utilizavam o aparelho celular dos pais para assistirem às aulas. Também foi considerado o tipo de internet que eles estariam usando (dados móveis ou wi-fi) e qual aparelho (celular, tablet, notebook).

Após o recolhimento dessas informações, foram organizados primeiramente seis grupos com cinco alunos em cada. Além disso, a professora regente criou grupos de *WhatsApp*, com objetivo de repassar comunicados, lembrar os alunos de recarregar os aparelhos, e para que pudessem tirar dúvidas durante a resolução da tarefa. Isto porque a professora ficava conectada na sala virtual via Google Meet, mas com a câmera fechada para não que os alunos interagissem mais entre si e não dependessem tanto da professora. Inevitavelmente ocorreu a desistência de alguns alunos. Então, por fim foram constituídos os seguintes grupos: grupos 1 (G1), grupo 3 (G3), grupo 4 (G4) e grupo 5 (G5). Os integrantes escolheram seus próprios codinomes, que foram mantidos neste trabalho (Quadro 3).

Quadro 3 – Codinome dos participantes

Grupos	Participantes
G1	Docinho, Doguinha, Florzinha, Fofinha, Lindinha e Thor
G3	Boom, Flora, Maluquinha, Mazarect e Olívia
G4	Anubis, Bob, Fifo, Magrão, Spider-man e Ymercurius
G5	Luffy, Mulher Maravilha, Poster, Viúva Negra, Zorro

Fonte: Doneda de Oliveira e Basniak (2021b, p. 318).

Portanto, os dados coletados são advindos das gravações e transcrições das dezenove aulas efetivadas via *Google Meet*, gerando o total de 1.718 minutos de gravações, aproximadamente vinte e nove horas. De início, ao assistir as gravações, a autora tentava reproduzir as tarefas com o Cuisenaire físico, fazendo pausas nas construções e nas falas dos alunos, quando identificava elementos significativos para a pesquisa. Também tivemos acesso às suas construções/prints e aos registros das transcrições.

Powell, Francisco e Maher (2004, p. 86) evidenciam que "o vídeo é um importante e flexível instrumento de coleta de informação oral e visual", pois concede que capture "interações complexas e permite aos pesquisadores reexaminar continuamente os dados". Assim sendo, esse recurso ainda permite capturar comportamentos verbais e não verbais e todo o contexto da sala de aula, além de pesquisador poder rever as cenas a quantidade necessária de vezes.

Para a realização das tarefas com o Cuisenaire físico, foram convidados seis alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em novembro de 2021, de uma escola estadual do Norte do Paraná. Para a implementação das tarefas adaptadas com o material de Cuisenaire físico, os alunos decidiram utilizar os seguintes codinomes: Emily, Júlia, João, Luc, Lauss e William. A escola disponibilizou uma sala de aula para que as tarefas pudessem ser realizadas, de modo que os alunos e a professora respeitassem o distanciamento social previsto pela Organização Mundial da Saúde (OMS). Assim, utilizamos fita adesiva colorida para demarcar o distanciamento entre os estudantes, como ilustrado na Figura 10. A disposição das mesas também foi pensada de modo que a distância entre um aluno e outro fosse de 1 metro.

Figura 10 – Organização da sala de aula

Fonte: Acervo da autora (2021).

Para essas intervenções, foi disponibilizado um material para cada aluno, com o intuito de não haver necessidade de troca de peças entre eles. As tarefas selecionadas foram: Tarefa 1 – Qual o comprimento? Essa tarefa visa a compreender a fração como medida. Tarefa 2 – Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1), que objetiva compreender relações de equivalência e respondê-las algebricamente, compreender equivalência de frações e a representação fracionária. Tarefa 2 – Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 2), que tem como objetivo a comparação de frações e compreensão da adição de frações com denominadores iguais.

As intervenções foram realizadas em três dias no mês de novembro de 2021, com duração de duas aulas, aproximadamente 2 horas e 15 minutos cada. No Quadro 4, se encontram as tarefas desenvolvidas com seus respectivos objetivos e o tempo das gravações, totalizando 273 minutos.

Quadro 4 – Tarefas desenvolvidas com seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados.

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento das tarefas e minutos gravados
Tarefa 1: Qual o comprimento?	Compreender fração como medida.	10/11/2021 – 101 minutos com todos os alunos
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1)	Comparar frações; Compreender a adição de frações com denominadores iguais.	17/11/2021 – 77 minutos com todos os alunos
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 2)	Comparar frações; Compreender a adição de frações com denominadores iguais.	22/11/2021 – 98 minutos com todos os alunos

Fonte: Desenvolvido pela autora (2021).

Assim, os dados que orientaram as análises foram compostos por, além daqueles produzidos por Doneda de Oliveira e Basniak (2021b), os dados produzidos/construídos durante o desenvolvimento dessas três tarefas, coletados por meio de gravações em vídeo, registros escritos dos estudantes e anotações diárias da pesquisadora. Para isso, foi utilizado um notebook e um celular para realizar as filmagens e auxiliar a pesquisadora na identificação dos estudantes e nas discussões que, muitas vezes, passam despercebidas. Com a finalidade de captar de forma nítida as falas dos estudantes, foi necessário deixar cada um dos aparelhos em pontos estratégicos da sala de aula.

A fim de situar o leitor quanto ao desempenho dos alunos ao longo das aulas, analisamos as tarefas na ordem em que foram propostas e desenvolvidas: Tarefa 1, Tarefa 2 – parte 1 e 2. Logo, em todas elas, apresentamos excertos e figuras, por ser o momento em que os alunos expressaram suas ideias de maneira mais organizada, evidenciando suas compreensões e dúvidas. Para isso, as análises abordam o uso do Cuisenaire físico e Cuisenaire digital, e utilizaremos o Quadro 5 para diferenciar as intervenções referentes a cada material. A letra depois do nome Professora faz referência a professora que trabalhou utilizando o Cuisenaire Físico (Professora F) do Cuisenaire Digital (Professora D).

Quadro 5 – Codinomes das pesquisadoras

Material	Professora Pesquisadora
Cuisenaire físico	Professora F
Cuisenaire digital	Professora D

Fonte: Organizado pela autora (2021).

Para orientar nossas análises, utilizamos os pressupostos teórico-metodológicos da Gênese Instrumental, que apresentamos na subseção que segue.

3.1 Gênese Instrumental

A Gênese Instrumental, discutida por Rabardel (1995), apoia-se na teoria da Ergonomia Cognitiva, que está relacionada a processos mentais, como a percepção e raciocínio, que possibilita estudo e análise das ações e interações entre os sujeitos e elementos de um sistema (RABARDEL, 2002). A transformação do artefato em instrumento é denominada Gênese Instrumental, na qual o artefato pode ser um meio material ou um meio simbólico. O instrumento consiste no artefato acrescido de um esquema de utilização construído pelo sujeito, quando o incorpora em suas atividades (ARTIGUE, 2011).

Rabardel (2002) enfatiza três elementos centrais na Gênese Instrumental: sujeito, instrumento e objeto. O sujeito pode ser considerado usuário, operador ou trabalhador, que utiliza artefatos, máquinas ou ferramentas para efetuar algum ato/ação, de acordo com seus conhecimentos, utilizando o apoio do artefato.

Drijvers *et al*. (2010) apontam que o artefato é o objeto, podendo ser material ou simbólico, mas utilizado como ferramenta, de modo a dar amparo à atividade do sujeito na realização de determinada tarefa. Sendo assim, esse processo de transformação do artefato em instrumento ocorre a partir de esquemas mentais de utilização, em que o sujeito realiza ações intencionais, nas quais ele se apropria do artefato.

> [...] Assim que começo a aprender a escrever, a caneta não é mais um artefato que uso para desenhar, mas se transforma em um artefato que também uso para escrever. Juntamente com minhas habilidades em desenvolvimento, a caneta forma um instrumento para escrever. Isso nos leva à construção psicológica do instrumento sendo mais do que um artefato (DRIJVERS *et al*., 2010, p. 108, tradução nossa).

Portanto, Drijvers *et al*. (2010, p. 108, tradução nossa) destacam que “Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa”. Então,

> Para os sujeitos, um artefato é enriquecido pelas situações de ação em que esteve circunstancialmente envolvido [...]. É assim que poderíamos chamar [...] o campo instrumental do artefato, para o sujeito: o conjunto de esquemas de utilização de artefatos nos quais ele pode ser introduzido para formar um instrumento; o conjunto de objetos em que permite que o sujeito atue (RABARDEL, 2002, p. 69, tradução nossa).

Logo, compreendemos que o instrumento não se baseia apenas na ação do sujeito no artefato[6], mas é uma construção (RABARDEL, 2002). O instrumento diz respeito a uma construção individual de cada sujeito, pois um artefato pode mudar e ser utilizado como instrumentos diferentes, de acordo com o sujeito e os esquemas que se utiliza (PACHÊCO *et al.,* 2018), em razão de que "um instrumento não existe 'por si só'; o artefato se transforma em um instrumento para um determinado sujeito quando este o incorpora às suas atividades" (BITTAR, 2011, p. 160).

Isto posto, percebe-se a diferença entre instrumento e artefato, mas existe, ainda, uma dupla relação entre sujeito e artefato, visualizada em duas dimensões: a instrumentalização, que diz respeito a como o pensamento do sujeito afeta o artefato; e a instrumentação, que se refere a como o artefato afeta o comportamento e pensamento do sujeito (BASNIAK; ESTEVAM, 2019).

> A gênese instrumental é um processo complexo que busca a integração entre as características do artefato (potencialidades e limitações) e as atividades do sujeito. Este processo ocorre em duas direções: na direção interna, do próprio sujeito, denominada instrumentação, e na direção externa, do artefato, denominada instrumentalização (PADILHA; BITTAR, 2013, p. 7).

Rabardel (2002) diferencia a instrumentação e instrumentalização na Gênese Instrumental esclarecendo que a primeira está direcionada ao sujeito e a segunda ao artefato. Na instrumentalização, o sujeito transforma o artefato, de modo que o empregue em uma sequência de tarefas. O autor delimita essa dimensão como "um processo no qual o sujeito registra as propriedades do artefato. Esse processo está fundamentado nas características e propriedades intrínsecas do artefato e lhes confere um status alinhado à ação em andamento e à situação" (RABARDEL, 2002, p. 80, tradução nossa).

Em relação à instrumentação, Rabardel (2002) destaca a relação do objeto com o sujeito, pois são os esquemas realizadas no/com o artefato durante a realização da tarefa que geram instrumentos, oportunizando a reflexão do sujeito sobre o que deve ser feito. Logo, o autor enfatiza que a "descoberta progressiva dos sujeitos das propriedades (intrínsecas) do artefato é

---

[6] "O artefato (seja material ou não) aporta uma solução para um problema ou uma classe de problemas postos socialmente" (RABARDEL, 1995, p. 60, tradução nossa).

acompanhada pela adaptação de seus esquemas, bem como alterações na significação do instrumento resultante da associação do artefato com novos esquemas" (RABARDEL, 2002, p. 82, tradução nossa).

Para analisar os dados com olhar da perspectiva da Gênese Instrumental, consideramos dois artefatos: Cuisenaire digital e Cuisenaire físico, em como eles, por meio de esquemas de utilização, se tornam instrumentos utilizados na aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo de fração. Logo, debruçamo-nos sobre como o aluno se apropria do artefato transformando-o em instrumento no estudo de frações como medida.

