

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

Campo Mourão,
2024

**FORMAS OPERATÓRIA E PREDICATIVA RELATIVAS À
FUNÇÃO AFIM MANIFESTADAS POR ESTUDANTES DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Leonardo Ferreira Zanatta

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

FORMAS OPERATÓRIA E PREDICATIVA RELATIVAS À FUNÇÃO AFIM
MANIFESTADAS POR ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Leonardo Ferreira Zanatta

Orientadora: Dra. Veridiana Rezende
Apoio: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão – PR
Abril de 2024

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Zanatta, Leonardo Ferreira
FORMAS OPERATÓRIA E PREDICATIVA RELATIVAS À FUNÇÃO
AFIM MANIFESTADAS POR ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA / Leonardo Ferreira Zanatta. -- Campo
Mourão-PR, 2024.
239 f.: il.

Orientador: Veridiana Rezende.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) --
Universidade Estadual do Paraná, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Função Afim. 3.
Conhecimento Operatório. 4. Conhecimento
Predicativo. I - Rezende, Veridiana (orient). II -
Título.

Leonardo Ferreira Zanatta

FORMAS OPERATÓRIA E PREDICATIVA RELATIVAS À FUNÇÃO AFIM
MANIFESTADAS POR ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Comissão Examinadora:



Profa. Dra. Veridiana Rezende – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná – Unespar



Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná – Unespar



Profa. Dra. Marilena Bittar - Membro da Banca
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Resultado: Aprovado

Campo Mourão – PR
Abril de 2024

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, a Deus por ter me proporcionado saúde, sabedoria, firmeza e perseverança.

Aos meus pais, Leomar e Elizia, agradeço por sempre me educarem com amor, carinho e dedicação, nunca medindo esforços para a realização de meus estudos.

À minha esposa, Talita, que esteve comigo em todos os momentos desse longo percurso, sempre disposta a me auxiliar em meus estudos e projetos da melhor forma possível, sempre com amor, carinho e cuidado.

À minha querida orientadora, Veridiana, obrigado por seus ensinamentos, sua paciência, pelas valiosas conversas e leituras sempre cuidadosas, essenciais para o meu progresso e amadurecimento como estudante. Agradeço-lhe pela oportunidade de ter sido seu orientando. A você, Veridiana, todo meu respeito, toda minha admiração, toda minha gratidão.

Às professoras da banca examinadora, Clélia, Marilena e Marli, agradeço pelas correções, apontamentos e sugestões. Suas contribuições e ensinamentos foram fundamentais para esta pesquisa.

A todos os professores do PRPGEM, agradeço pelo convívio, discussões e incentivo, que em muito contribuíram para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Aos meus colegas do PRPGEM, agradeço pela parceria e amizade, em especial pelos momentos de conversa, café, desabaços e, acima de tudo, incentivos ao longo desse processo.

Aos membros do GEPeDiMa, pelos momentos de convívio, conversas e risadas, e por me proporcionarem tantos momentos de aprendizagem. A participação de vocês foi essencial no desenvolvimento dessa pesquisa.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho, agradeço.

O presente trabalho foi realizado com apoio da agência de fomento CAPES.

RESUMO

Com base na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), assume-se que a compreensão de um conceito por um sujeito é associada à vivência de diferentes situações, se desenvolvendo ao longo de seu processo de escolarização e podendo ocorrer inclusive em sua fase adulta. Do ponto de vista da TCC, o conhecimento se apresenta em duas formas indissociáveis: a forma operatória do conhecimento; e a forma predicativa do conhecimento. Isoladamente essas formas não são suficientes para se obter a conceitualização. Mediante ao exposto, esta pesquisa pretendeu responder a seguinte questão: que conhecimentos matemáticos são manifestados por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática ao resolverem situações-problema de função afim? No intuito de responder a essa questão, o objetivo geral foi analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Esse objetivo desdobrou-se em dois objetivos específicos: analisar as interações dialógicas estabelecidas entre os participantes da pesquisa; e analisar os esquemas apresentados pelos participantes da pesquisa ao resolverem as situações-problema propostas. Para tanto, foi elaborado um instrumento de pesquisa composto por três situações-problema que visaram fomentar manifestações de ambas as formas do conhecimento. O instrumento foi implementado junto a sete estudantes do 4º ano de Licenciatura em Matemática. Foram considerados, para produção dos dados, os protocolos de resolução dos estudantes, a transcrição dos diálogos dos estudantes e a transcrição das entrevistas realizadas. Como resultados, associado à forma operatória do conhecimento, foram identificados, junto aos participantes da pesquisa, quinze teoremas em ação associados ao conceito de função, sendo dez teoremas em ação verdadeiros e cinco falsos. Já quanto à forma predicativa do conhecimento, foram identificados dez momentos com indícios de mobilizações do conhecimento predicativo, presentes tanto em falas dos estudantes quanto em seus protocolos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Função Afim; Conhecimento Operatório; Conhecimento Predicativo.

ABSTRACT

Based on the Theory of Conceptual Fields (TCC), it is assumed that a subject's understanding of a concept is associated with the experience of different situations, developing throughout their schooling process, and may even occur in their adult phase. From the TCC point of view, knowledge is presented in two inseparable forms: the operative form of knowledge and the predicative form of knowledge. In isolation, these forms are not sufficient to obtain conceptualization. In view of the above, this research aims to answer the following question: what mathematical knowledge is manifested by students in the Mathematics Licentiate course when solving affine function problem situations? In order to answer this question, the general objective was established: to analyze manifestations of the operative and predicative forms related to the concept of affine function, of students in the Mathematics Licentiate Course. To this end, we seek to: analyze the dialogical interactions established between the research participants; and analyze the schemes presented by the research participants when solving the proposed problem situations. Therefore, a research instrument was developed consisting of three problem situations that aim to promote manifestations of both forms of knowledge. The instrument was implemented with seven students in the 4th year of the Mathematics Licentiate Course. The students' resolution protocols, the transcription of the students' dialogues and the transcription of the interviews were considered for the production of the research' data. As results, associated with the operative form of knowledge, fifteen theorems in action associated with the concept of function were identified among the research participants, ten of which were true theorems in action and five false. As for the predicative form of knowledge, ten moments were identified in which there were indications of mobilizations of predicative knowledge, present both in the students' speeches and in their protocols.

Keywords: Mathematics Education; Affine Function; Operative Knowledge; Predicative Knowledge.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Nível de complexidade para o desenho de objeto simétrico	41
Figura 2 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo	48
Figura 3 – Recorte 1 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1	90
Figura 4 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1	91
Figura 5 – Recorte 1 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1	93
Figura 6 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1	95
Figura 7 – Recorte 2 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1	96
Figura 8 – Recorte 2 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1	97
Figura 9 – Recorte 3 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1	97
Figura 10 – Recorte 3 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1	100
Figura 11 – Recorte 4 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1	101
Figura 12 – Recorte 5 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1	102
Figura 13 – Recorte 3 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1	103
Figura 14 – Recorte 4 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1	104
Figura 15 – Recorte 1 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2	108
Figura 16 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2	109
Figura 17 – Recorte 3 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2	110
Figura 18 – Recorte 1 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 2	111
Figura 19 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 2	111
Figura 20 – Recorte 2 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 2	113
Figura 21 – Recorte 2 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 2	114
Figura 22 – Recorte 4 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2	116
Figura 23 – Recorte 5 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2	117
Figura 24 – Recorte 3 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 2	118
Figura 25 – Recorte 1 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 3	124
Figura 26 – Recorte 1 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 3	125
Figura 27 – Recorte 2 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 3	126
Figura 28 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 3	127
Figura 29 – Recorte 3 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 3	129
Figura 30 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 3	131
Figura 31 – Recorte 3 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 3	133

Figura 32 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1	135
Figura 33 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1	135
Figura 34 – Resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1	136

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Competências gerais e específicas docentes conforme a BNC - Formação	23
Quadro 2 – Pesquisas que tratam dos conhecimentos operatório e predicativo	27
Quadro 3 – Pesquisas desenvolvidas no Ensino Superior envolvendo função afim	31
Quadro 4 – Códigos e representações dos esquemas	44
Quadro 5 – Classes de problemas do campo aditivo, exemplos e esquemas	45
Quadro 6 – Situações de proporção simples.....	48
Quadro 7 – Classificação Situação-problema 1.....	62
Quadro 8 – Classificação Situação-problema 2.....	71
Quadro 9 – Classificação situação-problema 3	80
Quadro 10 – Teoremas em ação identificados na situação-problema 1	106
Quadro 11 – Teoremas em ação identificados na situação-problema 2	120
Quadro 12 – Teoremas em ação identificados na situação-problema 3	133
Quadro 13 – Teoremas em ação verdadeiros identificados	139
Quadro 14 – Teoremas em ação falsos identificados	140

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 ESTUDOS PRELIMINARES	18
1.1 Aspectos Históricos do Conceito de Função	18
1.2 Aspectos Associados ao Ensino de Função na BNCC e BNC-formação	22
1.3 Pesquisas relacionadas ao Ensino Superior e à Função Afim	26
2 APORTE TEÓRICO	35
2.1 A Teoria dos Campos Conceituais	35
2.1.1 As estruturas aditivas	44
2.1.2 As estruturas multiplicativas	46
2.1.3 As situações mistas	49
3 ESCOLHAS METODOLÓGICAS	52
3.1 A Engenharia Didática e direcionamentos para a presente investigação	52
3.2 Problema e objetivos da pesquisa	56
3.3 Instrumento de pesquisa e análises <i>a priori</i>	57
3.3.1 Situação-problema 1	59
3.3.2 Situação-problema 2	66
3.3.3 Situação-problema 3	75
3.4 O Estudo Piloto	83
3.5 O protocolo de entrevista	85
3.6 A produção de dados	86
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	87
4.1 Análise e Discussão da Situação-problema 1	89
4.2 Análise e Discussão da Situação-problema 2	107
4.3 Análise e Discussão da Situação-problema 3	121
4.4 Análise e Discussão dos Protocolos como Manifestações da Forma Predicativa do Conhecimento	134
CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
REFERÊNCIAS	145
APÊNDICES	155

INTRODUÇÃO

O interesse em desenvolver esta pesquisa de mestrado em Educação Matemática voltada para o Ensino Superior é decorrente, em parte, de minha¹ trajetória acadêmica. Em 2012, iniciei minha primeira graduação, em Administração, na então Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (Fecilcam), posteriormente estabelecida como Universidade Estadual do Paraná (Unespar) *campus* de Campo Mourão. Segui meus estudos iniciando uma pós-graduação *lato sensu* em gestão de pessoas e, pouco após iniciá-la, em 2017, ingressei como acadêmico no curso de Licenciatura em Matemática, também na Unespar, *campus* de Campo Mourão.

