UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

GEOMETRIA FRACTAL: CONSTITUIÇÃO, INSTITUCIONALIZAÇÃO E CONSOLIDAÇÃO DE UMA ÁREA CIENTÍFICA

Guilherme Oliveira Santos

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

Campo Mourão,

2024

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

GEOMETRIA FRACTAL: CONSTITUIÇÃO, INSTITUCIONALIZAÇÃO E CONSOLIDAÇÃO DE UMA ÁREA CIENTÍFICA

Guilherme Oliveira Santos

Orientadora: Prof.ª Dra. Mariana Moran
Coorientadora: Prof.ª Dra. Lucieli M. Trivizoli

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em educação matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Abril de 2024

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira Santos, Guilherme
Geometria Fractal: Constituição, Institucionalização e Consolidação de uma Área Científica / Guilherme Oliveira Santos. -- Campo Mourão-PR,2024.
119 f.: il.

Orientador: Mariana Moran.
Coorientador: Lucieli M. Trivizoli.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2024.

1. Geometria Fractal. 2. História da Matemática. 3. Pesquisa Documental. I - Moran, Mariana (orient). II - Trivizoli, Lucieli M. (coorient). III - Título.

Guilherme Oliveira Santos

GEOMETRIA FRACTAL: CONSTITUIÇÃO, INSTITUCIONALIZAÇÃO E CONSOLIDAÇÃO DE UMA ÁREA CIENTÍFICA

Comissão Examinadora:

Prof.ª Dra. Mariana Moran – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual de Maringá (UEM) - Maringá

Prof.ª Dra. Lucieli M. Trivizoli – Coorientadora
Universidade Estadual de Maringá (UEM) - Maringá

Prof. Dr. João Henrique Lorin – Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus Campo Mourão

Prof.ª Dra. Karla Aparecida Lovis – Membro da Banca
Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Campus Capanema

Resultado: Aprovado

Campo Mourão
Abril de 2024

Dedico o presente trabalho a todos aqueles que pesquisam e estudam Educação Matemática, encarando-a como uma possibilidade de fazer e ser a diferença no mundo. Dedico também a todos que estudam História da Matemática e a Geometria Fractal.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me conduzido e acompanhado ao longo de toda essa jornada, nos momentos difíceis, nos desafios encontrados, mas também nas alegrias e comemorações. Por ter zelado de mim em todos os trechos da estrada nas idas e vindas a Campo Mourão, além de todo o cuidado antes do mestrado, propiciando que eu tivesse todas as condições físicas, mentais e financeiras para passar por essa etapa.

Em segundo lugar agradeço à minha família, minha mãe Rosemeri, meu pai Claudinei, e meus irmão Mariana e Felipe. Sem o apoio e torcida de cada um não seria possível realizar essa trajetória. Cada suporte, todo o entendimento das minhas necessidades e das mudanças e adaptações em nossa própria rotina de casa. São a minha base e a força para enfrentar os desafios, e fazê-los ter orgulho de mim é uma das minhas maiores motivações.

Agradeço a minha família como um todo, tios e tias, primos e primas, avó e os que são família de coração, por toda oração, incentivo e suporte, por me ouvirem sempre que necessário e me ajudarem a aliviar nos momentos de tensão.

Agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Mariana Moran, a quem tenho grande admiração em todas as esferas, por ter aceito esse desafio de investigar em História da Matemática junto comigo, por me abraçar e confiar em mim como seu orientando. Agradeço também todo seu apoio ao longo desse percurso, por estar à disposição de tudo que eu precisei, por entender minhas necessidades e particularidades e acima de tudo cuidar de mim além do acadêmico.

Agradeço à minha coorientadora, Professor Doutora Lucieli M. Trivizoli, por ter aceito embarcar nessa trajetória comigo e com a professora Mariana. Seus conselhos e ajuda, sua sabedoria e apoio foram de extrema importância para os direcionamentos ao longo da pesquisa. Embora de longe, continua cuidando, se preocupando e me ajudando em tudo que faço, a admiro como pesquisadora, professora, mãe e indivíduo.

Agradeço também à banca, o Professor Doutor João Henrique Lorin e a Professora Doutora Karla Aparecida Lovis, por tantas contribuições, pelo olhar atento, o cuidado e carinho com o meu trabalho, por disponibilizar seu tempo em vista de potencializar ainda mais esta pesquisa e compartilhar generosamente seus conhecimentos.

Agradeço aos colegas do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG e do Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática – GHMEM, por todo o *apoio e suporte, por contribuírem para o meu amadurecimento acadêmico e me enriquecerem com tanto conhecimento compartilhado.*

Agradeço em particular aos amigos que também me deram suporte, foram meus parceiros, me ouviram, me ajudaram, me orientaram, me acolheram, e estiveram comigo ao longo desse percurso, sendo meu ombro amigo, meu descanso e meu momento de tranquilidade. Aos queridos Raissa e Vinícius, pela amizade desde a graduação, aos queridos Amanda, Larissa e Leonardo pela nova amizade no mestrado, ao querido Luan que se mostrou um grande parceiro em diferentes momentos e à minha pessoa (viciados em Grey's entenderão) nesse mundo que não importa o tempo que passe está comigo e sei que posso contar, Gabriela.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para quem eu sou hoje, em particular registro uma das pessoas que tenho especial admiração como pessoa, como profissional, como pesquisadora e em tudo que faz, à minha querida Professora Andréia, por ter me encantado com a Matemática, sempre me apoiar estando à disposição para me ajudar, torcer mim e me incentivar. Tenho um profundo carinho e espero ser um pouco do que é.

Por fim agradeço a todos que torceram, rezaram, me apoiaram e me ajudaram nesse caminho, os colegas de trabalho, os amigos de grupo de oração, à minha equipe de canto, meus alunos, amigos dos mais diversos lugares e todos os que contribuíram de forma direta ou indireta para que hoje eu me tornasse o que sou.

A todos: muito obrigado.

Nada há que tão notavelmente determine o auge de uma civilização, como o conhecimento, nos que a vivem, da esterilidade de todo o esforço, porque nos regem leis implacáveis, que nada revoga nem obstrui. Somos, porventura, servos algemados ao capricho de deuses, mais fortes porém não melhores que nós, subordinados, nós como eles, à regência férrea de um Destino abstracto, superior à justiça e à bondade, alheio ao bem e ao mal.

Fernando Pessoa

RESUMO

Este trabalho apresenta as reflexões e resultados referentes a uma pesquisa de mestrado realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) vinculado à Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Visando estudar a conjuntura da Geometria Fractal no contexto da Matemática, tem-se a seguinte problemática: como se situam, no contexto matemático, os processos de constituição, institucionalização e consolidação da Geometria Fractal? Nesse sentido, elencamos como objetivo investigar a História da Geometria Fractal, de forma a evidenciar aspectos históricos, sociais, matemáticos e de outras áreas, que envolvem sua constituição, formalização e consolidação. De forma a responder nossa problemática e atingir o objetivo, adotamos como procedimento metodológico a Pesquisa Documental, organizada em quatro etapas: Levantamento de materiais, Organização dos Materiais, Leitura dos Materiais e Estudo das informações coletadas. Essas quatro etapas foram desenvolvidas em dois eixos destacados para investigação: 1) Evidências de fractais na história e surgimento dos primeiros estudos, textos e publicações a respeito; 2) Primeiras discussões coletivas. A partir das buscas e estudos realizados referentes ao eixo 1, foi possível observar alguns elementos que compõem o arcabouço teórico necessário para a formação do sistema conceitual, bem como discussões iniciais relativas ao sistema social. Pudemos identificar também um desenvolvimento inicial tanto da perspectiva cognitiva, quanto da social. Além disso, com relação à consolidação da Geometria Fractal, identificamos elementos relativos à pesquisa, divulgação e aplicação do conhecimento, tomando a biografia de Mandelbrot. Com relação ao eixo 2 foi possível identificar a presença de elementos referentes à Consolidação de uma área científica, uma vez que identificamos divulgação de pesquisas, pesquisas, aplicação da área em contexto de ensino e a aplicação em outras áreas. Apesar de reconhecermos, não identificamos com profundidade a inserção da área no ensino, seja a nível de Educação Básica ou de Ensino Superior, e da mesma forma com as sociedades científicas e grupos de pesquisa a partir dos nossos levantamentos. Também identificamos que ainda não se tem uma definição formal para um objeto fractal, o que pode levar a produção de teorias que não necessariamente comungam de mesmas propriedades. Concluímos então que a Geometria Fractal é uma área científica, uma vez que identificamos componentes dos três processos necessários para assim ser caracterizada.

Palavras-chave: Geometria Fractal; História da Matemática; Pesquisa Documental.

ABSTRACT

This thesis presents reflections and results relating to a master's research developed under the Graduate Program in Mathematics Education (PRPGEM) of the State University of Paraná (UNESPAR). In order to study the context of Fractal Geometry in the context of Mathematics, we have the following problem: how are the processes of constitution, institutionalization and consolidation of Fractal Geometry situated in the mathematical context? In this sense, our objective is to investigate the history of Fractal Geometry in order to highlight the historical, social, mathematical and other aspects of its constitution, formalization and consolidation. In order to answer our problem and achieve our objective, we adopted Documental Research as our methodological procedure, organized into four stages: Collecting Materials, Organizing Materials, Reading Materials and Studying the Information Collected. These four stages were developed along two main lines of investigation: 1) Evidence of fractals in history and the emergence of the first studies, texts and publications on the subject; 2) First collective discussions. From the searches and studies carried out on axis 1, it was possible to observe some of the elements that make up the theoretical framework necessary for the formation of the conceptual system, as well as initial discussions relating to the social system. We were also able to identify an initial development of both the cognitive and social perspectives. In addition, with regard to the consolidation of Fractal Geometry, we identified elements relating to research, dissemination and application of knowledge, taking Mandelbrot's biography. With regard to axis 2, it was possible to identify the presence of elements relating to the Consolidation of a scientific area, since we identified the dissemination of research, research, application of the area in a teaching context and application in other areas. Although we recognize this, we have not identified in depth the inclusion of the area in teaching, whether at the level of Basic Education or Higher Education, and likewise with scientific societies and research groups based on our surveys. We also identified that there is still no formal definition for a fractal object, which can lead to the production of theories that do not necessarily share the same properties. We therefore conclude that Fractal Geometry is a scientific area, since we have identified components of the three processes necessary to be characterized as such.

Keywords: Fractal Geometry; History of Mathematics; Documental Research.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

CDI	Cálculo Diferencial e Integral
GE	Geometria Euclidiana
GF	Geometria Fractal
GHMEM	Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática
GPEG	Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria
HM	História da Matemática
IBM	International Business Machines Corporation
MAA	Mathematical Association of America
MR	Mathematical Reviews
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao pensar na Geometria e em sua relação com o nosso cotidiano, podemos identificar representações dos objetos matemáticos que a compõe, nos mais diversos elementos e situações, como em construções e objetos, nas artes, na natureza, e também integrada a conceitos presentes em áreas de conhecimento além da Matemática. Quadros, esculturas, artesanatos, representações químicas, físicas e geográficas, placas, folhas, plantas, relevos, entre tantos outros itens, possuem elementos que podem ser considerados como representantes de entes geométricos. Portanto, é possível compreendê-la como uma importante ferramenta para "[..] a descrição e interrelação do homem com o espaço em que vive, já que pode ser considerada como a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade" (Nogueira, 2009, p. 3).

Nesse sentido, o que se pode investigar de Geometria? Que caminhos ainda podem (e devem) ser explorados? Que pesquisas ainda podemos desenvolver? Para discutir essas indagações no contexto desta pesquisa, é necessário recorrer à trajetória do autor[1].

O fascínio pela Matemática esteve presente comigo desde os anos finais do Ensino Fundamental, crescendo à medida que os estudos avançavam no Ensino Superior. Junto a ele, o interesse pela Geometria. Em particular ao longo da minha graduação em licenciatura em Matemática, a proximidade e as experiências nas disciplinas voltadas à Geometria Euclidiana (GE), me aguçaram a curiosidade e a vontade de explorar potencialidades de conceitos ali presentes.

Na disciplina em que trabalhamos a Geometria Euclidiana (em um formato de estudo axiomático), as demonstrações a partir dos teoremas e corolários, fascinavam por exigirem um olhar matemático para além do enunciado posto, identificando elementos e relações que estavam ali de forma implícita. Já na disciplina de Construções Geométricas, aliar as propriedades utilizada em GE com o uso de régua e compasso, permitiu aprofundar ainda mais os conceitos abordados anteriormente através de um processo de construção em conjunto com justificativas já estudadas. Uma disciplina, porém, no último ano de graduação, apresentou uma outra perspectiva: as Geometrias Não-Euclidianas.

Com a introdução das Geometrias Não-Euclidianas e realizando seu estudo, houve a abertura de um novo ponto de vista. Vivenciar essa disciplina, me permitiu enxergar que

[1] Como a descrição diz respeito à trajetória do autor, adotamos a primeira pessoa do singular. Posteriormente, passamos a utilizar a primeira pessoa do plural.

existem, para além da GE, ferramentas, elementos e objetos com outras estruturas e relações que também explicavam o mundo ao nosso redor. Uma dessas Geometrias Não-Euclidianas que me instigou a curiosidade, foi a Geometria Fractal (GF). Um ponto destacado foi o de que ao tentar descrever alguns objetos a partir de elementos da Geometria Euclidiana, esta não se aproxima de forma satisfatória às características e particularidades do mesmo. Foram explorados também em oficinas temáticas que participei, tanto o aspecto visual que a construção de algumas etapas de certos fractais gera, quanto sua complexidade, com relação aos elementos matemáticos que podem se estudar a partir dela, foram fatores que me chamaram a atenção. Emergia-se então, o primeiro elemento central dessa pesquisa.

Em paralelo a esse mergulho nas Geometrias, fiz parte de diversos projetos de ensino e de extensão, dentre eles o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). No ano de 2017, foi desenvolvido o estudo de tendências no ensino de Matemática, perpassando por momentos de estudo teórico, simulação com os participantes do projeto e aplicação de atividades com alunos nos colégios atendidos. Embora o grupo ao qual participei estivesse envolvido com a tendência de Resolução de Problemas, uma que me chamou atenção foi a História da Matemática. Apesar do interesse, não avancei em estudos dessa temática naquela ocasião, mas continuei conhecendo e explorando a Educação Matemática e suas possibilidades nos projetos e disciplinas do curso.

Em 2019, houve a oportunidade (e o convite) para ingressar no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), concomitante à participação no Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática (GHMEM). Essa foi a oportunidade de me aprofundar nos estudos dessa temática e compreender que se faz necessário ir além do saber matemático em si. A partir das leituras, discussões e participações em eventos, pude perceber que questionar o que levou a certo acontecimento, de que forma aconteceu, qual o contexto envolvido, fatores extramatemáticos que influenciaram na construção e investigação de certo objeto, entre outras questões investigadas pela HM, possibilitam uma compreensão ampla sobre aquele determinado conceito. Compôs-se então, o segundo elemento principal dessa pesquisa.

Após finalizar a graduação, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), e iniciei um trabalho com a minha atual orientadora que tem a Geometria Fractal como campo de pesquisa. Como eu havia trabalhado com HM, pensamos na possibilidade de estudar a Geometria Fractal sob esta perspectiva. Configurou-se então, a temática que conduz essa pesquisa: a Geometria Fractal em uma perspectiva da História da Matemática.

O fato de que as Geometrias Não-Euclidianas ampliam as possibilidades de descrição de alguns elementos e fenômenos da natureza, é um dos principais aspectos destacados como sendo a essência da necessidade de se ter uma geometria da natureza, como apontam Mandelbrot (1982), Barbosa (2005) e Carvalho (2020), não sendo o único. Os padrões irregulares e fragmentados que existem na natureza, presentes em maior grau e em níveis diferentes de complexidade, "[...] nos desafia a estudar aquelas formas que Euclides deixa de lado como sendo 'sem forma', para investigar a morfologia do 'amorfo'" (Mandelbrot, 1982, p. 1, tradução nossa)[2].

Para além de representar formas da natureza, há uma íntima ligação entre os fractais e a ciência do Caos, uma vez que essas estruturas fornecem ordem e padrões "[...] onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o *caótico*" (Barbosa, 2005, p. 10). Assim, eventos das mais diversas áreas, como a Biologia, a Física, a Economia, a Astronomia, a Meteorologia, a Fisiologia, entre outras, passaram a buscar por regularidades dentre as irregularidades.

Considerando que o livro *Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão* de 1975 é um marco inicial da Geometria Fractal, pode-se compreendê-la como uma área recente e nova que necessita de investigações, visto que ainda não há uma definição matemática válida para todos os objetos reconhecidos como fractais (Barbosa, 2005; Carvalho, 2020). Trabalhos como Pescini (2021), Fratucci (2022), Padilha (2023) e Rodrigues (2023) são exemplos de investigações ocorridas no âmbito do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG) que visam aprofundar os estudos sobre fractais, atentando-se a aspectos voltados à esfera pedagógica.

Ademais, trabalhos como Nuñez Diban (2000), Gleria *et al.* (2004), Antoniazzi (2010), Santana (2017) e Paiva (2015) apresentam discussões sobre aplicações dos fractais em áreas para além da Matemática. Pode-se pensar no uso de fractais em antenas e em diversos aparelho eletrônicos, no estudo de solo e de rios, na previsão do tempo, em estudos fisiológicos, em exames de imagem, em estudos de estruturas de plantas e micro-organismos, bem como na computação gráfica (Rabay, 2013).

Com relação à História da Matemática, é destacado por Struik (1985) três enfoques para a sua abordagem: genético (ou evolucionista), fenomenológico e social. O primeiro possui uma visão de evolução de conceitos em um caminho linear, enquanto o segundo entende que "[...] a

[2] […] challenges us to study those forms that Euclid leaves aside as being "formless", to investigate the morphology of the "amorphous".

tarefa do historiador de um período é dizer como foi esse período visto por si mesmo [...]" (Struik, 1985, p. 200), isto é, se colocar em um determinado tempo buscando observá-lo com aquela visão.

No terceiro, há uma preocupação com a relação entre o conhecimento e a sociedade. Olhar nesse enfoque é ir na contramão da crença em gênios e heróis, imutáveis à ação social e de que o conhecimento "descoberto" por eles existiria independentemente de questões externas. Aquele que se direciona nesse sentido, busca por relações, conexões ou mesmo causalidades em fatores sociais que atuam de forma direta ou indireta.

Partindo-se desse terceiro enfoque, nesta pesquisa entende-se a História da Matemática como sendo um objeto essencial na compreensão dos processos de criação, desenvolvimento e uso de teorias e práticas matemáticas em seus respectivos períodos de contexto. Essa compreensão possibilita certa orientação relativa ao aprendizado e ao desenvolvimento da matemática hoje, viabilizando o avanço e aprofundamento dessas teorias e práticas (D'Ambrosio, 2012).

Determinada a temática norteadora, emergiu um novo questionamento: o que se pesquisar? Para delinear a pesquisa de forma adequada, foi preciso se aprofundar em alguns elementos tanto da GF, quanto da HM.

Primeiro, fez-se necessário diferenciar a compreensão entre Geometria Fractal e Geometria dos Fractais, de acordo com os debates e considerações realizados nas reuniões do GPEG. Sendo assim, ao longo dessas discussões, compreendeu-se que ao tratar da Geometria Fractal, estamos falando da Geometria que tem os fractais como objeto de estudo, isto é, que estuda suas relações, propriedades, características e elementos desses objetos fractais. Podemos pensar então que o foco está em estudar a dimensão ou as iterações de um fractal, neste caso, temos a Geometria Fractal como parte das Geometrias Não-Euclidianas.

No entanto, quando falamos em Geometria dos Fractais, estamos explorando a geometria contida nos fractais. Há, então, a inclusão neste estudo de outros tipos de Geometria, como a Euclidiana por exemplo, de modo a explorar elementos geométricos euclidianos. Assim, poderíamos considerar um fractal geométrico e calcularmos seu perímetro ou sua área.

Portanto, nesta pesquisa utilizamos o termo Geometria Fractal, por entendermos que nessa perspectiva o foco estará nos objetos matemáticos reconhecidos como fractais e suas relações.

Um outro ponto de reflexão, de forma a direcionar o objeto de pesquisa foi: qual perspectiva histórica considerar? Miguel e Miorim (2002) e Trivizoli (2016) apontam três ramos principais para investigações em História da Matemática: História da Matemática, História da Educação Matemática e História na Educação Matemática. O primeiro ramo compreende a HM como sendo um campo investigativo, isto é, um campo de conhecimento em que a investigação produz ideias e resultados. Para isso, considera-se, de forma diacrônica ou sincrônica, os mais diversos aspectos, elementos, ações e relações que compõem e influem na atividade matemática ao longo da história (Miguel; Miorim, 2002; Trivizoli, 2016).

Assim, explora-se questões relativas a práticas sociais que tiveram/têm influência no processo de produção do conhecimento matemática, as formas que compunham essas práticas, comunidade e sociedades científicas ligadas a essas atividades, processos de validação do conhecimento gerados por elas, bem como processo de abandono e de incorporação de elementos nas investigações. Pode-se também investigar sobre os produtores de certo conhecimento, obras e produções em que foram expostos, instituições e organizações que promoveram e/ou financiaram a produção desse conhecimento, entre outras possibilidades. (Miguel; Miorim, 2002).

O segundo ramo dedica-se ao estudo da atividade matemática na história, numa perspectiva exclusiva de "[...] suas manifestações em práticas pedagógicas de circulação e apropriação do conhecimento matemático e em práticas sociais de investigação em educação matemática [...]" (Miguel; Miorim, 2002, p. 187). Assim como no ramo anterior, pode investigar as questões relativas a práticas sociais apontadas anteriormente, agora com uma perspectiva educacional e pedagógica, isto é, com foco em produtos de práticas pedagógicas.

O terceiro ramo tem por interesse investigar como a História da Matemática pode auxiliar professores e alunos de Matemática, isto é, discutir a participação da história "[...] como parte da educação matemática (ação pedagógica) em diferentes níveis de educação, diversos aspectos ou instituições" (Trivizoli, 2016, p. 200). Podemos então discutir os porquês e os como utilizar a HM no processo de ensino e aprendizagem.

Analisando os três ramos destacados, optamos por trabalhar com o primeiro. Inicialmente a proposta pensada foi a de investigar o processo histórico da Geometria Fractal, isto é, sua trajetória desde as primeiras investigações até o seu contexto atual. Porém, compreendeu-se que não era exequível para o contexto de uma pesquisa de mestrado, necessitando de um maior aprofundamento, estudo e investigação.

Trabalhos de membros do GPEG já citado anteriormente, e os debates nas reuniões, davam indícios do carecimento de inserção da GF no contexto da educação, bem como da ampliação da sua discussão na comunidade científica. Fratucci (2022) aponta que existe essa necessidade de novos estudos com fractais, em particular voltado à inserção na Educação Básica, assim como Pescini (2021) que destaca a presença da Geometria dos Fractais nos livros didáticos, mas que levanta o questionamento sobre os subsídios ao professor para abordar esse objeto matemático.

Aliando essas pesquisas realizadas no âmbito do GPEG, bem como o fato da Geometria Fractal ser, relativamente, uma área recente de estudo e refletindo sobre as possibilidades de se trabalhar a HM, surgiram os seguintes questionamentos: Qual seria então a conjuntura da GF no contexto da Matemática? O que já se tem e o que ainda precisa avançar? Existem elementos que ainda necessitam ser discutidos? Dessas indagações, determinamos os três processos que seriam objeto de investigação nesta pesquisa: constituição, institucionalização e consolidação.

Segundo o Dicionário Michaelis (Michaelis, 2023), tem-se as seguintes definições para essas três ações:

- Constituição: “1. Ação, processo ou efeito de constituir, de formar um conjunto; formação, organização; 2. Conjunto de elementos que constituem um todo; composição; 3. Conjunto das características de um corpo quanto a sua estrutura biológica; compleição (corporal), física [...]”[3];
- Institucionalização: “Ato ou efeito de institucionalizar(-se)”[4];
- Consolidação: “1. Ação ou efeito de consolidar; 2. Ato de passar ou passagem de um corpo do estado líquido para o sólido; endurecimento, solidificação; 3. Ato, efeito ou processo de transformar (uma organização, empresa, marca, pessoa, reputação etc.) em estável, firme, respeitável [...]”[5]

Entende-se, nesse sentido, que esses três termos permitem um estudo relativo a essa localização da Geometria Fractal, situando-a no contexto da Matemática. De acordo com Bazi e Silveira (2007), para se constituir uma área científica, faz-se necessário haver componentes suficientes tais que determinem seu estatuto científico, o qual, segundo Toledo (2008), envolve processos e mecanismos que o constroem e legitimam. Por fim, Alfonso-Goldfarb e Ferraz (2002) apontam que a consolidação de uma disciplina como científica, necessita da articulação entre ensino, pesquisa, divulgação e aplicação dos conceitos referentes aquela disciplina. Articulando esses três processos, compreendemos que há a presença de uma área científica formada (mas não acabada).

Para estudar esses três processos e compreender seu desenvolvimento no que tange a GF, foi necessário observar como os elementos que compõem cada processo aparecerem dentro desse contexto (se eles existirem). Para identificar esses elementos, observou-se que

---

[3] Disponível em: Constituição
[4] Disponível em: Institucionalização
[5] Disponível em: Consolidação

poderíamos recorrer à pesquisa documental. Para Cervo, Bervian e Silva (2007) neste tipo de pesquisa são investigados documentos no intuito de descrever e comparar características e elementos como costumes, diferenças, tendências, entre outras. As bases documentais utilizadas possibilitam, a partir da pesquisa histórica, estudar tanto o passado como a realidade presente. Dessa forma, entende-se que pesquisa documental proporciona o levantamento e discussão dos elementos que desejamos estudar.

A partir dessas considerações, constituiu-se então o seguinte problema de pesquisa: *como se situam, no contexto matemático, os processos de constituição, institucionalização e consolidação da Geometria Fractal?* De forma a ir ao encontro da resposta para esse problema, elencamos o seguinte objetivo geral: *investigar a História da Geometria Fractal, de forma a evidenciar aspectos históricos, sociais, matemáticos e de outras áreas, que envolvem sua constituição, formalização e consolidação*. Determinamos também os seguintes objetivos específicos:

- Estudar as primeiras investigações referentes aos fractais, motivações e matemáticos envolvidos;
- Levantar o aparecimento de discussões referentes aos fractais em diferentes frentes;
- Relacionar outros conceitos matemáticos, bem como conhecimentos de outras áreas com a Geometria Fractal.

A fim de contemplar o problema de pesquisa e os objetivos elencados, partindo da apresentação inicial feita neste capítulo, a dissertação está organizada em quatro capítulos.

No Capítulo 1, temos os direcionamentos teóricos da pesquisa, aprofundando as discussões sobre Geometria Fractal e História da Matemática, bem como suas relações com o problema e com o objetivo de pesquisa. Definem-se também os elementos que caracterizam a constituição, institucionalização e consolidação de uma área científica, e a relação desses elementos entre si e com a pesquisa.

O Capítulo 2 é composto pelos direcionamentos metodológicos e analíticos da pesquisa, em que na primeira seção é apresentada a metodologia utilizada, enquanto na segunda são descritos os processos de levantamento e organização dos materiais estudados. Neste capítulo também são apresentados dois eixos que norteiam o desenvolvimento desses processos citados.

Com relação ao Capítulo 3, este consiste na apresentação das informações e dados levantados, articulando os elementos destacados com aqueles apontados no Capítulo 1, a fim de observar e estudar as relações presentes e os processos de constituição, institucionalização e consolidação da Geometria dos Fractais.

Por fim, tem-se as Considerações Finais, em que destacamos as reflexões e conclusões obtidas a partir das investigações e estudos realizados, de forma a responder o problema de pesquisa.

1 DIRECIONAMENTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

Neste primeiro capítulo, apresentaremos e discorreremos sobre a fundamentação teórica utilizada nesta pesquisa. Na primeira seção, abordaremos sobre a Geometria Fractal, evidenciando do que se trata, quais elementos a constitui, entre outros pontos importantes para a compreensão desse campo. Na segunda seção, discorremos sobre a História da Matemática, as concepções adotadas neste trabalho, bem como a forma como a HM se relaciona com o problema de pesquisa. Na terceira seção, apresentaremos sobre o que caracteriza a constituição, institucionalização e consolidação de uma área científica, assim como de que forma esses processos estão relacionados entre si e no contexto da pesquisa.

1.1 A Geometria Fractal

Por um longo período, a Geometria que se conhecia era a baseada na obra *Elementos* de Euclides, geometria essa a qual influenciou muito do que hoje nominamos por Geometria Euclidiana. Boa parte do que se tem sobre essa obra, é o que foi preservado através de Proclus, filósofo neoplatônico que viveu no século V d.E.C. Segundo um Comentário feito com relação ao Livro I, traduzido por Bicudo (2005), Proclus indica que o livro tem como intenção tanto instruir sobre elementos, como fonte de estudos e regras para construções, quanto indicar pelo seu título que a partir de teoremas principais, se decorrem os outros.

O processo de construção e autoria dessa obra possui divergência entre os historiadores. Segundo Sachs (2016), existem três hipóteses principais: a primeira atribui a autoria a Euclides; a segunda aponta Euclides como líder de um grupo de matemáticos, que escreveram diversos trabalhos juntos, assinando somente como Euclides; e a terceira afirma que um grupo de matemáticos adotou o nome de Euclides para realizar suas publicações. Tanto Bicudo (2005) quanto Sachs (2016) destacam que o mais provável é que Euclides teria sido não o primeiro, mas sim o compilador final, fazendo adaptações no que havia sido coletado, bem como complementações e substituições necessárias em demonstrações.

Há consenso de que o método axiomático está presente na obra utilizando-se de uma forma dedutiva[6] para apresentar conhecimentos matemáticos (Schena, 2019). Para isso, Euclides teria feito uso de postulados, axiomas e noções comuns. As demonstrações,

[6] Essa estruturação lógica que serve de base para a obra Os Elementos é o Órganon de Aristóteles.

conjecturas e todas as produções presentes no livro, derivam então desses três elementos. Destacamos aqui os reconhecidos como postulados:

> **1.** Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> **2**. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> **3.** E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> **4.** E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> **5.** E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois reto (Euclides, 2009, p. 98).

Com relação aos quatro primeiros, sua aceitação não foi um problema para os matemáticos da época. Porém o quinto recebeu críticas, tendo inúmeras tentativas de prova, uma vez que foi entendido como derivado dos quatro anteriores (uma proposição e não um postulado), havendo assim a possibilidade de demonstrá-lo (Sachs, 2016). Um ponto importante para essa certa recusa é atribuído ao fato de que os postulados deveriam ser abstrações advindas da experiência.

> O V Postulado é diferente, pois não podemos, pela experiência, saber se as retas se encontrarão ou não, uma vez que a experiência só nos permite traçar segmentos. Podemos estender os segmentos mais e mais, porém não eternamente. Além do que, sabemos que duas linhas podem se aproximar ilimitadamente sem nunca se encontrarem, como é o caso de uma curva e sua assíntota [...] (Bicudo, 2005, p. 13).

Na busca por tentar provar o quinto postulado, Sachs (2016) afirma que muitas das falhas ocorreram por utilizarem argumentos que equivaliam ao próprio, assim tornando as provas inválidas. Proclo, Omar al-Khayyam (1048-1131), Nasir ad-Din al-Tusi (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foram alguns matemáticos que o tentaram ao longo da história demonstrar. Em particular, com os estudos de Saccheri e Legendre notou-se que o quinto postulado não poderia ser provado, e para além, não poderia ser negado sem que contradições matemáticas ocorressem no contexto da Geometria Euclidiana.

> Então, a aceitação ou não do V Postulado, como um dos princípios para a geometria, passou a ser uma questão de escolha de que tipo de geometria interessava-nos: com o V Postulado, a Geometria Euclidiana; com uma de suas negações, uma Geometria Não-Euclidiana (Bicudo, 2005, p. 16).

Tinha-se, portanto, a existência de uma geometria consistente e que não era a euclidiana. De acordo com Barbosa (2011), três matemáticos tiveram destaque na exploração dessa nova geometria: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Lobachevsky, desde 1820, estaria certo de que havia a possibilidade de uma geometria sem a afirmação do quinto postulado, porém seus trabalhos não foram bem aceitos pelos acadêmicos. Apesar das críticas, ele continuou seus estudos e investigações, produzindo diversos artigos sobre a então geometria imaginária[7], posteriormente sendo chamada como Geometria Hiperbólica.

> O nome de geometria hiperbólica foi dado futuramente pelo matemático Felix Klein em 1871, pois, de acordo com a etimologia, a palavra hipérbole está relacionada a excesso e, nesta geometria o número de paralelas a uma reta dada passando por um ponto excede o número (um) da geometria euclidiana (Barbosa, 2011, p. 40-41).

János Bolyai teve grande influência de seu pai (Farkas Bolyai) no estudo da geometria, uma vez que ele tentou exaustivamente provar o quinto postulado, não obtendo sucesso em nenhuma das tentativas. János, porém, partiu de uma nova ideia e a encaminhou por uma carta a seu pai em 1823. "Farkas Bolyai mandou, ansioso pela resposta e sem o consentimento do filho, uma cópia desse apêndice para seu amigo, o matemático Carl Friedrich Gauss" (Barbosa, 2011, p. 43) o qual foi respondido por ele, alegando que não poderia elogiar o trabalho, pois estaria elogiando a si mesmo.