Ademais, o objetivo foi *investigar diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição*. As análises consideram o *applet* e as barras físicas enquanto artefatos que, quando o aluno as utiliza, passam a ser um instrumento. Em outras palavras, o Cuisenaire digital e o Cuisenaire físico passam a ser considerados instrumentos, na medida em que o discente compreende as suas características e competências, também assentes no artefato, e consegue produzir algo que relaciona ou não à matemática em seus comandos e nas possíveis representações (BUENO; BASNIAK, 2020).

Neste trabalho, interessam estratégias, ideias e conhecimentos que o aluno mobiliza para resolver as tarefas. Assim, buscamos identificar conhecimentos empregados nas resoluções das tarefas, associado à sua interação com o grupo no momento de compartilhar ideias para alcançar o mesmo objetivo, também a validação e refutação de ideias e métodos.

Sendo assim, buscamos identificar quando o sujeito:

- Usa estratégias e conteúdos matemáticos para resolver a tarefa utilizando as barras físicas e/ou digitais;
- Emprega estratégias para resolver as tarefas (como realizar comparações com as barras físicas na horizontal (deitadas) e na vertical (empilhadas);
- Emprega estratégias com base em seus conhecimentos prévios (utilizando a perspectiva parte-todo ele divide a barrinha em vários "pedacinhos");
- Emprega estratégias diferentes, como o uso das barras físicas e/ou digitais como medida ou comparação.

A instrumentação refere-se a como o sujeito emprega o artefato para resolver as tarefas mobilizando conhecimento matemático, enquanto a instrumentalização relaciona-se a como o artefato influencia o pensamento do sujeito na resolução das tarefas (BUENO; BASNIAK, 2020).

Nesse contexto, o Quadro 6 resume as principais ideias da GI, empregadas nas análises.

Quadro 6 – Elementos da GI, Cuisenaire físico e Cuisenaire digital

Elemento da GI	Cuisenaire físico	Cuisenaire digital
Instrumentação	Com base na manipulação das barras, o sujeito elabora ideia para desenvolver a tarefa; De acordo com as características das barras físicas, o sujeito constrói comparações e define relações comparativas e de equivalência, e assim pode 47esponde47a-las algebricamente; e O sujeito consegue, por meio das barras, visualizá-las como uma mesma unidade de medida.	Com base na manipulação das barras digitais, o sujeito elabora ideia para desenvolver a tarefa; De acordo com as características das barras digitais, o sujeito constrói comparações e define relações comparativas e de equivalência; e O sujeito consegue, por meio das barras digitais, visualizá-las como uma mesma unidade de medida.
Instrumentalização	O sujeito: Compreende o funcionamento e manipula as barras; Incorpora as potencialidades das barras físicas para resolver as tarefas; Constata a sobreposição de barras físicas; e Implementa a comparação entre barras físicas, de cores iguais ou diferentes, podendo ser colocadas lado a lado, alinhadas ou sobrepostas.	O sujeito: Compreende o funcionamento e manipula as barras digitais; Entende as limitações e possibilidades das barras digitais; Explora os recursos das barras digitais; e Entende as potencialidades das barras digitais para resolver as tarefas.

Fonte: A autora (2020).

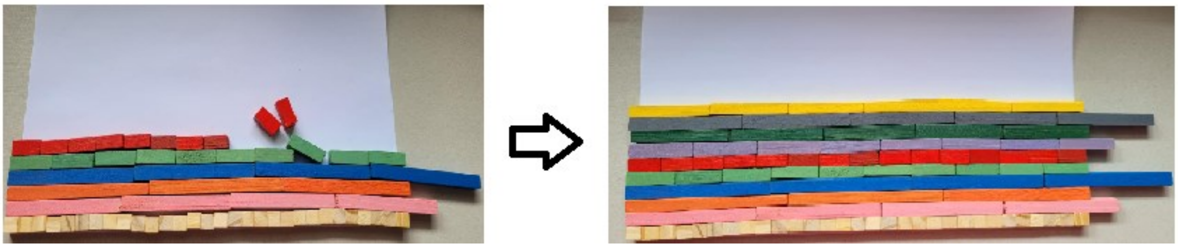
Por conseguinte, as análises foram realizadas de acordo com as tarefas de Doneda de Oliveira e Basniak (2021) e o seu desenvolvimento com o Cuisenaire digital e depois o físico. Assim, as análises tratam as duas intervenções concomitantemente, denotando diferenças e similaridades, como pode ser lido no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4 – CUISENAIRE FÍSICO E O CUISENAIRE DIGITAL

Inicialmente, manipulamos as barras Cuisenaire digital e física buscando identificar diferenças entre os dois materiais.

O Cuisenaire físico é composto por barras leves, em formato de paralelepípedo que, em algumas situações, dificultam as comparações porque conforme a necessidade de usar várias barras para medir algo, as peças podem não ficar exatamente lado a lado. Assim, dependendo do tamanho a ser medido e das barras utilizadas, pode ser difícil dispô-las de maneira adequada. Por exemplo, ao medir o comprimento horizontal de uma folha de papel sulfite A4, é necessário ter cuidado para não deslocar as peças dispostas (Figura 11).

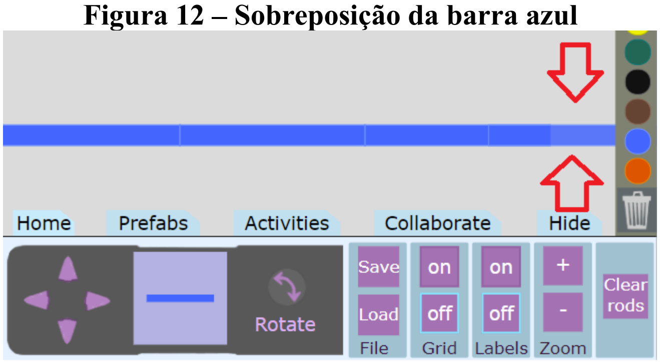
Figura 11 – Dispondo as barras para realizar a medida do comprimento horizontal da folha de sulfite



Fonte: Acervo da autora (2021).

No Cuisenaire digital, quando clicamos nos círculos coloridos na lateral direita para poder colocar as barras no *applet* e medir o comprimento horizontal do aplicativo, ao deslocá-las, elas não se movimentam, a menos que a barra seja selecionada. Isto é útil na hora de medir, pois quando as barras são colocadas lado a lado, não há risco de elas se misturarem. Entretanto, ao clicar no círculo para selecionar a barra que se deseja usar para medir, se clicarmos várias vezes em um mesmo círculo, as barras ficarão sobrepostas, e conforme elas são movimentadas, pode ocorrer de uma barra ficar sobre a outra. Isso pode ser observado somente quando passamos o cursor sobre as barrinhas, ficando um tom mais claro (Figura 12).

Figura 12 – Sobreposição da barra azul

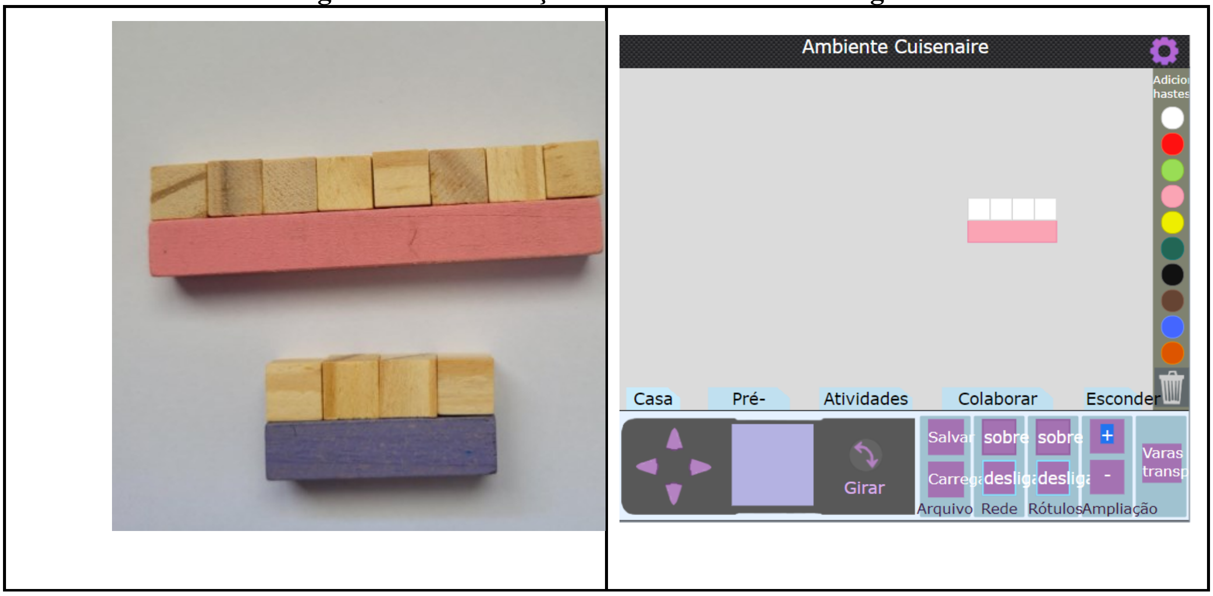


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Porém, dificilmente as barras sobrepostas serão contadas, e assim, avaliamos que a organização no Cuisenaire digital facilita seu uso nas tarefas.

Outra diferença entre as barras de Cuisenaire físicas e digitais são suas cores e tamanhos, que apresentam diferenças. A barra rosa, no Cuisenaire digital, mede quatro barras brancas, enquanto no Cuisenaire físico, mede oito barras brancas. Sendo assim, a barra rosa, no digital, equivale à medida da barra lilás no físico (Figura 13).

Figura 13 – Diferença do Cuisenaire físico e digital



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Para iniciar as discussões com os alunos, a princípio, a Professora F entregou o Cuisenaire físico para cada aluno, a fim de que eles explorassem o material e observassem suas formas, tamanhos e cores, deixando esse momento aberto para que manipulassem as barras, fazendo o uso que desejassem. Ao abrir as caixas em que se encontravam as barras, houve comentários dos alunos, como: “*Nossa, que colorido!*”, “*Que bonito!*” Assim, tornou-se evidente a atenção para as cores, com ênfase ao potencial lúdico em despertar a curiosidade dos alunos (SARMENTO, 2010). Em seguida começaram a realizar construções (Figura 14) de seus nomes, robôs e *fogueiras de São João,* com sobreposição das barras e alinhando-as (SARMENTO, 2010).

Figura 14 – Primeiro contato dos alunos com as barras Cuisenaire físicas

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A Professora D também apresentou a versão do Cuisenaire digital utilizando um computador, em que os alunos se alternavam para manusear o *applet,* de forma que conhecessem a existência tanto da versão digital quanto da física do Cuisenaire. Assim, eles manusearam o Cuisenaire digital por um período de vinte minutos e pontuaram suas primeiras impressões:

> ***Emilly:*** *No digital é mais fácil de empilhar, e o físico, um pouco difícil. E no digital aparece apenas um retângulo, e no físico, um sólido.*
> ***Lauss:*** *No digital é um pouco diferente do físico. Pelo digital só podemos ver o tamanho colocando a peça* [referindo-se a clicar nas cores do *applet* para visualizar o tamanho da barra]. *Já no físico precisamos apenas olhar a peça.*
> ***Júlia****: No digital, você só consegue ver o tamanho se você apertar na cor, e o de madeira você consegue pegar.*
>
> **Tarefa 1 – Intervenção Professora F**
> **Realização da Tarefa, 10/11/2021.**

Enquanto os alunos observavam as barras físicas, eles apenas as associaram a *cubinhos;* e as barras digitais, a retângulos coloridos. Logo, as barras se constituem como artefato, mas a partir do momento que os alunos fazem uso das barras para escrever seus nomes, construir peças de brinquedo, embora não associem as barras às frações, elas assumem a postura de instrumento.