Desenvolvi trabalho de conclusão do curso de pós-graduação *lato sensu* voltado para o ensino de adultos no contexto empresarial, buscando aproximar esse trabalho ao Curso de Matemática que eu havia iniciado. No segundo ano de Licenciatura em Matemática, tive a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica (PIC), no qual permaneci até 2021, meu último ano de curso. Desde meu primeiro ano de participação no PIC, minhas pesquisas foram orientadas pela professora Dra. Veridiana Rezende, a qual continuou a orientar minha pesquisa, no mestrado que culminou nesta dissertação.

Embora durante minha primeira graduação eu tenha realizado algumas publicações, foi por meio do PIC que minha experiência com a pesquisa se intensificou. O programa me proporcionou a participação em diversos eventos científicos da área de Educação Matemática, além da produção e da publicação de artigos em Anais de Eventos, oferta de minicursos, e publicações em periódicos científicos. Associado a isso, o ingresso no PIC me conduziu à participação no Grupo de estudos em Pesquisa em Didática da Matemática (GEPeDiMa)², que tem se dedicado ao desenvolvimento de pesquisas com o objetivo de mapear o Campo Conceitual da função afim.

Durante minha participação no PIC, desenvolvemos pesquisas associadas, inicialmente, à Geometria Fractal e suas potencialidades junto a estudantes do Ensino Médio, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica³ (Zanatta *et al.*, 2019a; 2019b). Posteriormente, passamos a investigar conhecimentos, de funções afim e quadrática,

¹ Parte desta introdução é escrita na primeira pessoa, pois representam as experiências e a motivação pessoal do proponente desta pesquisa.

² Informações no site <https://prpagem.wixsite.com/gepedima>.

³ A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi idealizada pelo psicólogo francês Raymond Duval e discute a importância de diferentes registros de representação para a compreensão de objetos matemáticos. Para saber mais, consultar Duval (2009).

manifestados por estudantes de Licenciatura em Matemática, respaldados pela Teoria dos Campos Conceituais (Zanatta; Rezende 2022a, 2022b). Foi a partir dessa investigação junto a graduandos em Licenciatura em Matemática que emergiu meu interesse em desenvolver a pesquisa de mestrado que apresento neste texto e que levou ao meu ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM).

No que se refere às funções, Caraça (1998) as aponta como um conceito fundamental da matemática. As funções estão presentes no ensino de Matemática desde os Anos Iniciais e devem ser desenvolvidas ao longo de toda escolarização (Brasil, 2018). Trata-se de um conceito de natureza complexa, que se desenvolveu ao longo da história de maneira lenta e gradual. Ideias matemáticas e outros conceitos que o sustentam foram se desenvolvendo ao longo de mais de dois mil anos, dentre os quais podemos citar: números, conjuntos, continuidade, infinito, domínio, imagem, variável, dependência, generalização, correspondência, eixos, coordenadas, dentre outros (Merli, 2022).

A partir do 9º ano do Ensino Fundamental, o conceito de função é formalmente apresentado, sendo aprofundado no Ensino Médio (Brasil, 2018). Conforme estabelecido pela Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, ou BNC-Formação (Brasil, 2019), o processo formativo do Licenciando em Matemática deve necessariamente perpassar pelas competências e habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Educação Básica, ou seja, o estudo de funções, respectivas habilidades e competências devem ser contempladas no Ensino Superior.

A BNCC propõe que as noções matemáticas sejam retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. Isso dialoga com o que Serrazina (2002) menciona acerca dos novos conhecimentos, os quais são construídos com uma participação ativa do estudante ao longo desse processo. Ainda nesse sentido, Vergnaud (1993, 2001, 2003, 2009a) trata, em sua teoria, que a compreensão de um conceito se desenvolve ao longo do percurso educacional, intrinsecamente ligada a várias situações que o estudante experimenta ao longo desse trajeto, de forma que um conceito não pode ser reduzido tão somente à sua definição.

Ademais, Vergnaud (2009b, 1996a) enfatiza a relevância dos conhecimentos tácitos evidenciados por meio das ações dos indivíduos diante de uma situação. Esses conhecimentos são divididos pelo pesquisador em duas categorias: teoremas em ação e conceitos em ação. Segundo Vergnaud (1993), os teoremas em ação representam proposições, podendo ser verdadeiros ou falsos do ponto de vista científico. Por sua vez, os conceitos em ação são sempre verdadeiros, porém esses podem ser pertinentes ou não a uma situação.

Os teoremas em ação e os conceitos em ação, denominados de invariantes operatórios,

compõem parte dos esquemas (Vergnaud, 2008a, 2009a, 2019), os quais são definidos pelo pesquisador como uma organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações. Ainda relacionados aos esquemas, o autor trata dos conhecimentos, operatório e predicativo do sujeito.

Para a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), o conhecimento se apresenta em duas formas indissociáveis, a forma operatória do conhecimento e a forma predicativa do conhecimento, compreendidas, inicialmente, como o saber fazer e o saber explicar, respectivamente (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019). Além disso, isoladamente, essas formas não são suficientes para se obter a conceitualização, uma vez que, a aprendizagem concerne a ambas (Vergnaud, 2008a). Nesse contexto, o conceito de esquema é tanto uma continuidade das formas operatória e predicativa do conhecimento, sendo a passagem de um registro epistêmico para um registro pragmático (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019), quanto os esquemas são o próprio conhecimento operatório manifestado, uma vez que, “[...] a teoria é a forma predicativa do conhecimento por excelência, assim como o esquema é a forma operatória do conhecimento por excelência” (Vergnaud, 1996b, p. 290).

Assim, considerando que “[...] designam-se pelas expressões "conceito em ação" e "teorema em ação" os conhecimentos contidos nos esquemas” (Vergnaud, 1993, p. 4), e que esses invariantes operatórios compreendem em si conhecimentos matemáticos, interessa a esta pesquisa compreender que, para se analisar conhecimentos matemáticos mobilizados pelos estudantes em uma ação, tanto em sua forma operatória quanto predicativa, deve-se destinar um olhar para os invariantes operatórios atrelados a essa ação. Essa ideia é reforçada visto que “[...] é o conceito de invariante operatório que permite articular numa visão unitária e sintética as duas formas de conhecimento” (Vergnaud, 1996b), de forma que são os teoremas em ação que respaldam a indicação da mobilização das formas operatória e predicativa do conhecimento, e de conhecimentos matemáticos manifestados.

Pesquisas vêm sendo desenvolvidas sobre os conhecimentos operatório e predicativo, tais como Brandão (2012), Lorencini (2019), Lima (2021) e Peron da Silva (2021), sendo que, o GEPeDiMa, aqui representado pelas pesquisas de Lorencini (2019) e Peron da Silva (2021), vem realizando uma aproximação dessas formas do conhecimento à função afim. No entanto, no âmbito da Educação Matemática, notam-se poucas pesquisas brasileiras desenvolvidas com foco nas formas operatória e predicativa do conhecimento, sendo observada uma escassez ainda maior no que se refere a pesquisas que tratem dessas formas do conhecimento junto ao Ensino Superior.

Considerando a importância dada por Vergnaud em propor uma diversidade de situações ao sujeito durante sua escolarização, o pesquisador explorou de forma enfática os campos conceituais das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. O campo conceitual das estruturas aditivas é estabelecido como o conjunto das situações que envolvem uma ou mais operações de adição ou subtração, bem como o conjunto de teoremas e conceitos associados a essas situações (Vergnaud, 1993). Já o campo conceitual das estruturas multiplicativas é descrito por Vergnaud (1993) como um conjunto de situações que envolvem operações de multiplicação, divisão ou a combinação entre elas.

Para além dos problemas do campo conceitual aditivo e multiplicativo, Vergnaud (2009b) estabelece e discute sobre problemas que comportam ao menos uma relação aditiva e uma multiplicativa, caso esse que é denominado pelo autor como *problemas mistos*. Diferente dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, Vergnaud não estabeleceu uma classificação para os problemas mistos.

Em adição à essa perspectiva, Miranda (2019) realiza uma aproximação entre situações relacionadas à função afim, expressas algebricamente como $f(x) = ax + b$, e os problemas mistos, uma vez que tais funções englobam uma parte multiplicativa e uma parte aditiva. A autora, ao analisar livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, identificou nove classes de situações e quinze subclasses associadas à função afim. Dessa forma, parte das pesquisas do GEPeDiMa tem se dedicado a aprofundar os estudos de cada uma das classes identificadas por Miranda (2019), bem como de suas variações (subclassas). Nesse sentido, Fuzzo (2022), com o objetivo de estabelecer uma tipologia de situações de juros simples, dividiu a classificação das situações entre questão principal do enunciado e etapas intermediárias de resolução. Tieppo *et al.* (2023) realizaram uma análise junto a situações do tipo misto em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), identificando situações com mais de três estruturas em sua composição e, como resultado, apontam para esse número maior de estruturas como um potencial fator dificultador para as situações mistas.