Esse fato se deu por János e Gauss terem tomado caminhos parecidos, cujos resultados obtidos coincidiam quase exatamente (Sachs, 2016). Dado esse retorno de Gauss, János Bolyai parou de publicar suas pesquisas até que em 1848 soube das publicações de Lobachevsky, e ao estudá-las, János Bolyai se sentiu instigado a competir com ele, produzindo intensamente estudos que nunca foram terminados.

Gauss fez poucas publicações referentes a seus estudos dessa nova geometria em que havia a negação do quinto postulado, mesmo já acumulando saberes desde 1792. "A maior parte dos registros históricos desses estudos está nas cartas que trocava com outros matemáticos e em algumas notas entre seus artigos" (Barbosa, 2011, p. 44). Há uma possibilidade de que Gauss possuísse receio de como a comunidade matemática reagiria às suas considerações. Com as reflexões e estudos desses três matemáticos, bem como as discussões entre a comunidade, passou-se a ter uma geometria que era consistente, isto é, válida sob a ótica matemática, mas que diferia da Geometria Euclidiana.

Assim como a Geometria Hiperbólica, existem outras geometrias como a Elíptica, Esférica, Projetiva, do Táxi, entre outras. Embora todas essas sejam reconhecidas como

---

[7] Esse nome, imaginária, seria como um paralelo entre a relação dos números complexos (imaginários) com os números reais (Barbosa, 2011).

Geometrias Não-Euclidianas, a Geometria Fractal se difere das demais por algumas especificidades que traremos a seguir.

O termo Fractal, que foi usado e adotado por Mandelbrot para nomear esses objetos matemáticos, advém do latim, mais especificamente do adjetivo *fractus*. Esse que tem como verbo correspondente o termo *frangere* que significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar, foi utilizado por Mandelbrot para os objetos que possuíam essa característica. Portanto, a Geometria Fractal pode ser entendida como o estudo de objetos matemáticos ou não, que são irregulares, isto é, "[...] rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau em todas as escalas" (Mandelbrot, 1998, p. 207).

Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) sistematizou então a Geometria Fractal em meados das décadas de 1950 e 1960, também conhecida como Geometria da Natureza, justamente por buscar compreender as formas e padrões que estavam presentes em objetos naturais e relações.

> [...] [Mandelbrot] esclarece que muitos desses padrões existem na natureza e são tão irregulares e fragmentados, que se tornam algo diferente e tomam um alto nível de complexidade em comparação à Geometria Euclidiana. Essas formas tão irregulares, possíveis de serem encontradas na natureza nos instigam a estuda-las, uma vez que, quando Euclides sistematizou a geometria, ele deixou os formatos que envolviam a natureza "sem forma", pois considerava-se que estes não poderiam ser descritos (Fratucci, 2022, p. 22).

É importante destacar que já haviam produções anteriores a Mandelbrot em que aparecem objetos fractais, porém, ainda não sendo reconhecidos como fractais, nem tendo como objetivo estudá-los pela perspectiva da Geometria Fractal por parte de alguns matemáticos como Sierpinski, Peano, Hilbert, Cantor, Koch, Dürer, Julia, entre outros[8]. O reconhecimento como figura principal no desenvolvimento da área, se deu ao fato de englobar os estudos anteriores a ele, em um único conjunto matemático, apresentando justificativas e provas para a criação dessa nova área (Fratucci, 2022).

Compreendendo essa nova geometria como capaz de representar elementos do mundo real, os quais a Geometria Euclidiana não é suficiente, Barbosa (2005) destaca uma abertura para se abordar fenômenos que ocorrem em diversos ambientes. Assim, pode-se estabelecer relações dos Fractais com diversas áreas para além da Matemática, como Arte, Biologia, Economia, Música, Cinema, Meteorologia, Geologia, Medicina, entre outras. Um outro ponto importante é a relação entre a Geometria Fractal e a ciência conhecida como Caos, uma vez que as estruturas da primeira fornecem ordem a esta.

---

[8] Abordaremos de forma aprofundada no Capítulo 3.

> Essa ciência trouxe consigo *o ver ordem e padrões*, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o *caótico*. Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas suas irregularidades. [...] [os temas] eram estudados buscando-se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades; e surpreendentes ordens no caos foram descobertas (Barbosa, 2005, p. 10).

Com relação a uma definição matemática do que pode ser considerado um objeto fractal, Barbosa (2005) afirma que ainda não há uma definição fechada, que abranja todos os tipos de fractais, isto é, que sirva somente ao conceito de fractal. Porém são apresentadas três definições principais:

Quadro 1.1 – Definições de Fractal

Mandelbrot (1977)	J. Feder (1988)	K. J. Falconer (1985 e 1990)
- Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.	*- Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos*	Um conjunto F é fractal se, por exemplo: *- F possui alguma forma de "autossimilaridade" ainda que aproximada ou estatística;* *- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;* *- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.*

Fonte: Barbosa, 2005.

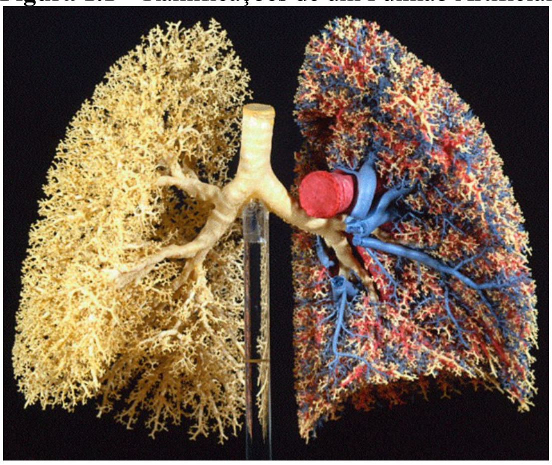
Referente às características dos Fractais, Nascimento (2012), Carvalho (2020), Pescini (2021), Fratucci (2022) e Padilha (2023) apresentam três características principais: autossemelhança, complexidade infinita e dimensão fracionária. Com relação à autossemelhança, podemos compreendê-la como "[...] uma porção de um Fractal que pode ser visualizada como uma réplica do Fractal todo, porém, em uma escala menor" (Fratucci, 2022, p. 22). Isto é, se ampliarmos um fractal, cada parte que observamos na ampliação será semelhante à visualização original, não importa quantas vezes haja essa ampliação.

Quanto à complexidade infinita, trata-se de um processo recursivo em que uma determinada operação se repete de forma infinita. Assim "[...] cada fractal em sua construção dispõe de um número infinito de procedimentos, resultando em uma estrutura complexa" (Nascimento, 2012, p. 26). Nesse ponto, o avanço e desenvolvimento de softwares matemáticos foi crucial para que fosse possível realizar repetições de iterações infinitas[9], ou pelo menos, para além das possibilidades ao se fazer de forma manual.

A terceira característica diz respeito ao grau de ocupação que determinado fractal possui no espaço, estando relacionado ao seu grau de irregularidade. A dimensão do fractal, além de geralmente ser expressa por um valor não inteiro, possui uma fórmula para o seu cálculo dada por: $D = \frac{\log m}{\log n}$, em que m é fator de aumento do fractal e n é o número de peças do fractal em uma determinada etapa.

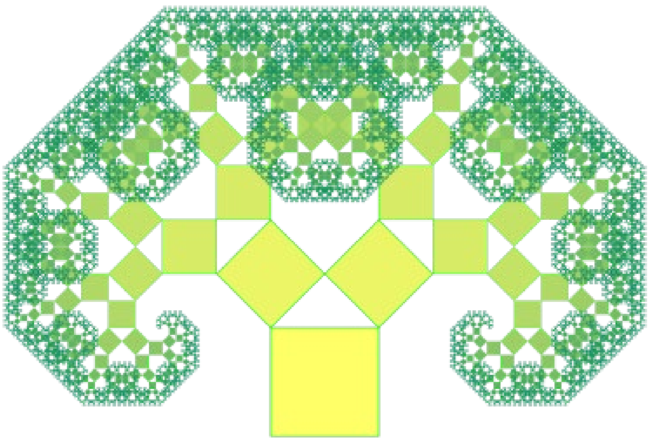
Alguns exemplos de Fractais são:

Figura 1.1 – Ramificações de um Pulmão Artificial



Fonte: Carneiro (2015)

Figura 1.2 – Árvore Pitagórica



Fonte: Wikipédia (2022)

[9] Ao nos referirmos às iterações de um fractal, podemos utilizar tanto o termo iteração quanto nível.

Figura 1.3 – Repolho

Fonte: MDig (2014)

A partir do entendimento do que é a Geometria Fractal e do que ela trata, é possível observar que sua conjuntura foge ao que se tinha até então no âmbito da Geometria Euclidiana. Isso nos leva a pensar como se deu o processo de aceitação desse novo campo dentro da Matemática, que é nosso problema e objetivo. Assim, para buscar respondê-los, apresentaremos o que entendemos nesta pesquisa como História da Matemática e como ela se relaciona com a investigação que desenvolvemos.

1.2 Caracterizando História da Matemática

Na Língua Portuguesa, existem diversas palavras que são classificadas como polissêmicas, isto é, que reúnem vários significados em um mesmo termo. Segundo o Dicionário Michaelis (Michaelis, 2023)[10] existem 13 significados para o termo *história*, dentre os quais evidenciamos: “Conjunto de fatos ou acontecimentos relevantes, ocorridos no passado da humanidade, destacando-se época, local e dados importantes”; “Estudo científico relativo ao passado de um povo, nação, período ou indivíduo, a partir de dados documentais”; “Narração de fatos passados relativos à origem e evolução de uma arte, ciência ou qualquer outra área de conhecimento”; “Julgamento das ações humanas através dos tempos; memória que a

[10] Disponível em: [História]

posteridade mantém de um fato ocorrido no passado."; "Sequência de dados relativos a um fato ou indivíduo".

Recorrendo à sua etimologia, o termo *história* postula-se no latim como *historĭa*, o qual baseia-se no grego *historía*, sendo a associado à *historeín* que remete a indagar ou inquirir. Este último, relaciona-se com o termo *histor*, que diz respeito à capacidade de julgamento a partir do saber. Sua raiz advém do indo-europeu **weid-*, o qual pode ser interpretado como ver, no sentido de testemunhar (Veschi, 2019).

Dessa forma, relacionando os significados encontrados no dicionário com a etimologia da palavra, e aquilo que buscamos investigar com essa pesquisa, compreendemos a História como sendo um campo de investigações sobre fatos e questões do passado, na busca de entender elementos tanto desse passado, quanto do presente, bem como processos e ações ocorridas ao longo do tempo. A História não se limita a elencar fatos pontuais, mas pretende identificar e discutir fatores e contextos que influenciaram no assunto estudado, focando em toda atividade humana, incluindo a científica. Assim, cada área de conhecimento e cada saber possui sua história e retrata-a de formas particulares. Nosso destaque neste trabalho é a História da Matemática.

Segundo D'Ambrosio (2021), há quatro finalidades principais para a História da Matemática:

> 1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> 2. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> 3. para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> 4. para saber que desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as conseqüências sócio-culturais dessa incorporação (D'Ambrosio, 2021, p. 46).

Dessa forma, é preciso compreender que a História da Matemática não se reduz a uma narrativa cronológica de eventos, encadeando fatos do passado com do presente, entendendo-se como sendo um "[...] discurso que legitima a construção do saber matemático" (Saito, 2015, p. 12). Nesse sentido, é significativo olhar para contexto e fatores influenciadores no desenvolvimento de determinados conceitos.

Quando vamos estudar um certo objeto matemático, faz-se necessária a compreensão da forma que esse se originou, bem como as principais motivações que promoveram seu desenvolvimento (D'Ambrosio, 2021). Ao observar essas questões, em consonância com o entendimento dessa área como sendo um esforço humano contínuo, e que se modifica conforme a humanidade se transforma, Berlinghoff e Gouvêa (2010) afirmam que é necessário conhecer sua história, atentando-se a questões e pensamentos que circundam dado objeto.

> Entender uma questão, muitas vezes, depende de saber a história da ideia. De onde veio? Por que é ou era importante? Quem queria a resposta e por que queria? Cada etapa no desenvolvimento da matemática é construída com base naquilo que veio antes (Berlinghoff; Gouvêa, 2010, p. 1).

Assumimos, portanto, que a história permite a compreensão de elementos para além do teor técnico, abrangendo questões sociais, culturais e históricas. Também ao recorrermos à História da Matemática, temos "[...] acesso a diferentes ideias, argumentos, temas e outras questões que foram esquecidas (ou abandonadas), incentivando novas reflexões sobre a construção do conhecimento" (Saito, 2015, p. 20). Isso nos permite concluir que não há uma única história (uma verdade absoluta), mas que diferentes indivíduos, em diversos contextos fazem a sua escrita, o que gera distintas versões de um mesmo cenário, além de que há espaço para reinterpretação e reescrita de tempos em tempos.

Essa reinterpretação e reescrita da história ocorre devido ao surgimento de novos documentos, do desenvolvimento de novas abordagens metodológicas, e principalmente pela perspectiva historiográfica que é adotada pelo historiador em questão (Saito, 2015). A historiografia, aqui entendida como a escrita da história, é o que vai orientar a narrativa apresentada. Portanto, entende-se que não há como considerar que haja total neutralidade nas narrativas históricas, nem de que não exista influência de fatores contemporâneos àquele que as escreve.

Duas vertentes historiográficas são colocadas por Saito (2015): a tradicional e a atualizada. A vertente histórica tradicional parte de uma concepção historiográfica linear e progressista. Linear, pois considera que existiu um único caminho condutor da ciência e da Matemática moderna até o que conhecemos hoje. Progressista, pois se apoia na ideia de que o avanço da ciência e da Matemática ocorreu a partir do aprimoramento de noções antigas, essas que foram descartadas por estarem erradas e foram substituídas por outras que apontariam para a verdade.

Assim, essa vertente enfoca no percurso histórico reconstruído composto basicamente das descobertas e dos resultados encontrados, de forma a destacar aspectos técnicos da

Matemática, o que vai ao encontro de uma preocupação com a coerência interna da área e com a lógica do discurso matemático. Desse modo, foca em questões internas à própria área, deixando de lado aspectos não essencialmente matemáticos. Nesse sentido, não são considerados os contextos e fatores externos à Matemática que poderiam ter influenciado no desenvolvimento de objetos matemáticos, não havendo uma reflexão crítica sobre si. Ele apenas é inserido e localizado em sua respectiva época e local de forma conveniente (Saito, 2015).

Apesar disso, as narrativas nessa vertente não são descartáveis, uma vez que evidenciam a institucionalização da Matemática como sendo uma área autônoma de conhecimento e nos orientam cronologicamente (com relação aos resultados encontrados e não sobre o processo de construção do conhecimento matemático). Por outro lado, Saito (2015) adverte que olhar apenas para aspectos contextuais sem estabelecer vínculo com conteúdos matemáticos, também é problemática. Isso se dá ao fato de que "[...] as questões epistemológicas ligadas aos objetos matemáticos não são levantadas, nem analisadas, o que pode conduzir a imprecisões conceituais" (p. 25).

Portanto, é preciso que se observe as questões técnicas e teóricas da Matemática, assim como os contextos e fatores influenciadores do desenvolvimento daquele conhecimento investigado. Nesse sentido, tem-se a historiografia atualizada, uma vez que se busca tanto técnicas e conteúdos, quanto circunstâncias em que essas foram elaboradas.

> Nessa perspectiva, a reconstituição histórica procura privilegiar não só o conteúdo matemático em si mesmo, mas também os documentos que versam de alguma maneira a seu respeito. Esses documentos, que são de diferentes campos de conhecimento (portanto, não só matemáticos), são estudados e analisados pelo historiador de acordo com a problemática por ele selecionada (Saito, 2015, p. 26-27).

Em posse desses documentos, cabe ao historiador pontuar o objeto em estudo na malha histórica, contextualizando-o no espaço e no tempo. Assim, é possível acessar o processo da construção daquele conhecimento, perpassando as rígidas malhas formais da Matemática moderna. Tem-se, então, que é partindo de um acontecimento do passado que devemos entender o presente, isto é, cabe ao historiador evitar julgar o conhecimento do passado com um olhar do presente. Ao contextualizar esse conhecimento matemático do passado no passado, o historiador consegue acesso ao seu processo de construção.

Cabe então ao historiador não apenas focar nas grandes narrativas, procurando mapear os conhecimentos produzidos e compartilhados por determinado autor e por seus contemporâneos, deixando de introduzir noções ou conhecimentos alheios a eles. Partindo do contexto em que está inserido o documento estudado, assim como as relações matemáticas e extramatemáticas vinculadas a ele, "[...] o historiador faz emergir do próprio processo histórico novas questões que dão acesso ao que são 'conhecimento matemático' e 'matemáticas' do passado" (Saito, 2015, p. 28).

Por fim, Saito (2015) ainda destaca que é preciso cuidado ao utilizar os termos *conhecimento matemático* e *matemática*, uma vez que a Matemática enquanto uma área autônoma e unificada de conhecimentos surge apenas no final do século XIX. Antes desse período, os conhecimentos matemáticos encontravam-se dispersos e integravam outros campos. O historiador então reconhece conhecimentos matemáticos no passado, pois os conhece e está familiarizado com eles, porém observa que é artificial pensar numa Matemática que se aprimorou da antiguidade até o presente. Isto é, a matemática do passado não é a mesma matemática que se tem hoje.

Logo, entendemos que a História da Matemática pode oferecer subsídios que nos direcionam à resposta do nosso problema de pesquisa e aos nossos objetivos. Compreendemos também que ao voltarmos nosso olhar para a Geometria Fractal com uma perspectiva histórica, observamos questões além das formalizações matemáticas e que podem auxiliar na compreensão desse conceito, bem como podem abrir espaço para a investigação de outros aspectos ainda não abordados. Para isso, utilizaremos uma historiografia atualizada, ressaltando que não estamos isentos de recair em uma historiografia tradicional em alguns momentos.

1.3 A Constituição, Institucionalização e Consolidação de uma área científica.

Com o objetivo de discutirmos alguns aspectos históricos, sociais e culturais da Geometria Fractal, apresentaremos nesta parte do texto, nosso entendimento a respeito da constituição, institucionalização e consolidação de uma área científica.

Cada área científica possui suas próprias características, objetivos, formas de trabalho e de desenvolvimento, entre outros pontos particulares. Existem, então, características comuns que nos permitem classificar e nomear várias *áreas científicas*? Que elementos devem se fazer presentes para que tais áreas existam? O que se faz necessário para que haja seu reconhecimento perante as demais? Quais processos uma área científica percorre até que esteja consolidada?

A concepção de área científica foi-se alterando ao longo do tempo, à medida que ocorreram (e ocorrem) mudanças de visão de mundo, objetivos e questões relativas ao homem e ao meio em que vive. Para Bazi e Silveira (2007), podemos defini-la como um corpo de conhecimentos, que integra de forma coesa e coerente, um sistema de teorias, leis e métodos científicos que buscam explicar as realidades a que pertencem. Esse sistema tem objetos e objetivos claros, e apresentam estruturas (formais e informais) para disseminar os conhecimentos produzidos por seus pesquisadores. Além disso, considerando uma concepção pós-moderna, verifica-se que uma área científica

> [...] não busca restrita e necessariamente diagnosticar problemas, explicar a realidade e propor soluções, mas também, descrever situações, traduzir contextos, determinar relações complexas e distantes, ampliar noções e experimentar novas possibilidade de investigação (Bazi; Silveira, 2007, p. 131).

Para que seja reconhecido como área científica, é necessário que ocorram três processos com esse sistema: *constituição*, *institucionalização* e *consolidação* (Alfonso-Goldfarb; Bazi; Silveira, 2007; Ferraz, 2002; Toledo, 2008). Para abordar a constituição e a institucionalização de uma área científica, Bazi e Silveira (2007) e Toledo (2008) adotam as concepções de Bunge (1980) e Whitley (1974; 1980).

A perspectiva de Bunge diz respeito à formação e o desenvolvimento dos componentes necessários para uma área científica, e cujo reconhecimento da mesma é realizado pela sua comunidade (Bazi; Silveira, 2007). Já a perspectiva de Whitley diz respeito "[...] à clareza e à organização com que as estruturas formais e informais dos componentes conceituais e sociais da disciplina são reconhecidas por sua comunidade e por outras" (Toledo; 2008).

Nesse sentido, Bunge aborda questões relativas à constituição de uma área científica e Whitley questões relacionadas à sua institucionalização. Com relação a consolidação, Alfonso-Goldfarb e Ferraz (2002) discorrem sobre a necessidade da articulação entre quatro componentes que serão apresentados posteriormente neste texto.

Iniciando pela constituição de uma área científica, Bazi e Silveira (2007) e Toledo (2008) afirmam que esse processo consiste da formação e do desenvolvimento de dois sistemas: o conceitual e o social. Esses correspondem a "[...] processos e mecanismos que se constroem e se legitimam no seu espaço de atuação, pelos atores, possibilitando que a ciência em questão adquira o seu *estatuto científico*" (Toledo, 2008, p. 23).

Na perspectiva de Bunge (1980), faz-se necessário que uma área científica possua um arcabouço teórico, metodológico e temático bem definido. Este arcabouço é o que orientará futuras atividades de pesquisa dessa área, uma vez que representa seus fundamentos e limites, assim como a possibilitará que se institucionalize posteriormente (Bazi; Silveira, 2007). Para tanto, é preciso que haja os seguintes componentes:

- uma base filosófica ou visão geral constituída por suposições gerais acerca do mundo, do conhecimento e da boa conduta;

- uma base formal constituída por teorias lógicas, matemáticas e explicativas;
- uma base específica formada por teorias, hipóteses e dados obtidos de outros campos de pesquisa;
- um fundo de conhecimento, representado pelo corpo de conhecimentos obtidos pelo campo em outras épocas;
- um domínio constituído por objetos claros e precisos que se referem ao fundo de conhecimento;
- a problemática, formado pelo conjunto de problemas abordados pelo fundo de conhecimento;
- o objetivo, ou seja, o conjunto de metas de pesquisa; e
- a metódica, ou os métodos regulares utilizados na abordagem dos problemas e objetos, à luz dos objetivos (Bazi; Silveira, 2007, p. 131-132).

Esses componentes fundamentarão composição do arcabouço que corresponde ao *Sistema Conceitual*, isto é, darão corpo à visão geral, base formal e base específica de determinada área científica. Esse conjunto não é estático, mas está em constante reformulação e evolução, logo oferece um conglomerado de possibilidades para novas pesquisas. Entende-se então que a constituição é um processo que ocorre dentro da própria comunidade, isto é, que envolve questões compreendidas naquela área em questão.

Além desses componentes, Toledo (2008) destaca a necessidade, apontada por Bunge (1980), de pessoas e instrumentos capazes de disseminar os conceitos desenvolvidos no Sistema Conceitual de uma área científica. Essa propagação permite e promove o avanço dos conhecimentos gerados nesse campo e tem como constituintes os cursos universitários (graduação e pós-graduação), as sociedades profissionais e acadêmicas, as agências de fomento, os periódicos e eventos científicos, bem como os colégios invisíveis e a frente de pesquisa. Os primeiros são classificados elementos do tipo formal, enquanto os dois últimos são do tipo informal[11] (Bazi; Silveira, 2007). Esses componentes são o que se reconhece por *Sistema Social*.

Aos cursos universitários, cabe garantir a transmissão dos conhecimentos já produzidos e que ainda estão em produção. Segundo Bazi e Silveira (2007), também tem se atribuído a competência de produzir, introduzir e fortalecer a pesquisa entre estudantes tanto de graduação quanto da pós-graduação. Com relação às sociedades, compete a elas “[...] orientar e incentivar atuações, solidificar temas e contribuições internas e externas e salvaguardar os conhecimentos incorporados à base da disciplina científica” (Bazi; Silveira, 2007, p. 133).

[11] Daremos ênfase aos elementos do tipo formal, por entender que estão relacionados ao nosso problema e aos objetivos de pesquisa.

As agências de fomento têm como responsabilidade subsidiar o desenvolvimento científico e tecnológico a partir de políticas que incentivem as atividades de pesquisa, dando suporte financeiro, humano e relativo à infraestrutura. Sobre os periódicos e eventos científicos, a principal atribuição diz respeito à divulgação de resultados de pesquisa a outros pesquisadores daquela área. Enquanto o periódico possui ainda a função de deixar registrado o conhecimento produzido e sua propriedade intelectual, o evento científico permite que os pesquisadores da área debatam, façam críticas, contraponham os resultados obtidos nas pesquisas, constituindo assim um processo de avaliação, ponto central dessa etapa em qualquer área.

Passemos agora à institucionalização de uma área científica. Bazi e Silveira (2007) apontam que para que essa exista, seu grau de maturidade deve ser alto, uma vez que a clareza e organização de seus componentes conceituais e sociais determinam os processos de institucionalização. Dessa forma, pode-se compreendê-la como o estudo do processo de constituição "[...] aliado ao entendimento de *como* historicamente eles se formalizaram e se incorporaram ao conjunto das ciências, tendo em vista suas *práticas*, seus *processos*, seus *instrumentos* e seus *arcabouços teórico* e *metodológico*" (Toledo, 2008, p. 27). Assim, esse processo diz respeito a questões internas da área, mas também às externas, relacionando-se com outras áreas.

A institucionalização da área científica na concepção de Whitley (1974), segundo Bazi e Silveira (2007) e Toledo (2008), possui duas perspectivas: a cognitiva e a social, as quais se relacionam com os sistemas que dão corpo à constituição de uma área. Além disso, as duas perspectivas sofrem influência uma da outra, influências que determinarão e nortearão os processos relativos aos níveis das pesquisas naquela área.

> Whitley (1974) também aponta que as duas perspectivas [...] estabelecem relações entre seus elementos, mas que as perspectivas não são eliminadas ou alteradas. Assim, tornam-se dependentes uma da outra: o avanço de uma perspectiva proporciona o avanço da outra; a estagnação de uma perspectiva significa o acompanhamento também da outra (Bazi; Silveira, 2007, p. 134).

Questões relativas a teorias, epistemologias, metodologias e interdisciplinaridade fazem parte da *Perspectiva Cognitiva*[12]. Nessa perspectiva, há uma busca do esclarecimento de quais são os componentes do sistema conceitual daquela área em questão, de forma que determinada área científica possua seu estatuto científico claro e organizado. Assim, compreendemos que essa perspectiva influencia no Sistema Conceitual, uma vez que ao não se fazer claro o estatuto científico de uma área, é necessário reconsiderar as bases e fundamentos que a constituem.

---

[12] Também denominada por *Institucionalização Cognitiva*.

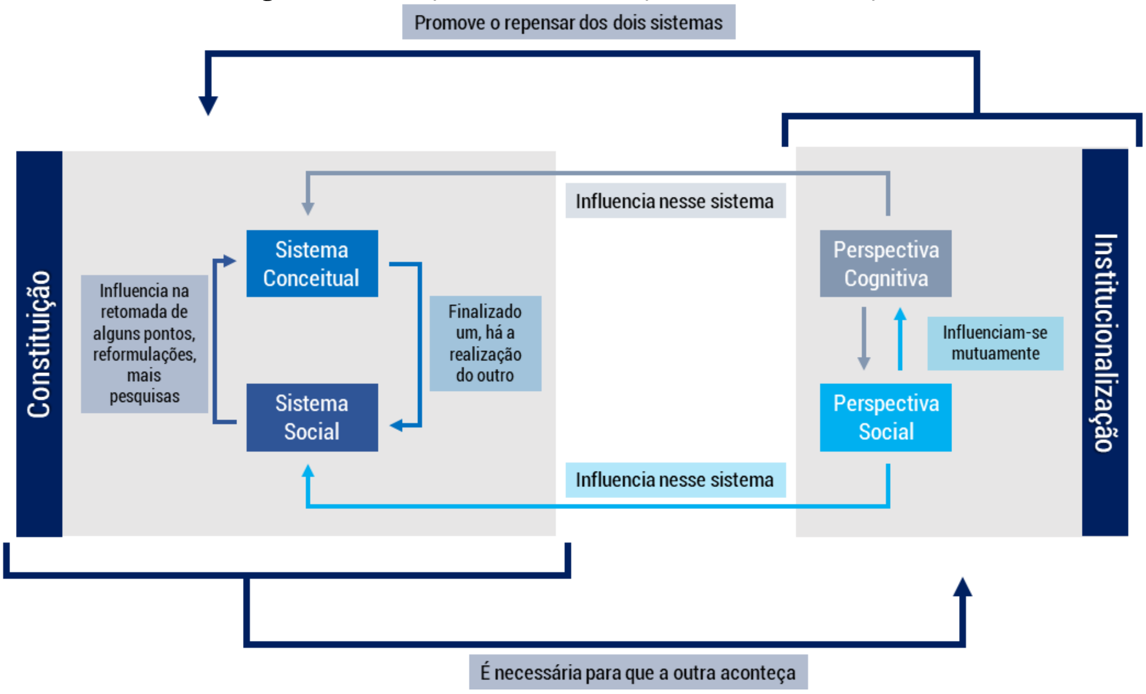
Já a *Perspectiva Social*[13] abarca questões referentes a estruturas formais necessárias para que uma área do conhecimento se torne visível, logo há uma implicação na organização das estruturas formais e informais que irão orientar e legitimar a pesquisa naquela área, bem como a divulgação dos resultados obtidos. Faz-se necessário o reconhecimento tanto interno, quanto externo ao campo ao qual pertence aquela área científica, de forma que haja uma influência dessa perspectiva no Sistema Social. Uma vez que a propagação de pesquisas, de resultados e da própria identidade social[14] da área possuem boa organização e estruturação, os componentes desse sistema conseguem realizar a disseminação dessas informações.

É possível observar, por consequência, que os processos de constituição e institucionalização de uma área científica são distintos, porém, que há uma relação direta entre eles. É necessário destacar também que "[...] para constituir-se, uma disciplina não necessita estar institucionalizada. Contudo, para institucionalizar-se, uma disciplina deve estar constituída" (Bazi; Silveira, 2007, p. 136). Uma vez que as perspectivas trabalham com a clareza, organização e reconhecimento de um estatuto científico, se esse estatuto não estiver constituído, não há como explorar essas questões.

Assim, compreendemos que as relações entre constituição e institucionalização podem ocorrer da seguinte forma:

[13] Também denominada por *Institucionalização Social*.
[14] Bazi e Silveira (2007) destacam as *estruturas políticas* e *institucionais* de uma área como sendo os elementos que promovem essa identidade social.

Figura 1.4 – Relações entre Constituição e Institucionalização



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

De acordo com Alfonso-Goldfarb e Ferraz (2002), para que uma área científica se consolide, é necessário que haja a articulação de quatro componentes fundamentais: ensino, pesquisa, divulgação e aplicação do conhecimento. Com relação à *pesquisa*, Cervo, Bervian e Silva (2007) afirmam que essa é uma atividade voltada para a investigação de problemas, sejam eles teóricos ou práticos, a partir do uso de processos científicos. Bazi e Silveira (2007) destacam que a pesquisa desempenha o principal papel, dentre os quatro pontuados por Alfonso-Goldfarb e Ferraz (2002), uma vez que as outras três atividades são subsequentes a ela.

> Do início ao fim de uma pesquisa, o conhecimento se amplia e se renova, influenciando os outros elementos e a si mesmo. O ensino se beneficia dos resultados de pesquisa, na medida em que novas teorias e práticas se incorporam ao conhecimento. A comunicação se consolida, reafirmando-se como ação vital para a disseminação dos conhecimentos. A aplicação do conhecimento se transforma, possibilitando a ampliação e diversificação das técnicas, dos produtos e dos serviços. A pesquisa se fortalece, lançando novos horizontes de pesquisa e influenciando a agenda de investigações da área (Bazi; Silveira, 2007, p. 130).

Sendo assim, compreendemos que a atividade de *pesquisa* ocorre, e de certa forma integra, na composição do Sistema Conceitual e no desenrolar da Perspectiva Cognitiva. Enquanto no primeiro dá-se a formação e o desenvolvimento do estatuto científico da área científica em questão (a pesquisa se desdobra em um sentido investigativo, apoiando-se em possíveis bases e fundamentos que darão corpo aquela área), no segundo é desenvolvido um trabalho com relação a estudar e analisar se aquele corpo constituído é consistente.

De forma semelhante, ao observarmos a *divulgação*, consideramos que ela se faz presente tanto no Sistema Social, quanto na Perspectiva Social. Como destacado anteriormente, compete aos componentes desse sistema transmitir, disseminar, introduzir, produzir, incentivar e fortalecer, cada um a seu modo. Também é destacado por Bazi e Silveira (2007) que uma das estruturas formais que compõem a Perspectiva Social são os instrumentos de divulgação, sendo necessários para que uma área se torne visível.

Com relação ao *ensino*, entendemos que essa atividade está inserida no Sistema Social, uma vez que os cursos de graduação e pós-graduação são componentes desse sistema. Embora a consolidação da área científica ocorra no nível do Ensino Superior, sabemos que ela perpassa os pilares da Educação Básica onde também se contempla o ensino, sendo inserida nos currículos escolares, bem como nos projetos políticos-pedagógicos dos cursos de graduação, de um modo geral.