A partir dessas observações iniciais, apresentamos, na sequência, a análise das tarefas 1 e 2 de Oliveira (2020). Discutimos primeiro a Tarefa 1, denominada *Qual o comprimento?* Essa tarefa teve como objetivo que os alunos compreendessem a fração como medida. Na sequência, foi discutida a Tarefa 2, *Medindo com Barras Cuisenaire* (OLIVEIRA, 2021).

Para ilustrar as análises, são apresentados excertos e figuras de construções do grupo de seis alunos no desenvolvimento das tarefas. Discutimos paralelamente o uso do Cuisenaire digital e físico. Portanto, sempre que nos referirmos ao Cuisenaire físico, nos referimos às intervenções realizadas pela Professora F, e ao Cuisenaire digital, às intervenções realizadas pela Professora D.

Tarefa 1 – Qual o comprimento?

Figura 15 – Tarefa 1: Qual é o comprimento?

1) Observe o material que vocês receberam.

   a) Utilizando barras de mesma cor, determinem o comprimento horizontal do retângulo. Façam isso para todas as cores.
   b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras ultrapassam o comprimento horizontal total do retângulo. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total do retângulo usando essa barra (que não completa/ultrapassa o comprimento) na explicação?

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Após esse primeiro contato dos alunos com o material, a Professora F entregou a Tarefa 1 em duas folhas sulfites: uma delas com o enunciado da tarefa e outra com o desenho de um retângulo, para que os alunos determinassem seu comprimento horizontal usando barras físicas inteiras. Algumas barras, como pode ser visto na figura 16, ultrapassam o comprimento horizontal do retângulo. Em outras palavras, não era possível encontrar uma medida inteira com algumas barras.

Em relação ao Cuisenaire digital, os alunos demonstraram dificuldade em não compreender o enunciado da Tarefa 1, precisando da intermediação da Professora D: *O que vocês entendem por horizontal? Podem pesquisar, se quiserem.* Logo, os alunos compreenderam o enunciado e não demonstraram dificuldade em manusear o *applet* em que estavam as barras, e iniciaram a disposição de todas as cores das barras, concluindo o item a) da Tarefa 1.

Manuseando o Cuisenaire físico, os alunos relataram a mesma dificuldade relatada pela Professora F para alinhar as barras, pois como estavam medindo o comprimento horizontal do retângulo na folha de sulfite, qualquer movimento brusco desordenava as barras dispostas. Então, buscaram alternativas usando outros artefatos (caneta, lápis) para ajudar a alinhar as barras menores do Cuisenaire (Figura 16) para conseguirem concluir o item a) da tarefa com êxito, medindo com todas as cores das barras. Identificamos a instrumentalização ao disporem as barras sobre a folha de papel e ao enfrentarem a dificuldade de alinhá-las. Compreendemos a instrumentação ao desenvolveram estratégias adequadas às características das barras físicas para conseguir medir o que era solicitado, utilizando artefatos auxiliares adequados. Nesse sentido, aproveitamos a situação para esclarecer como um artefato desenvolvido para ser utilizado para determinado fim pode se tornar um instrumento para atender outra necessidade. Nessa situação, caneta e lápis, artefatos construídos para a escrita, foram transformados em instrumento pelos alunos para auxiliar a alinhar as barras. Neste contexto, o processo de transformação do artefato em instrumento está relacionado aos esquemas de uso aplicados ao artefato. Logo, todos os alunos utilizaram a mesma quantidade de barras para medir o lado do retângulo.

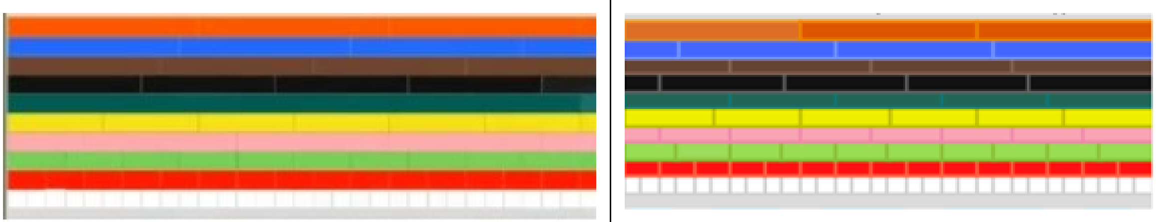
Figura 16 – Dispondo as barras para medir o comprimento horizontal do retângulo

Fonte: Acervo da autora (2021).

Quanto ao Cuisenaire digital, os alunos apresentaram facilidade em selecionar as barras e dispô-las para medir o comprimento horizontal do *applet*. Entendemos a instrumentalização quando o aluno realiza a ação de dispor as barras digitais no *applet,* estando atento para a sobreposição das barras digitais e a instrumentação, associada à análise da disposição das barras digitais para medir o que foi pedido na tarefa. Ao concluir o item a) da tarefa, nem todos os grupos obtiveram a mesma medida do comprimento do aplicativo. O G4 dispôs as barras brancas da direita para a esquerda, e a partir da intervenção da Professora D, orientando os alunos a usarem ferramenta Zoom para que as barras ficassem organizadas corretamente no *applet* de um lado ao outro. Logo, concluíram que a medida era de 31 barras (Figura 17 (a)). Os grupos G1, G3 e G5, utilizaram as barras brancas como unidade de medida para as outras barras, utilizando 30 barras ao medir o comprimento do *applet*. Esses três grupos encontraram barras inteiras que completavam o comprimento e outras que faltavam e/ou sobravam. Ao usar a ferramenta Zoom, após a manipulação do material digital, é possível observar a barras dispostas. Portanto, caracterizamos como instrumentação, pois por meio das barras digitais foi possível visualizar todas as barras, e partindo inicialmente da branca como uma unidade de medida para, assim, comparar as outras barras (Figura 17 (b)). Identificamos a instrumentalização na ação dos estudantes de arrumar as barras lado a lado no software para medir o comprimento e a instrumentalização ao considerarem de forma diferente sua disposição.

Figura 17 – Diferença de quantidade de barras brancas

a) b)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

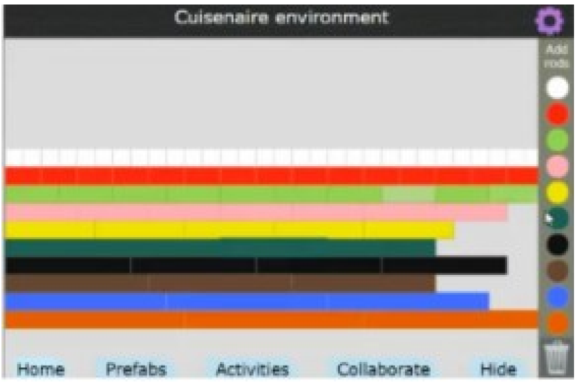
Para medir o comprimento horizontal do retângulo com o auxílio das barras físicas, os alunos identificaram que as barras amarela, azul, cinza e laranja excederam o limite do retângulo. Identificamos a instrumentação, pois o sujeito visualiza as barras com suas características físicas e nota quais barras ultrapassam a demarcação do retângulo (Figura 18a). Em relação às barras digitais, o enunciado perguntava qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Assim, os alunos identificaram que as barras marrom, verde escura, azul, amarelo e rosa não completam o comprimento horizontal da região *applet* (Figura 18b). Neste contexto, identificamos a instrumentação, pois as barras digitais proporcionam ao sujeito uma visualização para resolver a tarefa.

Figura 18 – Comparação da Tarefa 1 Cuisenaire físico *versus* Cuisenaire digital

(a)

João: *Professora, o que fazemos com as barras que passou?* [excederam o limite do retângulo].

(b)



Professora D: *A Aluna A está alinhando todas as barrinhas e ela já percebeu que umas barras não dão certo no alinhamento, né? Não ficam todas completas, é isso?*
Docinho: *É*

ou

Professora D: *Tá, mas a preta, são quantas brancas?*
Docinho: Sete.
Professora D: *E daí a Aluna A chegou à conclusão [de] que aquele pedaço que falta para completar são duas brancas, foi isso?*

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Nessa situação, inicialmente com as barras físicas, verificamos a instrumentação na ação do sujeito, ao observar a disposição das barras e identificar quais cruzaram a delimitação do comprimento que deveria medir. Assim, a instrumentação está associada à influência do instrumento no pensamento dos alunos nas barras físicas, referindo que *excederam* o limite do retângulo.

Concomitantemente, em relação às barras digitais, constatamos a instrumentalização quando, ao realizar a mediação, o sujeito percebeu as limitações e possibilidades do material digital, expressas por meio de falas dos alunos relativas às barras digitais que *faltariam para completar* o comprimento horizontal da região do *applet.*

Diante dos artefatos, identificamos diferenças entre o material físico e digital. No físico, o aluno manuseia, compara, pega uma barra e outra. No digital, o aluno também faz essa escolha, mas faz pela tela do computador, e isso proporciona um aspecto dinâmico: o trabalho com o computador promove esse movimento na tela, e tudo que é possível fazer. A ênfase está na visualização, pois o aluno visualiza esse acontecimento, esse movimento na tela. Então, esse aspecto dinâmico da tecnologia contribui para a construção do conceito de fração.

Na resolução da tarefa usando as barras físicas, identificamos que os alunos, em geral, recorrem a palpites e valores aproximados, conforme o excerto abaixo.

> **Professora F:** *Medindo o retângulo com a barra laranja, quantas barras laranja cabem no meu comprimento horizontal do retângulo? Quantas barras laranja vamos ter?*
> **João:** *Duas e pouco, ué* [olha para as barras].
> **Júlia:** *Duas barras e um terço?*
> **Professora F:** *E como você viu isso?*
> **Júlia:** *Porque eu dividi em três, a barra, e o que está dentro é um terço.*
> **Tarefa 1 – Intervenção Professora F.**
> **Realização da Tarefa, 10/11/2021.**

Para responder às indagações da Professora F, João olha para as barras, mas ainda não consegue trazer o valor correspondente da barra laranja, que estava sobrando no comprimento horizontal do retângulo. Sem a intervenção da Professora F, os alunos realizaram a comparação entre as barras, mas Emily não conseguiu relacionar as barras com o conceito de frações, de acordo com o excerto a seguir.

> **Emily:** *Uma coisa que eu percebi, essas* [barras] *que sobraram tem praticamente o mesmo tamanho das outras peças* [barras]*, de outras cores.*
> **Professora F**: *Como assim?*
> **Emily:** *Olha a cinza* [barra]*, a parte que sobra* [do comprimento do retângulo] *tem praticamente o mesmo tamanho que a roxa (barra)* [realiza fala fazendo a sobreposição das barras]. *A amarela* [parte que sobra] *tem o mesmo tamanho que a branca.*
> **Professora F:** *Hum, então qual é a medida do comprimento usando as barras cinza?* [*Aluna fica pensativa*].
> **Tarefa 1 – Intervenção Professora F.**
> **Realização da Tarefa 1, 10/11/2021.**

Logo, percebe-se a importância da magnitude para o entendimento de frações, assim como a flexibilidade e a razoabilidade se destacam pela sua importância (POWELL; ALI, 2018). Os alunos já possuíam contato com frações, mas não conseguiam relacionar o tamanho do número fracionário, mesmo que o próprio se apresentasse na forma não simbólica. Ao medir o comprimento do retângulo, todos os alunos utilizaram 24 barras brancas, e com a intervenção da Professora F, utilizaram como unidade de medida a barra branca. Portanto, realizaram comparações multiplicativas entre as barras para legitimar as ideias. Incentivados pela Professora F, ao escrever a medida do comprimento utilizando frações, a aluna Lauss comparou a barra laranja à barra branca (Figura 20, na página seguinte).