Considerando tais pesquisas, estabelecemos, como foco do instrumento desta investigação, situações-problema relacionadas à função afim, que apresentem etapas intermediárias de resolução, buscando, com isso, propor aos sujeitos da pesquisa situações-problema com um nível de complexidade de resolução mais elevado. Isso foi escolhido pois se tratava de estudantes do 4º ano de Licenciatura em Matemática, dos quais espera-se que tenham estudado na Educação Básica e no Curso de Matemática o conceito de função afim.

Diante do exposto, nesta pesquisa, buscamos responder a seguinte questão: *que*

conhecimentos matemáticos são manifestados por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática ao resolverem situações-problema de função afim? No intuito de responder a essa questão, estabelecemos como objetivo geral: *analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática*. Para tanto, estabelecemos como objetivos específicos: analisar as interações dialógicas estabelecidas entre os participantes da pesquisa; e analisar os esquemas apresentados pelos participantes da pesquisa ao resolverem as situações-problema propostas.

Conforme o exposto, elaboramos um instrumento de pesquisa composto por três situações-problema classificadas como *proporção simples e transformação de medidas*, com etapas intermediárias de resolução, sendo que cada situação-problema observa um incremento no número de etapas intermediárias em relação à anterior. A escolha dessa classe está atrelada à classificação atribuída para situações-problema relacionadas à função afim proposta por Fuzzo (2022) e às discussões realizadas junto ao GEPeDiMa.

O Capítulo 1, intitulado *Estudos Preliminares*, contempla: um estudo sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função; aspectos associados ao ensino de função no que diz respeito à legislação que rege os componentes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática; e pesquisas que associam o ensino de função à Teoria dos Campos Conceituais, com ênfase àquelas que trabalharam com as formas predicativa e operatória do conhecimento.

No Capítulo 2, *Aporte Teórico*, é apresentada a base teórica na qual se fundamenta esta pesquisa. São apresentados aspectos da Teoria dos Campos Conceituais, com um foco na concepção trazida pela teoria para esquemas e conhecimentos operatório e predicativo. São abordadas, ainda, as estruturas aditivas, multiplicativas e mistas. A TCC contribuiu com essa pesquisa tanto no suporte para a elaboração do instrumento de pesquisa, quanto para a realização das análises, especialmente quanto à análise dos esquemas que propiciaram a identificação de teoremas em ação mobilizados pelos estudantes e, por consequência, para os conhecimentos operatório e predicativo.

O Capítulo 3, intitulado *Escolhas Metodológicas*, aborda aspectos da Engenharia Didática, metodologia que dá suporte para a realização dessa pesquisa; a problemática; os objetivos (geral e específicos); o instrumento de pesquisa e sua análise *a priori*; o protocolo de entrevistas; uma descrição do estudo piloto realizado; e aspectos referentes à produção dos dados do estudo principal.

O Capítulo 4, *Análise e Discussão dos Dados*, aborda a análise do instrumento de pesquisa implementado, indicando os momentos que possivelmente os estudantes

manifestaram a forma operatória do conhecimento, apresentada como teoremas em ação e momentos em que houve a possível manifestação da forma predicativa do conhecimento.

Este texto é encerrado com as Considerações Finais da pesquisa, seguidas das Referências Bibliográficas e Apêndices.

1 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos os estudos preliminares realizados para a presente investigação, os quais contemplam: um estudo sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função; aspectos associados ao ensino de função no que diz respeito à legislação que rege os componentes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática; e pesquisas que associam o ensino de função à Teoria dos Campos Conceituais, com ênfase àquelas que consideram as formas predicativa e operatória do conhecimento.

1.1 Aspectos Históricos do Conceito de Função

Abordar a gênese de um conceito matemático é uma tarefa complexa, que exige atenção por parte do pesquisador. Por vezes, textos fundamentais para se realizar uma reconstrução histórica de determinado conceito ou objeto podem ter se perdido ou estarem inacessíveis aos pesquisadores, o que por vezes resulta em uma pluralidade de caminhos a serem seguidos (Merli, 2022).

Ao tratar especificamente do conceito de função, autores como Youschkevitch (1976) dividem a evolução histórica desse conceito com base em recortes históricos, dividindo-os em antiguidade, idade média e período moderno. Silva, Miranda e Cabral (2019) propõem uma divisão semelhante, porém os autores dividem o período moderno proposto por Youschkevitch (1976) entre período moderno e o período contemporâneo.

Sierpinska (1988) afirma que este mesmo conceito pode ser analisado segmentando a sua evolução em estágios epistemológicos de evolução, sendo que esses estágios são associados ao surgimento e à institucionalização de ideias e conceitos que o fundamentam. A autora não atribui a estes estágios um recorte histórico específico. Essa interpretação se aproxima da proposta por Merli (2022), ao interpretar que a evolução do conceito de função não cabe uma divisão estanque, baseada em períodos históricos, mas sim em desdobramentos por estágios epistemológicos de evolução, os quais podem se sobrepor cronologicamente.

Considerando o contexto e o escopo desta pesquisa, esta seção buscou caminhar em paralelo à construção do conceito de função apresentada por Merli (2022) e por Sierpinska (1988). Assim, embora presentes no texto, não foi buscada uma ancoragem junto a recortes históricos que permeiam a construção do conceito de função, e sim sobre noções; definições;

situações; trabalhos desenvolvidos; e conceitos organizadores¹; que fundamentam a definição atual de função. Desse modo, esta seção não apresenta os aspectos que permeiam o conceito de função em ordem cronológica, mas sim, parte daquilo que se tem atualmente relativo ao conceito de função, até suas origens conceituais, propondo, assim, uma análise retrospectiva do conceito de função.

Ao longo da história, diversas concepções de função foram propostas. Dentre as mais atuais, é possível citar a definição apresentada na década de 1950 por Dirichlet-Bourbaki, que caracterizam função como uma correspondência entre dois conjuntos que atribui a cada elemento de um conjunto, exatamente um elemento do segundo conjunto (Even, 1988). Pode-se ainda recorrer à definição apresentada por Nicolas Bourbaki², em 1939, que defende:

Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y , ou relação funcional de E em F , se, qualquer que seja x de E , existe um elemento y de F , e somente um, que esteja na relação considerada com x (Kleiner, 1989, p. 299).

Bourbaki nomeia uma função como uma operação que associa todo elemento x pertencente a um conjunto E , a um elemento y pertencente a um conjunto F , com a relação dada por x , diz-se ainda que y é o valor da função para o elemento x e que a função está determinada pela relação funcional dada (Kleiner, 1989). Essas definições apresentadas por Nicolas Bourbaki e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) se mostram importantes por estabelecerem a unicidade de y em relação a x , separando o conceito de função da expressão analítica da função, e, assim, definindo função como uma correspondência arbitrária entre variáveis de conjuntos numéricos.

Essas definições vinham a refinar, tornar menos limitadas e estabelecer este conceito, em relação a outras definições anteriormente apresentadas, como a definição apresentada por Leonhard Euler (1707-1783) no século XVIII, que definiu função como uma expressão analítica, que representa a relação entre duas variáveis (Malik, 1980).

Em 1718, chega-se ao primeiro registro do termo função sendo utilizado em uma definição formal. Johann Bernoulli (1667-1748) definiu função de uma variável como uma quantidade que é composta de alguma maneira daquela variável e constantes (Youschkevitch, 1976). Embora em 1718 tenha ocorrido o primeiro uso do termo função em uma definição

¹ Conceitos que permitem hierarquizar as tarefas de uma situação, esses englobam conceitos que podem ser de origem pragmática ou científica (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019).

² Nicolas Bourbaki é um pseudônimo usado por um grupo de matemáticos. Considerando que as referências adotadas trazem tratam do grupo nesse formato, optou-se por mantê-lo.

formal, essa não foi a primeira vez que esse termo foi utilizado para se referir a uma relação funcional. Em 1673, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) havia utilizado o termo função em um manuscrito ao tratar da relação entre ordenadas e abscissas, representadas por uma equação conhecida, porém esse termo não foi empregado, na época, em uma definição formal, mas sim para descrever uma relação entre variáveis (Youschkevitch, 1976). Também foi Leibniz que introduziu o uso dos termos constante, variável e coordenadas (Youschkevitch, 1976).

Segundo Kleiner (1989), alguns aspectos impediram que a noção de função emergisse de forma explícita antes de Bernoulli e Leibniz, dentre os quais o autor cita a falta de pré-requisitos algébricos. Entre os anos 1450 e 1650, algumas evoluções na Matemática tais como a ampliação do conceito de número, abarcando os números reais e complexos, a criação de uma Matemática simbólica, o estudo sobre o movimento e a união entre álgebra e geometria, foram fundamentais para o nascimento e o desenvolvimento do conceito de função como apresentado por Bernoulli (Kleiner, 1989).

Dentre os fatores apontados por Kleiner (1989), o desenvolvimento da álgebra simbólica, assim como da geometria analítica, introduzidas por Pierre de Fermat (1607-1665) e René Descartes (1596-1650), em conjunto com a criação do cálculo por Leibniz e Isaac Newton (1643-1727), foram fundamentais para acelerar o processo de conceitualização da função (Merli, 2022). Porém, outros aspectos que precedem Leibniz e Newton contribuíram para se chegar ao conceito de função, como a investigação sobre as relações existentes entre quantidades variáveis e fenômenos naturais, ou mesmo a busca por ferramentas para se descrever e modelar tais fenômenos.