Por fim, voltando-nos à *aplicação do conhecimento*, compreendemos que ela figura também no Sistema Social. Considerando-a como sendo à transição do conhecimento gerado pela pesquisa no âmbito do Sistema Conceitual para técnicas, produtos e serviços a serem usados de forma ampla, tem-se um espaço propício nos componentes desse sistema.

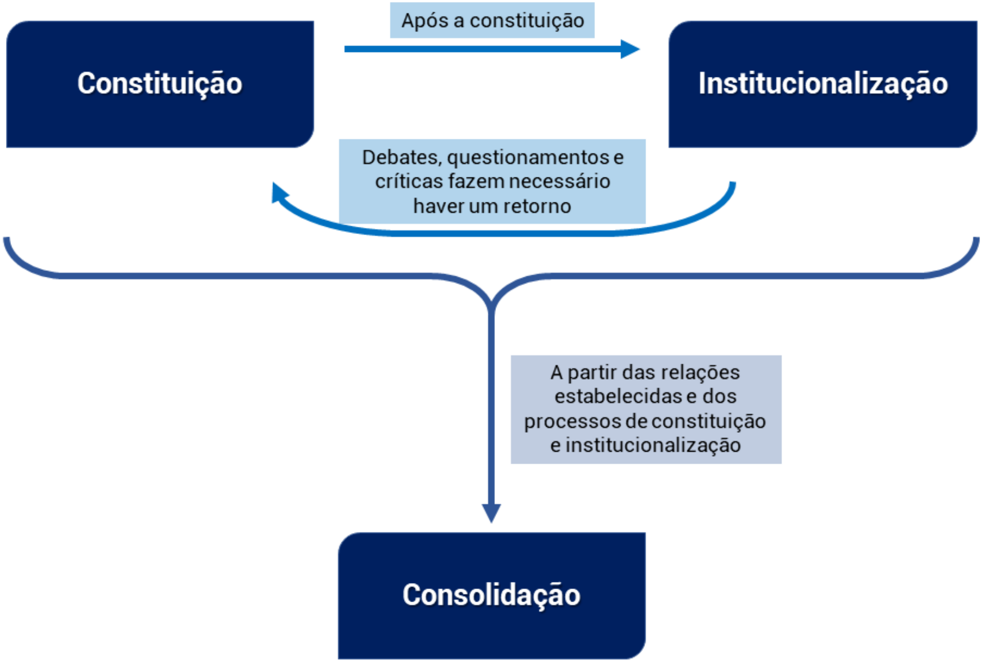
Quadro 1.2 - Relações entre Consolidação e Constituição e Institucionalização

Consolidação			
Pesquisa	Divulgação, Ensino e Aplicação do Conhecimento	Pesquisa	Divulgação
Constituição		**Institucionalização**	
Sistema Conceitual	Sistema Social	Perspectiva Cognitiva	Perspectiva Social

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Portanto, compreendemos que o processo de consolidação de uma área científica percorre os processos de constituição e institucionalização como mostra o Quadro 1.2. Entendemos ainda que esses três processos ocorrem de forma dinâmica, em que as ações dentro de cada processo transcorrem relacionando-se com as do outro processo, isto é, dando-se de forma não linear nem cadenciada, como mostra a Figura 1.5.

Figura 1.5 – Constituição, institucionalização e consolidação de uma **área científica**



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

É importante pontuar que, entendendo essas relações e processos como objetos dinâmicos, ao tomar os três termos explorados nessa seção, não consideramos que eles ocorrem somente quando uma área científica já esteja finalizada, pronta e acabada, isto é, com todos os seus elementos pesquisados, estudados e investigados. Nesse caso, isso significaria que esse corpo de conhecimentos seria estático, não havendo então mais pesquisas e investigações a serem feitas, o que nos permite concluir também que não haveriam divulgações de novos resultados.

Logo, não seria pertinente pensar em um Sistema Social (uma vez que para ele a investigação e retomada de seus elementos é constante e dinâmica), nem em uma Perspectiva Cognitiva ou em uma Perspectiva Social atuante (pois se não há produção de novos conhecimentos, como podem haver novas investigações acerca das bases e fundamentos de uma área? Como pensar as formas de divulgação de novos conhecimentos se não há desenvolvimento dos mesmos?). Compreendemos que aquilo que é colocado na constituição é questionado na institucionalização, voltando à constituição para ser aprofundado, ampliado ou mesmo revisto naquele corpo de conhecimento. Enquanto ocorrem essas trocas, a área científica se consolida e se torna cada vez mais resoluta.

Quando então nos propomos a falar de constituição, institucionalização e consolidação, observamos que esses processos ocorrem mais de uma vez, isto é, não se encontram estagnados, mas em constante desenvolvimento. Portanto, nosso interesse é o de observar como isso ocorreu nas primeiras vezes com relação à Geometria Fractal e discorrer sobre esses momentos, podendo assim situar como a entendemos no contexto matemático atual.

2 Direcionamentos Metodológicos e Analíticos da Pesquisa

Neste capítulo, descreveremos como tem se dado o processo de pesquisa, leitura e preparação dos documentos estudados. Na seção 2.1 apresentaremos a abordagem metodológica que foi utilizada em nossa pesquisa. Na seção 2.2 detalharemos todo o processo desenvolvido nas etapas de levantamento e organização dos materiais utilizados, dentro de cada eixo norteador que tomamos. A intenção do capítulo não é apontar com detalhes as informações de cada documento (isso será feito no Capítulo 3).

2.1 Abordagem Metodológica da Pesquisa

Ao depreendermos que os três processos ocorrem no âmbito dos sistemas conceitual e social, bem como das perspectivas cognitiva e social, para entender a Geometria Fractal como sendo uma área científica constituída, institucionalizada e consolidada, é preciso identificar elementos que caracterizam cada um desses componentes, para assim evidenciar o desenvolvimento dos três processos. De forma a explorar essas informações, optamos por recorrer a uma pesquisa baseada na pesquisa documental.

Ao utilizarmos o termo *documento*, estamos nos apoiando em duas concepções: 1) de Cervo, Bervian e Silva (2007), em que de forma geral, todo tipo de conhecimento fixado em um material e disponível para consulta, estudo ou prova, pode ser caracterizado como documento; 2) de Fontana e Pereira (2021), em que qualquer conjunto de registros que reproduzem, informam, transmitem ou significam um contexto, uma situação, um dado, um fenômeno e/ou um caso, pode ser considerado como um documento. Assim definimos documento, no contexto da nossa pesquisa, como sendo todo o material que possua registros (físicos ou digitais, escritos ou gráficos, entre outras possibilidades), os quais podem ser consultados a fim de investigar, estudar e/ou compreender determinados aspectos almejados pelo pesquisador.

A escolha por uma pesquisa desse tipo, se dá ao fato de o pesquisador utilizar desses materiais para compreender questões históricas, sociais, culturais e científicas de determinado grupo e/ou fenômeno, viabilizando o estudo da realidade presente e também do passado. Compreende-se, portanto, que esses registros documentais têm potenciais indícios e informações que podem contribuir para o entendimento historiográfico do objeto de estudo em questão, uma vez que “[...] busca-se conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre determinado assunto, tema ou problema" (Cervo; Bervian, Silva, 2007, p. 60). Destacamos ainda que:

> [...] os documentos – enquanto constructos/artefatos materiais e imateriais – funcionam como fontes repletas de indícios e informações – possibilitam o entendimento historiográfico acerca das diversas dimensões e aspectos circunscritos a dadas sociedades pesquisadas/estudada (por exemplo, especificidades econômicas, intelectuais, sociais, políticas, religiosas, linguísticas e culturais) [...] (Fontana; Pereira, 2021, p. 50).

Sendo assim, compreendemos que uma pesquisa nessa vertente vai ao encontro dos nossos objetivos no presente trabalho, uma vez que os atos de compreender, analisar, sistematizar e interpretar os conteúdos presentes nos documentos estudados são a característica primordial (Fontana; Pereira, 2021). Para isso, adotamos como referência etapas propostas por Cervo, Bervian e Silva (2007) e Fontana e Pereira (2021), para construirmos quatro etapas em nossa pesquisa: 1) Levantamento dos Materiais; 2) Organização dos Materiais; 3) Leitura dos Materiais; 4) Estudo dos Materiais das informações coletadas.

A primeira etapa consiste no *Levantamento dos Materiais*. É nesse momento que buscaremos os documentos a serem utilizados como fontes que nos possibilitarão responder o problema de pesquisa proposto, a partir do estudo dos mesmos. É importante nesse momento construir o maior acervo possível de materiais, buscando organizá-lo de forma física ou digital, bem como realizando o registro de suas referências bibliográficas (Cervo; Bervian, Silva, 2007). Para isso, é necessário determinar tanto as ferramentas ou locais de busca em que esses documentos serão encontrados, quanto palavras-chaves que auxiliem nessa seleção.

Compreendemos que o processo de determinar as palavras-chaves e os bancos de dados procurados são essenciais e precisam estar adequados ao objetivo da busca, a qual pode se dar em repositórios de teses e dissertações, em bibliotecas, museus, acervos e até mesmo entre arquivos pessoais, dependendo da intencionalidade e das necessidades do pesquisador. Entendemos também que algumas fontes possam emergir de citações e referências nos documentos encontrados nessa etapa.

A *Organização dos Materiais* corresponde à segunda etapa, sendo constituída pelo processo de pré-análise ou leitura inicial, bem como a organização desse acervo. A pré-leitura tem o papel de verificar se as informações que estão sendo buscadas se fazem presentes nos documentos que foram selecionados na primeira etapa. Além disso, ela "[...] dará ao estudante uma visão global do assunto focalizado, visão indeterminada, mas indispensável para poder progredir no conhecimento" (Cervo; Bervian, Silva, 2007, p. 84).

Devem ser esmiuçados elementos desses materiais, como capa, folha de rosto, título, sumário/índice, bibliografia, resumo, introdução, prefácio, entre outros que não são o corpo do documento propriamente dito, mas que conversam com ele e dão um panorama geral do que será abordado. Cada tipo de documento possui elementos comuns e divergentes a serem observados. Com a leitura desses itens, busca-se tanto identificar a relevância do documento para a pesquisa, quanto observar as proximidades entre eles.

Após a Organização dos Materiais, separando os que são pertinentes à pesquisa e os que não são, ocorre a terceira etapa que compreende a *Leitura dos Materiais*.

> É uma fase de estudos, isto é, de reflexão deliberada e consciente (processo de aprendizagem); de percepção dos significados, o que envolve um esforço reflexivo que se manifesta por meio das operações de análise, comparação, diferenciação, síntese e julgamento (processo de apreensão); de apropriação dos dados referentes ao assunto ou problema (processo de assimilação) (Cervo; Bervian, Silva, 2007, p. 85).

Assim, busca-se realizar uma leitura atenta associada a elaboração de fichamentos textuais, cujo objetivo é identificar elementos como: ideias principais e secundárias, proximidades e diferenciações entre elas, compreensão da proposta do documento, identificação de termos e conceitos empregados, assim como a realização de um olhar crítico da obra. Cabe também nessa produção, destacar trechos que venham a ser pertinentes para a pesquisa.

A última etapa consiste no *Estudo dos Materiais e das informações coletadas*. Nesse momento ocorre o processo de identificar pontos comuns aos textos e analisar suas divergências, bem como o de complementar as informações de cada documento com as dos outros. Uma forma de iniciar esse estudo, é elaborar um quadro que relacione os materiais lidos com os pontos principais observados. Assim, deseja-se nessa etapa construir um texto que abranja o que foi elencado e encontrado, realizando articulações de forma a responder o problema de pesquisa. Nessa etapa, temos o processo de olhar para os documentos de forma geral, buscando reconhecer elementos que nos permitam discutir sobre os três processos estudados nessa pesquisa.

Entendemos, então, que essas quatro etapas permitirão responder nosso problema de pesquisa. Destacamos ainda que essas etapas ocorrerão com um grupo de documentos, podendo haver necessidade repeti-las mais de uma vez, buscando em outros ambientes e até mesmo utilizando diferentes termos. Apontamos essa possibilidade, pois compreendemos que ao realizar todas as etapas, certos pontos que desejamos observar podem não ter sido evidenciados.

Assim, ao ampliarmos a busca e levantamento, temos uma possibilidade mais ampla de encontrá-los.

2.2 Levantamento, Organização e Leitura dos Materiais

Nesse contexto de seleção e estudo dos materiais, a escolha cuidadosa dos documentos a serem considerados para a pesquisa é de suma importância, uma vez que

> [...] não pode ser definida na eventualidade, ou seja, de maneira improvisada. Estes devem responder aos objetivos, hipóteses e estar atrelados ao problema do trabalho científico desenvolvido. Os documentos devem apresentar respostas ao pesquisador, para assim resguardarem sentido coadunado à pesquisa (Fontana; Pereira, 2021, p. 58-59).

Assim, para cada processo, dependendo de quais elementos buscamos identificar, se faz necessário recorrer à documentos diferentes, bem como à fonte de onde encontrá-los; os termos a utilizar em sua busca também demandam consideração. É preciso direcionar a intenção na execução da pesquisa e para qual objetivo desejamos determinado material.

Nossa pesquisa objetiva identificar elementos em três processos que, embora estejam interligados, possuem suas diferenças e especificidades. Entendemos que uma busca ampla, visando atingir todos os objetivos, não se faz pertinente pela abrangência de itens a serem contemplados. Como pontuado na seção anterior, para melhor explorarmos e alcançarmos nossos objetivos, optamos por adotar dois eixos norteadores como base de pesquisa: 1) Evidências de fractais na história e surgimento dos primeiros estudos, textos e publicações a respeito; 2) Discussões coletivas e produções sobre fractais.

Entendemos que encaminhando as pesquisas por esses eixos norteadores, teremos elementos para identificar os processos descritos na seção 1.3. Além disso, compreendemos que cada eixo possui um direcionamento, sendo necessário um tipo de documento diferente, obtido em repositórios de buscas variados. Nas próximas subseções, apresentaremos uma descrição dos processos desenvolvidos em cada um dos eixos.

2.2.1 *Os primeiros estudos, textos e publicações sobre fractais*

No primeiro eixo, a primeira etapa teve a intenção de identificar elementos determinantes para os estudos iniciais sobre fractais. Esperávamos encontrar questões relativas aos primeiros pesquisadores, quais temas matemáticos eles estudavam, quando a Geometria

Fractal passou a ser vista como uma nova área científica, que relações poderiam haver entre os trabalhos desenvolvidos inicialmente, motivações, entre outros elementos que nos permitissem elencar componentes referentes aos três processos.

Optamos então por trabalhar com três plataformas digitais: o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o Google Acadêmico, no período de 09 a 13 de outubro de 2023. Entendemos que essas plataformas poderiam fornecer materiais que contribuíssem com a pesquisa, uma vez que haveria a possibilidade de identificar recortes históricos, mesmo que breves, referentes a essas primeiras investigações. Para além dessas fontes, biografias e as produções dos próprios matemáticos que viessem a ter seus nomes destacados nas leituras, consideramos suas contribuições na compreensão das primeiras indagações que movimentaram a Matemática para o sentido desse campo. Assim, obtivemos artigos, dissertações e teses a serem estudadas.

É importante ressaltar que apesar de compreendermos a Matemática como uma construção humana, consideramos que não há um ponto de "surgimento" ou "origem", mas sim um momento em que houve uma atenção e dedicação voltada a determinado objeto matemático. Logo, utilizamos como termos de busca palavras como origem e surgimento, por entender que nem todas as pesquisas adotam essa vertente da historiografia atualizada. Assim, ao desconsiderarmos esses termos ou utilizar aqueles que entendemos como mais adequados à perspectiva adotada, materiais com dados pertinentes poderiam não aparecer como resultados nas buscas.

A primeira busca ocorreu no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e utilizamos os seguintes termos da forma com os colocamos aqui: *origem dos fractais*; *surgimento dos fractais*; *origem da geometria fractal*; *surgimento da geometria fractal*. Os termos foram pesquisados sem uso de aspas por entender que essas expressões poderiam ter sido utilizadas em outra ordem textual, ainda que com mesma intencionalidade. Além disso, mesmo que o trabalho por completo não tivesse como foco o que buscávamos, ele poderia apresentar trechos a esse respeito ou apontar informações que fossem pertinentes à pesquisa.

A segunda busca ocorreu na BDTD e foram utilizados os mesmos termos do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Esses foram colocados juntos no espaço de pesquisa, sem aspas, selecionando a opção <u>Todos os campos</u>, e também não aplicamos nenhum filtro para refinar a procura. Para realizar a terceira busca, no Google Acadêmico, se fez necessário limitá-la para que pudéssemos trabalhar com um volume adequado de materiais. Nesse caso usamos ainda os mesmos termos da primeira busca, porém colocando aspas e retirando a marcação da opção incluir citações. Optamos por inserir as aspas nessa plataforma, pela inviabilidade do estudo do volume de resultados quando não utilizadas.

Após a pesquisa, o download dos arquivos que estavam disponíveis e exclusão daqueles que estavam duplicados (apareceram em mais de um banco de dados), iniciamos a segunda etapa (Organização dos Materiais) realizando a leitura dos elementos iniciais dos materiais, a fim de observar se eram pertinentes ou não à pesquisa, mesmo que de forma parcial. Para teses, dissertações, monografias e trabalhos de conclusão de curso, realizamos a leitura de título, subtítulo (se houvesse), resumo, palavras-chave, sumário e introdução; já para os artigos observamos título, subtítulo (se houvesse), resumo e palavras-chave. Os resultados quantitativos referentes a essas duas etapas estão descritos na tabela a seguir[15].

Tabela 2.1 – Dados quantitativos das Etapas 1 e 2

Banco de Dados	**Levantamento dos Materiais**	**Organização dos Materiais**
Catálogo de Teses e Dissertações	12	6
BDTD	25	8
Google Acadêmico	57	20
Total	**94**	**34**

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

É relevante pontuar que mantivemos para a leitura, trabalhos que de alguma forma citassem ou referenciassem a presença da história ou origem da Geometria Fractal, que trouxessem elementos relativos a ideias matemáticas que levaram a criação de certo fractal, entre outros dados que fossem de interesse com relação ao nosso objetivo de estudo.

Organizados e separados, demos início à terceira etapa (Leitura dos Materiais), agora nos atentando ao corpo do texto de cada documento. Nosso foco nesse eixo era o de identificar sobre os primeiros estudos, isto é, elementos que abordassem informações que dissessem respeito a isso, porém não descartamos observar elementos referentes a outros pontos pertinentes e que seriam poderiam ser úteis posteriormente. Reconhecemos dois grandes grupos referentes aos materiais: um que trazia produções relacionadas aos fractais como foco principal (22 trabalhos) e um em que os fractais estavam presentes um elemento da produção (15 trabalhos).

[15] No Levantamento de Materiais, não contabilizamos as repetições, nem os arquivos que não estavam disponíveis mesmo após busca por outros caminhos, como o Google e site dos próprios programas de pós-graduação.

A leitura desses materiais tanto no primeiro, quanto no segundo grupo, foi acompanhada de fichamentos, nos quais se inseriram as referências do documento lido e as considerações mais pertinentes sobre o texto, por meio de citações diretas e indiretas. Nesses fichamentos, o destaque maior se deu aos principais cientistas responsáveis por desenvolver fractais ao longo de suas pesquisas, seja de forma intencional ou não[16], sobre pontuações e contextualizações históricas, bem como conceitos matemáticos ali atrelados.

Foi possível verificar que, boa parte dos trabalhos do primeiro grupo abordava sobre implementações envolvendo fractais, enquanto a grande maioria do segundo grupo tratava dos fractais aplicados em determinada área. Ainda sobre as características do primeiro grupo, observou-se a intenção de caracterizar a Geometria Fractal como um campo matemático que teve impulsão principal de Mandelbrot, porém, sem deixar de lado outros matemáticos pioneiros que precedentemente já apresentaram alguns fractais antes mesmo de serem reconhecidos.

No segundo grupo, como apontado anteriormente, o foco dos trabalhos eram outros objetos, sendo os fractais apenas elementos secundários, servindo de base ou de ferramenta para o elemento central do texto. Mesmo assim, houve um espaço para discussões (ora breves, ora mais detalhadas) e apresentação do que eram os fractais, buscando contextualizar as informações utilizadas.

Como já mencionado, o uso de biografias e dos trabalhos publicados pelos matemáticos foi necessário nessa etapa para que pudéssemos compreender melhor os processos envolvidos nesse primeiro desenvolvimento. Dessa forma, recorremos a fontes dos documentos resultantes das buscas, bem como utilizamos a plataforma Google para as pesquisas a fim de compreender tais elementos. Um portal relevante foi o *Arquivo de História da Matemática MacTutor*[17], contando com biografias de mais de 3.000 matemáticos e tendo como última atualização dezembro de 2023.

> O MacTutor foi criado e é mantido por Edmund Robertson e John O'Connor [Professores Eméritos da Universidade] da Escola de Matemática e Estatística da Universidade de São Andrews, e é hospedado pela Universidade. Suas contribuições para a história da matemática foram reconhecidas com a medalha Comenius da Sociedade Húngara Comenius em 2012 e pelo Prêmio Hirst da Sociedade Matemática de Londres em 2015 (Robertson; O'Connor, 2023, s/ p., tradução nossa)[18]

[16] Discorreremos mais sobre as possíveis intenções de cada um no próximo capítulo.

[17] MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

[18] MacTutor was created and is maintained by Edmund Robertson and John O'Connor of the School of Mathematics and Statistics at the University of St Andrews, and is hosted by the University. Their contributions to the history of mathematics have been recognized by the Comenius medal of the Hungarian Comenius Society in 2012 and the Hirst Prize of the London Mathematical Society in 2015.

Obras de Benoit Mandelbrot *Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão* de 1998 e *The Fractal Geometry of Nature* de 1982, tal qual a tese de doutorado de Dane R. Camp (*A cultural history of fractal geometry: the biography of an idea* de 1999) e o livro de Ruy M. Barbosa *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula* de 2005 também foram usados.

Nossa opção por fazer uso dessas obras se deu ao fato de: 1) Utilizarem as obras daquele que é reconhecido como o responsável por desenvolver significativamente o tema; 2) A tese de Camp apresenta entrevistas com Mandelbrot, viabilizando acesso a informações relativas às suas ideias e ao processo desenvolvido por ele; 3) Trata-se de um livro utilizado e referenciado na maioria dos trabalhos levantados e estudados em nossa pesquisa.

Além de todos esses materiais, entrevistas e palestras proferidas por Mandelbrot, e disponibilizadas na internet em site de revistas ou em vídeos no *YouTube*, também foram fontes de consulta para compreendermos ideias do próprio autor com relação à construção e formação da Geometria Fractal que ele desenvolveu.

2.2.2 *Discussões coletivas e produções sobre fractais.*

No segundo eixo, nossa intenção foi a de levantar questões relativas a discussões envolvendo os fractais. Para isso, na primeira etapa utilizamos como bases de dados o *Mathematical Reviews*[19] *(MR)*, o qual se trata de um catálogo que desde 1940 fornece a pesquisadores e estudiosos da Matemática informações sobre artigos e livros revisados por pares. A sua versão eletrônica (o *MathSciNet*) apresenta um banco de dados pesquisável e conta com ferramentas como: comentários escritos por especialistas; listagens bibliográficas; links para artigos; periódicos e editoras; lista de referências vinculadas; entre outras.

Dessa forma, a plataforma foi relevante para nossa pesquisa possibilitando o levantamento de dados sobre publicações referentes aos fractais. Entretanto não foram todas que possuíam redirecionamento para o trabalho completo, apenas as que estavam disponíveis online. Ainda assim, foi apresentado um resumo e uma revisão/comentário sobre cada uma, seja advindo dela própria ou feito por algum matemático.

Ademais, como o MR trabalha com publicações, tivemos a oportunidade de estudar trabalhos vinculados a notas e anais de evento, procurando identificar espaços de discussão

---

[19] Disponível em: https://www.ams.org/publications/math-reviews/math-reviews

específicos sobre fractais. O MR também possui um campo para busca de periódicos a partir de seus títulos, possibilitando o levantamento desse tipo específico de publicação.

Para a consulta dos dados, utilizamos como termo de busca *fractal*, por abranger a escrita em diferentes idiomas e abarcar algumas variações (no plural em inglês – *fractals*, no francês *fractale*, entre outros). A busca realizada no *Mathematical Reviews* ocorreu entre os dias 29 de fevereiro e 14 de março de 2024, sem a aplicação de nenhum filtro, obtendo como retorno 23.100 publicações em cinco tipos (artigo de periódico, artigos publicados em anais de eventos, eventos e anais completos dos eventos, livros e teses[20]). Essas publicações estavam divididas da seguinte forma:

Tabela 2.2 – Dados quantitativos da busca realizada (publicações)

Tipo de Publicação	Quantidade
Artigo de Periódico	20.280
Artigos publicados em anais de eventos	1.408
Eventos e anais completos dos eventos	671
Livros	623
Teses	118
Total	**23.100**

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Ao aplicar o filtro *Book Collection Article*, compreendemos que essa categoria se referia a um artigo publicado/apresentado em um evento, trazido no banco de dados de forma individualizada (apenas o artigo específico). Já ao adotar o filtro *Book Collection*, entendemos que foram levantados títulos referentes aos anais completos de um certo evento[21].

Desse modo, para levantar os dados relativos aos eventos com temática voltada aos fractais, aplicamos o filtro *Book Collection*, afim de trabalhar apenas com os eventos e seus respectivos anais completos, além de filtrar apenas por aquele que possuíam no título a palavra fractal, usando na barra de pesquisa o termo *ti:(fractal)*. Obtivemos como retorno 73 resultados.

Quanto aos periódicos, buscamos aqueles que possuíam a palavra *fractal* em seu título, pois nosso intuito não é levantar revistas que possuam artigos sobre fractais, mas sim revistas que tem como foco principal, ou um dos focos, os fractais. Nessa busca, tivemos como retorno três periódicos.

[20] *Journal Article, Book Collection Article, Book Collection, Book and Thesis.*

[21] Como um exemplo, podemos pensar que o filtro *Book Collection Article* se refere a um artigo que foi apresentado/publicado nos anais de um evento, enquanto o filtro *Book Collection* se refere aos anais completos de uma edição de um certo evento.

Para a segunda etapa (Organização dos Materiais), separamos os dados levantados em publicações por quinquênios. Essa escolha se deu por ser um período de tempo em que conseguiríamos trabalhar com a quantidade de dados em cada intervalo (destacado mais a frente no Gráfico 3.1), bem como o espaço temporal nos permitia observar o comportamento das publicações de forma quantitativa.

Definimos focar nos dois primeiros quinquênios, pois, além de desejarmos observar as primeiras discussões acerca do tema, esses possuíam períodos e datas destacadas por Camp (1999) como sendo momentos importantes para a expansão e ampliação da divulgação, estudo e interesse pela Geometria Fractal.

> Naturalmente, em 1982 quando [o livro] *A Geometria Fractal da Natureza* finalmente foi publicado, essas ideias alcançaram um público cada vez maior. O interesse nos fractais explodiu e o mesmo aconteceu com a serenidade da vida de Mandelbrot. [...] Ele agora era uma celebridade, e consequentemente estava em uma grande demanda (Camp, 2009, p. 94-95).

Todavia, não descartamos as publicações dos outros quinquênios, olhando para elas de forma apenas qualitativa. A seguir, temos os dados referentes às publicações nesses dois quinquênios:

Tabela 2.3 – Distribuição de publicações no primeiro e no segundo quinquênio

Quinquênio	**Tipo de Publicação**	**Quantidade**
1975-1979	Artigos	7
	Artigos publicados em anais de eventos	6
	Eventos e anais completos dos eventos	7
	Livros	2
	Teses	0
	Publicações ao Todo	*22*
1980-1984	Artigos	184
	Artigos publicados em anais de eventos	27
	Eventos e anais completos dos eventos	19
	Livros	4
	Teses	0
	Publicações ao Todo	234
Total (1975-1984)		**256**

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Com relação às publicações, as organizamos de acordo com as categorias presentes no MR, concentrando-se em cada quinquênio de forma separada. Como nem todos os arquivos possuem sua versão completa disponível, trabalhamos com os resumos e resenhas fornecidos no banco de dados para nossos estudos.

Destacamos ainda, que no primeiro quinquênio, pelo quantitativo das publicações ser menor, foi possível realizar a leitura e investigação de informações complementares, necessárias para a compreensão das publicações ali presentes. A quantidade de publicações no segundo quinquênio se mostrou inviável para uma apreciação individualizada nesse momento. Dessa forma, optamos por realizar uma leitura geral do período procurando identificar autores mais frequentes naquele período. Para isso, utilizamos o filtro *Authors*, sendo identificados 30 autores presentes neste quinquênio, com publicações relacionadas aos fractais. Optamos por trabalhar com os 4 que possuem mais publicações. Destacamos a seguir, a quantidade de publicações desses autores:

Tabela 2.4 – Distribuição de publicações no primeiro e no segundo quinquênio

Autor	**Quantidade de Publicações**
Mandelbrot, Benoit	22
Aharony, Amnon	11
Gefen, Yuval	11
Shlesinger, Michael F.	11
Total	55

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Além disso, incluímos na barra de pesquisa os termos: *au:(sobrenome do autor) AND fractal*, substituindo no lugar de <u>sobrenome do autor</u> os autores indicados nos materiais complementares que usamos para complementar as discussões no primeiro eixo: Heinz-Otto Peitgen (Camp, 1999), Loren Carpenter (Lesort, 1986) e Richard Voss (Lesort, 1986; Camp, 1999). Tanto na busca utilizando as indicações de pesquisadores dos filtros, quanto no uso de nome indicados nos materiais complementares, recorremos ao site MacTutor para compreendermos a biografia de cada um desses autores.

Com relação aos eventos, realizamos a leitura dos resumos e comentários disponibilizados no banco de dados, de forma a identificar o seu tema central e possíveis características sobre ele (como participantes, localização, tipos de trabalhos apresentados, entre outros). A tabela a seguir mostra o número de eventos levantado na primeira etapa e selecionado na segunda.

Tabela 2.5 – Dados quantitativos da busca realizada (eventos)

Tipo de Publicação	**Levantamento dos Materiais**	**Organização dos Materiais**

Eventos com a palavra *fractal* no título	73	73
Total	**73**	**73**

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

A partir da leitura do resumo/resenha sobre o evento, foi possível subdividi-los em dois grupos: um em que os fractais eram o seu tema central e haviam discussões relativas a esse objeto em específico, e outro em que os fractais apareciam vinculados à uma área científica diferente.

Em relação à pesquisa dos periódicos, daquelas que possuíam a palavra *fractal* e suas variações em seu nome, realizamos a leitura do escopo da revista, a fim de confirmar o foco dos fractais. Com relação às revistas, finalizamos a segunda etapa da seguinte forma:

Tabela 2.6 – Dados quantitativos da busca realizada (periódicos)

Tipo de Publicação	Levantamento dos Materiais	Organização dos Materiais
Periódicos com a palavra *fractal* no título	3	3
Total	**3**	**3**

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

De forma a contribuir com as pesquisas, continuamos com os materiais complementares utilizados no eixo 1: a tese de Camp (1999), em particular o Capítulo 4, que trata das publicações de 1975 de Mandelbrot (as primeiras a aparecerem no MR), a relação com alguns outros pesquisadores e com aplicações dos fractais, bem como a entrevista de Mandelbrot à Marc Lesort na revista *La Recherche* de 1986.

3 A GEOMETRIA FRACTAL COMO ÁREA CIENTÍFICA CONSTITUÍDA, INSTITUCIONALIZADA E CONSOLIDADA

Neste capítulo, temos a intenção de discutir os elementos que foram identificados nas quatro etapas da pesquisa documental como foram descritas no capítulo anterior. Optamos por manter as discussões separadas nos dois eixos apontados previamente nas seções, organizando-os nas seções 3.1 e 3.2. Na seção 3.3, destacamos elementos para além do nosso foco em cada um dos eixos norteadores, a fim de enriquecer as considerações e o que foi estudado.

3.1 Evidências dos fractais

Retomando o que foi apresentado no capítulo anterior, nosso objetivo nesse eixo foi o de destacar elementos com foco principal em evidências relativas à fractais. Assim, um primeiro ponto investigado foi: que matemáticos realizaram investigações e se depararam com Fractais, mesmo que seus objetos de estudo não fossem entendidos como tais? Para realizar essa investigação, utilizamos os textos levantados nas buscas descritas na seção 2.2.1.

Alguns dos principais nomes evidenciados (Nuñez Diban, 2000; Almeida, 2006; Calisto, 2013; Pereira, 2013; Mingoranci, 2014; Araújo, 2015; Ferreira Filho, 2015; Paiva, 2015; Santana, 2017; Conceição, 2019; Farias, 2019; Oliveira, 2019; Vieira, 2019; Fonseca, 2020; Natividade, 2022) e que aparecem com maior frequência foram: Albrecht Dürer (1471-1528), Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943), Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924), Waclaw Sierpinski (1882-1969), Gaston Maurice Julia (1893-1978) e Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1829), Karl Menger (1902-1985) e Benoit Mandelbrot (1924-2010).