> **Professora F:** *Uma barra laranja são quantas barras brancas?*
> **Lauss:** [coloca a barra laranja embaixo das barras brancas – instrumentação]*Uma barra laranja são dez brancas.*

> **Professora F:** *Então como fica o comprimento do retângulo utilizando a barra laranja?*
> **Lauss:** *Duas laranja e quatro brancas.*
> **Professora F**: *Mas podemos usar duas cores de barras?*
> **Lauss:** [acrescenta quatro barras brancas acima da barra laranja, que ultrapassou o limite do retângulo – instrumentalização] *Então vai ser duas barras laranja e quatro décimos.*
>
> **Tarefa 1 – Intervenção Professora F.**
> **Realização da Tarefa 1, 10/11/2021.**

Figura 19 – Comparação multiplicativa da barra laranja com a barra branca

Fonte: Acervo da autora (2021).

Identificamos a diferença em ambos os materiais quanto à comparação multiplicativa, quando o aluno realiza a sobreposição de barras brancas acima de outras barras, com ambos os materiais, físico e digital. Identificamos, nessa situação, a instrumentalização, quando o sujeito, ao manipular as barras físicas, distingue facilmente a sobreposição delas, enquanto no material digital é necessário que ele observe a mudança de cores para identificar situação semelhante. A forma como o artefato influencia o pensamento do aluno não ocorre da mesma forma, pois na sobreposição de barras físicas, a altura é alterada, enquanto na sobreposição das barras digitais, a cor é alterada. Logo, as barras brancas como unidade de medida completam o comprimento horizontal do *applet*, na fileira das barras marrons (entre as barras azuis e pretas), conforme a Figura 20, na página seguinte.

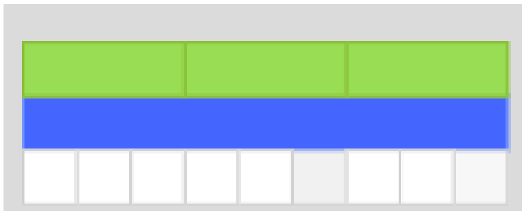
Figura 20 – Sobreposição das barras físicas e digitais

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em relação às Barras Cuisenaire, qualquer uma de suas barras podem ser usadas como referencial de unidade de medida, por não possuírem um valor fixo de unidade. Evidenciamos, nos excertos a seguir (Figura 21), estabelecendo relação entre o Cuisenaire físico e o digital com frações na perspectiva de medição, realizando uma comparação multiplicativa.

Figura 21 – Comparação entre as barras físicas e digitais

Júlia: *Ô professora, se eu colocar a barrinha amarela em cima da laranja* [instrumentalização], *eu vou ter uma barra laranja, são duas amarelas, né?*
Professora F: *Isso.*
Júlia: *Então uma laranja são cinco vermelhas* [instrumentalização].
Professora F: *Isso mesmo.*
Júlia: *Então, se fosse para completar o retângulo, seriam duas laranja e dois quintos, né?*
Professora F: *E como falamos na forma de fração?*
Júlia: *Dois inteiros e dois quintos.*



Luffy: *Ah, entendi. O verde tem o mesmo comprimento que 3. Se pegar 3 desses verdes dá o 9* [barras brancas].

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

No Cuisenaire físico, após as barras serem transformadas em instrumentos mediante as estratégias de comparação, Júlia abordou outro exemplo de relação comparativa da barra laranja com a barra vermelha, sendo caracterizada a instrumentalização. Assim, ela compartilhou a ideia com a equipe utilizando, a barra vermelha como unidade de medida para determinar o comprimento horizontal do retângulo.

Quanto ao Cuisenaire digital, também há a possibilidade de estabelecer a relação comparativa: no caso, Luffy após descobrir quantas barras brancas correspondem à barra azul, utilizou a barra verde como unidade de medida para comparar com a barra azul no *applet*. Assim, realizou comparações multiplicativas entre as barras branca, verde e azul. Nesta situação do Cuisenaire digital, identificamos a instrumentação quando o sujeito se apropriou das características das barras digitais, de suas limitações e possiblidades, e conseguiu realizar relações comparativas e de equivalência. No entanto, para demonstrar ao grupo sua ideia, resolveu manipular as barras e mostrar sua construção. Desse modo, a instrumentalização está relacionada à ação do sujeito em manusear as barras: azul, branca e verde, a fim de que seu grupo entendesse as potencialidades das barras digitais e pudesse resolver a tarefa.

Portanto, os alunos conseguiram utilizar o artefato dispondo as diferentes cores de barras para medir o comprimento horizontal do retângulo/comprimento horizontal do *applet* instrumentalização. Identificamos a instrumentalização em relação a ambos os materiais pela ação do sujeito de manipular as barras físicas/digitais para compreender como elas funcionam, tanto no software quanto no físico, o que foi necessário para resolver o que a solicitação aa tarefa. As barras físicas e digitais não são somente um artefato em que são visualizados atributos de cores e tamanhos, mas se transformam em um artefato que foi usado para medir, que contribuíram para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição. Isto porque permite ao aluno utilizar estratégias em que as barras assumem posição de instrumento para medir o lado do retângulo e do comprimento horizontal do *applet*.

Tarefa 2: Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 1)

Figura 22 – Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 1)

1) De acordo com o material Cuisenaire, responda:

c) Para facilitar as representações, nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção: não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.

Branca = ___	Vermelha = ___	Verde Clara = ___	Rosa = ___	Amarela = ___
Verde Escuro = ___	Preta = ___	Lilás = ___	Azul = ___	Laranja = ___

d) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e 59espo-la alinhada em sua folha. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida, formem o máximo de combinações possível nessa condição.

Utilizem as representações do quadro do item *a* para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Na continuidade, a tarefa 2 – parte 1, possui como objetivos: compreender as relações de equivalência e respondê-las algebricamente; e compreender equivalência de frações e respondê-las simbolicamente.

Inicialmente, Professora F pediu para que os alunos iniciassem a leitura da primeira questão da Tarefa 2. Em discussão conjunta, os alunos decidiram tomar como base para representar as barras de Cuisenaire físico a letra inicial das cores (branca: b), adjetivos (claro: c, escuro: e. Em relação à barra azul, optaram por escolher a segunda letra do nome da cor: z. Para representar a barra laranja, escolheram a letra que ainda não havia sido utilizada: j (Quadro 7 a)). Os alunos não se surpreenderam com as letras, considerando que estavam no 7º ano, já que a introdução à Álgebra é contemplada de modo fundamentado nesse ano do Ensino Fundamental (BRASIL 2018; PARANÁ 2018; PARANÁ 2019),

Quadro 7 - Letras escolhidas para representar as barras Cuisenaire físico e digital

a)	b)
Branca = b Vermelha = v Verde Clara = c Rosa = r Amarela = a Verde Escuro = e Preta = p Lilás = l Azul = z Laranja = j	Branca = b Vermelha = v Verde Clara = c Rosa = r Amarela = a Verde Escuro = e Preta = p Marrom = m Azul = a Laranja = l
Willian: *Até aqui tem letra.* **João:** *Pelo menos não é x.* **Professora F:** *Isso se chama álgebra, galera. Quando a gente usa letra na matemática, usamos a ideia de álgebra, vocês estão estudando bastante, né?!* **João:** *Sim.*	**Professora D**: *Deixa eu conversar uma coisa importante com vocês. A primeira coisa que eu quero saber é: vocês acharam muito difícil trabalhar com letrinha?* **Ymercurios**: *Não.* **Docinho:** *Sim, mais ou menos.* **Florzinha:** *Não.* **Professora D**: *É a primeira vez que vocês trabalham com letrinhas, não é?* **Florzinha**: *É.* **Professora D:** *Vocês sabiam que muita gente larga a escola por causa disso? Vocês sabiam que isso que vocês acabaram de fazer se chama álgebra? Vocês substituíram o nome das barras por letrinhas. Quando a gente coloca a letrinha na matemática, a gente está trabalhando com a ideia de álgebra, que vocês vão aprender bastante lá no 7º ano. Outra coisa que eu quero entender, para vocês me explicarem: o que vocês fizeram com as barras, só brincaram? Que ação vocês fizeram nessa tarefa?* **Poster:** *Além da brincadeira, também a medição.*

Fonte: Acervo da autora (2021).

Para nomear as barras do Cuisenaire digital, os alunos (Quadro 7 b)) utilizaram os mesmos critérios para representar as barras. Os alunos relataram que tiveram o primeiro contato com letras na matemática a partir dessa tarefa. Ambas as professoras comentaram que estavam trabalhando com Álgebra.

No item b da tarefa 2 (parte 1), cada aluno deveria escolher uma barra física e registrar todas as combinações de barras de uma única cor equivalente à barra escolhida, estabelecendo o máximo de combinações possível.

Ambas as professoras iniciaram a leitura e fizeram uma breve explicação da tarefa 2 (parte 1) item b)), pois era necessário que os alunos utilizassem as letras, que são representações das cores do quadro do item a) para as barras Cuisenaire.

Logo que os alunos começaram a resolver a tarefa, surgindo as dúvidas, a Professora F começou a respondê-las:

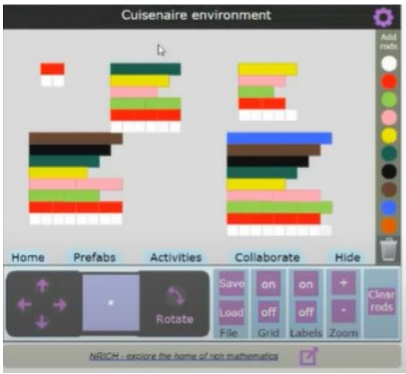
> **Lauss:** *Vamos fazer igual à aula passada? Em vez de medir o retângulo, vamos medir as barrinhas?*
> **Professora F:** *Isso mesmo. Escolham as barras para medir e descobrir as relações matemáticas.*
> **Júlia:** *Então* [coloca barra verde ao lado de três barras brancas – instrumentalização] *uma barra verde clara, que é 1c, eu vou medir com a branca, vai dar três brancas?*
> **Professora F:** *E como vamos representar isso?*
> **Júlia:** *1c = 3 b*
> **Professora F:** *Muito bem! Então você fez da verde clara, e da barra branca, como fica? Uma barra branca?*
> **Júlia:** [coloca somente uma barra branca na folha] *Não sei,* [traz a barra verde e posiciona a barra branca acima para ver – instrumentação], *vamos ter 1b é equivalente a* $\frac{1}{3}c$.
>
> **Tarefa 2 (Parte 1) – Professora F.**
> **Realização da Tarefa 2, 17/11/2021.**

Nesse diálogo, identificamos a instrumentalização quando o aluno manipulou o as barras físicas, comparando e avaliando seus tamanhos, seguida da instrumentação, quando ao mesmo tempo que afirma não saber, continua manipulando e observando as barras, e estabelece uma relação de equivalência entre a barra branca e a verde.