Nessa perspectiva, Galileu Galilei (1564-1642) realizou a observação de astros e computou os dados de seus experimentos em tabelas. Seus estudos mostraram uma dependência entre duas variáveis, uma relação de causa e efeito (Ciani; Nogueira; Berns, 2019). Ponte (1992) explica que Nicolau de Oresme (1323-1382) desenvolveu uma teoria geométrica, que, dentre os conceitos trabalhados, estavam presentes ideias gerais sobre quantidades variáveis, dependentes e independentes. Oresme utilizou coordenadas as quais ele denominou de latitude e longitude, equivalentes ao que hoje interpretamos como ordenadas e abscissas, para descrever a velocidade de um corpo em função do tempo com aceleração constante (Ponte, 1992; Pires, 2016).

Antes de Oresme não é possível encontrar uma ideia geral que trata especificamente de uma relação funcional, seja por meio de palavras, álgebra ou por representações gráficas (Ponte, 1992; Pires 2016). Youschkevitch (1976) reafirma isso ao expressar que,

independentemente das causas que deram origem ao conceito de função, o pensamento matemático durante a antiguidade não criou uma noção geral de quantidade variável ou mesmo de função.

Porém, exemplos particulares que englobam a noção de função e que precedem Oresme podem ser encontrados. Por exemplo, os gregos identificaram situações que implicavam em noções de função, mas não foram capazes de reconhecê-las ou de simbolizá-las, considerando isso, eles recorriam ao uso da proporcionalidade para realizarem a resolução de determinadas equações (Youschkevitch, 1976; Fossa, 2011). É possível citar ainda tábuas desenvolvidas por astrônomos em Alexandria, que utilizam teoremas da geometria para descrever ciclos astronômicos (Pires, 2016). Por fim, há as tábuas confeccionadas de maneira empírica pelos babilônios, por volta de 2000 a.C. Essas tábuas também eram utilizadas para se prever movimentos astronômicos, e carregavam consigo, implicitamente, a principal ideia envolvida no conceito de função, a relação funcional entre variáveis (Pires, 2016).

O recorte histórico aqui apresentado sinaliza a complexidade existente no desenvolvimento do conceito de função. A definição de função acatada atualmente pela comunidade de matemáticos e educadores matemáticos não partiu de poucos indivíduos, tampouco trata-se de algo criado em um curto período, mas carrega consigo uma gama de conceitos, representações, definições e situações que se ramificam e se entrelaçam, em uma complexa trama de informações que se espalha por séculos de evolução humana.

A partir do exposto, assume-se que a construção do conceito de função não se deu de forma simples e rápida. De igual maneira, a construção deste conceito por alunos não é algo simples, que pode ser realizada com a apresentação de uma definição (Ciani; Nogueira; Berns, 2019). Vergnaud (1993, p. 1), nesse sentido, afirma que “[...] um conceito não pode ser reduzido à sua definição” e é “[...] através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido”.

Caraça (1998) considera o conceito de função como essencial para a Matemática, o que reforça a necessidade de que este conceito seja estudado ao longo do processo escolar pelos alunos. Todavia, diversas pesquisas apontam para a dificuldade entre os estudantes, sejam eles do Ensino Fundamental, Médio e mesmo do Ensino Superior, em relação à compreensão do conceito de função (Nunes; Santana, 2017; Pires; Merline; Magina, 2015; Pavan, 2010; Bernardino *et al.*, 2019; Rezende; Nogueira; Calado, 2020; Zanatta; Rezende, 2022a).

1.2 Aspectos Associados ao Ensino de Função na BNCC e BNC-formação

Esta seção não tem a intenção de julgar a pertinência ou não dos documentos abordados, mas sim de trazer as principais informações descritas por eles que respaldam aspectos do desenvolvimento desta pesquisa.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) estabelece conhecimentos e habilidades essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica no Brasil. O documento define o conjunto de conteúdos e aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas progressivamente pelos estudantes a cada ano de escolarização. Além disso o documento contempla o Ensino Fundamental e Médio, tendo abrangência federal, estadual e municipal (Brasil, 2018).

A partir da aprovação da BNCC e da necessidade de se garantir as aprendizagens essenciais aos alunos da Educação Básica, assim como, conforme o art. 205 da Constituição Federal de 1988 (Brasil, 2016) e o art. 2º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Brasil, 1996), que asseguram aos sujeitos, por meio da educação, o alcance de seu pleno desenvolvimento para o exercício da cidadania, elaborou-se um documento que direcionasse as competências profissionais de professores.

Em 2018, o Ministério da Educação (MEC) elaborou a “Proposta para Base Nacional Comum da Formação de Professores da Educação Básica” com o intuito de substituir a resolução CNE/CP 02/2015 (Brasil, 2015) que advogava o princípio constitucional da autonomia das Universidades. A proposta resultou na Resolução CNE/CP 02/2019 de 20 de dezembro de 2019 (Brasil, 2019), que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, a BNC-Formação (Guedes, 2020).

A resolução CNE/CP 02/2019 aponta que a BNC-Formação deve possuir como referência a BNCC, pressupondo o desenvolvimento pelo licenciado das competências gerais previstas pela BNCC (Brasil, 2019). Em seu Art. 2º, a resolução indica que a formação docente pressupõe o desenvolvimento das mesmas competências gerais previstas na BNCC pelo licenciado. O Art. 2º estabelece, ainda, que a formação do licenciado deve contemplar as aprendizagens essenciais a serem garantidas aos estudantes da Educação Básica, quanto aos aspectos intelectuais, físicos, culturais sociais e emocionais, tendo como perspectiva, o desenvolvimento pleno do indivíduo. Esse artigo reforça o parágrafo único do Art. 1º, que atrela a formação do licenciado à BNCC.

Nos artigos 3º e 4º, a resolução estabelece as competências docentes, gerais e específicas, assim como as habilidades correspondentes a elas. As competências gerais são independentes e desenvolvidas de forma não hierárquica, porém complementares entre si, são elas: 1) conhecimento profissional; 2) prática profissional; e 3) engajamento profissional.

A dimensão de conhecimento profissional carrega, em suas habilidades, a ideia de que o professor tenha amplo conhecimento sobre os conteúdos e de como ensiná-los, assim como a compreensão de como os alunos aprendem, prevendo ainda que o licenciado seja capaz de reconhecer os contextos, a estrutura e a governança dos sistemas educacionais.

Na dimensão da prática profissional, o licenciado deve possuir habilidades tais que lhe permitam planejar as ações de ensino que resultem em efetivas aprendizagens, criar e saber gerir ambientes de aprendizagem, avaliar o desenvolvimento do educando, e conduzir as práticas pedagógicas dos objetos do conhecimento.

A terceira dimensão compreende o engajamento profissional, e visa que o licenciado possa comprometer-se com o próprio desenvolvimento profissional, com a aprendizagem dos estudantes e estar disposto a colocar em prática o princípio de que todos são capazes de aprender, participando da construção do projeto pedagógico da escola e se engajando com colegas e comunidade.

A BNC - Formação apresenta três competências gerais, que se desdobram em doze competências específicas. As competências gerais e as competências específicas atreladas a cada uma estão dispostas no Quadro 1.

Quadro 1 – Competências gerais e específicas docentes conforme a BNC - Formação

1. CONHECIMENTO PROFISSIONAL	2. PRÁTICA PROFISSIONAL	3. ENGAJAMENTO PROFISSIONAL
1.1 Dominar os objetos de conhecimento e saber como ensiná-los	2.1 Planejar as ações de ensino que resultem em efetivas aprendizagens	3.1 Comprometer-se com o próprio desenvolvimento profissional
1.2 Demonstrar conhecimento sobre os estudantes e como eles aprendem	2.2 Criar e saber gerir ambientes de aprendizagem	3.2 Comprometer-se com a aprendizagem dos estudantes e colocar em prática o princípio de que todos são capazes de aprender
1.3 Reconhecer os contextos	2.3 Avaliar o desenvolvimento do educando, a aprendizagem e o ensino	3.3 Participar do Projeto Pedagógico da escola e da construção dos valores democráticos
1.4 Conhecer a estrutura e a governança dos sistemas educacionais	2.4 Conduzir as práticas pedagógicas dos objetos conhecimento, competências e habilidades	3.4 Engajar-se, profissionalmente, com as famílias e com a comunidade

Fonte: Brasil (2019, p. 13-14).

Cada uma das doze competências específicas direcionadas pela resolução CNE/CP 02/2019 se desdobra em habilidades previstas de serem contempladas na formação do licenciado.

Como apresentado, a BNC-Formação retorna, em diversos momentos, a obrigatoriedade de que a formação do licenciado deve compreender o desenvolvimento das mesmas competências gerais previstas aos alunos da Educação Básica pela BNCC. Diante disso e dos objetivos desta pesquisa, cabe compreender de forma clara o que se espera do Licenciado em Matemática no que tange o ensino de função afim sob a lente da BNCC, assim como a própria estrutura desse documento.

A BNCC é um documento normativo, de âmbito federal, estadual e municipal e abrange conteúdo da Educação Infantil ao Ensino Médio. A BNCC possui, dentre seus objetivos, orientar práticas de professores quanto aos conteúdos, métodos avaliativos, e quanto às aprendizagens essenciais aos estudantes para cada ano da Educação Básica (Brasil, 2018).

A BNCC (Brasil, 2018) delimita a necessidade de que a Matemática esteja presente em toda a Educação Básica, considerando tanto sua aplicação social contemporânea, quanto suas potencialidades na formação de cidadãos mais críticos. Ao introduzir a área de Matemática para o Ensino Fundamental, a BNCC destaca que:

Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar criar, enfim, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem (Brasil, 2018, p. 277).

Assim, o documento parte do pressuposto de que a aprendizagem matemática se relaciona diretamente com a compreensão dos “significados dos objetivos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações” (Brasil, 2018, p. 276). Destarte, “[...] os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos” (Brasil, 2018, p. 276).