Todos esses matemáticos citados, de alguma forma se depararam com objetos fractais, e, em sua maioria, carregam seus nomes como forma de homenagem. Há um detalhe principal que separa Mandelbrot dos demais: é a partir de Mandelbrot que a comunidade acadêmica, em particular a comunidade matemática, adota a nomenclatura de fractal e passa-se a enxergá-los assim. Seus precursores estudaram objetos em suas pesquisas objetos que hoje reconhecemos como fractais, este que eram tidos como monstros ou aberrações pelo fato de não se enquadrarem nos aspectos matemáticos formalizados na época. Sendo assim, foram deixados de lado por boa parte da comunidade acadêmica (Nascimento, 2012; Andrade Júnior, 2015;

Ferreira Filho, 2015; Dalpiaz, 2016; Moreira, 2017; Santana, 2017; Lisboa, 2019; Andreucci, 2021; Perozzo, 2021).

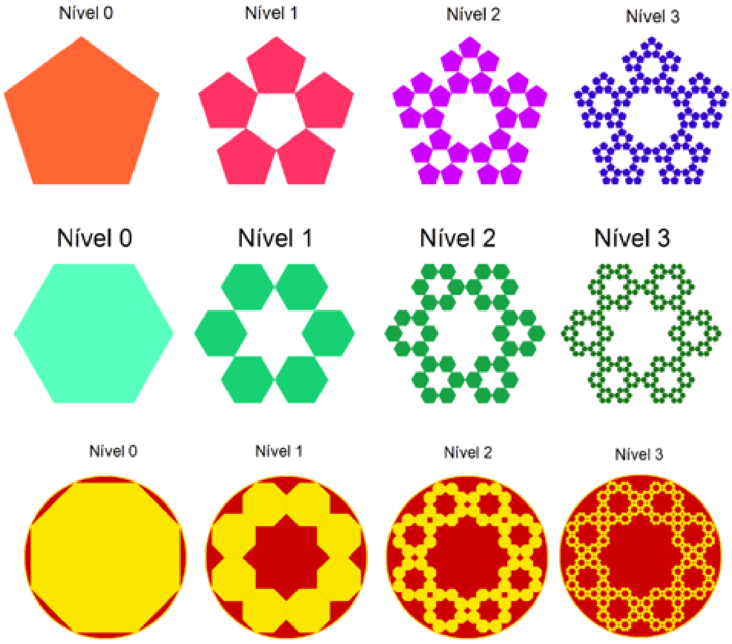
Dentre os destacados anteriormente, por volta de 1500, Dürer teria sido o primeiro a trabalhar formas geométricas, que posteriormente viria a gerar um desses monstros. Atuando em áreas como Matemática, Física, Botânica e Zoologia, foi o pioneiro no uso das três dimensões em representações gráficas. Segundo Robertson e O'Connor (1996), apesar de não ter o conhecido, Leonardo da Vinci foi uma das influências a Dürer na importância da Matemática dentro do contexto da arte. A partir daí, Dürer começou a estudar elementos matemáticos, como o livro *Elementos* de Euclides e o tratado *De architectura* de Vitruvius, passando a incluí-los em suas obras.

De acordo com Ferreira Filho (2015), Dürer explorava conceitos de geometria, e entre seus desenhos foi identificado um objeto que hoje reconhecemos como fractal de Dürer. O autor, porém, não se aprofunda com mais detalhes sobre ele. Para além de desenhos geométricos, Pereira (2013) e Rabay (2013) apontam que havia a presença de proporções e geometria, construindo, por exemplo, polígonos regulares de forma bastante precisa. Ademais das artes, Dürer escreveu livros que o destacaram como um dos mais importantes matemáticos da Renascença, discutindo e descrevendo a construção de curvas, polígonos, sólidos geométricos, tendo dado os primeiros passos referentes ao que hoje conhecemos por Geometria Projetiva (Robertson; O'Connor, 1996).

Figura 3.1 – Representação de Albrecht Dürer e do que seriam suas construções

Fonte: Vaz e Neri Júnior, 2018

Figura 3.2 – Representação de fractais que são classificados como do tipo Dürer



Fonte: Rabay, 2013

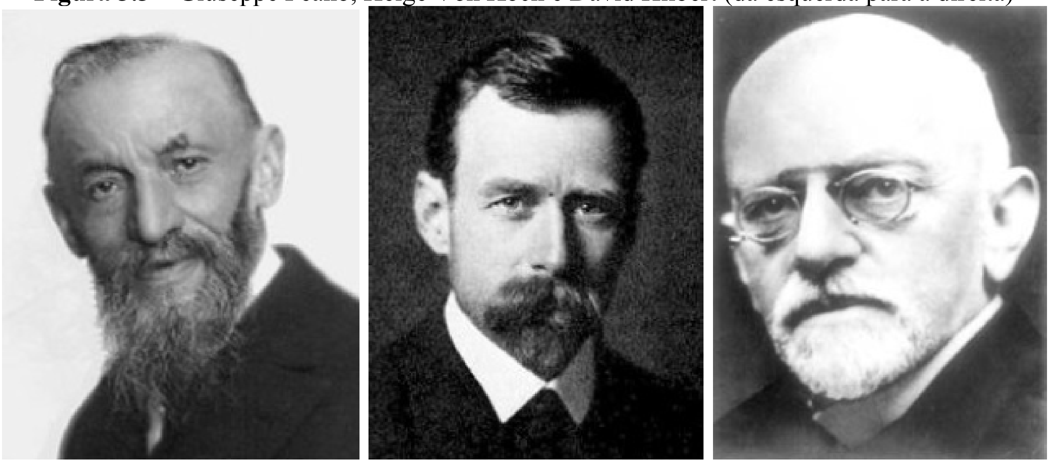
Os fractais que recebem a classificação de serem do tipo Dürer, são assim chamados, por iniciarem a partir de um polígono regular, em que a cada iteração substitui-se cada vértice por um polígono regular com a mesma quantidade de lados (Barbosa, 2005; Rabay, 2013), como mostra a Figura 3.2. Não há indicação em nossas leituras, de que Dürer se dedicou a estudar esse objeto que reconhecemos como fractal, mas sim que a partir das suas construções, se obteve o fractal.

Avançando para o século XIX e saindo do campo da Geometria, tem-se o Cálculo Diferencial e Integral (CDI), desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz na segunda metade do século XVII. Neste momento, estudos referentes ao CDI já estavam sólidos o suficiente para se afirmar que "[...] toda curva contínua deveria possuir uma tangente bem definida, exceto aquelas em que havia uma brusca mudança de direção" (Paiva, 2015, p. 5-6).

> No final do século XIX, os matemáticos tinham escrito uma descrição formal daquilo que uma curva deveria ser. Porém, nessas descrições havia elementos que não satisfaziam a definição formal de uma curva que era tão estranha que não podia desenhar nem se quer pensar em desenhá-las, e eram vistas como monstros ou coisas do outro mundo (Conceição, 2019, p. 15).

Entretanto uma publicação de Karl Weierstrass (1815-1897) mostrou que havia uma função contínua para todo seu domínio, mas não sendo diferenciável em nenhum ponto do domínio. De acordo com Trochet (2009), a ele é atribuído o primeiro exemplo desse tipo, em que houve uma comprovação rigorosa, sendo evitado o uso de gráficos, privilegiando assim a manipulação simbólica. Mas porque nos direcionar para essa questão do cálculo, se o recurso gráfico sequer foi utilizado? É a partir de explorações referentes a curvas que temos alguns monstros que viriam a ser reconhecidos como fractais. Iniciemos com três matemáticos contemporâneos: Peano, Koch e Hilbert.

Figura 3.3 – Giuseppe Peano, Helge Von Koch e David Hilbert (da esquerda para a direita)



Fonte: Ferreira Filho, 2015

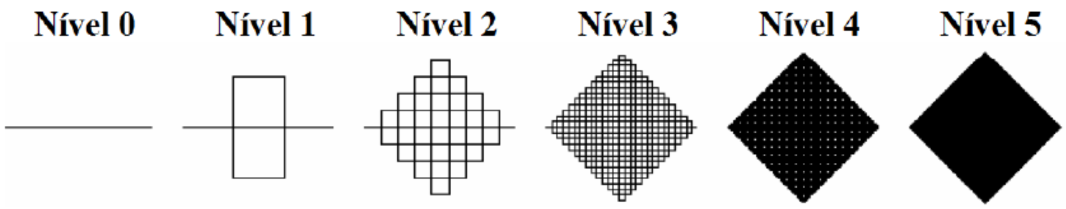
O primeiro deles, Peano, realizou estudos que abordavam o cálculo geométrico e a lógica simbólica, além de colaborar com questões referentes ao contexto matemático em que viveu (Almeida, 2006; Mingoranci, 2014; Andreucci, 2021; Eleutério, 2021). Como exemplo, Barbosa (2005) aponta que Peano contribuiu com a axiomatização para os números inteiros positivos, bem como aplicações geométricas do cálculo infinitesimal. Farias (2019) destaca ainda que ele teria sido responsável por introduzir o cálculo geométrico, apresentando novas definições para tamanho de um arco e para a área de uma superfície curva.

Um fato importante destacado é o rigor lógico e o nível de precisão usado por ele em suas obras, o que chamou atenção e surpreendeu matemáticos da época. A curva publicada por Peano em 1890, no artigo: *Sobre uma curva que preenche toda uma área plana*[22], é resultado de um estudo que buscava o aprofundamento das noções de continuidade e dimensão (Almeida, 2006; Barbosa, 2005; Nascimento, 2012; Mingoranci, 2014; Paiva, 2015). Essa curva, seria uma curva que preencheria toda uma área plana, gerada a partir de um processo iterativo, isto é, um elemento que perante a Geometria Euclidiana possui dimensão 1, mas que ocupa uma região cuja dimensão é 2 (Oliveira, 2019). Barbosa (2005) acrescenta ainda que críticas de

[22] Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine

matemáticos como as de Naum Yakovlevich Vilenkin (1920-1991)[23] e Jean Dieudonée (1906-1992)[24] ocorreram pelo fato de que esses monstros que estavam sendo observados mexeram com as bases matemáticas.

Figura 3.4 – Representação da curva de Peano desenvolvida até o nível 5



Fonte: Rabay, 2013

Hilbert, segundo Ferreira Filho (2015), teve contribuições notáveis para a Matemática, como a Teoria dos Invariantes e a criação dos espaços que levam seu nome para tratar de equações integrais e formas quadráticas. Em particular, sua maior colaboração foi na "[...] abordagem axiomática da geometria euclidiana, tornando-o o principal representante do formalismo que procura retirar da matemática qualquer conotação intuitiva [...]" (Barbosa, 2005, p. 36). De forma semelhante à Peano, Hilbert também apresentou, em 1891, uma curva que cobria uma superfície quadrada no seu artigo: *Sobre o mapeamento contínuo de uma linha em um pedaço de superfície*[25].

Figura 3.5 – Representação da curva de Hilbert desenvolvida até o nível 4

Fonte: Rabay, 2013

Com relação a Koch, do qual pouco se sabe sobre sua vida, tem-se que a maioria de seus trabalhos abordava sobre determinantes infinitos e operadores lineares, além de estudar sobre cálculo e curvas diferenciáveis (Moreira, 2017). Barbosa (2005) e Conceição (2019) indicam

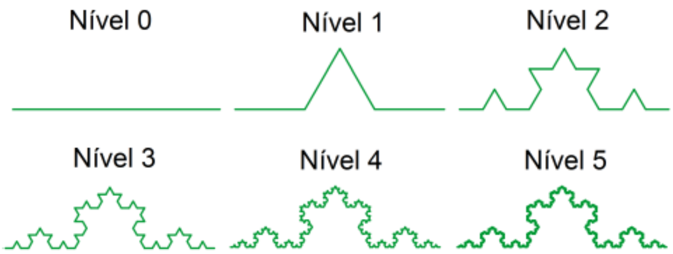
---

[23] Matemático que se dedicou à álgebra, topologia, análise funcional, teoria das funções reais e combinatória.
[24] Matemático conhecido por suas pesquisas nas áreas de álgebra abstrata e análise funcional.
[25] Uber Stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück

que a curva que hoje recebe seu nome foi introduzida por duas publicações suas: *Sobre uma curva contínua sem tangente, obtida por uma construção geométrica elementar*[26] de 1904; *Um método geométrico elementar para curvas planas*[27] de 1906. Como indicam os nomes de suas publicações, se trata de uma curva contínua, porém que não possui tangente em nenhum de seus pontos, isto é, uma curva não diferenciável (Ferreira Filho, 2015; Farias, 2019; Eleutério, 2021).

De acordo com Trochet (2009), Koch, em seu artigo de 1904, realizou a construção geométrica da curva que leva seu nome, bem como o que hoje chamamos de Floco de Neve de Koch que nada mais é que a união de três curvas de Koch. Sua intenção era a de provar a existência de funções contínuas não diferenciáveis, assim como Weierstrass, porém por meio de geometria elementar trabalhando com curvas. Nessa tentativa, Koch acabou evidenciando uma relação entre esses monstros da análise com o campo da Geometria.

Figura 3.6 – Representação da curva de Koch desenvolvida até o nível 5

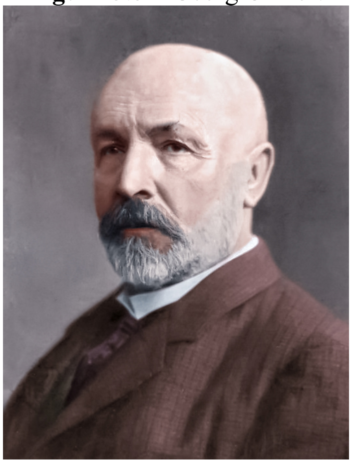


Fonte: Rabay, 2013

Também contemporâneo aos três matemáticos, Cantor se dedicou ao estudo e à pesquisa sobre fundamentações da Matemática, contribuindo de forma intensa para a Teoria de Conjuntos e da Topologia. Dedicando-se a teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas, desenvolveu uma nova abordagem dos números irracionais, em que estes seriam como sequências convergentes de números racionais. Além disso, realizou a prova da enumerabilidade destes.

[26] Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géomètrique élèmentaire
[27] Une methode géomètrique élèmentaire pour courbes planes

Figura 3.7 – Georg Cantor.



Fonte: Wikipédia, 2018

Em 1883, Cantor publicou um trabalho em que apresenta e discorre sobre um conjunto, o qual posteriormente foi batizado com seu nome: Conjunto/Poeira de Cantor (Almeida, 2006; Ferreira Filho, 2015; Andreucci, 2021). Ao observar esse conjunto, Nascimento (2012) e Nuñez Diban (2000) afirmam que a sua representação visual não é tão direta e natural, uma vez que ele representa um modelo de abstração, podendo ser entendido ao final de infinitas fases, como sendo o conjunto de pontos que permanece.

Desse modo, entende-se que o Conjunto de Cantor pode ser estudado sob a perspectiva da Teoria dos Conjuntos, sendo provado pelo próprio como um conjunto não-enumerável[28] (Barbosa, 2005; Farias, 2019). Oliveira (2014), Farias (2019), Oliveira (2019) e Andreucci (2021) apresentam a construção do Conjunto de Cantor, a partir das notações e simbologias de conjuntos numéricos[29], definindo-o da seguinte forma: "**Definição 4.1.** O conjunto de Cantor C é a interseção dos conjuntos C_n, obtidos através da remoção sucessiva dos terços médios abertos do intervalo $I = [0,1]$, ou seja, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$" (Farias, 2019, p. 57).

Figura 3.8 – Representação do Conjunto de Cantor desenvolvido até o nível 5

Fonte: Rabay, 2013

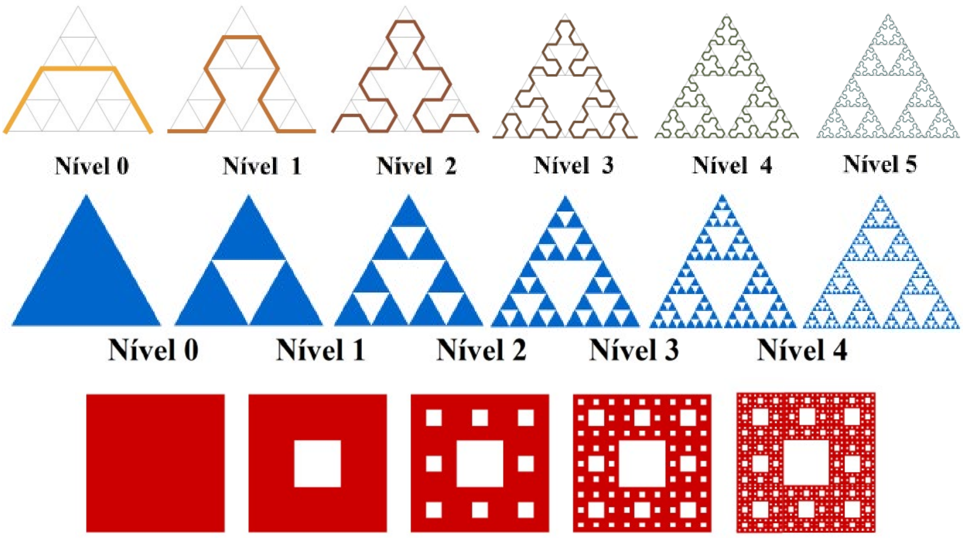
[28] Como conjunto enumerável entende-se por uma relação biunívoca entre certo conjunto e os números naturais. Quando isso não é possível, dizemos que o conjunto é não enumerável (Oliveira, 2005).
[29] Em paralelo, aparecem representações geométricas dos conjuntos.

Sierpinski, estudioso e pesquisador sobre Teoria dos Números, Teoria dos Conjuntos, Topologia e Teoria das funções, apresentou em seu trabalho: *Sobre uma curva cantoriana que contém uma imagem biunívoca e contínua em qualquer curva dada*[30], de 1916. Essa curva é semelhante às de Peano e Hilbert, em que ao se avançar sua construção, se poderia cobrir uma superfície (Barbosa, 2005; Almeida, 2006; Pereira, 2013; Conceição, 2019; Farias, 2019; Eleutério, 2021). Para além de sua curva, Sierpinski também construiu dois outros monstros: o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski. Estes objetos iniciam-se com uma superfície preenchida, retirando-se partes dela cada vez menores.

Figura 3.9 – Waclaw Sierpinski.

Fonte: Pontifical Academy of Sciences, *s. d.*

Figura 3.10 – Representação da Curva, do Triângulo e do Tapete de Sierpinski (de cima para baixo)



Fonte: Rabay, 2013 e Wikipedia, 2023

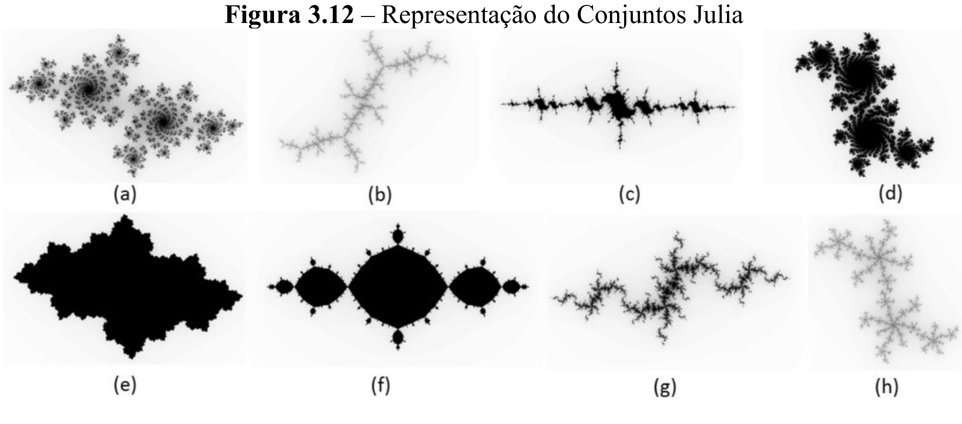
[30] Sur une courbe cantorienne qui content une image biunivoquet et continue de toute courbe donée

Apesar de não terem trabalhos juntos, as produções de Julia (*Memória na iteração de funções racionais*[31] em 1918) e Fatou (*Sobre equações funcionais*[32] em 1919) juntamente geraram o que hoje se nomina Conjunto de Julia. Julia foi um matemático interessado no estudo de sistemas dinâmicos complexos, em particular pesquisando sobre "[...] o comportamento de iterações de funções complexas racionais e polinomiais" (Natividade, 2022). Devido a um ferimento causado em campo de batalha durante a Primeira Guerra Mundial, Julia ficou um tempo internado para tratar de graves ferimentos que o fizeram perder o nariz. Durante esses tratamentos dentro do espaço do hospital, Julia teria desenvolvido sua pesquisa, que lhe rendeu o Grand Prix da Academia das Ciências (Barbosa, 2005; Robertson; O'Connor, 2008; Mingoranci, 2014; Conceição, 2019).

Figura 3.11 – Gaston Julia e Pierre Fatou (da esquerda para a direita).

Fonte: Bibm@th, *s. d.* e Wikipedia, 2023

Figura 3.12 – Representação do Conjuntos Julia



Fonte: Moreira, 2018

[31] Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles
[32] Sur les équation fonctionnelles

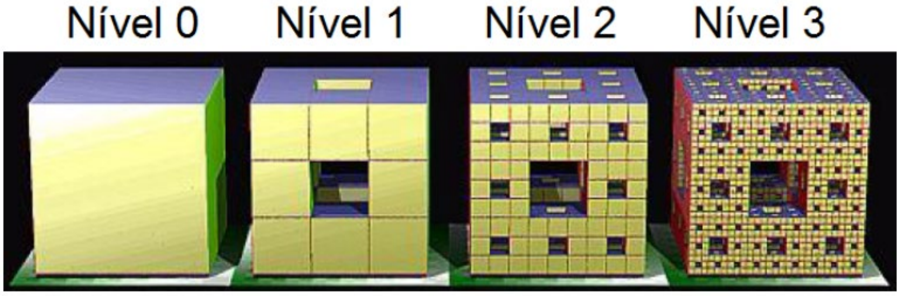
Enquanto isso, Fatou contribuiu com a Matemática e a Astronomia, trabalhando em diversos ramos da Análise, pesquisando sobre séries, teoremas de Riemann, teoria da integração e teoria das funções complexas. Acredita-se, embora não se possa ter certeza, que ele construiu um livro de memória para desenvolver a teoria fundamental da iteração voltado para o Grand Prix de 1918 (Robertson; O'Connor, 2016). Porém, enquanto Julia enviou seus resultados em envelopes lacrados à Academia de Ciências, Fatou publicou seus resultados em forma de notas em um tipo de periódico, recebendo uma carta deste falando sobre as descobertas enviadas por Julia. Assim, ao não se inscrever para o prêmio, não foi atribuído também a Fatou as descobertas e resultados obtidos.

Outro matemático recorrente em nossas leituras foi Menger, que contribuiu nas áreas de Álgebra, Geometria Hiperbólica, dimensão topológica, teoria dos jogos, ciências sociais e economia (Robertson; O'Connor, 2014; Ferreira Filho, 2015). Similar ao que aconteceu com Julia, Menger desenvolveu diversos trabalhos e investigações enquanto estava internado, porém seu internamento foi devido ao diagnóstico de tuberculose. Os estudos sobre dimensões foram os que tiveram maior destaque, de forma que em 1926, foi apresentada a Esponja de Menger, objeto que explora conceitos de dimensão topológica.

Figura 3.13 – Karl Menger.

Fonte: Robertson; O'Connor, 2014

Figura 3.14 – Representação da Esponja de Menger



Fonte: Rabay, 2013

Novamente, todos esses matemáticos se depararam com monstros e anomalias dentro de seus campos de estudos, que fugiam daquilo que se tinha. Porém, esses monstros hoje são identificados como fractais. A partir da pesquisa e dos estudos realizados, não identificamos o interesse de constituir um campo matemático que abrangesse esses elementos, nem em estudar possíveis similaridades ou padrões, sequer investigar características e estrutura, por parte desses matemáticos.

Um fator que nos levou a considerar essa perspectiva, é que as investigações desses matemáticos conduziram a elementos dentro de seu campo de pesquisa, seguindo a ótica que estava investigando, como destacamos anteriormente o que Trochet (2009) afirma em relação à Cantor e à Koch. Um outro aspecto, apontado por Mandelbrot na tese de Camp (1999), é o fato de que olhar para esses objetos como monstros que não se encaixam à teoria que se tinha e simplesmente ignorá-los, não permitiria abertura para lidar com eles. Perozzo (2021) afirma que observando as ferramentas e conceitos disponíveis na época, é possível compreender a dificuldade em tratá-los.

Um terceiro ponto, também destacado por Mandelbrot na sua entrevista à *La Recherche*, indica que, ao explorar e apresentar elementos do campo que estava investigando, o uso de imagens para exemplificar os objetos fractais facilitava o seu aceite e a sua compreensão. Como boa parte deles necessitam de recursos computacionais para serem gerados, a falta desses equipamentos dificultava vislumbrá-los. Baptista (1998) reforça essa questão, destacando que "[...] a visualização computadorizada passa a ser ferramenta importante para a matemática no estudo de fractais. Isso é uma corrente de volta ao 'visual' na matemática. Aonde nossa visão geométrica passa a exercer um papel importante" (p. 71). Assim, embora as representações gráficas não possuam infinitas iterações, os recursos computacionais auxiliam a compreender e entender a natureza e características dos fractais por meio de modelos aproximados.

Por que então se fez necessário buscar e entender mais sobre esses matemáticos? É utilizando-se das considerações e trabalhos já existentes, além de seus próprios estudos e pesquisas, que Mandelbrot inicia o processo de estruturar a Geometria Fractal. Com o resgate dessas discussões e investigações, podemos identificar um componente que faz parte do Sistema Conceitual no processo de Constituição de uma área científica: *uma base específica formada por teorias, hipóteses e dados obtidos de outros campos de pesquisa* (Bazi e Silveira, 2007). Como destacamos ao longo da descrição feita nesta seção, esse estudo foi importante para que reflexões acerca dos fractais fossem desenvolvidas por Mandelbrot. O exemplo mais claro talvez tenha sido com relação a aplicação do Conjunto de Cantor para solucionar o problema dos ruídos nas linhas de transmissão (veremos mais adiante). Além disso, as explorações apontadas, foram realizadas dentro de seus respectivos campos.

3.1.1 *Os estudos de Mandelbrot*

Figura 3.15 – Benoit Mandelbrot.

Fonte: Yale, 2016

A Mandelbrot é atribuída grande importância para a construção da Geometria Fractal, uma vez que foi o responsável por inserir o uso do termo fractal e sistematizar os conhecimentos que se tinha sobre esses objetos, estando fortemente ligado à história dessa área (Robertson; O'Connor, 1999; Carvalho, 2005; Barbosa, 2005; Titoneli, 2017). Foi ele quem investigou os fractais, suas características, relações e a partir de trabalhos já desenvolvidos anteriormente, formou boa parte do que se tem hoje sobre esses objetos matemáticos. Camp (1999) destaca que embora a ideia de fractais seja antiga e esteja disfarçada de iteração e autossemelhança, foi Mandelbrot quem trouxe a luz e deu nome à ideia.

Nascido em 1924 em Varsóvia (Polônia), mudou-se para Paris (França) em 1936 junto com sua família, para fugir dos nazistas. Embora seus pais não tivessem formação acadêmica avançada, seus tios foram os responsáveis por apresentar a Matemática a ele (Robertson; O'Connor, 1999; Barbosa, 2005; Trochet, 2009). Devido ao contexto da Segunda Guerra Mundial (1939-1945), sua educação ocorreu de forma não convencional para a época e contexto, tendo a oportunidade de pensar a matemática de formas diferentes às padronizadas que se ensinava na época.

Nesse período, o grupo Bourbaki vivia seu auge. Esse era composto por diversos matemáticos, visava, inicialmente, escrever um Tratado de Análise de forma rigorosa e partindo de ideias fundamentais, oriundas de produções internas do próprio grupo. Adotando-se essa postura, houve a desvinculação da Matemática com outras ciências, ressaltando sua primazia em relação às demais. Além disso, tomando esse viés de rigorosidade e axiomas, o visual geométrico foi um item deixado de lado (Barbosa, 2005; Trochet, 2009). Mandelbrot destaca o seguinte em uma entrevista sobre seus estudos:

> Tive a sorte de escapar dessa educação que matou a geometria, porque na época em que eu deveria ter feito as aulas do Taupe havia guerra. A minha família refugiou-se de Paris em Tulle; e, por uma sorte extraordinária, professores de Estrasburgo com grandes qualidades foram retirados para esta cidade. [...] E creio que foi essencial para o meu desenvolvimento, porque assim escapei a esta "martelada taupinal" que consiste, em suma, em ensinar as pessoas a fazerem cálculos complicados com muita rapidez e sem erros: essa foi a receita para ter sucesso em concursos (Lesort, 1986, s/ p., tradução nossa)[33].

Com o fim da guerra, Mandelbrot realizou os exames para ingressar em universidades francesas e, embora não tivesse estudado álgebra avançada ou cálculo, sua proximidade com a geometria o ajudou a resolver os problemas ali propostos (Camp, 1999; Araújo, 2015). Ingressando na Escola Normal de Paris, ficou apenas alguns dias, mudando para a Escola Politécnica onde sofreu grande influência de Paul Pierre Lévy[34] (1886-1971). "Lévy ajudou Mandelbrot a aprender e a olhar para os fenômenos matemáticos da natureza ao contrário do

[33] J'ai eu la chance d'échapper à cette éducation qui tuait la géométrie, parce qu'au moment où j'aurais dû suivre les cours de Taupe, c'était la guerre. Ma famille s'était réfugiée de Paris à Tulle ; et, par une chance extraordinaire, des enseignants de Strasbourg qui avaient de grandes qualités étaient repliés dans cette ville. [...] Et je crois que ça a été essentiel pour mon évolution, parce que j'ai ainsi échappé à ce « martèlement taupinal » qui consiste, en somme, à apprendre aux gens à faire des calculs compliqués très rapidement et sans erreur: telle était la recette pour réussir aux concours.

[34] A admiração de Mandelbrot por Lévy fica aparente na entrevista que concedeu a Camp (1999) [p. 66 e 67].

que acontecia nas corretas abstrações alinhadas fornecidas por muitos matemáticos reconhecidos" (Araújo, 2015, p. 31). Isso reforçava a forma como ele enxergava a matemática.

> No meu caso, mais uma vez, fui encorajado pelas minhas circunstâncias e pelo facto de ser tão pouco escolarizado no lado algébrico, o que significava que não foi feito nenhum esforço para me afastar de onde a minha tendência teria ido de qualquer forma [Entrevista feita com Mandelbrot em 27 de Janeiro de 1997 via telefone] (Camp, 1999, p. 58, tradução nossa)[35].

Havia essa preferência pelo uso da geometria em detrimento da álgebra, logo o contexto francês não lhe era dos mais favoráveis, dada a força do Bourbaki naquele momento. De acordo com Robertson e O'Connor (1999), Almeida (2006), Pereira (2013) e Dalpiaz (2016), Mandelbrot então se muda para os Estados Unidos em 1948 para estudar ciência aeroespacial. Posteriormente ingressa no Centro de Pesquisas Thomas Watson da IBM (*International Business Machines Corporation*) em 1958, local que teve grande importância no desenvolvimento da Geometria Fractal.

É destacado por Araújo (2015, p. 31) que a IBM estava se tornando líder da indústria de computadores naquele período e tinha como objetivo "[...] fornecer a cientistas selecionados incisivos como financiamentos [para] laboratórios, permitindo-lhes prosseguirem nos seus interesses". Em entrevista, Lesort (1986) pontua que a autonomia e a estrutura oferecidas para realizar suas pesquisas foram fatores importantes para sua escolha, depois de ter passado um tempo em Harvard. Considerando que ele desejava encontrar a ordem onde os demais haviam visto apenas o caos (Camp, 1999) e que sua atuação se deu em diversos ramos da ciência, a importância dessa liberdade no desenvolvimento dos estudos se torna ainda mais evidente.

Feito esse resgate da figura de Mandelbrot, voltemos aos fractais, nosso objeto de estudo. Em sua palestra na conferência TED2010[36], ele afirma que suas pesquisa com os fractais se iniciaram a partir de investigações em economia, por volta de 1962. Esse período corresponde ao tempo em que Mandelbrot trocou a IBM por Harvard, como convidado para ser professor de Economia. Lidando com elementos e objetos desse contexto, ele aponta que introduziu uma ideia arbitrária e isolada, que viria a ser a base da teoria dos fractais:

> A ideia era que, no estudo dos preços, não houvesse diferença de natureza entre variações de curto e longo prazo. Podemos descrever, por exemplo,

[35] In my case, again, I was encouraged by my circumstances and the fact that I was so underschooled in the algebraic side which meant that there was not an effort made to tear me away from where my tendency would have gone anyhow.

[36] O TED é uma organização sem fins lucrativos que se iniciou em 1984 como uma conferência que buscava abarcar Tecnologia, Entretenimento e Design. Atualmente, os trabalhos desenvolvidos abrangem diversas comunidades falando sobre os mais variados assuntos, de ciências e negócios até educação, artes e questões globais.

> alterações no preço de uma mercadoria como o algodão durante algumas semanas ou durante vários anos como dois fenômenos estatisticamente idênticos, exceto que ocorrem em duas escalas diferentes. Isto ia contra a sabedoria convencional de que as variações diárias se deviam à especulação e às mudanças de longo prazo nas leis fundamentais da economia (Lesort, 1986, s/ p., tradução nossa)[37].