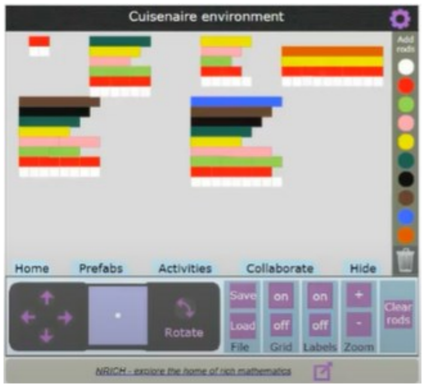
No grupo 5, a Professora D precisou intervir, explicando ao aluno como adicionar mais barras digitais no fundo do *applet*, pois o plano de fundo já estava *cheio* com algumas combinações de barras (Figura 23 a)). A Professora D explicou ao aluno que ele deveria clicar em Zoom (-) para poder visualizar toda a região do *applet* que deveria ser medida, e adicionar a(s) barra(s) digital(is) necessária(s) para completar a medição (Figura 23 b)). Na sequência, a Professora D releu o enunciado, enfatizando que era necessário realizar combinações de barras digitais de uma única cor, pois observou que os alunos estavam desenvolvendo a tarefa combinando as barras de várias cores para realizar a medição. O grupo 5 realizou outra organização (Figura 23 c)) com suas barras digitais, e seus integrantes demonstraram ter compreendido relações de equivalência, representando algebricamente as relações de equivalência da barra maior para a menor e da menor para a barra maior (Figura 23 d)). Nessa situação, a instrumentação refere-se ao processo de organizar e reorganizar as barras digitais e, a partir disso, a instrumentalização está associada às relações comparativas e de equivalência estabelecidas.

Figura 23 – Resolução do item b) Cuisenaire digital

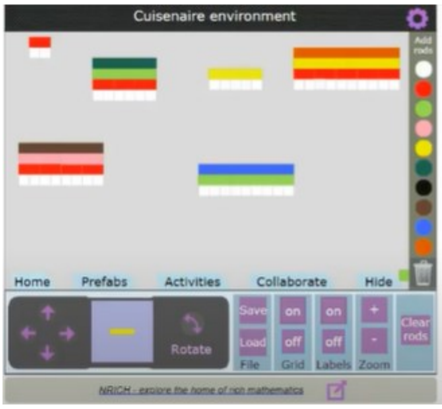
a)



b)



c)



d)

BARRA V	BARRA E	BARRA L	BARRA M	BARRA Z
1 v = 2 B	1 E= 6 B	1 L= 2 A	1 M= 2 R	1 Z= 3 C
1 B= $\frac{1}{2}$ V	1 E= 3 V	1 L= 5 V	1 M=4 V	1 Z= 9 B
	1 E= 2 C	1 L= 10 B	1 M= 8 B	1 C= $\frac{1}{3}$ Z
	1 B= $\frac{1}{6}$ E	1 A= $\frac{1}{2}$ L	1 R= $\frac{1}{2}$ M	1 B= $\frac{1}{9}$ Z
	1 V= $\frac{2}{6}$ E	1 V= $\frac{1}{5}$ L	1V= $\frac{1}{4}$ M	
	1 C= $\frac{3}{6}$ E	1 B= $\frac{1}{10}$ L	1 B= $\frac{1}{8}$ M	

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

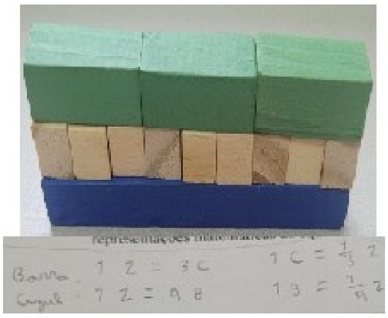
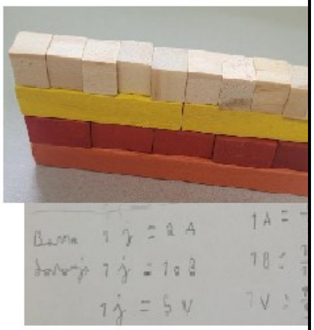
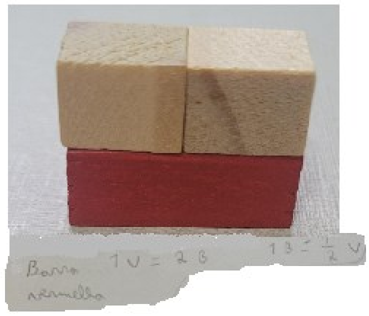
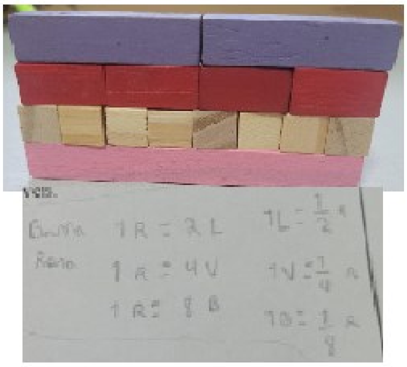
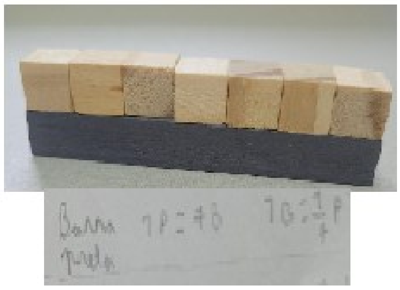
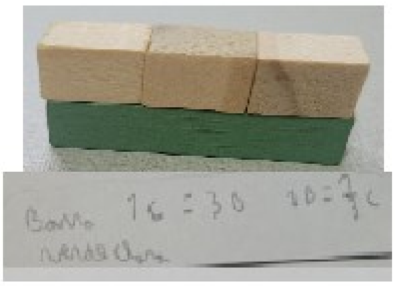
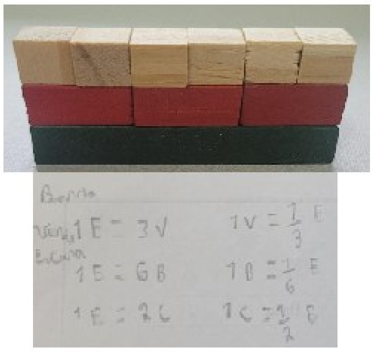
Com o Cuisenaire físico, os alunos compreenderam que não podiam usar cores de barras diferentes, como no excerto a seguir:

> **Professora F:** *Posso medir a barra azul com a barra laranja?*
> **João:** *Não* [olhando para o enunciado].
> **Professora F:** *Por quê?*
> **João:** *Porque tem que completar a barrinha.*
>
> **Tarefa 2 (Parte 1) – Intervenção Professora F.**
> **Realização da Tarefa 2, 17/11/2021.**

Identificamos a instrumentalização nesse momento, quando o manuseio das barras físicas contribuiu para que o sujeito realizasse as medições, considerando que o aluno visualiza a barra azul e laranja, e compreende que barra azul não completa a barra laranja em sua medida.

Os alunos conseguiram medir a barra amarela realizando combinações de várias cores de barras físicas (Figura 24).

Figura 24 – Realização do item b) por meio das barras físicas

a) Barra azul 	b) Barra laranja 	c) Barra vermelha 
d) Barra rosa 	e) Barra lilás 	f) Barra preta 
g) Barra verde clara 	h) Barra verde escura 	i) Barra amarela 

Fonte: Acervo da autora (2021).

Assim, os alunos realizaram combinações das barras utilizando uma única cor (Figura 24). Na Figura 24 g), por exemplo, existe a medida da barra verde clara, em que uma barra verde clara é equivalente a três barras brancas, e logo abaixo das barras se encontra a representação algébrica.

Identificamos, nessa situação, a instrumentação quando, a partir da manipulação das barras físicas, os alunos empregaram letras para representar e determinar relações de suas medidas. Assim, ocorreu o início da linguagem matemática comparada à linguagem não matemática dos alunos, evidenciando a compreensão das relações de equivalência, representando-as algebricamente, por exemplo. A razão para isso é que, nesse momento que os alunos podem ter conversas matemáticas sobre o que constaram ao olhar as barras e escrever as expressões, realizam a sequência da fase concreta para a fase escrita (POWELL, 2018b).

Verificou-se, também, a compreensão de magnitude ao final das resoluções da Tarefa 2 (parte 1). Tanto o uso do material físico quanto digital contribuíram para isso, como pode ser verificado nos excertos a seguir.

Figura 25 – Respostas sobre equivalência Cuisenaire físico x digital

Professora F: *O que é equivalência, pessoal?* **Lauss:** *Quer dizer algo igual, tipo a barra laranja é equivalente a duas amarelas, sendo equivalente a dez barras brancas.* **Professora F:** *Hum… interessante, isso significa que os números sempre precisam ser iguais?* **Lauss**: *Não. Como eu vou escrever, pode ser diferente, mas aí tem que chegar* [expressar] *o mesmo valor.*	**Professora D:** *E o que vocês entenderam por equivalente?* **Poster:** *Equivalente é o que pode ser, por exemplo, com números diferentes, mas o valor pode ser, é igual.*

Fonte: Acervo da autora (2021).

Para concluir a Tarefa 2 (parte 1), foi necessário complementar e explicar que a fração em si pode ser representada de várias formas simbólicas. A Professora D e a Professora F explicaram aos alunos que fração pode ser escrita com dois algarismos separados por uma barra, a qual se refere a um Número Racional, em que o número acima da barra é o numerador e o abaixo é o denominador.

A seguir discutimos sobre a Tarefa 2 – Parte 2.

Tarefa 2 – Parte 2

Figura 26 – Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 2)

e) Na primeira parte da tarefa, vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes, mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.

O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar, que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.

d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem, por meio de frações e utilizando os símbolos < e >, as comparações entre as barras de cada combinação.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A Tarefa 2 – Parte 2 teve como objetivo comparar frações e compreender a adição de frações com denominadores iguais. Inicialmente, os alunos precisavam escrever combinações de barras de mesmo tamanho, mas poderiam utilizar barras de cores diferentes e, posteriormente, comparar as frações encontradas utilizando os símbolos de < e >. A segunda parte da Tarefa 2 relacionou as frações equivalentes como contribuição para o desenvolvimento do senso fracionário com suas três categorias que interagem entre si: flexibilidade, razoabilidade e magnitude (POWELL; ALI, 2018).

A princípio, a Professora F entregou a tarefa e pediu que os alunos realizassem a primeira leitura silenciosa. Como surgiram algumas dúvidas, a professora realizou a leitura em voz alta para o grupo de seis alunos. Para responder o item c), a Professora F utilizou a mesma estratégia que a Professora D, que deixou os alunos chegarem a um consenso entre si sobre com qual barra eles queriam desenvolver as medições.