Ademais, a BNCC realiza uma divisão da área de Matemática em cinco unidades temáticas, que se entrelaçam e se relacionam, com o intuito de desenvolver, junto aos estudantes, habilidades esperadas para o desenvolvimento ao longo do processo escolar. Cada unidade temática pode receber uma ênfase diferente, de acordo com o nível de ensino, sendo as unidades temáticas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e medidas; e Probabilidade e estatística.

As unidades temáticas se subdividem de acordo com o nível de ensino, em objetos do conhecimento e em habilidades, que, por sua vez, são identificadas por um código alfanumérico. Essa divisão proposta pelo documento está atrelada à ideia de que a compreensão do papel de cada habilidade demanda a compreensão de sua conexão com habilidades desenvolvidas anteriormente, considerando ainda “[...] em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores” (Brasil, 2018, p. 276).

Isto posto, inserido dentro da unidade temática Álgebra, é recomendado que, desde o 1º ano do Ensino Fundamental, o aluno tenha acesso a padrões figurais e numéricos, considerando, analisando e investigando a regularidade em sequências. Como estabelecido pelo documento, essa investigação deve ser aprofundada ao longo do processo escolar, de forma que o reconhecimento de padrões se torne mais complexo. Pesquisas mostram a possibilidade de se propor situações relacionadas a ideias de função afim, desde os Anos Iniciais, em particular as ideias de dependência, generalização, regularidade, variável, proporcionalidade (Rodrigues, 2021; Dezilio, 2022).

A partir do 5º ano, são desenvolvidos conhecimentos referentes às propriedades de igualdade e noções de equivalência. Posteriormente, no 7º e 8º ano, os estudantes passam a desenvolver o uso da linguagem algébrica. E é no 9º ano, munidos de tais conhecimentos, que os estudantes são, então, formalmente apresentados ao conceito de função, tal que a BNCC estabelece a necessidade de que o estudante seja capaz de:

Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis (Brasil, 2018, p. 317).

Já no Ensino Médio, a BNCC trata da área de Matemática e suas Tecnologias, a qual propõe a consolidação, ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental, colocando em jogo de modo mais enfático os conhecimentos já explorados no Ensino Fundamental. Para o Ensino Médio, a BNCC aponta competências específicas que devem ser desenvolvidas pelos estudantes. Na competência específica 5, o documento indica o objetivo de:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 540).

Como exemplos de aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental, é possível citar as habilidades EM13MAT507 e EM13MAT501, que versam respectivamente sobre a necessidade de os estudantes serem capazes de “identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afim de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (Brasil, 2018, p. 540), “[...] identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau” (Brasil, 2018, p. 541).

Esse aprofundamento progressivo pode ser de grande valia ao estudante no que tange a construção do conceito de função, quando considerados os pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais. Vergnaud (1993, 2001, 2003, 2009a) argumenta que a compreensão de um conceito ocorre ao longo da escolarização, associada a diversas situações vivenciadas pelo estudante nesse processo.

De igual maneira, considerando o direcionamento da resolução CNE/CP 02/2019 de que o currículo do Ensino Superior deve, necessariamente, tomar como base a BNCC; e considerando as habilidades e competências específicas que a BNCC apresenta quanto ao conceito de função; a retomada do conceito de função no Curso de Licenciatura em Matemática torna-se necessária e essencial para a formação inicial do professor de Matemática.

1.3 Pesquisas relacionadas ao Ensino Superior e à Função Afim

O objetivo desta seção é apresentar e discutir pesquisas prévias que foram analisadas como um dos pontos de justificativa para o desenvolvimento da investigação aqui apresentada.

Para isso, foi realizado um levantamento junto ao Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES¹ e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)², no mês de junho de 2023. Foram realizadas duas buscas distintas. A primeira busca se concentrou em identificar pesquisas que foram desenvolvidas tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais e que envolveram, em algum aspecto, os conhecimentos operatórios e/ou

¹ CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Catálogos de Teses e Dissertações. Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/>

² Ibict – Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Disponível em: <https://bdtb.ibict.br/vufind/>

predicativos junto aos sujeitos das pesquisas. A segunda buscou identificar pesquisas que tenham sido desenvolvidas junto a estudantes do Ensino Superior e que possuam como objeto de seus estudos a função afim.

Assim, para o primeiro levantamento citado, a análise inicial foi realizada utilizando o termo “Teoria dos Campo Conceituais” e, com o intuito de refinar a busca, dentre os resultados obtidos, foram selecionadas aquelas pesquisas que continham algum dos seguintes termos ou seus plurais em seu título, palavras-chave ou resumo: Forma Operatória do Conhecimento; Forma Predicativa do Conhecimento; Conhecimento Operatório; e Conhecimento Predicativo. Mediante essa busca, foram obtidos 7 textos. O quadro a seguir apresenta dados gerais sobre os textos encontrados:

Quadro 2 – Pesquisas que tratam dos conhecimentos operatório e predicativo

Ano de Defesa	Título	Autor (Orientador)	IES de origem - PPG	Público-alvo da pesquisa
2011	Sobre o ensino do conceito de evolução temporal em mecânica quântica	PANTOJA, Glaucó Cohen Ferreira (Dr. Marco Antonio Moreira)	Universidade Federal do Rio Grande do Sul - PPGEnFís	Professores – Ensino Médio; Estudantes – Ensino Superior
2012	A estratégia da modelagem Didático-Científica Reflexiva para a conceitualização do real no ensino de física	BRANDÃO, Rafael Vasques (Dr. Ives Solano Araujo)	Universidade Federal do Rio Grande do Sul - PPGEnFís	Professores – Ensino Médio
2018	A programação de computadores e a função afim: um estudo sobre a representação e a compreensão de invariantes operatórios	LÉSSA, Valéria Espíndola (Dr. Adriano Canabarro Teixeira)	Universidade de Passo Fundo - PPGEduc	Estudantes – Ensino Médio
2019	Possibilidades inclusivas do diálogo entre videntes e alunos com deficiência visual em uma sequência didática sobre Função Afim	LORENCINI, Pricila Basilio Marçal (Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira)	Universidade Estadual do Oeste do Paraná - PPGECEM	Estudantes – 2º ano Ensino Médio
2021	Engenharia Didática em um processo de Formação continuada: um estudo com uma professora de Matemática	LIMA, Renan Gustavo Araújo de (Dr. José Luiz Magalhães de Freitas)	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - PPGeduMAT	Professores – Ensino Fundamental
2021	As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função	PERON da SILVA, Luciana Del Castanhel (Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira)	Universidade Estadual do Oeste do Paraná - PPGECEM	Estudantes – 5º ano Ensino Fundamental

2022	Um estudo sobre o Ensino de Matemática para crianças em tratamento oncológico	SANTO, Clayton do Espírito (Dra. Amália Neide Covic)	Universidade Federal de São Paulo - PPGESIA	Professores – Ensino Fundamental
------	---	--	---	----------------------------------

Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Os estudos desenvolvidos por Pantoja (2011) e Brandão (2012) caracterizam as únicas pesquisas aqui referenciadas que não foram desenvolvidas dentro do contexto da Educação Matemática. Pantoja (2011) teve como objetivo facilitar a aprendizagem significativa dos conceitos de sistema físico, variáveis dinâmicas, estado de um sistema físico e evolução temporal. Para isso, apoiado pelas teorias da Aprendizagem Significativa e dos Campos Conceituais, o autor desenvolveu uma sequência de aulas expositivas planejadas para serem ministradas a estudantes de Licenciatura em Física ou professores do Ensino Médio. Em sua análise, o autor buscou estudar padrões de assimilação na forma predicativa do conhecimento, bem como o uso de invariantes operatórios no domínio de situações-problema. A pesquisa evidenciou o uso de invariantes operatórios pelos estudantes alvo da pesquisa, sendo isso indicado por Pantoja (2011) como um indício de aprendizagem nos sujeitos da pesquisa.

A tese desenvolvida por Brandão (2012) possuía como objetivo dar sentido às concepções, dificuldades, avanços e invariantes operatórios utilizados por professores de Física do Ensino Médio na condição de alunos do Mestrado Profissional em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IF-UFRGS). A conclusão desse estudo foi de que o Campo Conceitual da modelagem científica em Física pode ser visto como uma unidade de estudo frutífera para dar sentido às formas predicativa e operatória do conhecimento utilizadas pelos professores de Física do Ensino Médio em situações de modelagem nos diversos campos conceituais específicos da Física (Brandão, 2012).

Lessa (2018), em sua tese de doutorado, buscou investigar, no ambiente de programação de computadores, os teoremas em ação associados de modo a reconhecer os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios junto à dois estudantes do Ensino Médio. A pesquisa teve, como um de seus objetivos específicos, identificar as manifestações conceituais dos estudantes, nas suas formas operatória e predicativa. A autora concluiu que foi possível identificar as formas operatórias e predicativa dos invariantes operatórios e interpretar as representações e compreensões desses estudantes, indicando uma ampliação do conceito de variável, possibilitando generalizações mais complexas (Lessa, 2018).

Em sua dissertação de mestrado, Lorencini (2019), integrante do GEPeDiMa, realizou uma pesquisa-ação, que teve como objetivo geral investigar as possibilidades inclusivas de

uma sequência didática sobre função afim, em que os procedimentos e representações gráficas foram descritos em língua natural (oral ou escrita) por duplas de alunos, de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, de um colégio da rede pública de ensino, no qual estudava uma aluna com baixa visão grave. A autora elaborou uma sequência didática considerando aspectos conceituais da função afim, em particular as ideias-base de variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização, em diferentes representações semióticas, de acordo com os preceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

A sequência foi implementada em oito aulas, com 22 alunos. A análise dos dados aponta que a maioria dos alunos do grupo trabalhado ainda não possuíam o conceito de função afim consolidado, pois mobilizaram indícios das formas operatória e predicativa do conhecimento, de forma isolada, não havendo, na maioria dos casos, a manifestação simultânea de ambas as formas do conhecimento. Por fim, a autora apontou que, dentre as ideias-base manifestadas, foram mais recorrentes as ideias de dependência, regularidade, variação e correspondência, de forma que a ideia de generalização não estava consolidada entre eles.