Um ponto importante destacado na sua palestra na conferência TED2010, foi o fato de que as descontinuidades (chamadas naquele contexto de Atos de Deus) precisavam ser consideradas no estudo, tendo influência na construção de um certo modelo de variação de preço. Nesse cenário, passou a distinguir dois efeitos na variação dos preços que continham saltos repentinos e ciclos não periódicos, chamados Efeito Noé[38] e Efeito José[39]. Mesmo trabalhando com fenômenos conhecidos, "[...] os matemáticos mal compreenderam o problema prático e os hidrólogos comportaram-se ainda com mais relutância do que os economistas: disseram que nunca, nunca precisaram de instrumentos de trabalho tão complexos para as suas pesquisas" (Lesort, 1986, s/ p., tradução nossa)[40].

Para encontrar espaço e divulgar seu trabalho, foi necessário recorrer a desenhos: alguns representando verdadeiras crônicas fluviais, outros originados da teoria desenvolvida por Mandelbrot, e os demais baseados nos pressupostos que se tinham no momento. Ao observar, em um processo de *teste às cegas*, que os desenhos de Mandelbrot se aproximavam das representações reais, e o das outras teorias se distanciavam, houve a aprovação do artigo para ser publicado.

Como apontado por ele na entrevista à revista *La Recherche*, ao cansar-se da Economia e retornando à IBM, Mandelbrot voltou-se para a investigação de turbulências e ruídos. Se tratando das turbulências, seus estudos se deram sobre gravações amplificadas, fotografias e desenhos, chegando à conclusão de que eram como superposições de redemoinhos de variados tamanhos. Portanto, assumiriam uma forma fractal. Assim como o vento sopra em rajadas e cada uma delas se subdivide em rajadas ainda mais finas, não se espalhando por todo o espaço,

---

[37] L'idée était que, dans l'étude des prix, il n'y avait aucune différence de nature entre les variations à court et à long terme. On peut décrire, par exemple. les changements du prix d'une denrée comme le coton sur quelques semaines ou sur plusieurs années comme deux phénomènes statistiquement identiques, sauf qu'ils se déroulent sur deux échelles différentes. Cela allait à l'encontre des idées reçues, qui voulaient que les variations quotidiennes soient dues à la spéculation, et les changements à long terme aux lois fondamentales de l'économie.

[38] Com relação ao Efeito Noé, Lesort (1986) aponta que o mesmo se relacionava com o estudo das grandes enchentes, recebendo então esse nome pela ligação com a história bíblica de Noé e do Dilúvio.

[39] Com relação ao Efeito José, Camp (1999) aponta que o mesmo se relacionava com o estudo do nível do Rio Nilo, recebendo então esse nome pela ligação do rio com a história bíblica de José do Egito.

[40] Mais les mathématiciens ne comprenaient guère le problème pratique et les hydrologues avaient un comportement encore plus réticent que les économistes : ils disaient que jamais, jamais, ils n'avaient besoin d'instruments de travail aussi complexes pour leurs recherches.

mas concentrando-se no formato de fractal complexo bem especificado, poderia acontecer igualmente com as turbulências.

Com relação aos ruídos, soube-se dos engenheiros que havia um ruído nas linhas de transmissão da IBM que fazia com que ao enviar informações de um computador para o outro, houvesse interferências na transmissão de dados e provocando erros (Gleria *et al.*, 2004; Almeida, 2006; Oliveira, 2014; Oliveira, 2019). Para solucionar o problema, Mandelbrot teria então tomado o seguinte caminho: ao invés de tentar eliminar o ruído, considerou-os como inevitáveis e buscou identificar se haveria algum padrão neles.

De acordo com Nuñez Diban (2000), Carvalho (2005), Titoneli (2017) e Eleutério (2021), em suas investigações observou que os erros chegavam em blocos. Esses blocos, quando ampliados, revelavam outros blocos menores que possuíam estruturas semelhantes, que por sua vez ao serem ampliados novamente revelavam estruturas similares às anteriores. Isso se assemelhava ao Conjunto de Cantor, descrito em 1883. Assim, foi possível programar os computadores para reconhecerem e diferenciarem as informações transmitidas dos ruídos indesejados, não os eliminando por completo, mas os reduzindo drasticamente. Esse problema foi o primeiro em que Mandelbrot experimentou a necessidade de utilizar fractais para solucioná-lo.

Com isso, é possível notar a presença de um primeiro elemento essencial para os fractais: a autossimilaridade. Quando Mandelbrot cita a semelhança entre dois eventos em escalas diferentes no contexto da Economia, era a esse conceito que se referia. Ao se ampliar os blocos dos ruídos e se observa a mesma estrutura, tal como redemoinhos de diversos tamanhos sobrepostos nas turbulências. Trochet (2009) destaca que o primeiro a definir a ideia de autossimilaridade foi Ernesto Cesàro (1859-1906) em 1905, enquanto analisava um artigo de Koch. Tratando dessa ideia no contexto geométrico, Lesort (1986) relata que foi ele quem cunhou o termo no ano de 1964 em Harvard.

De acordo com Trochet (2009), Lévy, por quem Mandelbrot tinha grande admiração, após estudar artigos de Besicovitch (veremos mais adiante) sobre a dimensão de Hausdorff, passou a investigar a autossimilaridade. Ele observou que a curva de Koch era um dos vários exemplos de curvas em que se tem a autossemelhança, e que era possível gerar curvas iterativas e conectadas, que cobririam o plano após uma quantidade suficiente de iterações.

Atrelada à essa ideia de autossimilaridade, entendemos que está o conceito de iteração. Uma vez que essa é a repetição de um processo, e que temos a noção de autossimilaridade explorada anteriormente, pode-se concluir que essa semelhança da parte com o todo é obtida através desse processo de iteração.

Em meio à essas discussões, envolvendo Economia e turbulências, Mandelbrot destacou que compreendendo a propriedade da parte como sendo uma imagem reduzida do todo, ele poderia traduzir a autossimilaridade como um número, em particular um número fracionário.

> Os espaços n-dimensionais, onde n é uma fração, eram conhecidos dos matemáticos, mas considerava-se que não podiam ser usados para nada concreto, que eram matemática separada da realidade. Esta é, de qualquer forma, uma das razões pelas quais os matemáticos dificilmente me ajudaram nesta fase; além disso, economistas e meteorologista me entenderam mal (Lesort, 1986, s/ p., tradução nossa)[41].

Dessa forma, Mandelbrot focou em um problema que se encontrava no contexto de um campo com poucas investigações e que fossem mais familiares. Assim, ele se deparou com uma questão na qual a teoria que estava sendo desenvolvida se aplicava bem: qual a medida da extensão/comprimento do litoral da Grã-Bretanha? Essa pergunta se torna ideal para a exploração de Mandelbrot, porque ao tomarmos um litoral, tem-se irregularidade e rugosidades, saliências e reentrâncias, onde se pode observar uma certa autossemelhança (Camp, 1999; Carvalho, 2005; Ferreira Filho, 2015; Dalpiaz, 2016; Oliveira, 2019; Eleutério, 2021).

Para desenvolver esses estudos, Mandelbrot partiu das pesquisas de um inglês chamado Lewis Fry Richardson, que realizou a medição da extensão de diferentes litorais. Conforme destacado por Camp (1999), os trabalhos de Richardson indicavam que quanto maior a precisão utilizada, considerando-se as baías e reentrâncias, se obteria um comprimento de referência cada vez menor, enquanto o comprimento total do litoral seria cada vez maior, aumentando infinitamente. Assim, o comprimento do litoral dependeria essencialmente da referência adotada.

Para enfrentar esse problema, é destacado por Lesort (1986) que se fazia necessário trabalhar com o desenho, porém não haviam ferramentas para construí-lo. Então, iniciou-se com uma máquina que apenas digitava *0* e *W* sobrepostos quando o desenho representava terra, precisando ser revisados à lápis de forma manual. Somente mais tarde foi construído um programa que permitia a projeção das imagens obtidas em telas de raios catódicos no laboratório[42]. Camp (1999) aponta que o responsável por esse programa teria sido Sigmund Handelman, colega de Mandebrot na IBM. "Handelman então usou um computador para gerar imagens que pareciam imitar formas reais de relevo, como a Nova Zelândia e as ilhas do Egeu"

---

[41] Les espaces à n dimensions, où n est une fraction, étaient connus des mathématiciens, mais on considérait qu'ils ne pouvaient servir à rien de concret, que c'étaient des mathématiques séparées du réel. C'est en tout cas une des raisons pour lesquelles les mathématiciens ne m'ont guère aidé à ce stade ; les économistes et les météorologues, par ailleurs, me comprenaient mal.

[42] Mandelbrot entende que foi ali o início da síntese de imagens (Lesort, 1986).

(Camp, 1999, p. 79, tradução nossa)[43]. Com esse auxílio visual, as resistências foram diminuindo ao se observar a semelhança das imagens geradas a partir das construções matemáticas com a realidade. Assim, Mandelbrot entendia que se estava conseguindo imitar a natureza, fosse talvez porque havia encontrado um de seus segredos.

> Todas essas atividades aparentemente díspares pareciam ter um traço comum. Ao ponderar as suas semelhanças, Mandelbrot encontrou uma solução, reconhecendo que todas elas envolviam autossimilaridades em diferentes escalas. Essa ideia foi inspirada em uma tese que seu amigo Henry McKean Jr. havia escrito sobre as dimensões de conjuntos aleatórios de Hausdorff-Besicovitch enquanto ambos estavam em Princeton (Camp, 1999, p. 79, tradução nossa)[44].

O conceito de dimensão apresentado por Hausdorff, foi introduzido em março de 1918. Trochet (2009) destaca que os resultados de Hausdorff foram importante tanto para o desenvolvimento da Geometria Fractal quanto ao próprio campo da topologia, de forma que "[...] sua definição de dimensão estendeu a definição anterior para permitir que os conjuntos tivessem uma dimensão que é um valor arbitrário e diferente de zero (ao contrário da dimensão topológica) acabou sendo parte integrante da definição de um fractal [...]" (Trochet, 2009, s/ p.).

Após essa introdução, Hausdorff foi estudado por Abraham Samilovitch Besicovitch, que entre 1934 e 1937 escreveu três artigos referenciando seu trabalho. Enquanto Hausdorff estendeu a teoria da medida de Carathéodory para conjuntos que tem medida finita de ordem não integral, Besicovitch expandiu os estudos das propriedades de densidade de conjuntos para aquelas de medida finita de Hausdorff. Embora não tenham trabalhado juntos, Mandelbrot foi apresentado, por McKean Jr., à dimensão Hausdorff-Besicovitch que estava sendo usada na investigação do movimento Browniano por parte de McKean (Camp, 1999).

Mandelbrot se deparou então com a informação de que haviam fenômenos existentes fora do espaço unidimensional, mas que ocupavam um espaço menor que o bidimensional. Em sua palestra na TED2010, ele afirma que embora seus colegas o desencorajassem e afirmassem que o número introduzido por Hausdorff não tivesse importância, ele o viu como uma boa medida para representar a rugosidade de um objeto. Esse conceito, adotado por Mandelbrot, se tornou praticamente a essência dos fractais.

---

[43] Handelman the used a computer to generate pictures that seemed to imitate actual landforms, such as New Zealand and islands in the Aegean.

[44] All of these apparently disparate activities seemed to have a common thread. While pondering their similarities Mandelbrot hit upon a solution, recognizing that they all involved self-similarity upon different scales. This idea was inspired by a thesis that his friend, Henry McKean, Jr., had written about the Hausdorff-Besicovitch dimensions of random sets while both of them were at Princeton.

Todos esses caminhos foram traçados a partir de escolhas feitas por Mandelbrot, de forma a percorrer problemas que outros evitaram ou não conseguiram avançar nos estudos. Camp (1999) afirma que para ele, a escolha por problemas em que não havia concorrência, não era por medo, mas sim por não haver especialistas nesse ramo, dessa forma, ele tinha o campo de investigações todo para ele.

> Sua consciência de uma ampla variedade de exemplos permitiu-lhe aplicá-los imediatamente de novas maneiras. Eventualmente, ele usou as características que estava estudando. Assim ele encerrou uma jornada que reuniu suas experiências aparentemente desconexas em um todo coerente (Camp, 1999, p. 79, tradução nossa)[45].

Posto isto, podemos encarar como sendo grande a contribuição de Mandelbrot, por não somente agrupar uma série de formas geométricas em um mesmo conjunto, mas utilizá-las, bem como suas propriedades e características, para interpretar questões e fenômenos de diversos campos tanto reais quanto teóricos. Camp (1999) ressalta em sua tese, os créditos dados por Mandelbrot aos matemáticos antecessores, os quais foram importantes para que ele reconhecesse o mundo cheio de fractais desenvolvido pelo homem ao longo do tempo. A liberdade e a autonomia em suas pesquisas dadas pela IBM também foram fundamentais, já que em sua entrevista à *La Recherche* ele afirma que teria sido impossível desenvolver esse trabalho na França, ou mesmo no MIT ou em Harvard, visto que na própria IBM foi necessário percorrer caminhos trabalhosos no desenvolvimento da pesquisa (Lesort, 1986).

Toda essa bagagem, foi aliada à uma fala proferida em janeiro de 1973 na França, em que "[...] percebeu que sua palestra estava extremamente bem ordenada pelas ideias que vinha desenvolvendo ao longo de sua carreira" (Camp, 1999, p. 80, tradução nossa)[46]. Esse conjunto gerou um artigo que, de tão longo e com um tema a parte do contexto da época, originou o livro: *Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão*[47] em 1975, tendo uma versão em inglês e sendo o precursor do livro: *The Fractal Geometry of Nature*[48], lançado em 1977. Essas publicações impactam a vida de Mandelbrot estabelecendo-o como um verdadeiro impulsionador e movimentador da área (Camp, 1999).

[45] His awareness of a wide variety of exemples now allowed him to apply them immediately in new ways. Eventually, he used the characteristics that he was studying. Thus he ended a journey which pulled his apparently disconnected experiences into a coherent whole.

[46] [...] he realized that his talk was extremely well ordered by the ideas he had been developing throughout his career.

[47] Les objets fractals: forme, hasard et dimension

[48] A Geometria Fractal da natureza

Caracterizados todos esses aspectos, é necessário voltarmos ao nosso objeto de estudo nesta pesquisa. Até o momento dessas publicações de Mandelbrot, três elementos essenciais são destacados: autossimilaridade, iterações e dimensão. Identificamos que esses três, em conjunto, indicam dois componentes que fazem parte do Sistema Conceitual no processo de Constituição de uma área científica: *uma base formal constituída por teorias lógicas, matemáticas e explicativas*, e *um domínio constituído por objetos claros e precisos que se referem ao fundo de conhecimento*. Entendemos que nesses dois casos, esses elementos estão bem definidos, estudados e pesquisados por antecessores a Mandelbrot, como destacamos ao longo de toda essa seção, do modo como formam a base do que será reconhecido como fractal.

Ao nos voltarmos para a Geometria Fractal elaborada por Mandelbrot, é possível observar mais dois componentes do Sistema Conceitual: *uma base filosófica ou visão geral constituída por suposições gerais acerca do mundo, do conhecimento e da boa conduta*, e *um fundo de conhecimentos, representado pelo corpo de conhecimentos obtidos pelo campo em outras épocas*. Quando se pondera que a Geometria Euclidiana não é capaz de descrever todos os fenômenos estudados no mundo, carecendo outras formas geométricas para buscar representá-lo, se entende que diferentes ferramentas estruturadas e organizadas se fazem necessárias. Isso ocorre com as investigações realizadas por Mandelbrot e que resultam em suas obras publicadas (artigos, livros e palestras).

Com relação ao fundo de conhecimentos, as ideias de Geometrias Não-Euclidianas, que de certa maneira fogem ao formato e estrutura da Geometria Euclidiana, destacadas séculos antes das investigações de Mandelbrot, podem ser consideradas pontapés para sua exploração. Sem ponderar a possibilidade de geometrias para além da euclidiana, entendemos que não havia espaço para o estudo e desenvolvimento da Geometria Fractal. Além disso, mesmo que não ocorresse com essa intenção, ao explorarem representações gráficas, Peano, Koch e Hilbert também deixam reflexões e saberes a respeito da GF. Por consequência dessas duas considerações, podemos concluir então que há a presença de mais dois componentes: *a problemática, formado pelo conjunto de problemas abordados pelo fundo de conhecimento* e *o objetivo, ou seja, o conjunto de metas de pesquisa*.

Conforme destacado anteriormente em nossa descrição, pode-se entender a problemática da GF sendo: como estudar, investigar e representar fenômenos que não são satisfatoriamente descritos pelos elementos da Geometria Euclidiana? Considerando então essa problemática, entendemos que o objetivo dessa geometria é o de compreender relações e estruturas envolvidas nesses fenômenos, sendo capazes de construir leis que se aproximam destes. Portanto, a Geometria Fractal se desdobraria nesse sentido de olhar para as irregularidades, buscando determinar a ordem no caos, e tendo suas aplicações nos mais diversos contextos.

Ao olharmos para as publicações e palestras de Mandelbrot, podemos identificar que há indícios de uma condução ao Sistema Social referente ao processo de Constituição de uma área científica, uma vez que as obras visam realizar essa disseminação dos conceitos desenvolvidos no Sistema Conceitual. Em particular, voltados para cursos universitários em palestras proferidas a esses grupos (docentes e discentes), bem como os periódicos e os eventos científicos. Até o momento não apresentamos debates e discussões em nossa escrita, referentes à aceitação e discussão do tema, uma vez que pretendemos fazê-la na seção seguinte.

No que diz respeito ao processo de institucionalização, entendemos que ocorrem os primeiros passos relativos à Perspectiva Cognitiva e à Perspectiva Social, uma vez que ao realizar suas publicações, de certa forma Mandelbrot busca explicar e apresentar seu objeto de estudo, esclarecendo suas considerações e resultados. Afirmamos que se trata dos primeiros passos, pois os processos que identificamos decorreram com e a partir de Mandelbrot, isto é, houve suas publicações, mas até esse momento da pesquisa, ainda não pontuamos discussões de terceiros com relação à sua teoria.

Ainda com relação à Perspectiva Social, houveram alguns apontamentos sobre o que a comunidade interna e externa à Matemática tiveram de impressão com as investigações de Mandelbrot, uma vez que até a publicações de seus livros, seus trabalhos possivelmente tiveram um menor alcance e também apresentavam partes da pesquisa que ele estava desenvolvendo, sendo o conjunto todo organizado e publicado somente com seus livros.

Por fim, com relação à consolidação, percebemos que ocorrem as primeiras ações de pesquisa, divulgação e aplicação de conhecimento. Dentre essas, observamos que aquela que mais se desenvolveu foi a pesquisa, visto que as investigações e estudos de Mandelbrot abrangeram diversos fenômenos e objetos, em diferentes campos, por vários anos, utilizando técnicas e desenvolvendo teorias para explicá-los. Houve também o início da divulgação de seus resultados enquanto Geometria Fractal a partir das suas publicações e palestras, bem como a aplicação dos conhecimentos construídos com uso de suas teorias na solução de problemas.

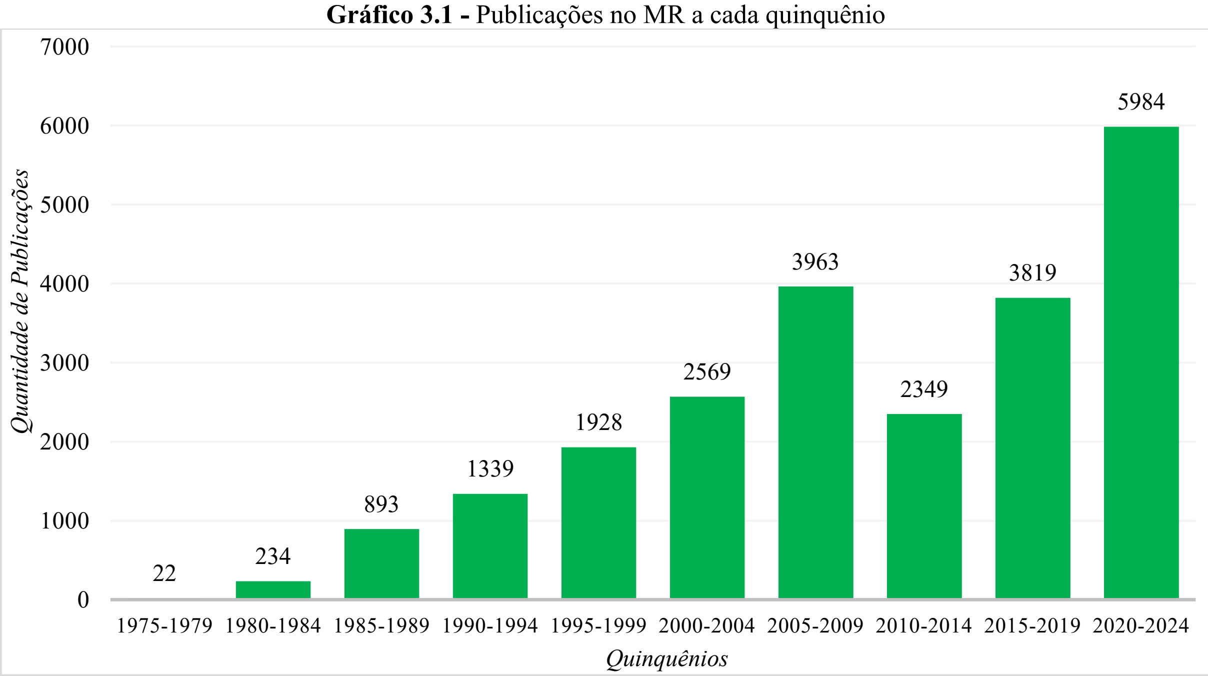
3.2 Uma temática em pauta

Como destacado na seção 2.2.2, o segundo eixo tem por objetivo estudar discussões relativas aos Fractais, a partir do levantamento de publicações, periódicos e eventos relacionados a essa temática. Nossa principal fonte de dados, como mencionado, foi a plataforma do *Mathematical Reviews*. Nas subseções a seguir, apresentamos os resultados obtidos na busca por cada um destes itens.

3.2.1 *Das publicações*

Em nossa busca no MR, como apontado anteriormente, tivemos como retorno 23.100 publicações (subdivididas nas cinco categorias no próprio banco de dados e já pontuadas na seção 2.2.2), sendo que a primeira que aparece como resultado é datada de 1975 e a última de 2024[49]. De forma a entender como se comportaram as publicações ao longo desses quase 30 anos, organizamos o seguinte gráfico:

Gráfico 3.1 - Publicações no MR a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

A primeira publicação indicada pelo MR é o artigo *Modelos estocásticos para o relevo da Terra, a forma e a dimensão fractal das costas e a regra do número de áreas para ilhas*[50] de Mandelbrot em 1975. Composto por quatro páginas, discute sobre a autossimilaridade da superfície da Terra, particularmente de uma ilha, em que a dimensão fractal do litoral é uma

---

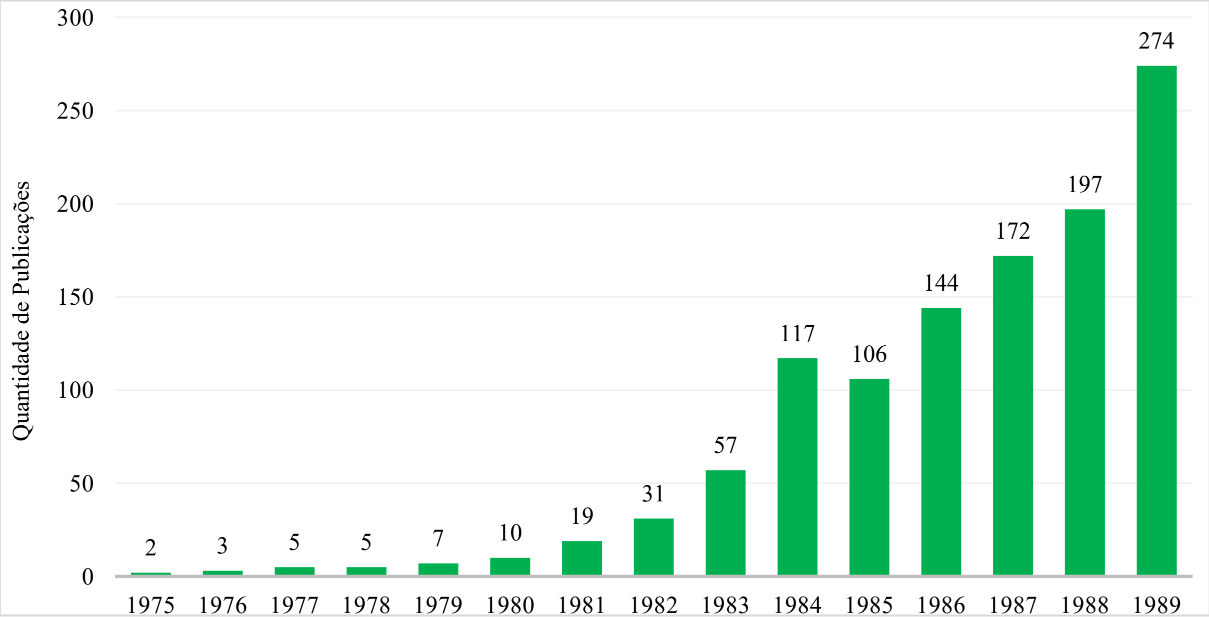
[49] Os dados do ano de 2024 se referem às publicações até a data de realização da pesquisa.

[50] *Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands*.

fração entre 1 e 2. O autor destaca ainda que a autossemelhança necessária para o estudo desse item não podia ser totalmente explicada naquele momento. A segunda publicação é o primeiro livro de Mandelbrot *Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão*[51].

Ao considerarmos os seguintes itens, até o ano de 1978 há apenas uma publicação (*Nos colares aleatórios de B. Mandelbrot*[52] de Jacques Peyrière) que não corresponde a produções de Mandelbrot, as demais todas correspondem a ele. A partir de 1979, outros matemáticos começam a aparecer como autores de publicações relacionadas aos fractais. Camp (1999) destaca em sua tese que com a edição do livro de Mandelbrot *The Fractal Geometry of Nature* em 1982, suas ideias atingiram um público mais amplo e o interesse pelos fractais explodiu. É possível observar esses dados ao tomarmos as publicações nos três primeiros quinquênios (1975-1979, 1980-1984 e 1985-1989).

Gráfico 3.2 - Publicações no MR nos três primeiros quinquênios



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Nesse sentido, direcionamos nossa atenção para o primeiro e o segundo quinquênio, como destacado na seção 2.2.2. Escolhemos o primeiro por apresentar publicações logo após a edição do livro de Mandelbrot, e o segundo por conter o momento de ampliação na divulgação e nos estudos dos fractais. Para estudar melhor cada uma delas, seguimos a organização por tipo de publicação, utilizada pelo próprio banco de dados.

---

[51] *Les objets fractal: Forme, hasard et dimension*
[52] *Sur les colliers aléatoires de B. Mandelbrot*

Partindo do primeiro quinquênio, das produções categorizadas pelo banco de dados como artigos, cinco são de Mandelbrot, um de Peyrière e um de Michael Victor Berry. Com relação aos artigos de Mandelbrot, todos buscam estabelecer relações entre conceitos já existentes e pesquisados aos fractais, seja por meio do estudo do relevo da Terra (primeiro resultante da busca, como citado), seja por meio do estudo de turbulências[53], modelagem da forma das moléculas de polímero[54], um compilado das investigações realizadas por ele anteriormente[55] ou no estudo de trema obtido a partir de um corte de buracos aleatórios do espaço[56]. O artigo de Peyrière possui o seguinte resumo:

> Uma nova classe de conjuntos aleatórios foi introduzida por B. Mandelbrot [no artigo destacado na nota de rodapé 54] como um substituto para o passeio aleatório auto-evitável e como um modelo geométrico de polímeros. A presente nota comprova uma de suas conjecturas sobre a dimensão fractal (Hausdorff-Besicovitch) do conjunto (Mathematical Reviews, s/ d., s/ p.)

O artigo de Berry[57], aborda sobre *diffractals*, um "[...] regime de ondas caracterizado por um limite de ondas curtas no qual níveis cada vez mais finos de estrutura são explorados e a óptica geométrica nunca é aplicável" (Berry, 1978, p. 781). Em sua publicação, o autor utiliza o livro de Mandelbrot (1975) na versão em inglês de 1977 como referência, assim traz um estreitamento entre as ideias sobre fractais e a difração.

Com relação aos artigos publicados em anais de eventos, temos quatro de autoria de Mandelbrot e dois de autoria de Berry. Das publicações de Mandelbrot, duas versam sobre turbulências. A primeira, *Turbulência intermitente e dimensão fractal: curtose e expoente espectral* $5/3 + B$[58], apresentada na Conferência de Turbulência e Equações de Navier Stokes da Universidade de Paris-Sud (Orsay, França), nos dias 12 e 13 de junho de 1975, aborda sobre o uso de modelagem matemática para discutir o centro de intermitência, a fim de descrever o que se observa na turbulência.

O comentarista e matemático William C. Meecham destaca ainda a oportunidade de uma nova visão sobre esses fenômenos estudados, levando a refletir sobre o comportamento de leis de potência, como diferente das formas canônicas em que eram propagadas. A segunda

---

[53] Artigo: *Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides*, de 1976.
[54] Artigo: *Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle: les cordonnets discrets et fractals*, de 1976
[55] Artigo: *Physical objects with fractional dimension: seacoasts, galaxy clusters, turbulence and soap*, de 1977
[56] Artigo: *Corrélations et texture dans un nouveau modèle d'univers hiérarchisé, basé sur les ensembles trémas*, de 1979
[57] Artigo: *Diffractals*, de 1979.
[58] *Intermittent turbulence and fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent* $5/3 + B$

publicação, *Fractais e turbulência: atratores e dispersão*[59], apresentada em um Seminário sobre Turbulências da Universidade da Califórnia (Berkeley, Califórnia) em 1976-1977, relaciona a ideia de turbulência de forma local, como sendo o espectro de flutuações da dissipação de energia e a relação a um fluxo não quasiperiódico determinístico, configurando algo abarcado pela teoria dos conjuntos de dimensão fracionada de Hausdorff.

A terceira publicação de Mandelbrot, *Facetas geométricas da física estatística: escalas e fractais*[60], proferida na 13ª Conferência da União Internacional de Física Pura e Aplicada em 1978, realizada no Instituto de Israel de Tecnologia (Haifa, Israel), cuja temática era a Física Estatística, abordou o estudo de sistemas físicos estatísticos a partir da perspectiva geométrica, em que seu parâmetro principal não precisa ser um número inteiro, relacionando-se à dimensão fractal. A quarta publicação, *Artigo de discussão: fractais, atratores e a dimensão fractal*[61], foi um trabalho apresentado em uma Conferência realizada em Nova Iorque entre os dias 31 de outubro a 4 de novembro de 1977, ressaltava a importância do conceito de dimensão fracionária para o estudo da turbulência.

A primeira publicação de Berry é o artigo *Catástrofe e regimes fractais em ondas aleatórias*[62], presente nos anais de dois Simpósios Internacionais sobre Aplicações da Teoria da Catástrofe e Conceitos Topológicos em Física, realizados no Instituto de Ciências da Informação da Universidade de Tübingen (Tübingen, Alemanha), de 2 a 6 de maio e 11 a 14 de dezembro de 1978. Não há muitos detalhes no banco de dados sobre sua edição, mas tem-se que os simpósios contaram com a participação de mais de 50 cientistas, entre eles matemático, físicos, químicos e biólogos de forma a trocar ideias sobre o impacto dos conceitos topológicos nas ciências física, e a fim de introduzir jovens cientistas na área. A segunda publicação de Berry é o artigo *Distribuição de modos em ressonadores fractais*[63], presente nos mesmos anais citados no parágrafo anterior.

Com relação aos eventos e anais completos desses eventos, temos como resultado alguns que já foram pontuados nos parágrafos anteriores: Conferência de Turbulência e Equações de Navier Stokes da Universidade de Paris-Sud; Seminário sobre Turbulências da Universidade da Califórnia; 13ª Conferência da União Internacional de Física Pura e Aplicada; Simpósios Internacionais sobre Aplicações da Teoria da Catástrofe e Conceitos Topológicos em Física;

---

[59] *Fractals and turbulence: attractors and dispersion*
[60] *Geometric facets of statistical physics: scaling and fractals*
[61] *Discussion paper: fractals, attractors, and the fractal dimension*
[62] *Catastrophe and fractal regimes in random waves*
[63] *Distribution of modes in fractal resonators*

Conferência realizada em Nova Iorque. Para além destes, destacamos mais dois: o Simpósio realizado na Universidade de Rochester, Nova Iorque, em 4 de novembro de 1976 e o Simpósio Bicentenário de Buffon sobre Probabilidade Geométrica, Análise de Imagens, Estereologia Matemática e sua Relevância para a Determinação de Estruturas Biológicas, Paris, em julho de 1977.

O primeiro simpósio não possui um resumo geral no banco de dados, porém há a informação de que seria um tributo a Elliott W. Montroll, "[...] um cientista e matemático americano que trabalhou em uma variedade de áreas matemáticas e estatísticas aplicadas" (Robertson; O'Connor, 2005). Nesse simpósio[64] há uma publicação de Mandelbrot sobre os fractais relacionados à percolação, polímeros e, como diz o nome do artigo, quase tudo mais. Assim como o primeiro ocorre com o segundo também, mas há indicado em seu prefácio a presença de cerca de trinta biólogos e de trinta matemáticos, sendo estes últimos especialistas em geometria integral e probabilidade geométrica. Também há uma publicação de Mandelbrot intitulada *A geometria fractal das árvores e outros fenômenos naturais*[65].