> **Professora F:** *Ok, vocês escolheram a barra amarela. Mas como podemos realizar a sua medida?*
> **Emily:** *Já sei, com as barras brancas, vermelhas, amarelas, verdes…* [instrumentação]
> **Professora F:** *E como sabe quais são essas barras?*
> **Emily:** *Porque eu lembro, só deixa eu conferir mesmo* [selecionando as barras coloridas que falou anteriormente para colocar junto da barra amarela – instrumentalização].
>
> **Tarefa 2 (Parte 2) – Intervenção Professora F.**
> **Realização da Tarefa 2, 17/11/2021.**

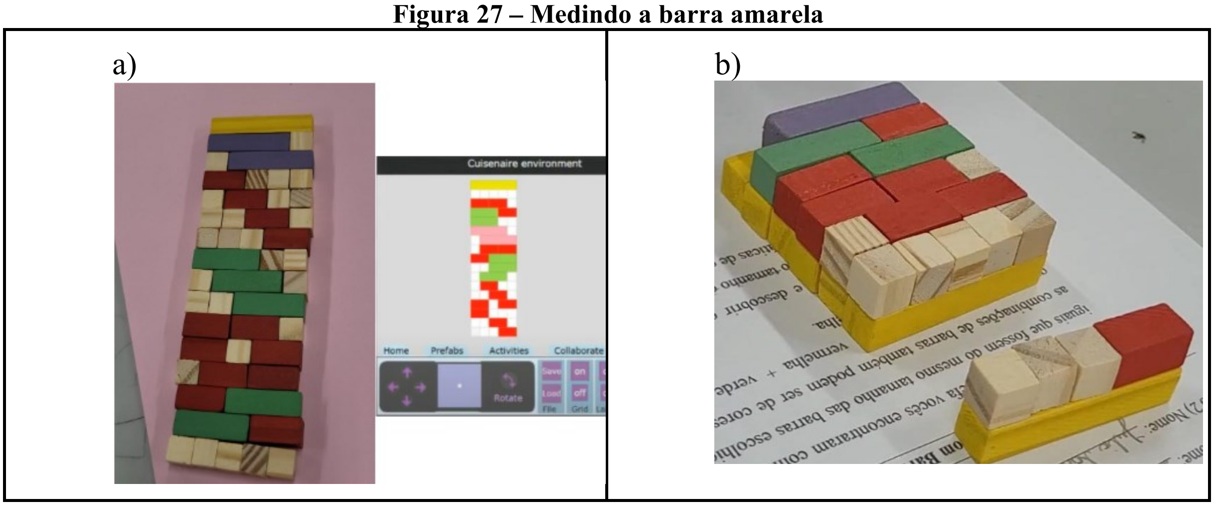
Para resolver o item c), identificamos a instrumentação, quando os alunos da Professora D desenvolveram estratégias a partir das características das barras digitais para medir a barra amarela. Entretanto, Poster sugeriu a construção da relação comparativa entre as barras para verificar a medida da barra amarela, quando identificamos a instrumentalização, pois o colega compreendeu as limitações e as possibilidades das barras digitais, conforme pode ser lido no excerto abaixo:

> **Poster:** *Pega uma barra vermelha mais uma branca e mais outra verde, mas acho que vai dar errado.*
> **Luffy:** *É, não dá certo.*
> **Poster:** *A menos que faça assim… a barra verde clara vale 3, certo? Pega e coloca 2 barras brancas nas laterais e coloca no meio da verde clara.*
> [Luffy faz essa combinação citada por Poster]
> [...]
> **Poster:** *Já sei, 2 blocos brancos mais uma* [barra] *vermelha e uma* [barra] *branca* [instrumentação].
> **Luffy:** [Posicionando as barras e verificando que está correto]. [instrumentalização].
>
> **Tarefa 2 (Parte 2) – Intervenção Professora D.**
> **Realização da Tarefa 2, 30/09/2020**

Nessa situação, identificamos a instrumentação, pois o aluno sugeriu a ideia de uma construção com base nas barras, realizada mentalmente por ele. Posteriormente, verificamos a instrumentalização, quando os alunos manipularam as barras para concretizar a ideia, e verificaram se funciona ou não.

Logo, o Cuisenaire físico e digital oportunizaram aos alunos construírem situações matemáticas sem as barras (POWELL, 2018b). Continuando a medir a barra amarela, com o material físico, houve construções distintas, que (Figura 27 a)) se assemelham à construção digital, enquanto em outra construção (Figura 27 b)), o aluno mediu a barra amarela utilizando as particularidades do material físico: a sobreposição das barras amarelas com outras cores evidenciou a mudança da altura. Todos os alunos que utilizaram o material físico conseguiram concluir as combinações da barra amarela.

Figura 27 – Medindo a barra amarela



Fonte: Acervo da autora (2021).

Com o material digital, o grupo G1 realizou combinações com a barra laranja; G3, combinações com a barra azul; e G4 e G5, combinações da barra amarela (Figura 28).

Figura 28 – Combinações realizadas pelos grupos: G1, G3 e G5

Fonte: Acervo da autora (2021).

Somente o grupo G5 concluiu as combinações possíveis, pois outros grupos escolheram barras para as quais não houve tempo suficiente para escreverem todas as combinações possíveis (Figura 28). Após conseguirem realizar as combinações, foi necessário que as professoras mediassem a tarefa, relendo novamente o enunciado, e assim, partir de uma ideia com os alunos, conforme a Figura 29, na página seguinte.

Figura 29 – Mediação item c)

Professora F: *Agora, vamos ter que fazer as relações de equivalência. Qual é a combinação da barra amarela em relação à barra lilás e a branca? Lembram das tarefas anteriores, que vocês estavam fazendo a comparação das barrinhas, como uma barra vermelha é igual a duas barras brancas?* **João:** *Lembro, sim!* **Júlia:** *Eu também.* **Professora F:** *E da barra amarela? O que vocês têm ai?* [Alunos olham para as barras] **Lauss:** *Uma barra amarela é igual a uma lilás e uma branca* [Instrumentação]. **Professora F:** *Isso, o que significa esse "e"?* **Lauss:** *Tipo, juntando.* **Professora F:** *Na Matemática, temos algum sinal que dá para juntar?* **Júlia:** *Mais!* **Professora F:** *Isso mesmo, então como fica a barra amarela?* **Laus:** *Uma barra amarela é igual a barra lilás mais uma barra branca* [Instrumentação]. **Professora F:** *Certo, da barra amarela para a lilás, é o que?* **Lauss:** [olha para as barras na mão de Professora F – Instrumentação] $\frac{4}{5}$ *?* **Professora F:** *Muito bom! E a barra branca?* **Lauss:** $\frac{1}{5}$ [instrumentação]. **Professora F:** *Bom, agora é só colocar essa combinação. Como fica, então?* **Lauss:** $1\ a = \frac{4}{5}\ l + \frac{1}{5}\ b$ [escreve no caderno]. **Professora F**: *Pode responder sem precisar usar as letrinhas como l e b, para falar da barra amarela.* **Lauss:** $a = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$ [escreve no caderno] **Professora F:** *Que dá quanto essa soma?* **Lauss:** $\frac{5}{5}$.	**Professora D:** *E como que a gente pode escrever matematicamente que uma coisa [é] laranja, por exemplo, sem usar laranja. 1= ao que de fração?* **Docinho:** $\frac{9}{10}$ *da l e* $\frac{1}{10}$ *da b.* **Professora D:** *E a gente pode trocar esse "e" por qual símbolo matemático? O que vocês estão fazendo com a barra azul e a branca para ficar no tamanho da laranja?* **Lindinha:** *A gente está juntando.* **Professora D:** *E que símbolo a gente usa na matemática quando vai juntar alguma coisa?* **Docinho:** *Igual? Mais?* **Professora D**: *Igual ou mais, gente?* **Lindinha:** *Mais.* **Professora D:** *Concordam?* **Docinho**: *Concordo.* **Professora D:** *Então, como vocês podem escrever usando esse símbolo matemático?* **Docinho:** *Que a laranja é =* $\frac{9}{10}$ *da azul +* $\frac{1}{10}$ *do b* [Instrumentação]. **Professora D:** *De novo, o que a gente pode falar? Para ficar claro para todo mundo.* **Lindinha:** $1L = \frac{1}{10}$. **Docinho:** *Não,* $\frac{9}{10}$. **Lindinha:** $\frac{9}{10}$ *... dá 1z+ 1b.* **Professora D:** *E só usando fração, sem usar barra laranja ou escrever l, z e tal?* **Docinho:** $1 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10}$.

Fonte: Acervo da autora (2021).

Nesses excertos identificamos, nas duas situações, tanto em relação ao material físico quanto digital, a instrumentação, pois os sujeitos realizaram esquemas com as barras de forma que o artefato influenciou o pensamento dos alunos para realizarem as relações aditivas.

Dessa forma, ambos os materiais contribuíram para que desenvolvessem as próximas relações aditivas e comparativas de frações. Nota-se que, com a comparação de frações, o aluno consegue verificar se o resultado faz sentido, evidenciando a razoabilidade, que Powell e Ali (2018) referem como algumas das características essenciais para compreender frações. O G5 concluiu as combinações e escreveu as relações aditivas e comparativas de frações. Logo, temos as duas relações construídas no Cuisenaire, e a Figura 30 a) refere-se àquela com o Cuisenaire digital; e a Figura 30 b), com o Cuisenaire físico. Ambas as construções realizadas fizeram comparações com a barra amarela, como se pode ver na figura abaixo.

Figura 30 – Relações construídas pelos alunos com o Cuisenaire digital x físico

a)

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$$

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$$

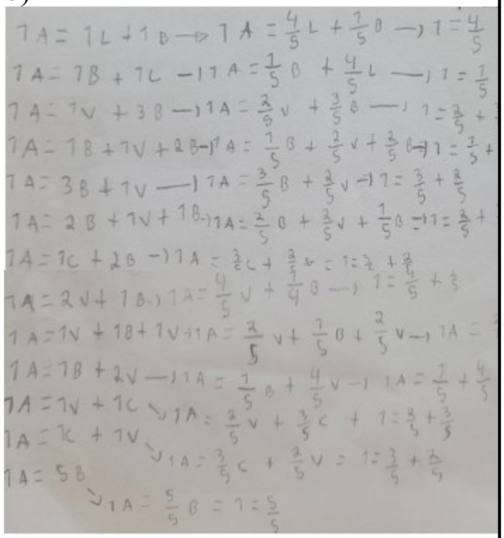
$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{5}{5}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}$$

b)



Fonte: Acervo da autora (2021).

Identificamos a instrumentação nesse momento, pois com base no material digital, o aluno retomou a soma das quantidades utilizadas para chegar na fração do número inteiro. Em ambos os materiais, também foi possível identificar a instrumentação, pois o aluno descreveu em detalhes, expondo que trabalhou com 1 barra amarela, e que para medir essa barra, colocou à frente a soma das quantidades de barras e as siglas das cores que utilizou. Posteriormente, demonstrou as medidas sem as letras, especificando as frações que utilizou para chegar ao número inteiro. Em ambas as situações, utilizando o material, foi notável que, a partir das barras, o sujeito constrói comparações e define relações comparativas e de equivalência.

Para realizar o item d) da Tarefa 2 – Parte 2, em decorrência do tempo, não foi possível finalizar a tarefa, pois seu término seria além do prazo estipulado pela escola, impossibilitando a finalização da proposta. A escola averiguou que o tempo estimado deveria ser reduzido, pois a equipe pedagógica, juntamente com os professores e alunos, participaria de um curso, que acarretou o não cumprimento de carga horária dos alunos. Como as análises se baseiam na comparação entre o Cuisenaire físico e o Cuisenaire digital, não foi possível concluir do item d).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A referida pesquisa iniciou em março de 2020, e durante esse tempo, ocorreu mundialmente a pandemia da Covid-19. Com esse cenário pandêmico, houve mudanças devido à obrigatoriedade do isolamento social, sendo adotado o Ensino Remoto Emergencial, que estabeleceu adaptações no contexto histórico da educação. Como o desenvolvimento da pesquisa envolvia alunos que estavam matriculados em uma escola pública estadual no interior do Paraná, tornou-se necessária uma alteração no objetivo de estudo desta pesquisa, assim como a problemática.

Inicialmente, o objetivo da pesquisa era analisar as implicações de tarefas utilizando recursos digitais, relacionadas a frações não-simbólicas para a compreensão de frações simbólicas na perspectiva de medição. Seriam selecionados para o estudo alunos do 6º e 7º ano matriculados no Programa Mais Aprendizagem, portanto, que apresentam dificuldade de aprendizagem. Contudo, não houve possibilidade em razão do Ensino Remoto Emergencial.