A pesquisa de doutorado de Lima (2021) teve como objetivo geral analisar conhecimentos de uma professora de Matemática que participava de um processo de formação continuada pautado nas etapas da Engenharia Didática. Para a pesquisa, o autor tomou como base outras investigações que tratavam do processo de formação continuada, em especial aquelas que adotavam uma postura crítica nas ações que não levavam em consideração a realidade do professor, ou a ausência do docente durante o processo de concepção da formação. Assim, o autor propôs um curso de extensão que teve a participação de uma professora de Matemática, que lecionava em turmas do 6º ao 9º ano. Foram trabalhados conteúdos de frações, números decimais, sistemas de equações do 1º grau e relações métricas na circunferência.

Para cada tema, Lima (2021) adotou as etapas da Engenharia Didática, a fim de contribuir para a formação da professora, tanto em aspectos matemáticos quanto didáticos. Os dados analisados evidenciaram que a docente manifestava, com frequências, a forma operatória do conhecimento, com a mobilização de procedimentos e algoritmos de resolução para as situações propostas. Todavia, a professora ao tentar justificar essas estratégias, encontrava dificuldades em relacionar propriedades, relações e justificativas envolvidas na situação, encarados como componentes da forma predicativa do conhecimento. Cabe pontuar que a pesquisa desenvolvida por Lima (2021) não possuiu como foco de suas análises os conhecimentos operatórios e predicativos, sendo estes elementos emergentes no

desenvolvimento de sua pesquisa.

A sexta pesquisa encontrada neste levantamento foi a tese de Peron da Silva (2021), integrante do GEPeDiMa. Em sua tese, a autora buscou analisar a compreensão das ideias-base de função de alunos do quinto ano mediante a resolução em grupo de uma sequência de problemas de estruturas multiplicativas. Para tanto, a autora recorreu à implementação de uma sequência didática de 22 problemas de estrutura multiplicativa, com 30 estudantes do 5º ano. Esses estudantes foram separados em grupos, de forma que essa divisão visava favorecer as interações dialógicas entre os alunos para posterior análise, em conjunto a outras fontes de dados.

Por meio das análises realizadas, Peron da Silva (2021) concluiu que todos os grupos manifestaram a forma operatória do conhecimento com mais facilidade que a forma predicativa e defendeu, diante disso que, quanto mais consciente o aluno estiver de sua forma operatória, mais condição terá para manifestar a forma predicativa, seja oralmente ou por escrito. No que compreende a forma operatória do conhecimento, a ideia-base de correspondência foi o ponto de maior dificuldade entre os alunos, enquanto que, na forma predicativa do conhecimento, as maiores dificuldades se estabeleceram quanto às ideias de generalização, variável e correspondência. Peron da Silva (2021) concluiu sua pesquisa afirmando que a implementação realizada contribuiu para a manifestação simultânea das formas operatória e predicativa do conhecimento, promovendo a aprendizagem no que tange às ideias-base do conceito de função.

A sétima pesquisa encontrada trata-se de uma tese desenvolvida por Santo (2022), que possuiu como objetivo identificar quais as habilidades do Ensino Fundamental I que os professores de matemática do 1º e 2º anos do Ensino Fundamental desenvolvem com os alunos/pacientes, como meio para responder o seguinte questionamento: como os saberes da formação inicial do professor que ensina matemática circulam nas aulas hospitalares? Para tanto, Santo (2022) analisou os conteúdos de 171 aulas de matemática ministradas por professores de uma escola hospitalar. Por meio da análise, Santo (2022), ao direcionar seu olhar para as formas operatória e predicativa do conhecimento, constatou que os professores discorreram sobre a utilização da linguagem oral para exposição das resoluções dos exercícios, valorizando a expressão de conhecimentos dos seus alunos-pacientes quando esta ocorre de forma verbalizada e incentivando tal forma de expressão. O autor revelou, ainda, as dificuldades existentes na busca pela verbalização do conhecimento matemático e a complexidade existente entre fazer um exercício e explicar os métodos utilizados para a sua realização, enfatizando a necessidade de que o professor incentive a verbalização de conceitos

matemáticos, promovendo a argumentação e possibilitando, conseqüentemente, uma melhoria da articulação do conhecimento explícito.

A busca se concentrou em identificar pesquisas desenvolvidas junto a estudantes do Ensino Superior e que trataram especificamente do objeto matemático função afim. Assim, a busca foi realizada a partir do termo “função afim” e seus plurais, com isso, foram identificados 107 textos no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e 144 textos na BDTD. Junto aos resultados obtidos, foi realizada uma análise prévia que considerou: o título das pesquisas; o resumo; e as palavras-chave. Dos resultados obtidos, foram selecionados para análise aqueles: que tinham como sujeitos da pesquisa estudantes do Ensino Superior, tanto de cursos de Licenciatura em Matemática, como de outros cursos; e pesquisas que tinham como propósito analisar a inserção da função afim quanto a seus aspectos de ensino na perspectiva do Ensino Superior. A partir desse afinamento, foram identificados 13 textos, dispostos no Quadro 3:

Quadro 3 – Pesquisas desenvolvidas no Ensino Superior envolvendo função afim

Ano de Defesa	Título	Objetivo	Autor (orientador)
2007	Modelagem Matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções	Investigar contribuições das Representações Semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I.	NASCIMENTO, Ross Alves do (Dra. Verônica Gitirana)
2009	Mapas conceituais digitais como estratégias para o desenvolvimento da metacognição no estudo de funções	Analisar se o trabalho cognitivo gerado pela utilização de mapas conceituais alavanca o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos estudantes.	MAGALHÃES, André Ricardo (Dr. Saddo Ag Almouloud)
2010	Relações institucionais para o ensino da noção de juros na transição Ensino Médio e Ensino Superior	Apresentar as possíveis relações institucionais para o ensino da noção de juros na transição Ensino Médio e Ensino Superior por meio de documentos oficiais, análise de livros didáticos e de alguns planos de ensino de universidades federais e particulares.	CABELLO, Carlos Alberto de Souza (Dra. Marlene Alves Dias)
2013	Contribuições do GeoGebra para o estudo de funções afim e quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática	Analisar as contribuições de um software de geometria dinâmica, em particular do GeoGebra, na interpretação e análise de funções afim e quadrática pelos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.	FERREIRA, Ronaldo Dias (Dra. Celina Aparecida Almeida Abar)
2014	A apropriação dos conceitos de função afim e quadrática por estudantes de cursos de	Analisar como o aluno de cursos de engenharias que já estudou as funções afim e quadrática se	MANZAN, Ana Paula Arantes Lima

	engenharia	apropriou desses conceitos, no movimento do geral/essencial para o particular e, desse, para o geral.	(Dra. Marilene Ribeiro Resende)
2015	Os saberes mobilizados por futuros professores em atividades de Modelagem Matemática envolvendo a função afim	Investigar quais os saberes docentes mobilizados por futuros professores ao vivenciarem atividades de Modelagem Matemática envolvendo o conteúdo matemático função afim.	ALVES, Carlos Alex (Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis)
2015	Múltiplas Representações Semióticas no ensino de função afim: enfoque na formação inicial de professores de Matemática	Analisar o uso de diferentes Representações Semióticas, por Licenciandos em Matemática, para o trabalho com função afim.	CARDOSO, Mikaelle Barboza (Dra. Marcília Chagas Barreto)
2016	A evolução do sentido da noção de função afim para um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática	Identificar e analisar a evolução da atribuição de sentido à noção de função afim por parte de estudantes do 1º ao 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição privada da grande São Paulo.	MINISINI, Emi Gudrud (Dra. Marlene Alves Dias)
2016	Análise discursiva das Representações Semióticas mobilizadas por Licenciandos em Matemática no ensino e na aprendizagem de funções	Investigar a expansão discursiva dos registros de Representação Semiótica mobilizados por licenciandos em Matemática a partir de atividades envolvendo criptografia ao caracterizar funções afim, quadrática e exponencial.	MOSSI, Shayene Vieira (Dra. Cássia Pistóia Mariani)
2016	A Engenharia Didático-Informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação	Prototipar e validar um software para abordar a taxa de variação de funções em uma abordagem variacional.	SILVA, César Thiago José da (Dra. Verônica Gitirana)
2019	Estudo das relações esperadas dos estudantes com a função afim	Identificar nas expectativas institucionais esperadas e existentes para o processo de ensino e aprendizagem da noção de função afim se estas são coerentes e se estão em consonância com as relações pessoais esperadas dos estudantes que iniciam o Ensino Superior.	ARAUJO, Anderson Doniseti de (Dra. Marlene Alves Dias)
2019	Contribuições das Representações Semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática	Investigar contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do cálculo diferencial e integral I.	DENARDI, Vânia Bolzan (Dra. Eleni Bisognin)
2022	Um percurso de estudo e pesquisa para abordar conceitos da Didática da Matemática em uma perspectiva inclusiva	Identificar em que medida o desenvolvimento de um PEP com acadêmicos de uma disciplina que trabalha conceitos da Didática da Matemática, permeados por pressupostos inclusivos, contribui	ANTUNES, Francieli Cristina Agostinetti (Dra. Clélia Maria Ignatius)

		para uma formação docente na atuação em uma sala de aula inclusiva.	Nogueira)
--	--	---	-----------

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observando as pesquisas desenvolvidas, em âmbito de mestrado e doutorado no Brasil, relacionadas ao Ensino Superior e que envolvem função afim, foram identificadas apenas 14 pesquisas.