Com relação aos livros, temos duas publicações, que na verdade são o mesmo exemplar: *Os objetos fractais* (1975) e *Fractais: forma, acaso e dimensão* (1977). Os dois livros são de autoria de Mandelbrot, sendo o de 1975 o original em francês e o de 1977 uma versão em inglês. Em sua entrevista à Lesort (1986), o autor informa que a versão em inglês facilitou a divulgação da temática, obtendo um sucesso inesperado por ele. Quanto às teses, não há nenhuma resultante em nossa pesquisa.

Ao olharmos para as publicações encontradas no período do primeiro quinquênio, podemos inferir que com exceção aos dois livros lançados, as publicações e discussões relativas aos fractais ocorreram de forma a evidenciar a sua relação com outros conceitos de diversas áreas, buscando valorizar a nova perspectiva que se possibilitava com a junção das duas ideias. Pode-se perceber uma grande aproximação com a Física nesse período, haja visto a presença de temáticas como turbulências e ondas, além da Biologia e da Química.

No que diz respeito ao segundo quinquênio, como destacado na seção 2.2.2, optamos por trabalhar com parte dos autores. Iniciamos pelos quatro com mais publicações nesse período: Benoit Mandelbrot, Amnon Aharony, Yuval Gefen e Michael F. Shlesinger.

---

[64] Destacamos que esses dois artigos não apareceram nas buscas relativas às publicações em anais de eventos. Ao acessarmos o resumo desses anais que está no MR, é destacado na última frase que serão revisados individualmente os artigos de interesse matemático. Podemos supor então que não há interesse matemático nesses artigos ou que sua revisão ainda não aconteceu.

[65] *The fractal geometry of trees and other natural phenomena*

Mandelbrot é o que possui mais resultados vinculados sendo 14 artigos de periódico, seis artigos em eventos e dois livros, totalizando 22 publicações[66]. Quanto aos seus artigos nesse período, assim como no primeiro quinquênio, carregam a busca por aproximar e aplicar os conceitos relacionados aos fractais em outros campos. Com relação aos artigos publicados em eventos, há também essa característica, porém identificamos dois que versam sobre a Geometria Fractal, sem aplicá-la em outro campo. São eles: *Dos monstros de Cantor e Peano à geometria fractal da natureza*[67] de 1981 e *Sobre geometria fractal, e algumas das questões matemáticas que levantou*[68] de 1983.

O primeiro artigo, publicado no Seminário de Filosofia e Matemática realizado em Paris, aborda questões referentes a paradoxos vindos da topologia, desde o período de Cantor e Peano. Em particular, destaca que as curvas de Peano dão origem a uma revolução, sendo "[...] úteis para descrever a Natureza: árvores, rios, bacias hidrográficas, estrutura cerebral... O autor segue vários temas que são detalhados em seu livro [*The fractal geometry of nature*]" (Dubuc, s/ d., s/ p).

O segundo artigo, publicado nos anais do Congresso Internacional de Matemáticos, apresenta uma revisão do conceito de fractal do autor, bem como suas diversas aplicações. É destacado pelo revisor do MR a reflexão de Mandelbrot sobre a necessidade de uma definição para um conjunto fractal, afirmando que a descrita no livro de 1977, se deu mais por pressão do que por inevitabilidade. Por fim, os dois livros publicados por Mandelbrot são: *A geometria fractal da Natureza* em 1982 e *Os objetos fractais* em 1984. Ambos são versões, como sendo uma revisão e uma expansão das edições anteriores.

O professor Amnon Aharony, segundo a Universidade de Tel Aviv, trabalha com uma diversidade de tópicos relativos à matéria condensada, em particular, física mesoscópica e spintrônica. A busca no MR resultou em 11 artigos, dos quais sete junto a Mandelbrot e outros pesquisadores como autores, tendo sido apontados anteriormente. Com relação aos outros quatro temos: *Escala no limiar de percolação acima de seis dimensões*[69]; *Percolação, fractais e difusão anômala*[70]; *Correlações magnéticas nos fractais*[71]; *Sobre a dimensão fractal e*

---

[66] A descrição com todos os trabalhos encontrados, encontra-se no APÊNDICE A
[67] *Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale de la nature*
[68] *On fractal geometry, and a few of the mathematical questions it has raised*
[69] *Scaling at the percolation threshold above six dimensions*
[70] *Percolation, fractals, and anomalous diffusion*
[71] *Magnetic correlations on fractals*

correlações na teoria da percolação[72]. Provavelmente pela formação do professor, esses artigos versam sobre a aplicação dos fractais em conceitos da física.

O professor Yuval Gefen, possui seu nome atrelado ao Instituto Weizmann de Ciência, trabalhando com questões relacionadas à física. Dos 11 artigos resultantes da busca, em sete há coautoria com Mandelbrot, e dentre os que Mandelbrot não faz parte do conjunto de autores, em três há parceria com o professor Aharony. O artigo então que não foi comentado anteriormente é o *Animais vagos e cruzamento 2D para 1D no problema de percolação* em 1982, e tem como tema os sistemas percolantes, estudando efeitos de 1D com relação a comprimentos de tira em que aparece o conceito de dimensionalidade fractal de aglomerados.

Enfim, o professor Michael F. Shlesinger, um físico que desenvolve pesquisas em previsões estatísticas e descrições de processos aleatórios e determinísticos, teve como resultado na busca 11 publicações, sendo nove artigos de periódicos e dois artigos em eventos[73]. Como destacado, em sua linha de pesquisa, seus estudos também exploram relações dos fractais com a física, porém alguns já trazem discussões sobre fractais dentro do contexto matemático, como por exemplo o artigo *Passeios fractais aleatórios*[74], em que se trabalha as caminhadas aleatórias relacionadas a ideias de funções.

Considerando agora os autores destacados na entrevista de Mandelbrot a Lesort (1986) e/ou a Camp (1999) para sua tese, iniciamos com o professor Heinz-Otto Peitgen. Ele é um matemático alemão cujas pesquisas abrangeram Matemática Pura e Aplicada, Matemática Financeira, Educação Matemática e Computação Gráfica. Inicialmente não havia uma colaboração direta entre Peitgen e Mandelbrot, sendo o primeiro exposto às ideias do segundo em 1982 e Mandelbrot tomando conhecimento do trabalho de Peitgen em 1984, e uma parceria entre eles começando a partir de um encontro em 1985 (Lesort, 1986; Camp, 2009; Peitgen, s/ d.).

Ao realizar a busca no MR pelo nome do professor vinculado ao termo fractal, tivemos como resultado 28 publicações, sendo 16 livros, nove artigos de periódico e três artigos em eventos. Começando pelos 16 livros, podemos subdividi-los em três grupos: os que apontam os aspectos visuais dos fractais, os que buscam popularizá-los e os que se referem à sua inserção no ensino. Com relação ao primeiro grupo, podemos considerar cinco dentre os livros resultantes na pesquisa, os quais vão discutir questões estéticas e visuais dos fractais, relacionando-os principalmente com seu uso na produção de cenários e imagens.

---

[72] *On the fractal dimension and correlations in percolation theory*
[73] A descrição com todos os trabalhos encontrados, encontra-se no APÊNDICE B
[74] *Fractal random walk*

O segundo grupo, composto por seis livros, objetiva abordar as ideias e conceitos ligados a fractais, sem uma sofisticação matemática que se tornasse obstáculo para o seu estudo, tornando a visão sobre esse tema empolgante e que cativante ao público, além de estimular veemente a visualização desses objetos, contendo muitas imagens (coloridas e em preto e branco).

Finalmente, o terceiro grupo de livros, contendo cinco exemplares, refere-se a possibilitar material para a inserção dos fractais no contexto do ensino. Peitgen foi importante para começar essa discussão e aproximação entre as pesquisas de Mandelbrot e o cenário escolar, atingindo os diferentes níveis de ensino. É possível identificar, a partir da leitura dos resumos desses livros, que o autor possui um cuidado ao introduzir o assunto, mesmo para aqueles que se entendem leigos na matemática, se aprofundando gradativa e cuidadosamente.

> Mandelbrot sente que Peitgen tem uma grande oportunidade para o fazer porque ele é um professor e os professores podem organizar as pessoas em conjunto para fazer tarefas. Mandelbrot também sente que ele próprio nunca poderia ter produzido esses livros porque não poderia ter conseguido os colaboradores (Camp, 1999, p. 97, tradução nossa[75]).

Com relação às publicações em periódicos, Peitgen desenvolve pesquisas dentro da própria matemática, recorrendo a ferramentas computacionais em algumas delas, em particular buscando estudar as estruturas dos fractais. É possível identificar elementos como Triângulo de Pascal, sistemas dinâmicos, matrizes, curvas autoafins, tabelas numéricas gaussianas, funções autossimilares, polinômios de Carlitz, entre outros. Por fim, as publicações em anais de eventos têm direcionamentos semelhantes àquelas dos periódicos, almejando explorar os fractais e relacioná-los aos conceitos matemáticos.

Passando para o segundo nome em destaque nos materiais complementares, temos Loren Carpenter, cofundador e cientista-chefe da Pixar Animation Studios, que desenvolveu métodos e algoritmos para a produção de animações, baseado nas ideias de fractais publicadas por Mandelbrot. Em sua entrevista a Lesort (1986), Mandelbrot destaca que viu a aplicação de suas ideias, identificando erros na criação do algoritmo e indicando correções necessárias, pontuando que algumas simplificações não podiam ser feitas, mas que se sentia satisfeito por Carpenter ter sido capaz de usar os fractais e produzido elementos em grande estilo. Ao realizar a busca no MR, não foi encontrada nenhuma publicação sua vinculada aos fractais.

---

[75] Mandelbrot feels that Peitgen has a great opportunity to do so because he is a professor and professors can organize people together to do tasks. Mandelbrot also feels that he himself could never have produced these books because he couldn't have gotten the collaborators.

Por fim, o último nome em destaque é o de Richard F. Voss (Lesort, 1986; Camp, 1999), que realizou uma parceria com Mandelbrot a partir de 1975, contribuindo com elementos relacionados à programação dos algoritmos para geração dos fractais. Sua exposição às ideias de Mandelbrot, ocorreram pouco antes da sua colaboração, a partir da sua pesquisa para o Ph.D. na qual se propôs a estudar questões sobre sons e ruídos. Ao buscar informações e materiais para se aprofundar nesses assuntos, se deparou com artigos de Mandelbrot de 1960, os quais abordavam sobre ruídos (Camp, 1999). Na busca por emprego após terminar seu Ph.D., participando e acompanhando Mandelbrot em palestras, discussões e debates sobre a temática, foi convidado e aceitou um emprego no IBM, auxiliando Mandelbrot a produzir elementos de seus artigos.

Ao realizar a busca no MR, obtivemos como resultado quatro publicações: dois artigos em periódicos, um livro e um artigo em evento. Nos artigos de periódicos, um aborda questões referentes à percolação (*A dimensão fractal dos cascos dos aglomerados de percolação*[76] de 1984) e o outro a modelação de formas da natureza, como os ruídos, paisagens e nuvens (*Fractais aleatórios: autoafinidade em ruído, música, montanha e nuvens*[77] de 1989). Com relação ao livro, *A ciência das imagens fractais*[78] de 1988, tem-se que:

> Este é um livro sobre imagens fractais e como representá-las com o auxílio de computadores. É baseado nas notas de um curso dado por Barnsley, Devaney, Peitgen, Saupe e Voss na conferência SIGGRAPH ’87 em Anaheim, Califórnia. A intenção do livro é repassar o básico de quantas das imagens, já bem conhecidas de livros e artigos científicos e populares, capas de revistas e cartazes e exposições de arte, foram feitas (Ion, s/ d., s/ p., tradução nossa[79]).

Por último, com relação ao artigo, *Fractais aleatórios: caracterização e mensuração*[80], publicado nos anais de um evento no Instituto de Estudos Avançado NATO de 8 a 19 de abril de 1985, não há uma descrição sobre o que abordava seu trabalho, mas tem-se que o evento incluiu cinquenta artigos envolvendo temas sobre aleatoriedade, estudo de fenômenos, modelos, fractais, entre outros temas.

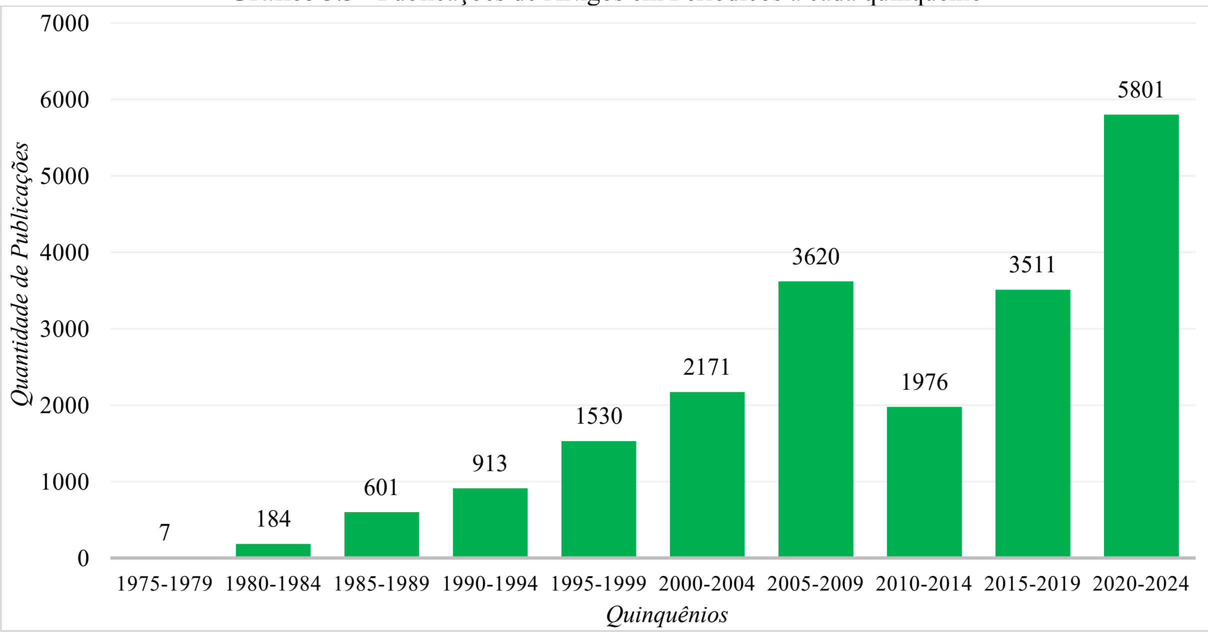
Debruçando-nos no segundo quinquênio, é possível observar que os estudos referentes à fractais concernentes a outras áreas continua, porém notamos que se desenvolveram estudos

[76] *The fractal dimension of percolation cluster hulls*
[77] *Random fractals: self-affinity in noise, music, mountains, and clouds*
[78] *The Science of fractal images*
[79] This is a book about fractal images and how to represent them with the aid of computers. It is based on the notes for a course given by Barnsley, Devaney, Peitgen, Saupe and Voss at the conference SIGGRAPH '87 in Anaheim, California. The intent of the book is to go over the basics of how many of the pictures, by now well known from scientific and popular books and papers, magazine covers and posters and art exhibits, were made.
[80] *Random fractals: characterization and measurement*

focando no que compreendemos nesta pesquisa como sendo a Geometria Fractal e suas relações com outros conceitos matemáticos. Ademais aos quantitativos de publicações, o crescimento de pesquisadores interessados no tema, bem como a busca por inserção no contexto educacional, corrobora com a propagação e expansão das ideias dos fractais, fortalecendo os estudos e pesquisas na área.

Os gráficos a seguir mostram as características de cada uma das categorias de publicação presentes no MR por quinquênios de 1975 a 2024[81]. Iniciamos pelos artigos publicados em periódicos.

Gráfico 3.3 - Publicações de Artigos em Periódicos a cada quinquênio

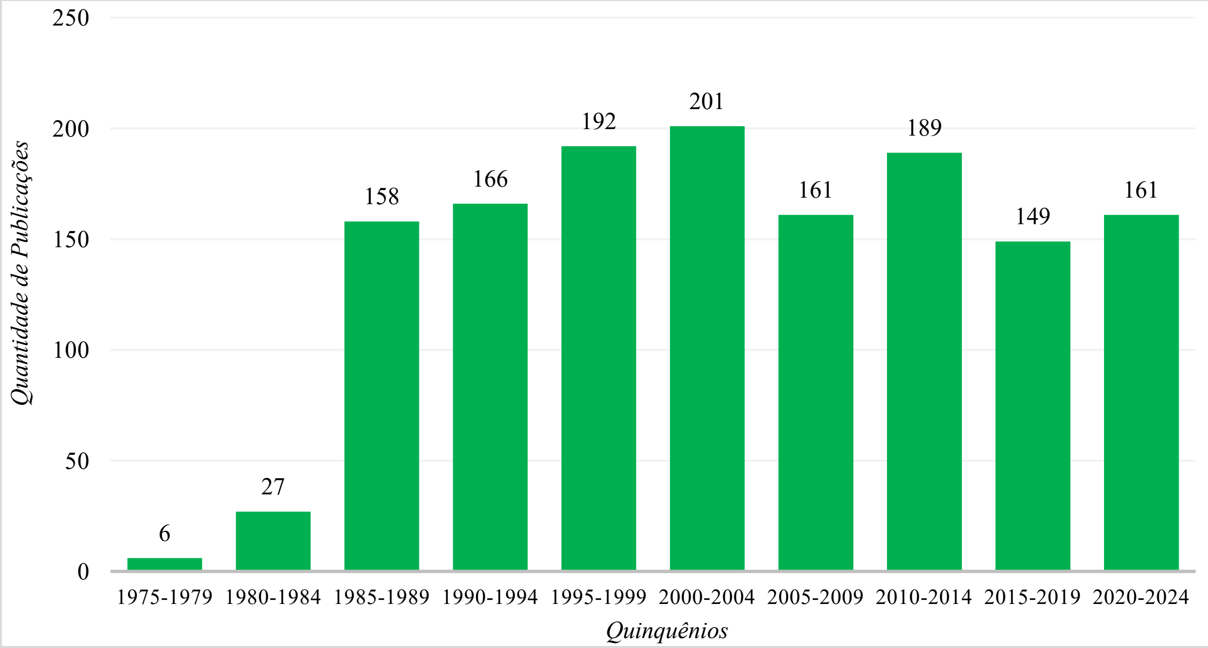


Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

No Gráfico 3.3 observa-se que mesmo tendo uma queda do sétimo para o oitavo quinquênio, há um crescimento nas publicações de artigos em periódicos relativos ao tema dos fractais, em particular o último superando todos os outros quinquênios. Podemos supor que os periódicos tem se mostrado aberto para esse tipo de trabalho e que os pesquisadores estão interessados em publicar seus estudos nesse espaço.

[81] A pesquisa apresentada na seção 2.2.2 e quantificada na tabela 2.2 foram levantadas no dia 07 de março de 2024. Os dados presentes nesses gráficos são de 13 de março de 2024. Então há uma discrepância de 36 publicações que foram acrescidas nesse intervalo de tempo.

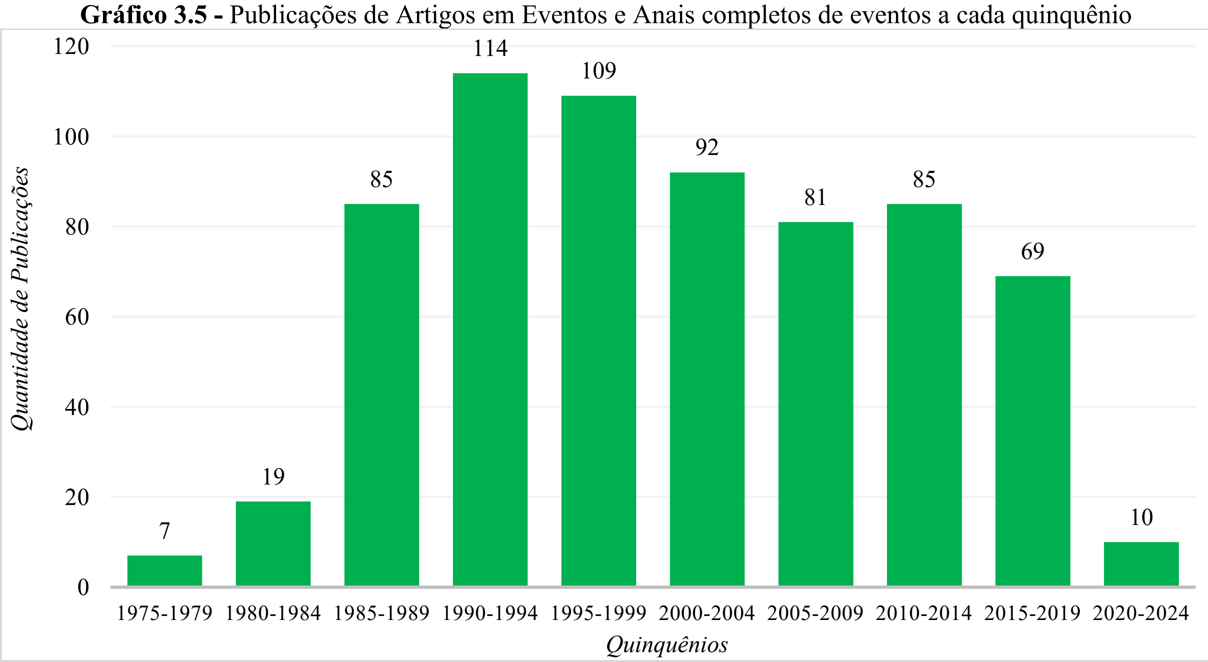
Gráfico 3.4 - Publicações de Artigos em Eventos a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Com relação aos artigos em eventos, podemos inferir que não há nem crescimento, mas nem decrescimento significativo, existe certa estabilidade a partir do terceiro quinquênio. Uma hipótese para essa constância pode estar relacionada à existência (ou falta de) eventos específicos/temáticos, algo a ser discutido na seção 3.2.3.

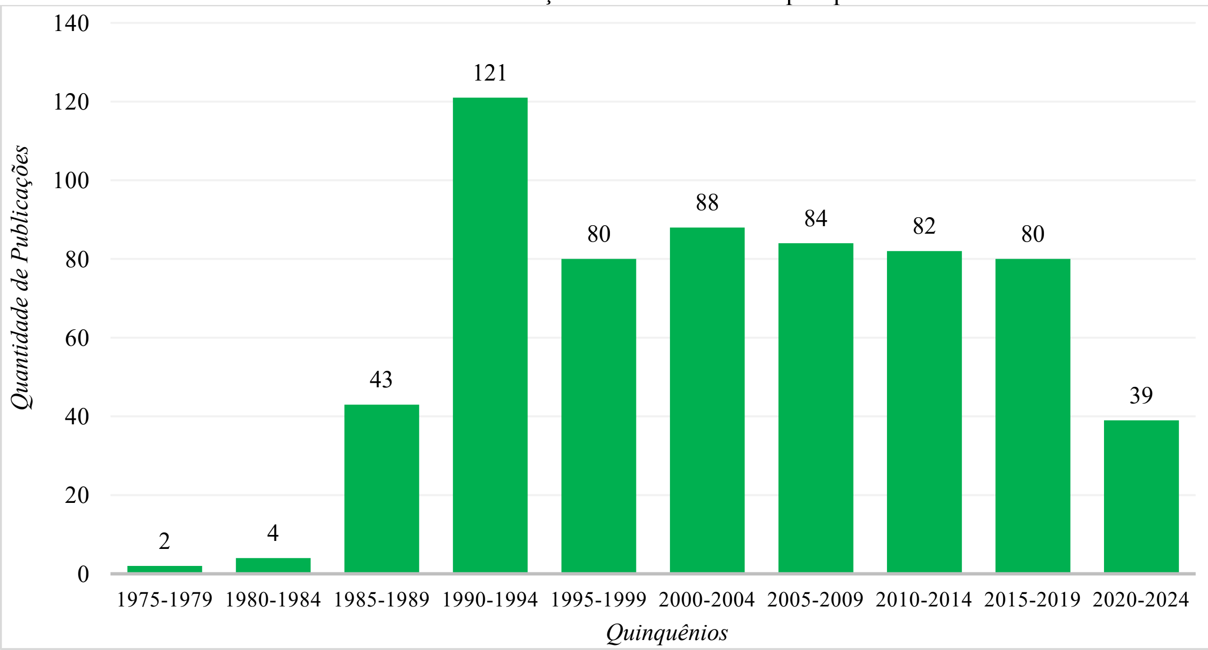
Gráfico 3.5 - Publicações de Artigos em Eventos e Anais completos de eventos a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

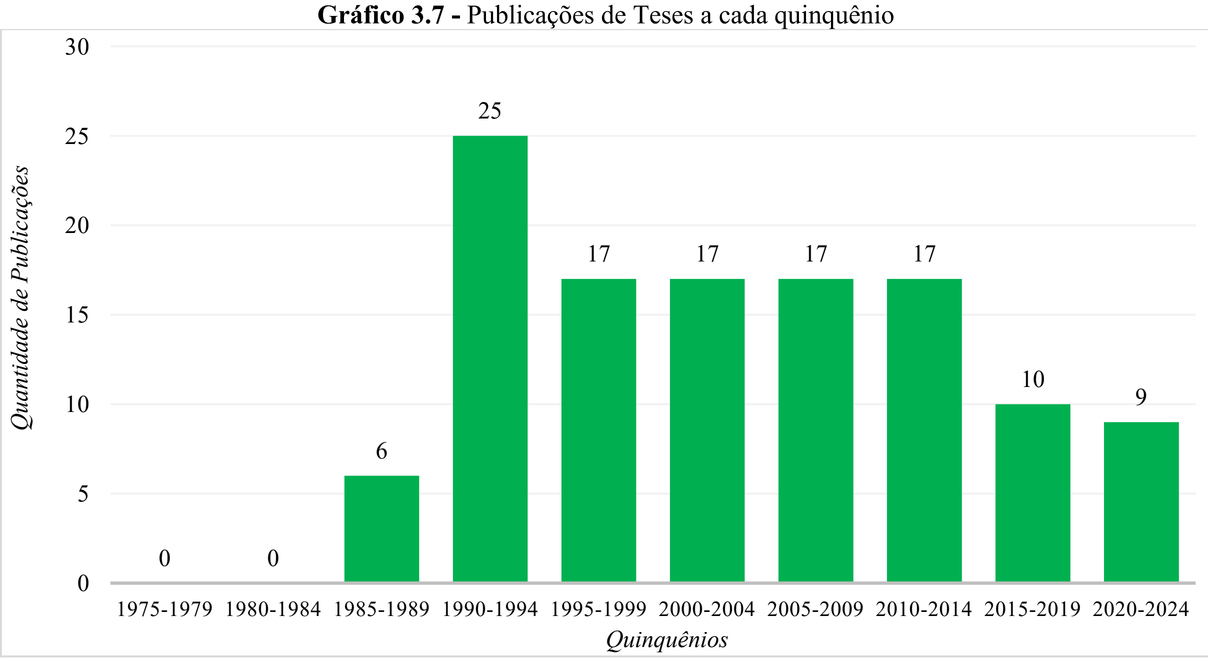
Com relação às menções da palavra fractal em nome de eventos e anais completos de eventos, observamos que no terceiro e quarto quinquênio houve um crescimento na quantidade de publicações, que depois foi caindo e no último quinquênio que ainda não está completo tem uma quantidade entre a do primeiro e a do segundo. Nessa categoria, não elencamos nenhuma hipótese para o decrescimento das publicações.

Gráfico 3.6 - Publicações de Livros a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Gráfico 3.7 - Publicações de Teses a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Para os livros e as teses, o comportamento se assemelha. Nos primeiros dois quinquênios há poucas ou nenhuma publicação, no terceiro tem-se algumas e no quarto a produção cresce significativamente. Do quinto ao oitavo quinquênio, existe uma certa constância na quantidade de publicações, reduzindo nos últimos dois. Também nessas duas categorias não levantamos hipótese que pudessem explicar esse comportamento.

De forma geral, observando os artigos em periódicos, os artigos em eventos, os eventos e trabalhos publicados em anais de eventos, os livros e as teses, é possível perceber que há um crescimento nas publicações, em particular entre o terceiro e quarto quinquênio. Podemos inferir que há pesquisas em desenvolvimento, que estão tendo seus resultados, considerações e investigações apresentados e divulgados nesses espaços.

Desse modo, compreendemos que há pesquisa e divulgação de forma explícita, dois componentes do processo de Consolidação. Processos estes que se relacionam com o Sistema Conceitual (Constituição) e a Perspectiva Cognitiva (Institucionalização) no que se refere a Pesquisa, e com o Sistema Social (Constituição) e a Perspectiva Social (Institucionalização) no que se refere à Divulgação. Entendemos que com essas publicações, ocorrem discussões dentro da área da Matemática, assim como de outras áreas.

Percebemos também que ao trazermos trabalhos que apresentam os fractais como forma de explorar e modelar fenômenos e objetos, é possível reconhecer isto como elemento que se refere à aplicação do conhecimento, componente do processo de Consolidação que pode ser identificado também como um componente do Sistema Social (Constituição).

Também destacamos que há publicações que se referem a notas de aula de cursos ou mesmo de palestras e conferências realizadas em âmbito universitário. Esses elementos configuram um dos componentes do Sistema Social (Constituição), uma vez que se relacionam com a graduação e a pós-graduação, divulgando e introduzindo a temática, além de estimular a continuidade da pesquisa sobre esta.

3.2.2 *Dos periódicos*

Para nossa busca por periódicos que abordassem especificamente a temática dos fractais, consideramos as que possuíam o termo *fractal* (e suas variações) no título, e encontramos três periódicos que atendiam essa característica. O primeiro, e mais velho, periódico iniciou-se em 1991, continua publicando até hoje e tem como título: *Caos, Sólitons e*

Fractais[82]. Sua frequência de publicação é de 12 volumes por ano (é de edição mensal) e tem como editora a *Elsevier Ltd*. Entre seus assuntos de interesse, destacado no escopo da revista tem-se:

> 1. dinâmica não linear e processos de não-equilíbrio em física e matemática aplicada;
> 2. matéria complexa e redes;
> 3. biofísica, biologia de sistemas e biologia computacional;
> 4. flutuações e processos aleatórios;
> 5. inteligência artificial, *machine learning* e big data analytics;
> 6. auto-organização e fenômenos emergentes;
> 7. aplicações às ciências sociais, engenharia e econofísica. (Editoral Caos, Sólitons e Fractais, s/ d., s/ p., tradução nossa[83])

Apesar de não constar na lista como tema de interesse, os fractais aparecem mais abaixo na mesma página, como sendo um critério adicional. É expresso pela revista o cerne em artigos que promovam insights profundos com relação à teoria dos fractais, focando em uma aplicação particular, especialmente os sistemas complexos, deixando a parte numérica apenas como apoio para os resultados desenvolvidos. Dessa forma, identificamos os fractais como sendo um elemento importante na composição dos artigos a serem publicados na revista.

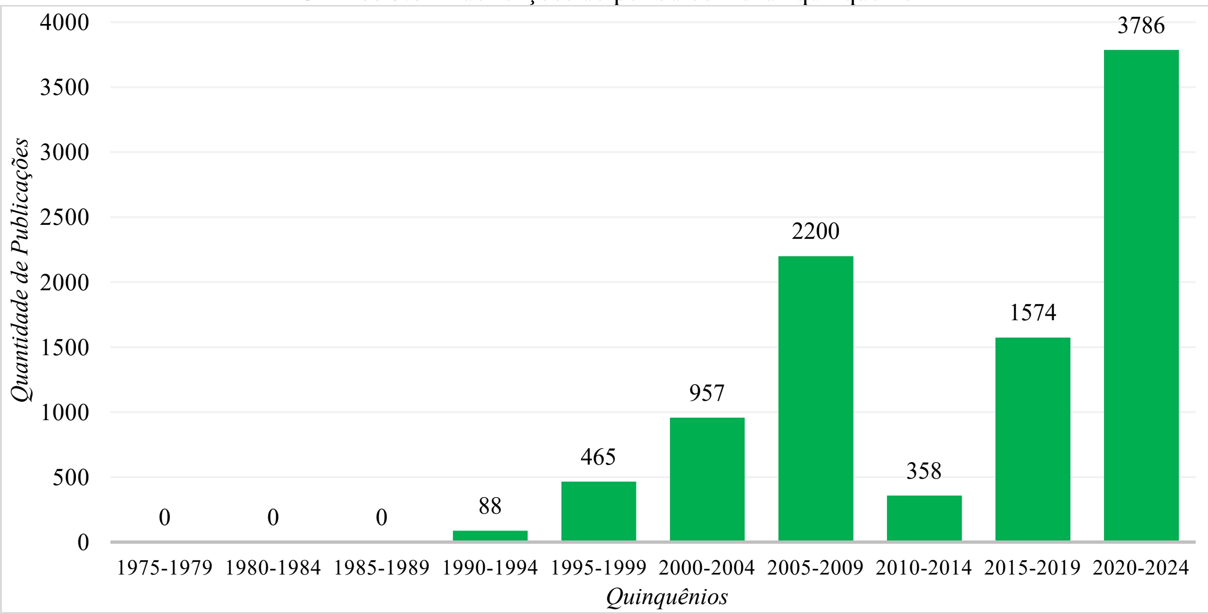
O periódico tem os seguintes índices de publicações ao longo dos anos[84]:

[82] *Chaos, Solitons & Fractals*

[83] 1. *nonlinear dynamics and non-equilibrium processes in physics and applied mathematics; 2. complex matter and networks; 3. biophysics, systems biology and computational biology; 4. fluctuations and random processes; 5. artificial intelligence, machine learning and big data analytics; 6. self-organization and emergent phenomena; 7. applications to social science, engineering and econophysics*

[84] Seguimos a mesma distribuição dos quinquênios feitos nas buscas na seção 3.2.1. Além disso, destacamos que o MR apresenta os dados quantitativos até o ano de 2023. Acreditamos que o ano de 2024 não seja contabilizado por ainda estar em andamento.