Assim, tornou-se necessário adaptar o objetivo do estudo, adequando-o ao momento histórico. Portanto, passamos a investigar diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição. Com base nas pesquisas de Powell (2018b), que trabalha com as barras de Cuisenaire Físicas; e de Oliveira (2021), que desenvolveu sua pesquisa com o Cuisenaire digital, delineou-se o seguinte objetivo geral de pesquisa: Investigar diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição. Logo, para responder à questão-problema, delinearam-se os objetivos específicos:

- Compreender as diferenças e as similaridades entre Cuisenaire digital e físico;
- Compreender as diferenças entre as barras Cuisenaire e os demais materiais para o ensino de frações; e
- Analisar contribuições das barras Cuisenaire físicas e digitais para o ensino e aprendizagem de frações.

O Cuisenaire físico contribuiu positivamente para a assimilação de conceitos teóricos de frações pelos alunos, que se utilizaram de estratégias próprias do manuseio do material físico, realizando combinações entre as barras físicas. Já no Cuisenaire digital, os alunos não demonstram dificuldades em manusear o *applet,* e sua utilização contribuiu para o engajamento dos alunos, mas faziam sobreposição de peças por não saberem ou lembrarem.

Em relação às Barras Cuisenaire físico e digital, qualquer uma de suas barras podem ser usadas como referencial de unidade de medida, por não possuírem um valor fixo de unidade, estabelecendo relação entre as referidas barras em ambas as modalidades com frações na perspectiva de medição, realizando comparação multiplicativa.

Logo, percebe-se a importância da magnitude para o entendimento de frações, bem como a flexibilidade e a razoabilidade, que se destacam pela sua importância (POWELL; ALI, 2018). Os alunos já possuíam contato com frações, mas não conseguiam relacionar o tamanho do número fracionário. Dessa forma, ao manusear o material, realizaram comparações multiplicativas, estabeleceram relações de equivalências entre as barras para legitimar as ideias ao escrever medidas utilizando frações na forma algébrica.

Com fundamento neste estudo, afirmamos que tanto o Cuisenaire físico quanto o digital apresentam algumas características similares, pois os alunos utilizaram os mesmos critérios para representar as barras; qualquer uma de suas barras podem ser usadas como unidade de medida; e as tarefas apresentadas em ambos foram realizadas com êxito.

Em relação às diferenças observamos, nos dois materiais, a comparação multiplicativa. Nessa situação, o sujeito, ao manipular as barras físicas, distingue facilmente a sobreposição delas, enquanto no material digital é necessário prestar atenção à mudança de cores para identificar situação semelhante. Na sobreposição de barras físicas, a altura é alterada; enquanto na sobreposição das barras digitais, a alteração ocorre na cor.

Para compreender as diferenças entre as barras Cuisenaire e os demais materiais, o Cuisenaire difere de outros materiais que podem ser usados no ensino de frações principalmente porque os demais favorecem a perspectiva parte-todo.

Sobre a perspectiva parte-todo, citamos o material Régua de Frações, que é integrado por representações de frações, e suas réguas possuem marcações divisórias. Dessa forma, esse material manipulável se diferencia do Cuisenaire porque, além de trabalhar em outra perspectiva, não apresenta divisórias em suas barras. Outro material didático bastante conhecido é o Material Dourado, que adota a mesma perspectiva, e Kieren (1980, p. 134, grifo do autor) afirma que é "[...] algum todo é dividido em partes 'iguais'. Ideias fracionárias são usadas para quantificar a relação entre o todo e um número designado de partes". Logo, o Material Dourado pode representar frações decimais, pois seus denominadores podem ser 10, 100 e 1000.

Simultaneamente, analisou-se que as barras Cuisenaire físicas e digitais favorecem o ensino e a aprendizagem de frações. Identificamos que, ao partir da manipulação das barras físicas, os alunos empregam letras para representar e determinar relações de suas medidas; ocorre o início da linguagem matemática comparada à linguagem não matemática dos alunos, evidenciando a compreensão das relações de equivalência, representando-as algebricamente. É nesse momento que os alunos podem ter conversas matemáticas sobre o que constataram, ao olhar as barras e escrever as expressões, realizando a sequência da fase concreta para a fase escrita (POWELL, 2018b).

Em ambos os materiais, verificou-se a contribuição para a compreensão de magnitude, evidenciando que números correspondem a um tamanho e podem ser medidos, e com isso, as frações podem ser estimadas, ordenadas. Assim, magnitude é de suma importância para a compreensão numérica, pois é o entendimento de quanto o número significa em seu valor, e não no seu símbolo, oportunizando aos alunos construírem situações matemáticas sem as barras (POWELL, 2018b).

Dessa forma, os materiais auxiliaram para que os alunos desenvolvessem as próximas relações aditivas e comparativas de frações. Nota-se que, com a comparação de frações, o aluno consegue verificar se o resultado faz sentido, evidenciando a razoabilidade, que Powell e Ali (2018) referem como algumas das características essenciais para compreender frações.

Os estudos de Powell (2018a; 2019a) apontam o ensino de frações utilizando a interpretação de frações como medida, abordando como ocorre uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades utilizando as barras Cuisenaire.

Em conformidade com a(s) questão(ões)-problema, delimitou-se o objeto de nosso estudo: as Barras Cuisenaire. Assim, foi necessário o estudo do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), porque se compreende que as ações do professor no ensino tradicional são diferentes do professor no EEM, já que, nessa metodologia exploratória, o posicionamento do professor é importante no desenvolvimento da aula: ele conduzirá as ideias para a resolução da tarefa a fim de favorecer as dimensões estruturantes do EEM, como o *inquiry*, reflexão, comunicação e colaboração.

Entretanto, apesar dos empecilhos encontrados, o estudo de Doneda de Oliveira (2021c) norteou a presente pesquisa por meio de tarefas de natureza exploratória, com o uso do material Cuisenaire digital para ensinar frações na perspectiva de medição. A própria pesquisadora desenvolveu as mesmas tarefas adaptadas para o material Cuisenaire físico, posteriormente, quando as aulas já haviam retornado para o modo presencial, mas seguindo algumas regras de distanciamento, possibilitando que a pesquisa fosse concretizada e atingindo todos os objetivos.

As tarefas assentes em práticas exploratórias são pensadas minuciosamente, tanto com relação ao professor, que precisa pensar, planejar suas ações e possíveis resoluções dos alunos, sendo elaborado um quadro de antecipação para sanar as possíveis dúvidas, quanto ao papel dos alunos, pois eles são protagonistas do seu aprendizado. Oliveira e Basniak (2021, p. 24) afirmam que o EEM "requer do professor um planejamento minucioso, prevendo situações que os alunos possam enfrentar e meios para auxiliá-los, e que, mesmo com os quadros de antecipação/orientação, podem surgir situações não previstas, para as quais não se tenha respostas prontas”.

Logo, as tarefas utilizadas com o Cuisenaire digital foram planejadas e desenvolvidas por Oliveira (2020) no segundo semestre de 2020, seguindo as sugestões de Cyrino e Teixeira (2016): 1º) Introdução da Tarefa – a professora direcionava os alunos quanto à realização da tarefa, o modo de registro, sanando as dúvidas quanto ao entendimento da tarefa proposta; 2º) Realização da tarefa – referente ao momento em que os alunos resolvem em pequenos grupos as tarefas, com troca de ideias, estratégias e conhecimento matemático; 3º) Discussão Coletiva da Tarefa – nesse momento, são selecionados alguns grupos para mostrar aos demais colegas a forma como resolveram a tarefa, sendo a resposta correta ou não, de modo que os alunos possam refletir e trocar opiniões para promover a reflexão sobre as conclusões que encontraram; e 4º) Sistematização das Aprendizagens Matemáticas – situação em que a professora sistematiza e legitima as aprendizagens matemáticas envolvidas, direcionando os alunos para realizarem os registros necessários. Portanto, depreendeu-se que a metodologia do EEM interferiu positivamente para os resultados alcançados, pois exigia constantemente a interação do professor com o aluno.

Considerando os objetivos desta pesquisa, debruçamo-nos sobre o estudo de frações e números racionais. Nesse sentido, Kieren (1980) apresenta que a não compreensão dos números racionais acarreta problemas futuros em estudos na Matemática, como na Álgebra. Ademais, Kieren (1980) pontua que, para os alunos não desenvolverem problemas algébricos, é preciso entender a noção de equivalência de frações, conceito de inverso, generalização e abstração de ideias diferentes dos cálculos de números naturais e inteiros. Nesse sentido, pesquisadores como Kieren (1976; 1980) e Berh *et al.* (1983) afirmam que, para compreender frações, é necessário conhecer suas diferentes interpretações, sendo todas importantes para o conhecimento dos alunos. Powell (2019b) aponta que a ideia de frações se baseia em duas perspectivas de ensino diferentes: partição e medição.

No entanto, Powell (2019b) e Scheffer e Powell (2019) evidenciam que pessoas que passaram pelo aprendizado escolar respondem que *fração é parte de um todo*, mostrando que a perspectiva de partição está se sobressaindo, principalmente em livros didáticos adotados nas escolas. A perspectiva parte-todo foca em dividir tudo em partes iguais, no princípio da contagem e/ou soma, ocasionando obstáculos epistemológicos. Assim, as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados, além da não ruptura com as propriedades dos números naturais e a construção do novo campo numérico dos números racionais. Portanto, utilizando tarefas baseadas na perspectiva de medição, seguindo os estudos de Powell (2018a; 2019a), de que a introdução ao ensino de frações seja realizada com a interpretação de medida, é preciso determinar uma unidade de medida para realizar comparações multiplicativas, e a equivalência de frações é alicerçada na magnitude numérica.

A pesquisa também é amparada por Rabardel (1995), apoiando-se na teoria da Ergonomia Cognitiva, que está relacionada a processos mentais, como a percepção e raciocínio, que possibilita estudo e análise das ações e interações entre os sujeitos e elementos de um sistema (RABARDEL, 2002). A transformação do artefato em instrumento é denominada Gênese Instrumental, na qual o artefato pode ser um meio material ou um meio simbólico. O instrumento consiste no artefato acrescido de um esquema de utilização construído pelo sujeito, quando o incorpora em suas atividades (ARTIGUE, 2011).

Rabardel (2002) diferencia a instrumentação e instrumentalização na Gênese Instrumental esclarecendo que a primeira está direcionada ao sujeito; e a segunda, ao artefato. Na instrumentalização, o sujeito transforma o artefato, de modo que o empregue em uma sequência de tarefas. Em relação à instrumentação, Rabardel (2002) destaca a relação do objeto com o sujeito, pois são os esquemas realizados no/com o artefato durante a realização da tarefa que geram instrumentos, oportunizando a reflexão do sujeito sobre o que deve ser feito.

Em relação à Gênese Instrumental, as barras físicas e digitais não são somente um artefato em que são visualizados atributos de cores e tamanhos, mas se transformam em um instrumento usado para medir, contribuindo para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição. Isso porque permite ao aluno utilizar estratégias em que as barras assumem posição de instrumento para realizar as medidas, conforme os objetivos das tarefas.

Para analisar os dados com olhar da perspectiva da Gênese Instrumental, consideramos dois artefatos: Cuisenaire digital e Cuisenaire físico. Observamos como eles, por meio de esquemas de utilização, se tornam instrumentos utilizados na aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo de fração. Logo, debruçamo-nos sobre como o aluno se apropria do artefato, transformando-o em instrumento no estudo de frações como medida.

Entendemos a instrumentalização quando o aluno realiza a ação de dispor as barras digitais no *applet*, estando atento para a sobreposição das barras digitais; e a instrumentação associada à análise da disposição das barras digitais para medir o que foi pedido na tarefa.