Outro ponto a ser destacado é que, dentre essas 14 investigações, não foram identificadas pesquisas que tomem a Teoria dos Campos Conceituais como base teórica para seu desenvolvimento, todavia dentre essas 14, 4 fazem menções à TCC. Ross (2011) e Magalhães (2009) utilizam elementos ou definições apresentadas pela TCC para reforçarem argumentos em suas pesquisas. Araújo (2019) cita aspectos da TCC ao descrever outras pesquisas de âmbito internacional sobre funções. Antunes (2022) recorre à TCC não como uma base teórica, mas como uma das teorias consideradas durante o desenvolvimento de seu Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

Dessa maneira, considerando as pesquisas aqui descritas relacionadas à função afim e ao Ensino Superior, assim como os estudos contemplados nas seções anteriores deste capítulo, apresentamos, a seguir, as principais justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa, buscando evidenciar seu diferencial:

- O conceito de função é considerado como um conhecimento fundamental na Matemática (Caraça, 1998), sendo que foi necessário um longo período de evolução até a formação deste conceito. Assim, a formalização no 9º ano do Ensino Fundamental pode não ser suficiente para que um estudante compreenda esse conceito.
- A compreensão de um conceito ocorre por meio de diferentes situações vivenciadas ao longo do processo escolar (Vergnaud, 1993, 2001, 2003, 2009a).
- A BNC-Formação evidencia a necessidade de que os conteúdos trabalhados pela BNCC devem ser retomados ao longo dos cursos de licenciatura. Isso, atrelado a diversas habilidades relacionadas ao conceito de função e indicadas como fundamentais aos estudantes pela BNCC, tornam fundamental a retomada do conteúdo de função no curso de Licenciatura em Matemática.
- Dentre as pesquisas encontradas que foram desenvolvidas junto a estudantes do Ensino Superior e que trataram especificamente do objeto matemático função

afim, não foram identificadas pesquisas que tomem como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais.

- Pesquisas desenvolvidas sob o aporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais, que buscaram se aprofundar no estudo dos conhecimentos operatório e predicativo, desenvolveram suas implementações em outros níveis escolares. Assim, considera-se a escassez de trabalhos que sejam voltados diretamente para o estudo do conhecimento predicativo e sua articulação com a forma operatória, manifestadas por estudantes do Ensino Superior.
- Outras pesquisas (Oliveira, 1997; Rossini, 2006; Nogueira; Rezende, 2014; Nunes; Santana, 2017; Pires; Merline; Magina 2015; Zanatta; Rezende, 2022a) mostram que estudantes do Ensino Superior, e até mesmo professores, manifestam incompreensões a respeito do conteúdo de função.

Diante do apresentado, justificamos o desenvolvimento desta investigação, relativa às formas predicativa e operatória do conhecimento para a construção do conceito de função, tendo como colaboradores futuros professores de Matemática, em que o objetivo é *analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.*

Isto posto e a partir das justificativas apresentadas, o Capítulo 2 trata do aporte teórico desta pesquisa, a Teoria dos Campos Conceituais.

2 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, são apresentados aspectos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), dando ênfase na concepção trazida pela teoria para esquemas e conhecimentos operatório e predicativo. São abordadas, ademais, as estruturas aditivas, multiplicativas e mistas. A TCC contribuiu com essa pesquisa tanto no suporte para a elaboração do instrumento de pesquisa, quanto para a realização das análises, especialmente quanto à análise dos esquemas que propiciaram a identificação de teoremas em ação mobilizados pelos estudantes e, por consequência, para os conhecimentos operatório e predicativo.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista, elaborada entre as décadas de 1970 e 1990 pelo psicólogo e educador francês Gérard Vergnaud (1933-2021), um dos precursores da Didática da Matemática na França. A teoria carrega influências da Teoria Construtivista de Jean Piaget (1986-1980) e da Teoria Sócio-interacionista de Lev Vygotsky (1896-1934).

Vergnaud (1993, p. 1) afirma que a TCC “[...] busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas”. Em outra passagem, Vergnaud (1996a, p. 11) afirma que sua teoria foi desenvolvida “[...] para melhor compreender os problemas de desenvolvimento específico no interior de um mesmo campo de conhecimento”. Nas definições quanto aos objetivos da TCC, embora existam algumas variações, há uma ideia que sempre as permeiam, que a TCC trata do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

Em um dos objetivos supracitados, o pesquisador menciona a aprendizagem de competências complexas. Vergnaud (2009a) afirma que tanto competências quanto concepções se referem ao conhecimento. Mais ainda, Vergnaud (2000) afirma que competência se relaciona à forma operatória do conhecimento, aquela que permite agir e ter êxito em uma situação (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019). Portanto, a competência é diagnosticada pela ação do aluno perante uma situação, e sua capacidade de mobilizar concepções para obter êxito em determinadas situações, sendo que as concepções evoluem gradativamente, conforme o indivíduo experiencia novas situações (Gitirana, *et al.*, 2014).

Vergnaud (2003) afirma que é preciso compreender o processo cognitivo não apenas quanto a sua organização, conduta, percepção, representações ou competências envolvidas,

mas também quanto ao desenvolvimento das formas que esse processo cognitivo pode ser organizado por um indivíduo. Compreender o que se desenvolve e sob quais condições é uma questão fundamental. Acerca da organização da atividade do sujeito, “[...] o que se desenvolve são formas de sua organização” (Vergnaud, 2003, p. 22).

Vergnaud menciona que o processo de desenvolvimento não é um processo breve, visto que “[...] não é em alguns dias ou em algumas semanas que uma criança adquire uma competência nova ou compreende um conceito novo, mas sim, ao longo de vários anos de escola e de experiência” (Vergnaud, 2011, p. 16). Novas competências, ao se desenvolverem, apoiam-se, em parte, em competências prévias, denominadas pelo pesquisador de filiações, enquanto a tomada de consciência, necessária para se formar uma nova competência, exige que a criança abandone ideias e formas de agir antes praticadas, o que o autor denomina de rupturas (Vergnaud, 2011). Assim, esse longo período compreende numerosas etapas e ações de curto prazo, bem como repetidos processos de filiações e rupturas ao longo do processo escolar do estudante.

Todavia, o conceito de competência isoladamente não se configura como um conceito científico, para tanto o autor recorre ao conceito de *esquema*. Confrontando competências e esquemas, estes são os componentes das competências, seus objetivos, regras, invariantes e inferências (Vergnaud, 2002). Assim, os processos de filiações e rupturas remetem diretamente ao conceito de esquema. Vergnaud (1993, p. 2) compreende esquemas como “[...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada”, todavia tomando como perspectiva a própria teoria, uma definição isolada não basta para compreender a interpretação dada aos esquemas (Vergnaud, 1993, 2003), afinal “[...] um conceito não pode ser reduzido à sua definição” (Vergnaud, 1993, p. 1). Nesse sentido, convêm o aprofundamento na compreensão de esquema dada pelo autor.

Vergnaud (2019, p. 7) compreende esquemas como uma organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações e os divide em quatro componentes:

- Objetivo, subobjetivo e antecipações;
- Regras de ação, de tomada de informações e de controle;
- Invariantes operatórios, compreendidos como conceitos em ação e teoremas em ação;
- Possibilidades de inferência em situação.

A respeito dos quatro elementos que compõem os esquemas, Vergnaud (2008a) afirma que a organização de um esquema é invariante, porém sua conduta observável não é, de forma que os esquemas não são compreendidos como estanques, eles engendram condutas diferentes

em função da variedade de situações. Os esquemas não organizam apenas a conduta observável do indivíduo, organizam também sua atividade de pensamento subjacente (Vergnaud, 2002, 2009a).

Em relação ao objetivo, subobjetivo e antecipações, o autor esclarece que um esquema se refere a uma classe de situações, assim, aos esquemas é possível que se associem qualificadores, os quais permitem definir a abrangência do esquema. A parte intencional do esquema se refere a seu objetivo, sendo essa intencionalidade essencial na organização da atividade – mesmo para os casos em que um objetivo é somente parcialmente consciente, caso em que os efeitos da ação não são previsíveis pelo sujeito (Vergnaud, 2009a).

Vergnaud atribui à parte geradora dos esquemas as regras de ação, tomada de informações e controle, sendo essas as mais pronunciadas responsáveis pela conduta e decurso da atividade. Ao citar a conduta, o autor não atribui apenas ações, mas também as tomadas de informação pelo sujeito, em busca da segurança de que ele executou bem aquilo que inicialmente se prestou a realizar. Por fim, essas regras de ação são condicionadas à representação do objetivo almejado e pelas conceitualizações que permitem ao indivíduo identificar os objetos, suas propriedades, relações e transformações (Vergnaud, 2008a). Especificamente, relativo às inferências, Vergnaud é enfático: “[...] não há atividade complexa sem inferências em situações, em particular na aprendizagem e no trabalho” (Vergnaud, 2008a, p. 6).

O terceiro componente é descrito por Vergnaud (2008a) como o mais decisivo do ponto de vista cognitivo, são eles os invariantes operatórios, ou seja, os conceitos em ação e os teoremas em ação. É pertinente que esses termos sejam tratados com mais atenção, dado o destaque a eles atribuídos pela Teoria dos Campos Conceituais como um todo. Vergnaud (1993) estabelece que esses invariantes operatórios podem ser entendidos como modelos para descrever a conduta de um indivíduo, sendo que um teorema em ação é uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa, enquanto um conceito em ação não é verdadeiro nem falso, sendo apenas pertinente ou não a uma situação (Vergnaud, 1996a, 2009a).