Gráfico 3.8 - Publicações do periódico a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

O segundo periódico se entitula *Fractais: Geometria Complexa, Padrões e Escala na Natureza e na Sociedade*[85], com a primeira publicação em 1993. A frequência é de oito edições por ano pela editora *World Scientific Publishing*. Como escopo, a revista destaca a relação da investigação de fenômenos e como isso exige recursos da Geometria Complexa, de padrões e escalas, bem como da Geometria Fractal para se descrever, por exemplo, objetos com dimensão não inteira. Não há uma indicação explícita, tal qual no primeiro periódico, da presença dos fractais nas publicações, porém é destacado que:

> Usando a geometria fractal como uma linguagem nas investigações teóricas, numéricas e experimentais relacionadas, foi possível obter uma visão mais profunda de problemas anteriormente intratáveis. Entre muitos outros, uma melhor compreensão dos fenômenos [...] surgiu através da aplicação de conceitos como invariância de escala, autoafinidade e multifractalidade (Editorial Fractals, s/ d., s/ p., tradução nossa[86])

Portanto, compreendemos que pela natureza dos objetos de interesse do periódico, a presença da Geometria Fractal se faz importante para seu estudo, investigação e descrição. Cabe a ela, em um contexto interdisciplinar, compor em conjunto com elementos de outros campos

---

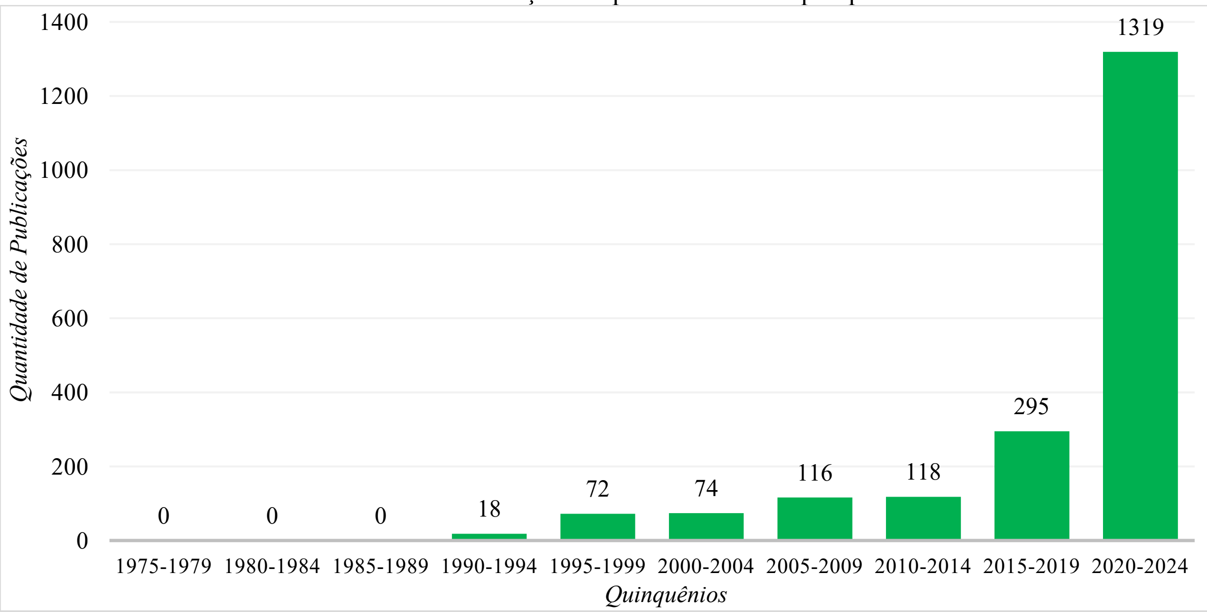
[85] *Fractals: Complex Geometry, Patterns, and Scaling in Nature and Society*

[86] *Using fractal geometry and scaling as a language in the related theoretical, numerical and experimental investigations, it has been possible to get a deeper insight into previously intractable problems. Among many others, a better understanding of [...] has emerged through the application of such concepts as scale invariance, self-affinity and multifractality*.

reunir diferentes abordagens e visões científicas sobre os comportamentos espaciais e temporais complexos na natureza e na sociedade (Editorial Fractals, s/ d.).

Com relação às publicações, o periódico tem os seguintes índices[87]:

Gráfico 3.9 - Publicações do periódico a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

O terceiro periódico é intitulado *Revista de Geometria Fractal: Matemática dos Fractais e Tópicos Relacionados*[88], iniciado em 2014 e com frequência de quatro números por ano, é publicado pela editora *EMS Press*, a editora da Sociedade Europeia de Matemática. Em seu escopo, a revista pontua o objetivo de publicar contribuições para a Geometria Fractal e assuntos relacionados, ou para áreas em que as propriedades dos fractais possuem papel importante.

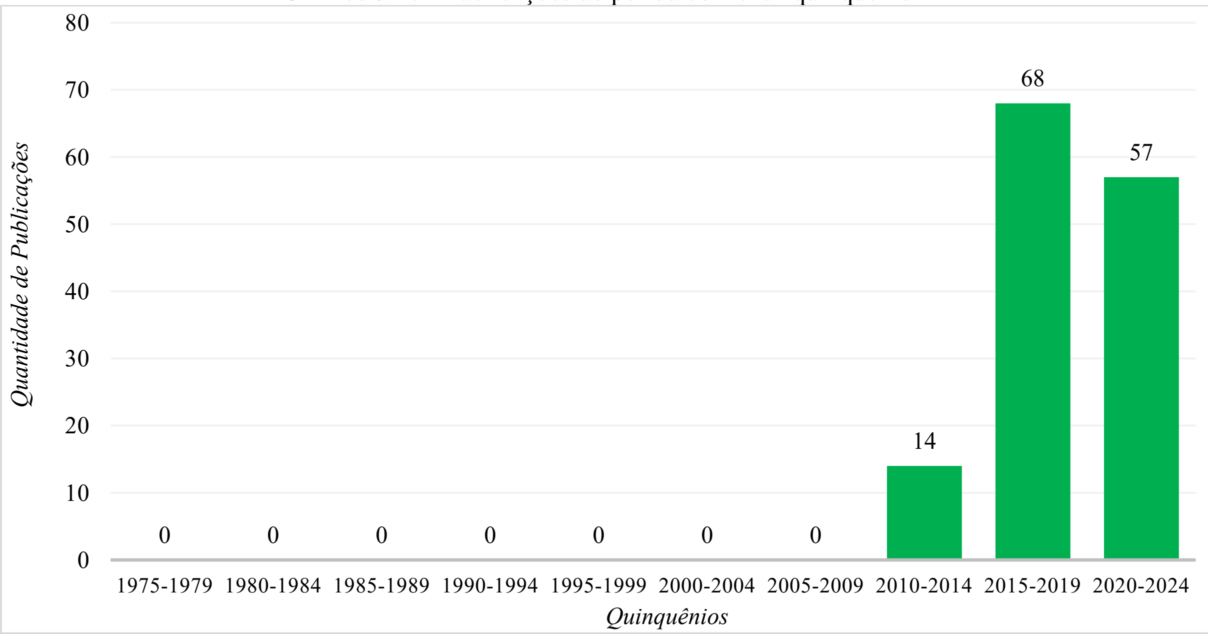
Sobre suas publicações, o periódico tem os seguintes índices:

---

[87] Os dados no MR estão disponibilizados até o ano de 2019 apenas, e a revista dada como encerrada as atividades. Uma hipótese é que os dados estavam vinculados à versão impressa, que pode ter deixado de ser publicada, ficando apenas a versão digital.

[88] *Journal of Fractal Geometry: Mathematics of Fractals and Related Topics*

Gráfico 3.10 - Publicações do periódico a cada quinquênio[89]



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Ao olharmos para esses periódicos, percebemos que os dois primeiros estão a mais de 30 anos realizando publicações e principalmente no último quinquênio tem publicado quantidades expressivas, particularmente se comparado aos quinquênios anteriores. Embora possua quantidade menor, provavelmente por ser mais nova, as publicações estão presentes.

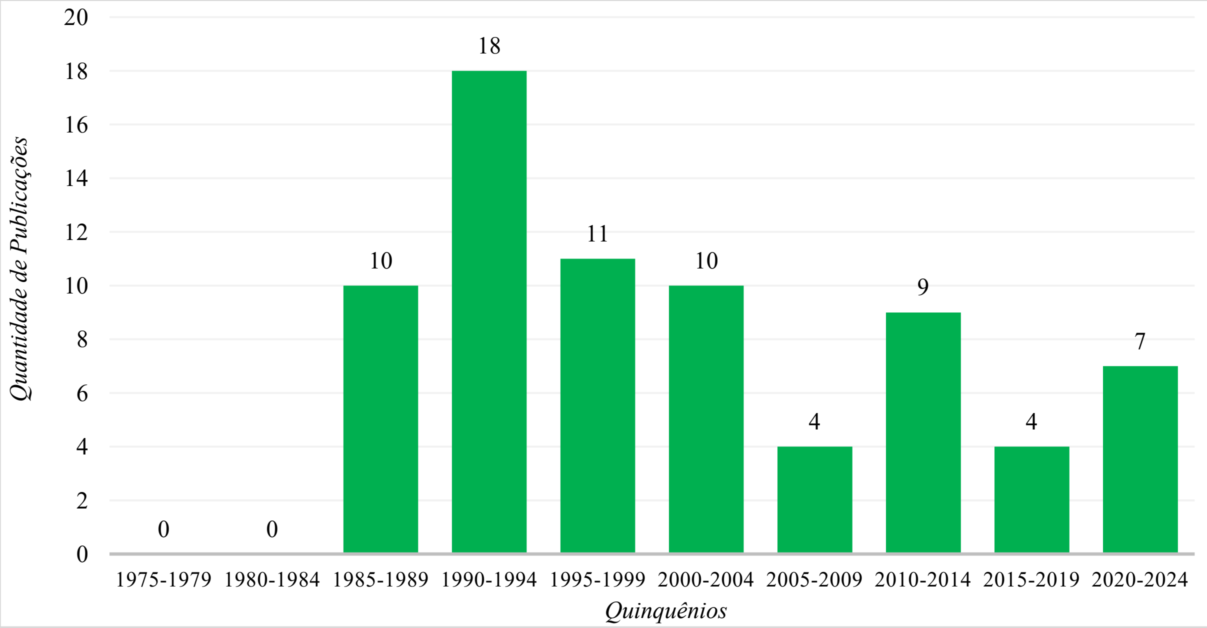
Entendemos a existência cada vez maior de publicações nos periódicos sobre os fractais, caracterizando tanto a presença da Pesquisa, componente da Consolidação, quanto dos periódicos, caracterizando a presença de um componente do Sistema Social referente ao processo de Constituição. Porém, entendemos a presença do último componente destacado como sendo algo ainda inicial, uma vez que encontramos apenas três periódicos que abordam a temática como ponto central e a apresentam em seu título.

3.2.3 *Dos eventos*

Assim como destacado anteriormente, ao buscarmos por eventos que possuíssem o termo *fractal* e/ou suas variações (*fractals*, *fractale*, entre outras) obtivemos como retorno 73 resultados. O quantitativo referente a esses eventos está representado no Gráfico 3.11.

[89] Os dados quantitativos presentes no MR são até o ano de 2023. Acreditamos que o ano de 2024 não seja contabilizado por ainda estar em andamento.

Gráfico 3.11 - Publicações referentes a Eventos a cada quinquênio



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

A partir dessas informações é possível observar que apesar da primeira publicação que encontramos em nossa pesquisa ser de 1975, apenas em 1985 ocorre a primeira publicação sobre um evento destinado a discutir acerca dos fractais. Semelhante ao realizado com os periódicos, nos atentaremos ao primeiro quinquênio em que aparecem resultados para a busca (de 1985 a 1989).

Intitulado *Caos, fractais e dinâmicas*[90], o primeiro evento citado pelo banco de dados, diz respeito a um compilado de discussões referente a um evento realizado em março de 1981 e 1983, na cidade de Guelph, no Canadá. A primeira parte, que corresponde ao evento de 1981, traz questões relacionadas à Ciência do Caos, enquanto a segunda parte, que corresponde ao evento de 1983, trata de temas relativos à sistemas dinâmicos e aos fractais. Em particular, tem-se cinco produções de Mandelbrot na segunda parte, abordando os dois temas daquele evento.

O segundo evento é intitulado *Dinâmica caótica e fractais*[91], e corresponde a uma conferência realizada no Instituto de Tecnologia da Geórgia, em Atlanta, EUA, entre os dias 25 e 29 de março de 1985. Com a intenção de discutir a Matemática nas Ciências e na Engenharia, os trabalhos apresentados versam na primeira parte sobre a Ciência do Caos relacionada aos fractais, utilizando-os como forma de representação, enquanto a segunda parte debate sobre os

[90] *Chaos, fractals, and dynamics*
[91] *Chaotic dynamics and fractals*

Conjuntos de Julia, e a terceira parte trata equações e sistemas dinâmicos que podem representar esse conjunto.

O terceiro evento, *Fractais em física*[92], trata-se do Simpósio Internacional de Trieste, realizado em Trieste, Itália, de 9 a 12 de julho de 1985. Contendo 84 artigos, são discutidos tanto elementos referentes a características e propriedades dos fractais (dimensão fractal, conjuntos fractais, tipos de fractais, entre outros), quanto aqueles que abordam as relações com tópicos e contextos da física (mecânica estatística de superfícies aleatórias, tensão superficial, dinâmica, entre outros).

Com foco em discutir questões relacionadas à dimensão, o quarto evento *Fractais*[93], que ocorreu em Masson, Paris, em 1987, apresenta trabalhos que debatem aspectos históricas referentes aos fractais, bem como aplicações no contexto matemático, isto é, de questões de "[...] discurso casual (Mandelbrot) até a análise matemática – elementar e avançada – até várias aplicações em muitos e diversos campos" (Geffen, s/ d., s/ p.).

Nominado *Caos, ruído e fractais*[94], o quinto evento realizado em Como, Itália, nos dias 18 e 19 de setembro de 1986, tratou sobre questões da física relacionadas aos fractais, em particular, como destacado no título, que envolvessem temas ligadas a ruídos e fenômenos que aparentemente possuíam uma desordem, trabalhando também com questões ligadas à mecânica quântica.

Com relação ao sexto evento, *Fractais, quasicristais, caos, nós e mecânica quântica algébrica*[95], este fez parte de um Workshop de Investigação Avançada da OTAN sobre novos conceitos teóricos em físico-química, conceitos esses em que se tinha a presença de fractais. O sétimo evento refere-se mesmo evento que o terceiro, apenas aparecendo em russo.

O oitavo evento, nominado *Caos e fractais*[96], trata-se de notas de aula referentes a um curso de curta duração promovido pela Sociedade Americana de Matemática, realizado em Providence, Rhode Island, de 6 a 7 de agosto de 1988. Esse curso abordou características relativas aos fractais, relacionando-os a sistemas de funções iteradas por exemplo.

O nono evento, *Fractais em geofísica*[97], diferente dos demais não possui menções de onde e quando aconteceu, apenas indica que houve a publicação por uma editora suíça chamada *Birkhäuser Verlag* em 1989. Como o nome sugere, neste espaço as produções buscavam utilizar

---

[92] *Fractals in physics*
[93] *Fractals*
[94] *Chaos, noise and fractals*
[95] *Fractals, quasicrystals, chaos, knots and algebraic quantum mechanics*
[96] *Chaos and fractals*
[97] *Fractals in geophysics*

as propriedades e características dos fractais para explicar e modelar fenômenos ligados à geofísica, como escoamentos, fraturas em rochas, topografia, geologia de escala, entre outros.

O último evento desse quinquênio, intitulado *Origem física e propriedades dos fractais*[98], refere-se a um Seminário Especial sobre Fractais, realizado em Érice, Itália, de 9 a 15 de outubro de 1988. De acordo com o revisor:

> Esta é uma coleção de artigos de pesquisa sobre modelos para vários fenômenos físicos que vão desde o nível molecular até a distribuição de galáxias Leis de autossimilaridade e escalonamento fornecem o tema comum. [...] Enquanto a ênfase está em métodos teóricos, resultados numéricos e experimentais são incluídos para ilustração (Bandt, s/ d., s/ p., tradução nossa[99]).

Nesta mesma revisão, são destacados dois temas principais: a característica dos modelos fractais apresentados como sendo do tipo estocástico, relacionando-se com o movimento browniano e processos de Lévy por exemplo, e a multifractalidade, conceito que é aplicado a ideias vinculadas a difusão e a turbulência.

Nos demais quinquênios obtivemos percepções semelhantes ao que acontece neste que descrevemos: há tanto eventos que tratam os fractais como ponto central, buscando explorar suas propriedades e existem aqueles que discutem os fractais em conjunto com outras teorias e áreas científicas, ou até mesmo por meio de aplicações em outros objetos e fenômenos, a fim de estudá-los e compreender suas características.

Em particular, um nos chamou atenção. Intitulado *Geometria fractal e estocástica*[100], esse evento possui seis edições que deram-se nos anos de 1994, 1998, 2003, 2008, 2014 e 2018, ocorrendo respectivamente em: Finsterbergen, Greifswald/Koserow, Friedrichroda, Greifswald, Tabarz e Bad Herrenalb, todas cidades alemãs. Desses, os quatro primeiros foram publicados pela *Birkhäuser Verlag*, editora que posteriormente foi vendida para a *Springer-Verlag*, publicando os dois últimos anais de evento sob o nome de *Birkhäuser/Springer*.

Esse evento trata-se de uma conferência sobre o uso da Geometria Fractal na estocástica. De acordo com o dicionário Michaelis, estocástica vem a ser o "estudo que tem por objeto a aplicação do cálculo de probabilidades a dados estatísticos, na tentativa de estabelecer a existência de variáveis permanentes e regulares" (Michaelis, 2024)[101].

---

[98] *Fractal's physical origin and properties*

[99] *This is a collection of survey articles concerning models for various physical phenomena ranging from the molecular level up to the distribution of galaxies. Self-similarity and scaling laws provide the common theme. [...] While the emphasis is on theoretical methods, numerical and experimental results are included for illustration.*

[100] *Fractal geometry and stochastics*

[101] Disponível em: Estocástica

Nos comentários e resumo referentes à quarta edição (2008) é destacado que "nos últimos quinze anos, a geometria fractal estabeleceu-se como uma teoria matemática por direito próprio" (Brand; Mörters; Zähle, s/ d., s/ p., tradução nossa[102]). É possível considerar que para esse contexto, a Geometria Fractal possuía certa força, havendo um reconhecimento de sua existência. Ainda nas observações pontuadas, fica evidente que a integração entre fractais, análise e estocástica estava influenciando fortemente no desenvolvimento de construções em modelagem matemática e estruturas complexas, impulsionando áreas relacionadas a aplicações da física estatística, biomatemática e finanças.

Ademais, ao considerarmos os 73 eventos, podemos subdividi-los em 2 grupos: um com o foco nos fractais e discussões sobre esses objetos matemáticos e outro em que os fractais aparecem atrelados a diferentes áreas a fim de a explicar ou representar algum fenômeno. Compreendemos então que houve interesse, pesquisa, debates e palestras tanto no sentido de abordar e aprofundar os conhecimentos sobre fractais, olhando esses objetos matemáticos por eles mesmos, quanto desenvolver outras áreas a partir de elementos da Geometria Fractal, semelhante ao que ocorreu com os materiais do eixo 1. Portanto, é possível concluir que houve espaço e discussão sobre a temática tanto dentro do próprio campo quanto fora.

Do modo como ocorreu com as publicações e periódicos, entendemos que também ocorre com os eventos. Conseguimos identificar elementos referentes aos componentes do Sistema Conceitual e do Sistema Social (Constituição) e da Perspectiva Cognitiva e Perspectiva Social. Consoante ao exposto, observamos os dados quantitativos a partir do seguinte quadro:

Quadro 3.1 – Panorama dos dados encontrados no MR

<table>
<tr><th></th><th>1975-1979</th><th>1980-1984</th><th>1985-1989</th><th>1990-1994</th><th>1995-1999</th><th>2000-2004</th><th>2005-2009</th><th>2010-2014</th><th>2015-2019</th><th>2020-2024</th></tr>
<tr><td>Publicações</td><td colspan="10">Há publicações acontecendo</td></tr>
<tr><td>Periódicos</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td><td colspan="7">Há periódicos ativos</td></tr>
<tr><td>Eventos</td><td>------</td><td colspan="9">Há eventos acontecendo</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Fazendo um resgate das discussões referentes ao eixo 1, apontadas na seção 3.1, notamos que não se tem a presença do termo fractal antes da publicação do livro de Mandelbrot em 1975. Isso é evidenciado na seção 3.2.1, pois ao realizar a pesquisa no banco de dados, este livro foi o resultado da busca mais antiga que se obteve. Pudemos observar que após a edição de Mandelbrot, que acabou nomeando e caracterizando os fractais, as publicações de trabalhos

[102] *Over the last fifteen years fractal geometry has established itself as a substantial mathematical theory in its own right*

nessa temática se caracterizam tanto como forma de criticar e tentar comprovar que aquele estudo tem inconsistências ou que não é válido, quanto como forma de buscar conhecer mais daquele objeto matemático, seja por meio de investigações por ele próprio, seja por aplicações em outras áreas.

Em consequência do aumento dessas publicações, como observamos no gráfico 3.1, entendemos a necessidade de ambientes para se discutir o tema, demandando assim, eventos e periódicos. Bazi e Silveira (2007), como indicado na seção 1.3, destacam a importância desses espaços para o registro dos conhecimentos investigados e da autoria dessas pesquisas, bem como do espaço de debate e avaliação das pesquisas realizadas.

A partir das nossas pesquisas, identificamos que, embora a publicação tenha ocorrido em 1985, o primeiro evento com temática voltada aos fractais é datado de 1981. Isso não significa que não se discutia os fractais anteriormente, pois os gráficos 3.4 e 3.5 evidenciam a presença de trabalhos em eventos e em anais de eventos relativos aos fractais. O que destacamos aqui é o fato de ser estruturado um evento com essa temática em específico. Consideramos então que há o reconhecimento da relevância do tema para a comunidade interna e externa.

Pelos eventos que observamos, sua grande maioria era composta de simpósios e conferências, em que diferentes pesquisadores apresentavam/falavam sobre suas pesquisas. Não encontramos no site do MR informações detalhadas sobre eles, mas entendemos que foram ambientes de apresentação, debate e arguição, semelhante ao que temos hoje nos eventos em que participamos.

Por fim temos os periódicos, que de acordo com nossas buscas o mais antigo que aborda de forma específica os fractais, inicia em 1991 no quarto quinquênio. Inferimos ainda que o intervalo entre a primeira publicação e o surgimento do periódico pode ter se dado ao fato de que para se publicar em um periódico, um dos elementos necessários é ter um corpo editorial, acompanhado de pareceristas, capazes de avaliar a pertinência, relevância e conformidade com o escopo da revista. No caso dos três periódicos encontrados e estudados em nossa pesquisa, todos trabalham com a revisão por pares. Assim, seria necessário primeiramente ter pessoas que estudaram e se aprofundaram na temática, para poderem analisar as publicações submetidas.

Diante desses elementos destacados, compreendemos que, partindo de um olhar referente às publicações, periódicos e eventos, há certo grau de maturidade nos três processos que estamos investigando haja visto o que pontuamos nos parágrafos anteriores. Porém também reconhecemos que ainda se faz necessário fortalecer e aumentar ainda mais esses espaços específicos para discussão, uma vez que pelos dados quantitativos observados, embora as publicações em um geral estejam em um crescente, quando nos deparamos com eventos, livros e teses, os dados indicam que isso se mantém ou há uma diminuição.

3.3 Para além dos dois eixos

Ao longo do levantamento, leitura e fichamento, e estudo dos materiais aqui apresentados, nos deparamos com informações, dados e considerações que estavam para além dos focos destacados em cada eixo. Apontamos nesta seção alguns desses elementos apresentados, visando enriquecer nossas discussões.

Um primeiro ponto é referente à inserção dos fractais em um contexto educacional. Como destacado na seção 1.3, o ensino é um componente da Consolidação de uma área científica que se relaciona com o Sistema Social (Constituição), portanto a evidência da inserção dessa temática em espaços voltados ao ensino, nos indica a presença do desenvolvimento desse processo.

Em sua tese, Camp (1999) destaca que Peitgen (indicado na seção 3.2.1) foi um pesquisador fundamental para o desenvolvimento do projeto *Fractais Para a Sala de Aula*[103], "[...] uma série de livros publicada pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática, com o objetivo de trazer os fundamentos da geometria fractal para as salas de aula do ensino secundário[104]" (Camp, 1999, p. 96). Realizando uma busca no MR[105], encontramos quatro publicações relacionadas a esse projeto:

- Fractais Para a Sala de Aula: Atividade Estratégicas (Volume 1)[106] – 1991;
- Fractais Para a Sala de Aula: Parte 1[107] – 1992;
- Fractais Para a Sala de Aula: Atividade Estratégicas (Volume 2)[108] – 1992;
- Fractais Para a Sala de Aula: Parte 2[109] – 1992.

Nos comentários disponíveis no MR, feitos por Martina Zähle, é estabelecido um paralelo entre a inserção da Probabilidade no contexto escolar com a Geometria Fractal, dando quase como certo a inserção dessa Geometria. É destacado no comentário o cuidado com a

[103] *Fractals For the Classroom*.
[104] Equivalente ao nosso Ensino Médio
[105] Buscamos pelo nome o autor no campo de buscas, sem inserir nenhum filtro ou operador.
[106] *Fractals For the Classroom: strategic activities. Vol. 1*
[107] *Fractals For the Classroom. Part 1*
[108] *Fractals For the Classroom: strategic activities. Vol. 2*
[109] *Fractals For the Classroom. Part 2*

linguagem e a abordagem da temática, de forma a atingir tanto quem está inserido no contexto matemático, quanto aqueles que não possuem proximidade, mas que são interessados nesta área científica. Assim a Parte 1, pode ser utilizada para a introdução do tema para aqueles que estão envolvidos com aulas e sala de aula, como para entusiastas que desejam estudar e conhecer os fractais.

> O conteúdo é cuidadosamente organizado por princípios didáticos e os autores enfatizam o lado experimental da questão. Desta forma, uma ampla variedade de ideias matemáticas simples, mas fortes, de geometria fractal é iluminada. O texto é adicionalmente afrouxado por um grande número de observações históricas (Zähle, s/ d., s/ p., traduação nossa[110]).

Com relação à Parte 2, Zähle (s/ d.) destaca que possui o mesmo estilo da primeira, agora lidando com aspectos dinâmicos da complexidade: "[...] o signo do caos, a transição da ordem para o caos, atratores estranhos, conjuntos Julia, e o conjunto de Mandelbrot, autômatos celulares e *L*-Sistemas" (s/ p., tradução nossa[111]). É observado também que semelhante à primeira parte, cada capítulo possui uma programação de computador, referente a construções e algoritmos importantes.

No que se refere aos cadernos de Atividades Estratégicas (Volume 1 e 2), Nima Geffen aponta em seus comentários, disponíveis no MR, que esses apresentam projetos para os alunos construírem a partir da computação, da criação de gráficos, de forma manual e auxiliados por computadores. Ressalta-se que possuem explicações detalhadas e claras contendo imagens, e que todos os exercícios possuem resposta apresentada. Quanto aos exercícios, estes exploram as propriedades dos fractais.

> Dito tudo isso, recomendo os dois volumes para todos os interessados nesses temas. Eles fornecem um exercício necessário para o estudante sério (e trabalhador), e um jogo divertido para o amador com alguma formação, interesse e perseverança. (Não é realmente necessário muito para fazer muitos dos projetos e exercícios, e muito pode ser descoberto fazendo) (Geffen, s/ d., s/ p., tradução nossa[112]).

Ainda falando sobre a inserção e a relação dos fractais com o ensino, ao realizar as buscas referentes ao que apontamos nas seções 2.2.2 e 3.2.3 nos deparamos com o evento

---

[110] *The content is carefully organized by didactical principles and the authors emphasize the experimental side of the matter. In this way a broad variety of simple but strong mathematical ideas of fractal geometry is illuminated. The text is additionally loosened up by a large number of historical remarks*

[111] *[...] the sign of chaos, the transition from order into chaos, strange attractors, Julia sets, and the Mandelbrot set, cellular automata and L-systems*

[112] *Everything said, I highly recommend the two volumes for everyone interested in these topics. They provide a necessary exercise for the serious student (and worker), and a fun game for the amateur with some background, interest and perseverance. (Not much is actually needed to do many of the projects and exercises, and much can be figured out by doing.)*

intitulado *Fractais, gráficos e educação matemática*[113]. Tendo como editores/organizadores Michel Frame e Benoit Mandelbrot em 2002, no resultado da busca no MR, não encontramos resumo ou comentário sobre, apenas indicações que fazia parte da coleção de Notas da MAA (*Associação Matemática da América*[114]) e estava inserido na seguinte classificação do MR: <u>00B25 – Anais de conferências de interesse específico diverso</u>.

Ao pesquisar mais a respeito no site da MAA e no Google, encontramos um livro com o mesmo nome e mesma autoria, resultado da incorporação de ideias de um curso introdutório sobre Geometria Fractal realizado na Universidade de Yale[115]. Esse é um material que visa explorar os fractais para o contexto de ensino, seja em sala de aula ou em palestras e minicursos. No site da Amazon, o livro tem o seguinte destaque em seu resumo:

> Este livro irá agradar aos professores que desejam incluir fractais em suas aulas de matemática e ciências, aos cientistas familiarizados com a geometria fractal que desejam ministrar um curso sobre fractais e a qualquer pessoa que pense que a alfabetização científica geral é uma questão importante o suficiente para justificar novas abordagens (Mandelbrot; Frame, s/ d., s/ p., tradução nossa[116]).

No site da MAA, onde encontramos uma revisão feita por George Ashlineem em dezembro de 2002, é destacado que o livro busca tratar do impacto que a Geometria Fractal tem na Educação Matemática, incluindo nas discussões estudos de casos que utilizaram fractais nas mais diversificadas abordagens do currículo. Dessa forma, estes estudos de casos fornecem informações, relatos e orientações sobre a inserção e o trabalho envolvendo fractais em diferentes níveis de ensino e contextos.

Por fim, a fim de compreender melhor essa relação entre os fractais e o ensino, item que não havia se destacado previamente, retornamos ao MR e procuramos por trabalhos que relacionassem os dois. Ao realizar essa busca[117], encontramos 78 publicações envolvendo essas questões, sendo o primeiro resultado datado de 1987[118], referente à entrevista de Mandelbrot a

---

[113] *Fractals, graphics, and mathematics education*

[114] *Mathematical Association of America*

[115] Não se tem indicado no site em que ano e qual a intenção desse curso.

[116] *This book will appeal to teachers who have wanted to include fractals in their mathematics and science classes, to scientists familiar with fractal geometry who want to teach a course on fractals, and to anyone who thinks general scientific literacy is an issue important enough to warrant new approaches.*

[117] Para essa busca, inserimos no campo de busca os seguintes termos: *ti:(fractal) AND education*, nessa forma, sem uso de filtros ou aspas. O termo *ti* indica a busca da palavra *fractal* no título. Optamos por indicar dessa forma, para direcionar a trabalhos em que os fractais fossem o foco principal, e não uma ferramenta para outro tópico que estivesse sendo explorado.

[118] A divergência nas datas se dá porque o resultado da busca no MR se refere a uma reedição da entrevista, que ocorreu em 1986.

Lesort, que utilizamos nas seções anteriores. Das 78 publicações, 72 correspondem a artigos de periódicos, quatro artigos em periódicos, um evento/anais completo do evento, e um livro.

Dessa forma, constatamos que o ensino, componente da Consolidação, se faz presente também. Não conseguimos levantar e estudar questões relacionadas à inserção dessa temática nos currículos da Educação Básica e na grade curricular do Ensino Superior de forma ampla, mas temos as considerações de Pescini (2021), Fratucci (2022), Padilha (2023) e Rodrigues (2023), pesquisas desenvolvidas no âmbito do GPEG, que apontam no cenário brasileiro, a presença, mesmo que indireta, dos fractais tanto no documento norteador nacional (a Base Nacional Comum Curricular – BNCC de 2018), quanto no estadual (o Referencial Curricular do Paraná – RCP de 2018 e Currículo da Rede Estadual do Paraná – CREP de 2021) para a Educação Básica.

Para além de todas as observações feitas sobre os documentos e as informações encontradas, é necessário pontuar aquelas que não foram identificadas ou as questões que foram levantadas em nossos estudos. Com relação aos cursos universitários (graduação e pós-graduação), componente do Sistema Social (Constituição) e do Ensino (Consolidação), descrevemos no parágrafo anterior nossas considerações.