Identificamos a instrumentalização ao disporem as barras sobre a folha de papel e ao enfrentarem a dificuldade de alinhá-las; compreendemos a instrumentação ao desenvolverem estratégias adequadas às características das barras físicas para conseguir medir o que era solicitado, utilizando artefatos auxiliares adequados. Nesse sentido, aproveitamos a situação para esclarecer como um artefato desenvolvido para ser utilizado para determinado fim pode se tornar um instrumento para atender outra necessidade.

Foi possível notar, também, que os alunos, ao manusearem, compararem, diferenciarem e elaborarem estratégias, buscando soluções nas realizações das tarefas exploratórias, identificaram diferenças entre as barras e perceberam suas relações. Desse modo, desenvolveram conceitos matemáticos a respeito do conteúdo de frações. Fundamentados nisso, compreenderam a diferença de magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, além de estabelecerem as relações multiplicativas e nomearem as barras Cuisenaire.

Ademais, compreenderam as frações equivalentes e sua magnitude, a sua representação simbólica. Também retomamos a Álgebra sob uma roupagem lúdica, sendo abordada sem gerar carga cognitiva, ou seja, utilizaram letras para representar as barras Cuisenaire e escrever expressões algébricas.

Por fim, nas observações, percebeu-se que, ao longo da pesquisa, a realização de tarefas exploratórias no Cuisenaire físico apresenta perspectivas de aprendizagens diferentes pelo aluno, mas a utilização do Cuisenaire digital também traz benefícios. É importante lembrar que o docente precisa ter conhecimento sobre como utilizar esses materiais, e atualmente, também recursos associados às Tecnologias Digitais (TD). A tecnologia está em constante evolução, presente no cotidiano da sociedade, sendo seu uso indispensável para o trabalho humano.

No ensino, o uso de recursos tecnológicos adequados pode facilitar a prática do professor em diversos aspectos, como chamar atenção dos alunos e deixar a aprendizagem mais interativa, além de ajudar na visualização dos conteúdos. Partindo disso, Guimarães (2015) salienta que é possível ampliar seu uso, e uma das suas possibilidades de utilização é no processo de ensino e de aprendizagem da matemática.

Resta, ainda, acrescentarmos, para objeto de futuros estudos, as seguintes indagações: Quais considerações podem ser feitas se desenvolvidas as tarefas exploratórias em ambos os materiais com um mesmo público? Quais lacunas na aprendizagem podem ser preenchidas com a complementação do Cuisenaire físico e digital?

Desses questionamentos, a pesquisadora, como professora da Educação Básica, relata que estudar frações em outras perspectivas, especificamente a da medição, contribuiu com reflexões acerca das práticas pedagógicas e exerce grande influência na aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Costa Rica, ano. 6, n. 8, p. 13-33, 2011.

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BASNIAK, M. I. **Políticas de Tecnologias na Educação**: o Programa Paraná Digita. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2014 Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/36372. Acesso em: 15 de nov. 2020

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais do Ensino Exploratório de Matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 738-747, 2019.

BASNIAK, M. I.; SILVA, S. C. R.; GAULOVSKI, J. M. Tecnologias digitais e ensino da matemática no Brasil: uma revisão da literatura de 2010-2017. **Revista Tecnologias na Educação**, ano 9, v. 23, dez. 2017.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. In: LESH,
R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.

BERTONI, N.E. A construção do número fracionário. **Boletim de Educação Matemática**, ano 21, n.31. Rio Claro: UNESP, 2008.

BITTAR, M. A escolha do software educacional e a proposta pedagógica do professor. In:COSTA, N. M. L. de; BELINE, W. (Orgs.). **Educação matemática, tecnologia e formação de professores**: algumas reflexões. Campo Mourão: Editora FECILCAM, 2010. p. 215-242.

BITTAR, M. A. Abordagem Instrumental Para O Estudo Da Integração Da Tecnologia Na Prática Pedagógica Do Professor De Matemática. **Educar Em Revista**, 1, 157-171, 2011.

BORBA, M. C; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOTAS, D.; MOREIRA, D. A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática: um estudo no 1º ciclo. **Revista Portuguesa de Educação**, 26(1), 253 -286, 2013.

BUENO; A. C.; BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra na mobilização de conhecimentos matemáticos por alunos com altas habilidades/superdotação. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 fev. 2021.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf. Acesso em: 22 jul. 2020.

CLEMENTS, D. H., & MCMILLEN, S. Rethinking "concrete" manipulatives. **Teaching Children Mathematics**, 2(5), 270-279, 1996.

CORSO; L.V.; DORNELES, B.V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na Matemática. **Rev. Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 298-309. 2010.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática:** elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II, n. 2. Brasília, 1989. p. 15-19.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 2021a.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Fracciones: comprensión de alumnos del 6o año em prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición. **Paradigma**, [S. l.], v. 42, n. 3, p. 307-339, 2021. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p307-339.id1133. Acesso em: 22 nov. 2021b.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Revista Educação Matemática Debate**. v. 5, n.3, p. 1-29, 2021c.

DRIJVERS. P.; KIERAN, C.; MARIOTTI, M.-A.; AINLEY, J.; ANDRESEN, M.; CHAN, Y. C.; DANA-PICARD, T.; GUEUDET, G.; KIDRON, I.; LEUNG, A.; MEAGHERET, M. Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, LAGRANGE, J.B.C. Internacional Comission on Mathematical Instruction. Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain - **The 17th ICMI Study**. Springer: New York, 89-133, 2010.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESPADINHA, T. B. O **Desenvolvimento das Representações da Magnitude de Números**

Fracionários. 2015. 72 f. – Faculdade de Psicologia, Medicina, Ciências e Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2015.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 205-214, 2019.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FRANKE, K. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. Mathematics teaching and classroom practice. In: F. K. Lester (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte**, NC: Information Age Publishing, p. 225-356, 2007.

FREITAS, R. C. O. **Um ambiente para operações virtuais com o material dourado** (Dissertação de Mestrado/PPGI). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil. 2004.

GATTEGNO, C. The commonsense of teaching mathematics. New York: **Educational Solutions Worldwide**, 1974/2010.

GATTEGNO, G. C.; HOFFMAN, M. R. **Handbook of activities for the teaching of Mathematics at the elementary school.** New York: Human Education, 1976.

GODOY, K. V. O Papel e Contribuições Matemáticas das Sociedades Científicas do Norte da Inglaterra em Fins do Século XVIII. Anais **XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação Em Educação Matemática**, 2015, Juiz de Fora. Disponível em: <http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/ gd5_Kleyton_Godoy.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2020.

GUIMARÃES, W. N. **Um estudo sobre a inserção tecnológica na formação continuada de docentes de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação/PPGEduc). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro -UFRRJ, Seropédica, RJ, 2015.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p. 101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E., (ed.) **Recent Research on Number Learning. Columbus**: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3.ed. New York: Routledge, 2012.

LORENZATO, S. Laboratório de Ensino de matemática e materiais manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores)

MACK, N. K. Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 21, n. 1, p. 16-32, 1990.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **ACTA SCIENTIAE**, v. 10, n. 1, p. 59–67, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/78. Acesso em: 4 jun. 2020.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Matemática Universidade Aberta, 1996.

MORAN, J. M, MASETTO, M. T, BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica.** 6. Ed. Campinas; Papirus, 2000.

NASCIMENTO, D. L.; VIEIRA JUNIOR, N. O ensino de frações através do uso de material manipulativo: um embasamento na teoria das situações didáticas e no contrato didático. In: **Congresso Nacional de Educação**, 2017, João Pessoa. IV CONEDU, 2017.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática (Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática)**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6. 2005.

NI, Y; ZHOU, Y.D. Teaching and learning fraction numbers: The origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist**, v.40, n. 1, p. 25-52, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, J. N. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. **Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo –SP, 13-16 jul. 2016.

OLIVEIRA, H.; CYRINO, M. C. C. T. Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: One study with prospective mathematics teachers. **Sisyphus**, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-29, 2021.

PACHÊCO, F. F. F.; SILVA, A. D. P. R.; ARAÚJO, A. F. Q.; SILVA, A. S.; FERREIRA, A. G. A gênese instrumental por alunos do 6º ano do ensino fundamental do poly no estudo dos poliedros regulares [Ponencia]. **V Congresso Nacional de Educação**, Olinda-Pernambuco, Brasil, 2018. Disponível em: https://editorarealize.com.br/edicao/detalhes/anais-v-conedu. Acesso em: 10 de jun. 2020.

PADILHA, L. C. S.; BITTAR, M. Apropriação da Tecnologia por Professores de Matemática para fins Pedagógicos: Uma Abordagem Instrumental. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática **Anais [...]**. Curitiba, 2013. p. 1-15.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Do Paraná:** Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, PR: SEED/PR. 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=166 9. Acesso em: 20 nov. 2022.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense.** Curitiba, PR: SEED/PR. 2019. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=166 9. Acesso em: 20 nov. 2022.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PINTO, N.B. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 5, n.16, p.25-38, set./dez. 2005.

POLESE, F. O. **Análise de uma proposta construtivista de ensino de frações por meio da resolução de problemas. (**Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2011.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. et al. (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)**: Contribuições para Pesquisa e Ensino. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome. **Revista Brasileira de Educação em**

Ciências e Educação Matemática: ReBECEM, Cascavel, PR, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **XIII ENEM**, Brasil, jun. 2019d. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/ view/1258/1834. Acesso em: 04 junho 2021.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. BOLEMA: **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.17, n 21, p. 81-140, maio 2004.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.** Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos**. Université paris 8. hal- 01020705. 2002.

ROCHA, M. R. **Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações**. (Dissertação) Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

ROCHA, J.; NOGUEIRA, C.; SOUSA, J.; SOUSA, G. Práticas pedagógicas curriculares: uso das tecnologias na contemporaneidade. **Revista Observatório**, v. 4, n. 5, p. 673-694, 1 ago. 2018.

RÖHRS, H. **Maria Montessori**. Recife: Fundação Joaquim Nabuco/Editora Massangana. 2010.

SARMENTO, A. K. C. **A Utilização dos Materiais Manipulativos nas aulas de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de matemática/PPGMAT). Universidade Federal do Piauí. 2010. Disponível em: http://www.ufpi.br//subsiteFiles/ppged/arquivos/files/IV.encontro.2010/GT_02_18_ 2010.pdf. Acesso em: 27 set. 2022.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez. 2019.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.20, 2020.

SIEGLER, R. S. *et al.* Fractions: the new frontier for theories of numerical development. **Trends in Cognitive Sciences**, v. 17, n. 1, p. 13-19, 1//. 2013. Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661312002653. Acesso em: 18 de out. de 2021.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, A. M. C, CABRAL, C. A, F. SALES, E. R. Percepções de alunos cegos sobre sua formação: contribuições no ensino e aprendizagem de matemática em classes inclusivas. **Perspectiva da Educação Matemática**, v. 11, n. 25, p. 900-915, dez. 2018.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 57-76.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.

VALE, I. **Materiais Manipuláveis**. ESEVC: LEM. 2002.

APÊNDICE I - TAREFAS

TAREFA 1 – Qual o comprimento?

Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

1) Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar cliquem na cor desejada.

a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Façam isso para todas as cores.

b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

TAREFA 2 - Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 1)

1) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

a) Para facilitar as representações nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.

Branca = ___	Vermelha = ___	Verde Clara = ___	Rosa = ___	Amarela = ___
Verde Escuro = ___	[redacted] = ___	Marrom = ___	Azul = ___	Laranja = ___

b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida formem o máximo de combinações possíveis nessa condição. Utilizem as representações do quadro do item a para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

TAREFA 2 – Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 2)

c) Na primeira parte da tarefa vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.

O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.

d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos < e > as comparações entre as barras de cada combinação.