Outros dois componentes do Sistema Social que não foram evidenciados em nossas buscas são as sociedades profissionais e acadêmicas, e as agências de fomento. Não podemos afirmar que não existem, uma vez que já apresentamos neste trabalho ao menos um grupo de pesquisa que se dedica ao estudo de fractais. No entanto, uma investigação de sociedades profissionais e acadêmicas que se debruçam sobre este tema, necessitaria de um estudo mais amplo e aprofundado fugindo aos parâmetros da presente pesquisa, mas sendo uma possibilidade para investigações futuras.

De modo similar, com relação ao levantamento e investigação referente às agências de fomento, entendemos que embora não sejam específicas para uma temática de estudo, elas oportunizam, através dos financiamentos, diversos tipos de pesquisa que estão inseridas em um tema de estudo. No contexto desta pesquisa, poderíamos considerar publicações e trabalhos que tiveram subsídio para seu desenvolvimento. Por estar fora do nosso escopo, a busca por indícios como órgãos de fomento e apoio à pesquisa configura-se como uma possibilidade em aberto para outros estudos.

Um terceiro ponto observado trata-se de um material encontrado nas buscas do eixo 1. Intitulada *Teoria dos Fractais*, a dissertação de Humberto Rossetti Baptista de 1998, discute a falta de estruturação e definição no campo dos fractais. Apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, possui o seguinte resumo:

> O campo de fractais sofre pela falta de estruturação e definição. Apresentamos aqui uma teoria de unificação para o estudo e aplicação de fractais. Esta é batente direita possível possibilitando seu uso nos mais variados campos de aplicação. Após o embasamento teórico segue uma discussão sobre técnicas computacionais de cálculo e visualização (Baptista, 1998, s/ p.)

Este aspecto referente à definição matemática dogmática para os fractais foi apontado na introdução e na seção 1.1. Essa é uma indicação colocada inclusive por Mandelbrot em seu livro de 1977, em que esse elemento foi inserido por nada mais que uma formalidade, como destacamos na seção 3.2.1. A questão de não haver uma definição que abranja a todos os fractais é evidenciada em boa parte dos materiais estudados no eixo 1 como Carvalho (2005), Conceição (2019) e Dalpiaz (2016).

Baptista (1998) entende que devido à amplitude de aplicações e modelações de fenômenos, ocorre de se desenvolver técnicas e teorias dos fractais sob a ótica das técnicas e ferramentas de cada campo, não concentrando um denominador comum que permita incorporar avanços de diversos campos, assim interligando-os.

É salientado pelo autor que ao adotar a definição apresentada por Mandelbrot em seu livro, tem-se que a dimensão de Hausdorff-Besicovich não é uma boa ferramenta, uma vez que certos objetos são reconhecidos como fractais, mas não se encaixam na definição, como por exemplo a curva de Peano em que ao calcularmos sua dimensão, de acordo com Perozzo (2021) obtemos que é 2, uma dimensão inteira, não uma dimensão fracionária.

Somos apresentados então à visão de Michael Barnsley (1946-), matemático, pesquisador e empresário britânico que trabalha com fractais e que busca não substituir, mas abranger objetos que a definição de Mandelbrot não abarca. Porém, Baptista (1998) aponta que enquanto a definição pela Dimensão de Hausdorff-Besicovitch é restrita e exclui fractais, a dada por Barnsley é abrangente demais.

Olhando então para as características dos fractais, Baptista (1998) aponta que o fato da autossemelhança ser uma característica de difícil estudo pela complexidade de sua definição formal, e a dimensão ter as questões que pontuamos anteriormente, a melhor opção seria trabalhar com a iteração. O autor apresenta então a seguinte definição:

> Esses dois conceitos [iteração e lugar geométrico] são unificáveis e fractal pode ser dito como o lugar geométrico dos pontos que compartilham uma mesma propriedade de uma função iterada. Formalmente temos:

> **Definição 3.7** Fractal: dada uma função iterada $f: E \to E$, um mapa $M: Orb(f) \to R$ e um valor $r \in R$ (onde R é um espaço-resultado de M) é um conjunto A tal que: $A = \{x \in E / M(o(x)) = r\}$ (Baptista, 1998, p. 72-73).

Para o autor, essa definição abarca, tanto os objetos que já eram considerados fractais pela definição de Hausdorff-Besicovitch quanto os que eram, mas escapavam à definição, isto é, uma mais abrangente que a de Mandelbrot e mais ajustada que a de Barnsley. Assim como Baptista (1998), Carvalho (2005) baseado em pontuações feitas por Mandelbrot (1998) e por Barbosa (2005) apresenta uma definição para caracterizar um objeto fractal, reconhecida por ele como uma definição que também contém lacunas: "Um fractal, portanto, é 'uma figura geométrica em que uma parte se assemelha a toda figura, obtida através de um processo iterativo e que pode ter uma dimensão não inteira'" (Carvalho, 2005, p. 18).

Em nossas pesquisas e leituras de materiais com datas posteriores a Baptista (1998), não encontramos referência a sua definição proposta. Da mesma forma, não encontramos materiais que se utilizavam da definição de Carvalho (2005). Seja por falta de divulgação, ou por refutação a essas definições (fato que também não identificamos em nossas leituras), grande parte dos trabalhos busca determinar o que são fractais a partir de suas características (complexidade/iteração infinita, autossimilaridade e dimensão fracionária), de forma que também fizemos neste trabalho na seção 1.1.

Nossa pesquisa não tem as ferramentas e nem o intuito de apresentar a definição mais adequada para fractal, ou mesmo de esboçar uma nova, nem de afirmar se há a necessidade de se ter uma definição matemática para fractais. Indicamos a seguinte consideração feita por Mandelbrot, em seu artigo *Sobre geometria fractal, e algumas das questões matemáticas que levantou*, discutido na seção 3.2.1: a falta de uma definição dogmática para a Geometria Fractal não pode impedir seu desenvolvimento.

Retomemos os três processos aqui investigados e seus componentes. Quando indicamos elementos referentes ao ensino e a Geometria Fractal, estamos destacando aqueles referentes ao Ensino, componente da Consolidação, e ao Sistema Social e a Perspectiva Social, respectivamente componentes da Consolidação e Institucionalização. Quando nos referimos ao componente da Consolidação de uma área científica, temos os materiais produzidos por Peitgen que evidenciam a inserção dessa temática no contexto escolar.

Ao pontuamos os componentes da Consolidação e Institucionalização, observamos que essas discussões se dão em espaços de debate, como seminários, palestras, apresentações, entre outros, tanto internos quanto externos à comunidade matemática, uma vez que os identificamos em anais de eventos. Ademais, esses materiais posteriormente foram adaptados para livros de forma a subsidiar professores e entusiastas da temática, o que inferimos como sendo uma Divulgação do Conhecimento.

Assim como as agências de fomento e as sociedades científicas, faz-se necessário realizar pesquisas direcionadas nesse sentido, de forma a levantar e estudar e discutir elementos que fazem parte do Sistema Social, componente da Constituição de uma área científica.

Com relação à pesquisa de Baptista (1998), compreende-se os apontamentos relativos à falta de uma definição matemática, representam um elemento que diz respeito ao Sistema Conceitual (Consolidação) e à Perspectiva Cognitiva (Institucionalização). É possível observar que há uma discussão entre a necessidade de haver uma definição ou de se limitar às características desse objeto, tanto no âmbito da comunidade interna, quanto da externa.

Considerações Finais

Com este trabalho, realizamos um estudo relativo à Geometria Fractal, de modo a responder a seguinte pergunta de pesquisa: como se situam, no contexto matemático, os processos de constituição, institucionalização e consolidação da Geometria Fractal? Esta questão, formulada a partir do entendimento destacado na introdução, em que a Geometria Fractal pode ser entendida como sendo uma área recente e necessária como forma de compreendermos o mundo. Nesse sentido, recorremos à pesquisa documental, visando a identificação e o estudo dos elementos que compõem cada um dos processos investigados.

Como apontado nesta pesquisa, os três processos a serem investigados ocorrem em sua individualidade, mas de forma paralela. Assim, destacamos o que se observou em cada um dos eixos abordados. Com relação ao primeiro deles, pontuamos a evidência de que fractais já se faziam presentes antes mesmo dos estudos de Mandelbrot. Estes, porém, não eram assim reconhecidos ou formalizados, sendo cada um desenvolvido e estudado na perspectiva que determinado matemático investigava.

Podemos entender que isso ocorreu, devido a esses objetos extrapolarem as teorias utilizadas, retratando objetos incompatíveis ao que se tinha, como por exemplo a curva apresentada por Weierstrass. Isso se caracteriza um componente do Sistema Conceitual que ocorre no processo de Constituição, uma vez que estamos considerando elementos de outras áreas, que de certa forma foram itens considerados e ponto de partida para algumas explorações.

Em nossos estudos, conseguimos inferir também que mesmo não as nomeando, as principais características de um fractal - autossimilaridade, iteração e dimensão - já se faziam presentes. Com o advento do computador e da programação, foi possível construir esses fractais de forma detalhada e com um número de iterações maior que se feito à mão, observando de maneira minuciosa sua estrutura e características, permitindo um aprofundamento desses elementos. Olhar a partir da autossemelhança da parte para o todo, para o ato de repetir e para a ideia de que haviam fenômenos dos quais a Geometria Euclidiana gerava modelos distantes, permitiu formar uma base de saberes para essa nova geometria que se configurava.

Com as explorações de Mandelbrot, identificamos mais alguns elementos referentes ao Sistema Conceitual, como fora destacado. Foi possível observar que o fato de Mandelbrot encarar esses objetos como algo pertencente à natureza, capazes de se representar e modelar de forma mais adequada, torna-se peça chave para o desenvolvimento desses componentes. Assim, entendemos que há a presença de um Sistema Conceitual, embora não identifiquemos uma metódica ou métodos regulares utilizados na investigação destes objetos matemáticos.

Compreendemos ainda, que esse sistema se constituía por ações advindas dos estudos de Mandelbrot, sem grandes contribuições referentes ao Sistema Social, uma vez que as investigações no eixo 1, se encerraram com as publicações desse autor em 1975 e 1977. Apesar disso, reconhecemos que essas publicações podem ser consideradas início para as discussões no âmbito do Sistema Social, já que ao publicar e dar ciência à comunidade matemática sobre essas ideias, cria-se um espaço de debate, refutação e validação das mesmas, formando assim o que caracterizamos como sendo esse sistema. Da mesma forma, identificamos que ocorre o processo de Institucionalização, visto que o que foi investigado referente ao eixo 1, diz respeito até as produções de Mandelbrot.

Por fim, em relação ao processo de Consolidação, como foi destacado, entendemos que ele ocorre paralelamente ao outros dois, de forma inicial, uma vez que conseguimos identificar elementos referentes à pesquisa, divulgação e aplicação de conhecimento nas produções de Mandelbrot que foram publicadas e propostas para debate por parte da comunidade matemática interna e externa.

Dessa forma, reconhecemos que as buscas no primeiro eixo nos nortearam, principalmente, para discutir elementos relativos à Constituição de uma área científica, observando sua construção, porém foi possível perceber também elementos iniciais que fazem parte dos componentes tanto da Institucionalização, quanto da Consolidação.

Com relação ao segundo eixo, as subdivisões em publicações, periódicos e eventos nos permitiram ter uma visão maior da Institucionalização e da Consolidação de uma área científica, olhando também para aspectos da Constituição. A partir do levantamento de dados no *Mathematical Reviews*, pudemos discutir principalmente sobre a pesquisa e a divulgação de resultados referentes aos fractais.

Como apontado anteriormente, as publicações de Mandelbrot em 1975 e 1977 abriram espaço para discussão da temática dos fractais, de forma paralela tanto à comunidade matemática interna quanto à externa. As inquietações do autor advindas de outras áreas científicas destacadas no eixo 1, e os resultados obtidos na busca que alternam entre publicações limitadas ao campo da Matemática e outros que o extrapolam, relacionando com outras áreas nos evidencia isso.

Essas publicações, tanto em periódicos, quanto em eventos ou nos livros, evidenciam a presença de um Sistema Social e de uma Perspectiva Social, uma vez que temos espaço para discussão, produção, registro e debate de ideias entre os próprios matemáticos, elementos que compõem o Sistema Social, assim como temos a propagação de estudos e resultados de pesquisas em que os fractais são utilizados como ferramenta de investigação e de modelação para objetos e fenômenos, estabelecendo uma Perspectiva Social. Ao mesmo tempo, podemos entender que essas discussões e debates promovem uma retomada de ideias e conceitos que fazem parte do arcabouço teórico referente ao Sistema Conceitual. Compreendemos então que se configura a presença da Perspectiva Cognitiva.

Ainda olhando para as publicações, podemos apontar a presença da Pesquisa, da Divulgação e da Aplicação do Conhecimento, já que essa é a intenção e o objetivo que se tem com os eventos e periódicos. Portanto a existência desses componentes caracteriza o desenvolvimento do processo de Consolidação. Ao considerarmos os gráficos e os dados numéricos, conclui-se que esse processo está cada vez mais forte, haja visto a quantidade de publicações que vem ocorrendo.

Embora não tenha sido possível estudar de forma aprofundada em nenhum dos dois eixos questões relacionadas ao ensino, identificamos pontualmente que essas discussões existem, evidenciando que o Ensino, componente da Consolidação, também se faz presente, mesmo que ainda de forma inicial, conforme nossas buscas.

Dois pontos ainda necessitam de investigações, não sendo ressaltados em nossa pesquisa: a existência de comunidade científicas e grupos de pesquisa/estudo dedicados a essa temática e a composição de uma definição matemática para os fractais. Ao longo das leituras realizadas, não foi possível pontuar a evidência dessas organizações, enquanto que com o segundo, os trabalhos, livros e demais publicações buscaram utilizar as características dos fractais como forma de defini-los e diferenciá-los de objetos que não são considerados fractais.

Portanto, diante das pesquisas, leituras e estudos realizados, compreendemos que a Geometria Fractal se trata de uma área científica, uma vez que identificamos elementos que caracterizam componentes que formam os três processos investigados.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; FERRAZ, M. H. M. Raízes históricas da difícil equação institucional da ciência no Brasil. **São Paulo em Perspectiva**, São Paulo, v. 3, n. 16, p. 3-14, 2002. Disponível em: https://www.scielo.br/j/spp/a/NgrxqwvgPGtLfdTSQc3fTPH/?lang=pt. Acesso em: 14 jan. 2023.

ALMEIDA, A. A. O. **Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula**. 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11076. Acesso em: 10 out. 2023.

ANDRADE JÚNIOR, E. A. **Ciência contemporânea na formação de professores: o caso dos fractais em uma perspectiva Kellyana**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015. Disponível em: http://tede2.ufrpe.br:8080/tede/handle/tede2/5366. Acesso em: 09 out. 2023.

ANDREUCCI, P. C. S. **Dimensões de Hausdorff e Aplicações**. 2021. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/32186. Acesso em: 10 out. 2023.

ANTONIAZZI, R. L. **Processamento digital de fotografias a curta distância, na diferenciação quantitativa de manchas de pele**. 2010. Dissertação (Mestrado em Geomática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/9541. Acesso em: 09 out. 2023.

ARAÚJO, J. M. **Teoria Matemática Implícita na Geometria Fractal: construindo fractais com a ferramenta computacional Asymptote**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2015. Disponível em: http://www.bdtd.ufrr.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=308. Acesso em: 10 out. 2023.

BANDT, C. **MATHSCINET**. MR1141389. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=1141389. Acesso em: 10 mar. 2024.

BANDT, C; MÖRTERS, P. ZÄHLE, M. **MATHSCINET**. MR1161389. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=1161389. Acesso em: 10 mar. 2024.

BARBOSA, L. N. S. C. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não-euclidianas**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011. Disponível em: https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/BARBOSA-Linlya.pdf. Acesso em: 22 dez. 2023.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal**: para sala de aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BAPTISTA, H. R. **Teoria dos Fractais**. 1998. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45132/tde-20210729-020035/en.php. Acesso em: 09 out. 2023.

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. A balhestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. **HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 40-51, 2017. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/265/180. Acesso em: 24 jan. 2023.

BAZI, R. E. R.; SILVEIRA, M. A. A. da. Constituição e institucionalização da ciência: apontamentos para uma discussão. **TransInformação**, Campinas, v. 2, n. 19, p. 129-137, mai./ago. 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/tinf/a/zvVcJhsc8SYkR4XBzyr8cQh/abstract/?lang=pt. Acesso em: 24 jan. 2023.

Benoit Mandelbrot: Fractais e a arte da rugosidade. Tradução: Christiane Matachana Thome. Revisão: Tulio Leao. [*S. l.*: *s. n.*], 2010. 1 vídeo (21min 18s). Publicado pelo canal TED. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ay8OMOsf6AQ. Acesso em: 03 jan. 2024.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. Tradução de Elza Gomide e Helena Castro.

BERRY, M. V. Diffractals. **Journal od Physics. A. Mathematical and General**, Great Britain, v. 12, n. 6, p. 781-797, set. 1978. Disponível em: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/12/6/008#references. Acesso em: 11 mar. 2024.

BIBM@TH.NET. **Bibm@th.net.** Biographie de Gaston Julia. *s. l.*: Bibm@th.net, *s. d*. Disponível em: https://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=julia. Acesso em: 28 dez. 2023.

BICUDO, I. Histórias Paralelas: O V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 5, n. 9, p. 05-17, 2020. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/226. Acesso em: 22 dez. 2023.

BUNGE, M. **Ciência e Desenvolvimento**. Belo Horizonte: Itatiaia Limitada, 1980. Tradução de: Cláudia Régis Junqueira.

CALISTO, R. A. **Geometria Fractal**. 2013. Monografia (Especialista em Ciências – Área de Concentração: Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2013. Disponível em: https://riut.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/17008. Acesso em: 09 out. 2023.

CARNEIRO, E. **Caliandra do Cerrado.** Fractais - na natureza tudo é matemática. Paraná: Caliandra do Cerrado, 2015. Disponível em: https://caliandradocerradogo.blogspot.com/2014/10/fractais-na-natureza-tudo-e-matematica.html. Acesso em: 8 jan. 2024.

CAMP, D. R. **A cultural history of fractal geometry: the biography of an idea**. 1999. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade de Chicago, Chicago, 1999. Disponível em: https://www.proquest.com/openview/346396cd8bee46574e1550f381714b14/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y Acesso em: 20 dez. 2023.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal**: Perspectiva e possibilidades no ensino de Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufpa.br/handle/2011/1857. Acesso em: 09 out. 2023.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal & Atividades**. 1. ed. Belém: Rfb Editora, 2020.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. **Metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

CONCEIÇÃO, M. A. C. **Geometria Fractal: uma sequência didática para a educação básica**. 2019. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Valença, 2019. Disponível em: https://portal.ifba.edu.br/valenca/cursos/superior/comat/documentos/tcc/2018.2/tcc-maria-do-amparo-cruz-da-conceicao.pdf/view. Acesso em: 11 out. 2023.

D'AMBROSIO, U. A interface entre história e matemática: uma visão histórico-pedagógica. **Revista História da Matemática para Professores**, Natal, v. 7, n. 1, p. 41-64, 2021. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67. Acesso em: 24 jan. 2023.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DALPIAZ, M. R. **Um estudo sobre fractais: origem e proposta didática para aplicação em aula**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6306324. Acesso em: 11 out. 2023.

DUBUC, S. **MATHSCINET**. MR0674512. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=674512. Acesso em: 12 mar. 2024.

EDITORAL CAOS, SÓLITONS E FRACTAIS. **Chaos, Solitons & Fractals**: Aims and scope. s/ d. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/journal/chaos-solitons-and-fractals/about/aims-and-scope. Acesso em: 12 mar. 2024.

EDITORAL FRACTAIS. **Fractals**: Aims and scope. s/ d. Disponível em: https://www.worldscientific.com/page/fractals/aims-scope. Acesso em: 17 mar. 2024.

ELEUTÉRIO. A. P. **O espaço de Hausdorff e a dimensão fractal: estudo e abordagens no ensino fundamental**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/33499. Acesso em: 09 out. 2023.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução: Irinei Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FARIAS, M. A. **Fractais: uma abordagem introdutória**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19655. Acesso em: 11 out. 2023.

FERREIRA FILHO, J. R. **Geometria fractal: da natureza para a sala de aula**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015. Disponível em: https://ri.ufs.br/handle/riufs/6515. Acesso em: 09 out. 2023.

FONSECA, P. B. **Fractais e o Modelo de van-Hiele: uma proposta de união para o ensino da Matemática na Educação Básica**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=48777@1. Acesso em: 13 out. 2023.

FONTANA, F.; PEREIRA, A. C. T. Pesquisa Documental. *In*: MAGALHÃES JÚNIOR, C. A. O.; BATISTA, M. C. **Metodologia da Pesquisa em Educação e Ensino de Ciências**. Maringá: Massoni, 2021. p. 50-69.

FRATUCCI, V. M. **Uma organização praxeológica para a construção de medidas de perímetro e área do fractal ilha de Koch**. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022. Disponível em: http://biblioteca.unespar.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/000096/00009679.pdf. Acesso em: 18 mar. 2023.

GEFFEN, N. **MATHSCINET**. MR0904064. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=904064. Acesso em: 19 mar. 2024.

GEFFEN, N. **MATHSCINET**. MR1165945. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=1165945. Acesso em: 23 mar. 2024.

LESORT, M. Comment j'ai découvert les fractales. Entrevistado: Benoit Mandelbrot. **La Recherche**, Paris, n. 99, 1986. Disponível em: https://www.larecherche.fr/math%C3%A9matiques-histoire-des-sciences/%C2%AB-comment-jai-d%C3%A9couvert-les-fractales-%C2%BB. Acesso em: 03 jan. 2024.

LISBOA, M. C. **Uma proposta de abordagem da geometria fractal na educação básica**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=8042186. Acesso em: 12 out. 2023.

MANDELBROT, B. **Objectos fractais**: forma, acaso e dimensão. 2. ed. Tradução: Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima. Lisboa: Gradiva, 1998.

MANDELBROT, B. Stochastic models for the Earth's relief, the sape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. **Proceedings of the**

National Academy of Sciences of the United States of America, New York, v. 72, n. 10, p. 3825-3828, out. 1975. Disponível em: https://www.pnas.org/doi/epdf/10.1073/pnas.72.10.3825. Acesso em: 11 mar. 2024.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. Local: Henry Holt and Company, 1982.

MANDELBROT, B. FRAME, M. **Amazon**. Fractals, Graphics, and Mathematics Education (Mathematical Association of America Notes, Series Number 58). *s. l.: s. d.* Disponível em: https://www.amazon.com/Fractals-Mathematics-Education-Mathematical-Association/dp/0883851695?language=pt_BR. Acesso em: 14 mar. 2024

MATHEMATICAL REVIEWS. **MATHSCINET**. MR0498876. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=498876. Acesso em: 12 mar. 2024.

MDIG. **MDig - 19 anos diminuindo a sua curiosidade**. 29 padrões fractais hipnotizantes encontrados na natureza. *s. l.*: MDig, 2014. Disponível em: https://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380. Acesso em: 8 jan. 2024.

MICHAELIS. **Michaelis**, 2023. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/. Acesso em: 13 fev. 2023.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. História da Matemática: uma prática social de investigação em construção. **Educação em Revista,** Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, n. 36, p. 177-203, dez. 2002. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0102-46982002000200011&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt. Acesso em: 19 dez. 2023.

MINGORANCI, S. **A geometria fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da matemática na educação básica**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2336. Acesso em: 12 out. 2023.

MOREIRA, A. **Um blog sobre os números complexos**. Gerador de Conjuntos de Julia. Paraná: Um blog sobre os números complexos, 2018. Disponível em: https://complexos.blog.br/1180/. Acesso em: 8 jan. 2024.

MOREIRA, V. S. S. S. **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=33036. Acesso em: 10 out. 2023.

NASCIMENTO, M. **Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1235. Acesso em: 22 mar. 2023.

NATIVIDADE, A. A. **Fractal: um modelo para aprendizagem no ensino da matemática**. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2022. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11497519. Acesso em: 13 out. 2023.

NOGUEIRA, V. L. **Uso da Geometria no Cotidiano**. 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1850-8.pdf. Acesso em: 19 mar. 2023.

NUÑEZ DIBAN, D. O. **Uma proposta de modelagem fractal de design de produto**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/78093. Acesso em: 09 out. 2023.

OLIVEIRA, A. P. **Conjuntos Infinitos**. 2005. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96542/Andrea_Oliveira.PDF?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 29 dez. 2023.

OLIVEIRA, G. C. **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2014. Monografia (Especialista em Matemática com Ênfase em Cálculo) – Universidade Federal de Minas Gerais, s. l., 2014. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/EABA-9H7HS3. Acesso em: 09 out. 2023.

OLIVEIRA, L. M. **Uma proposta de geometria de fractais para a sala de aula**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/11291. Acesso em: 09 out. 2023.

PADILHA, L. **Uma organização praxeológica da construção do fractal Árvore Pitagórica utilizando o software GeoGebra**. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, 2023. Disponível em: https://prpgem.unespar.edu.br/dissertacoes/defesas-2023. Acesso em: 20 dez. 2023.

PAIVA, F. O. **Classificação de Rochas Ígneas e Metamórficas por meio da Dimensão Fractal**. 2015. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto Federal da Bahia, Salvador, 2015. Disponível em: https://ppgfis.ufba.br/pt-br/teses-dissertacoes?title=&field_autor_value=&field_categoria_value=All&field_ano_puplicacao_value=All&page=1. Acesso em: 09 out. 2023.

PEITGEN, H.-O. **Heinz-Otto Peitgen**: Professor of Mathematics. People who shaped my path or were otherwise instrumental for my path, s/ d. Disponível em: https://www.peitgen.com/. Acesso em: 13 mar. 2024.

PEREIRA, A. S. **Fractais circulares**: algumas considerações e atividades. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000183314. Acesso em: 11 out. 2023.

PEROZZO, J. V. **Uma proposta de aplicações de fractais para a sala de aula**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2021. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11060507. Acesso em: 13 out. 2023.

PESCINI, A. E. **Uma análise praxeológica da geometria dos fractais em livros didáticos de matemática do ensino médio**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, 2021. Disponível em: http://biblioteca.unespar.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/000096/00009660.pdf. Acesso em: 20 mar. 2023.

PONTIFICAL ACADEMY OF SCIENCES. **the Pontifical Academy of Sciences**. Deceased Academicians: Prof. Waclaw Franciszek Sierpinski. Cidade do Vaticano: Pontifical Academy of Sciences, *s. d*. Disponível em: https://www.pas.va/en/academicians/deceased/sierpinski.html. Acesso em: 28 dez. 2023.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7651?locale=pt_BR. Acesso em: 18 mar. 2023.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Abram Samoilovitch Besicovitch**. 2003. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Besicovitch/. Acesso em: 08 jan. 2024.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Albrecht Dürer**. 1996. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Durer/. Acesso em: 01 jan. 2024.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Benoit Mandelbrot**. 1999. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mandelbrot/. Acesso em: 01 jan. 2024.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Elliott Waters Montroll**. 2005. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Montroll/. Acesso em: 02 mar. 2024.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Gaston Maurice Julia**. 2008. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia/. Acesso em: 30 dez. 2023.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Giuseppe Peano**. 1997. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peano/. Acesso em: 01 jan. 2024.

ROBERTSON, E.; O'CONNOR, J. (ORG.). **MacTutor History of Mathematics Archive**. 2023. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/. Acesso em: 30 dez. 2023.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Karl Menger**. 2014. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menger/. Acesso em: 01 jan. 2024.

ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **Pierre Joseph Louis Fatou**. 2016. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fatou/. Acesso em: 30 dez. 2023.

RODRIGUES, A. P. F. **Uma Organização Matemática das abordagens da geometria dos fractais em Livros Didático do Ensino Médio**. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, 2023. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://prpgem.unespar.edu.br/dissertacoes/dissertacao/7.1.DessertaoVersoFinalAndressa.pdf. Acesso em: 18 mar. 2023.

SACHS, L. O quinto postulado de Euclides como história de problemas. **HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, Campos do Jordão, v. 1, n. 1, p. 11-29, 2016. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/437/67. Acesso em: 22 dez. 2023.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SANTANA, A. M. **Teoria dos fractais aplicada a feições lineares para generalização cartográfica**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/27905. Acesso em: 13 out. 2023.

SCHENA, F. M. **A história do surgimento da geometria não-euclidiana**: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4204. Acesso em: 18 mar. 2023.

STRUIK, D. J. Por Que Estudar História da Matemática? *In*: GAMA, R. (org.) **História da técnica e da tecnologia**: textos básicos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1985, p. 191-215.

TITONELI, L. M. B. **A Observação de Padrões – Modelagem Matemática Através de Sequências Numéricas e Objetos Geométricos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=33077@1. Acesso em: 09 out. 2023.

TOLEDO, J. C. **Uma história do processo de institucionalização da área de Análise Matemática no Brasil**. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2008. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102136. Acesso em: 16 jan. 2023.

TRIVIZOLI, L. M. Um panorama para a investigação em História da Matemática: surgimento, institucionalização, pesquisas e métodos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 5, n. 8, p. 189-212, 2016. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6019. Acesso em: 19 dez. 2023.

TROCHET, H. **A History of Fractal Geometry**. 2009. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/fractals/. Acesso em: 01 jan. 2024.

VAZ, C. L. D.; NERI JÚNIOR, E. P. **Artemática**: explorando o potencial artístico da Matemática. Belém, PA: EditAedi, 2018. ISBN: 978-85-65054-55-3. Disponível em:

https://editaedi.ufpa.br/ebooks/artematica/fractal-circular-durer.html. Acesso em: 28 dez. 2023.

VESCHI, B. **Etimologia de História**. 2019. Disponível em: https://etimologia.com.br/historia/. Acesso em: 13 fev. 2023.

VIEIRA, D. C. **O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11399. Acesso em: 10 out. 2023.

WIKIPÉDIA. **Árvore de Pitágoras**. 2022. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_de_Pit%C3%A1goras. Acesso: 18 out. 2023.

WIKIPÉDIA. **File: Georg Cantor- colorized.jpg**. 2018. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Cantor-_colorized.jpg. Acesso: 28 dez. 2023.

WIKIPÉDIA. **Pierre Fatou**. 2023. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fatou. Acesso: 07 jan. 2024.

WIKIPÉDIA. **Sierpiński curve**. 2023. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_curve. Acesso: 07 jan. 2024.

YALE, U. **Mandelbrot**. Disponível em: http://users.math.yale.edu/mandelbrot/, 2016. Acesso em: 30 dez. 2023.

ZÄHLE, M. **MATHSCINET**. MR1132883. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=1132883. Acesso em: 23 mar. 2024.

ZÄHLE, M. **MATHSCINET**. MR1181421. *s. l.*: MATHSCINET, *s. d.* Disponível em: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=1181421. Acesso em: 23 mar. 2024.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Publicações de Benoit Mandelbrot levantadas no 2º Quinquênio (1980-1984)

Título	Ano
Critical phenomena on fractal lattices	1980
Solvable fractal family, and its possible relations to the backbone at percolation	1981
Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale de la nature	1982
The fractal geometry of nature	1982
An explicit fractal model of percolation clusters	1983
Diffusion on fractal lattices and the fractal Einstein relation	1983
Geometric implementation of hypercubic lattices with noninteger dimensionality by use of low lacunarity fractal lattices	1983
On the quadratic mapping $z \to z^2 - \mu$ *for complex* μ *and* z*: the fractal structure of its* $\mathcal{M}$ *set, and scaling*	1983
Phase transitions on fractals. I. Quasilinear lattices	1983
Self-inverse fractal osculated by sigma-discs and the limit sets of inversion groups	1983
Comment on coherent structures in fluids, fractals, and the fractal structure of flow singularities	1984
Comment on the equivalence between fraction/spectral dimensionality, and the dimensionality of recurrence	1984
Comment on transport processes on fractal structures	1984
Each fractal set has a unique fractal dimension	1984
Fractals in physics: squig clusters, diffusions, fractal measures, and the unicity of fractal dimensionality	1984
Les objects fractals	1984
On fractal geometry, and a few of the mathematical questions it has raised	1984
On the dynamics of the iterated maps. VIII. The map $z \to (\lambda(z + 1/z)$*, from linear to planar chaos, and the measurement of chaos*	1984
Partial-dimensional sequences and percolation	1984
Phase transition on fractals. III. Infinitely ramified lattices	1984
Phase transitions on fractals. II. Sierpinski gaskets	1984
Squig sheets and some other squig fractal constructions	1984

APÊNDICE B – Publicações de Michael F. Shlesinger levantadas no 2º Quinquênio (1980-1984)

Título	Ano
Analogs of renormalization group transformations in random processes	1981
Random walks with self-similar clusters	1981
Fractal random walks	1982
Lattice dynamics, random walks, and nonintegral effective dimensionality	1982
Fractal and lacunary stochastic processes	1983
Fractal stochastic processes: clusters and intermittencies	1983

Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and $1/f$ *noise: a tale of tails*	1983
Weierstrassian Levy flights and self-avoiding random walks	1983
On the wonderful world of random walks	1984
The fractal interpretation of the weak scattering of elastic waves	1984
Sem acesso ao título, mas o código é MSC 82A57	1984