O tipo lógico dos conceitos em ação difere do tipo lógico dos teoremas em ação. Segundo Vergnaud (1993), os teoremas em ação são funções proposicionais, de forma que a relação entre funções proposicionais e proposições é uma relação dialética, e “[...] não há proposição sem funções proposicionais, nem função proposicional sem proposições. Do mesmo modo, conceitos em ação e teoremas em ação se constroem em estreita interação” (Vergnaud, 1993, p. 7).

Outrossim, o pesquisador chama atenção para o fato de que um conceito em ação não

é estritamente um conceito, nem um teorema em ação é de fato um teorema. De modo geral, nas ciências, conceitos e teoremas são explícitos, e passíveis de serem analisados quanto a sua pertinência e veracidade, porém os invariantes operatórios não recaem sob essa ideia. Conceitos e teoremas explícitos são apenas parte do processo de conceitualização, o qual também engloba uma parte oculta, formada pelo que Vergnaud denomina de invariantes operatórios (Vergnaud, 1993, 2009a). Esses conhecimentos raramente são apresentados de forma explícita pelos alunos, mesmo quando eles são construídos por eles na ação de resolução de uma situação (Vergnaud, 1993).

Nesse sentido, na sequência são apresentados dois exemplos de teorema em ação e conceito em ação tratados por Vergnaud (1993). Crianças de 5 a 7 anos ao realizarem a contagem de dois conjuntos percebem que, para indicar o cardinal de $A \cup B$, se A e B já foram contados, não é preciso recontar o todo. Essa afirmação pode ser expressa por um teorema em ação da seguinte maneira: $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ desde que $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, podemos indicar que um conceito em ação foi mobilizado, sendo ele a cardinalidade. Um segundo exemplo, se multiplicarmos uma quantidade de objetos vendidos por 2, 3, 4, 10 ou 100, o valor pago será 2, 3, 4, 10 ou 100 vezes maior, e esse conhecimento pode ser expresso pelo teorema em ação verdadeiro $f(nx) = nf(x)$ para todo n inteiro.

A abordagem tanto psicológica quanto didática da construção de um conceito matemático direciona o fato de que um conceito pode ser interpretado como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação (Vergnaud, 1993, 2009a). Assim, na TCC, a definição pragmática de conceito engloba tanto o conjunto de situações que constituem a referência de suas diversas propriedades, como o conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos em tais situações. Desse modo, Vergnaud (2009a) define um conceito como sendo composto por três conjuntos distintos, mas não necessariamente independentes entre si (S, I, L): S, denominado referência, é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, as quais exigem o domínio de uma variedade de conceitos, esquemas e representações simbólicas inter-relacionadas; I, denominado significado, refere-se ao conjunto de conceitos que contribuem com o domínio das situações, são os invariantes operatórios manifestados nos esquemas, na organização, desenvolvimento e resolução das situações pelos sujeitos; e L, o significante, representa as formas linguísticas e simbólicas que permitem expressar objetos de pensamento e conceitos explícitos ou não das situações (Vergnaud, 1993, 2009a). Nessa perspectiva, Moreira (2017) argumenta que, para se estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito, os elementos dessa

terna devem ser considerados simultaneamente.

Quanto ao primeiro conjunto, das situações que dão sentido ao conceito, a definição de situação tem sentido próximo ao de tarefa, de forma que “[...] toda situação complexa seja analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas” (Vergnaud, 1993, p. 9). Quanto a isso Vergnaud (1993) apresenta duas ideias que estão relacionadas às situações: a primeira remete à variedade, um conceito pode estar relacionado a diversas situações, ou seja, um Campo Conceitual abarca uma grande classe de situações; a segunda remete à história, interpretada como experiências dos estudantes, de maneira que a formação do estudante se dá por uma sequência de situações vivenciadas por ele (Vergnaud, 1993).

Ao abordar a definição de conceito dada por Vergnaud, chegamos ao entroncamento fundamental deste aporte teórico. Especificamente ao tratar da diversidade de situações, é importante compreender que essa diversidade de situações deve compreender variações não apenas quanto ao contexto e aos dados numéricos, mas também que possam variar na própria estrutura da questão, isto é, que altere os esquemas necessários para sua resolução (Rezende; Borges, 2017). Nesse sentido, Vergnaud (2003) enfatiza a importância de propor situações que, ao serem desenvolvidas pelos estudantes, permitam aferir tanto sua competência ao fazer, representada pela forma operatória do conhecimento, quanto o saber explicar, representado, mas não limitado, pela forma predicativa do conhecimento.

Para a TCC, o conhecimento se apresenta por essas duas formas indissociáveis, a forma operatória do conhecimento e a forma predicativa do conhecimento (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019), mais ainda, isoladamente essas formas não são suficientes para se obter a conceitualização, uma vez que, a aprendizagem concerne a ambas (Vergnaud, 2008a). Todo conhecimento, quando é concebido como um processo de adaptação, comporta sempre duas propriedades complementares: ele é operatório, no sentido em que é graças ao conhecimento que coletamos informações que vão permitir uma boa adaptação da ação; e ele é predicativo, no sentido que ele identifica propriedades nos objetos, tanto quanto identifica relações, entre essas propriedades e entre o objeto e suas propriedades (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019).

De acordo com a ênfase dada em uma ou outra dessas propriedades, é possível identificar as duas formas de conhecimento, predicativa ou operatória. Dessa maneira, pode-se querer conhecer para compreender melhor, ou pode-se querer conhecer para agir melhor. Todavia, é preciso ter ciência de que as duas formas são derivadas de uma mesma estrutura cognitiva, pois há uma dependência entre elas, sendo que há sempre uma parte predicativa no conhecimento operatório e há sempre uma parte operatória no conhecimento predicativo

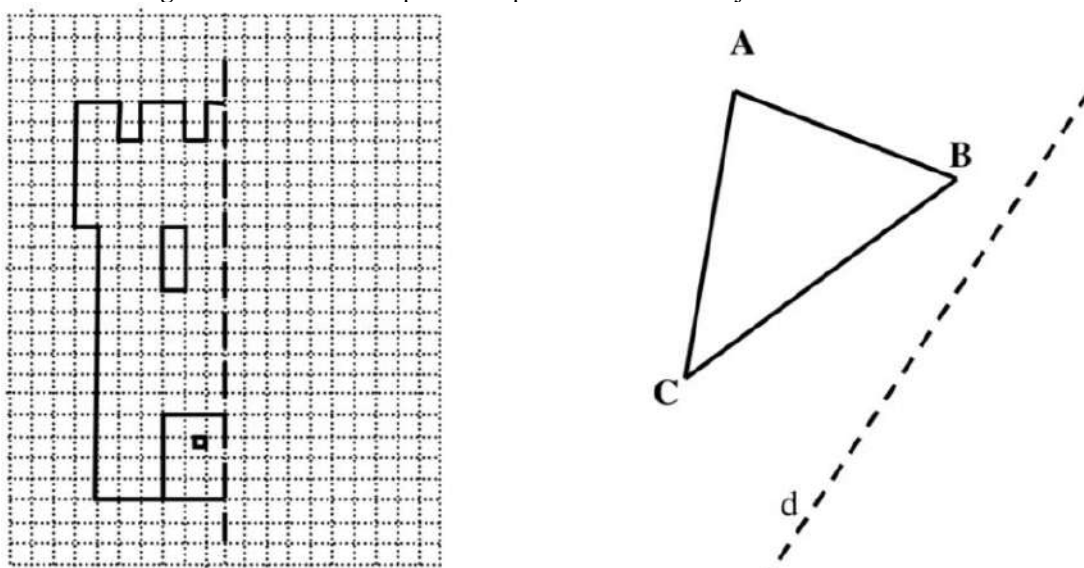
(Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019).

Para se compreender melhor as formas operatória e predicativa do conhecimento, apresentamos o exemplo trazido por Vergnaud (2009a): um mecânico de máquinas realiza conserto nas máquinas com as quais trabalha e, para isso, ele manifesta invariantes que lhe permitem analisar o que é necessário e desprezar aspectos irrelevantes ao consertar tais máquinas. Ao sair de férias, ele passa instruções para um substituto, porém esse substituto não se mostra capaz de realizar os consertos. Nesse exemplo, embora o mecânico seja capaz de efetuar consertos, não apresenta condição para expressar em palavras como determina os aspectos a serem considerados ou desprezados durante o conserto. Neste exemplo, é possível dizer que a forma predicativa do conhecimento do mecânico não é equivalente ao seu conhecimento da forma operatória.

No exemplo apresentado, Vergnaud (2009a) afirma que as formas predicativa e operatória do mecânico não são equivalentes. Essa não equivalência levanta a ideia de níveis ou graus de enunciação de um conhecimento. Nesse sentido, Régnier (2014) argumenta que, embora a forma predicativa do conhecimento possa ser apresentada de forma mais ou menos rica, esta é geralmente muito contextualizada e ligada a valores particulares das variáveis das situações. Assim, na busca de explicações sobre as razões da realização de uma operação, a escolha daquilo que é dito costuma ser seletivo, discreto, econômico ou mesmo confuso, de forma que não é adequado atribuir uma relação causal entre a explicitação ou não dos procedimentos para resolução de uma situação e o domínio de um conceito, sendo o processo de conceituação uma construção gradual, que se desenvolve em níveis (Régnier, 2014).

Isso é reforçado nesse segundo exemplo apresentado por Vergnaud (1996a). A situação solicita que crianças de 8 a 9 anos desenhem a outra metade da fortaleza dada pelo enunciado (Figura 1). Às crianças de 11 a 12 anos é solicitado que tracem a simetria do triângulo ABC em relação ao traçado d (Figura 1).

Figura 1 – Nível de complexidade para o desenho de objeto simétrico



Fonte: Vergnaud (2019, p. 19).

O primeiro ponto a ser observado é a diferença quanto ao nível de complexidade de cada situação, sendo a construção do triângulo simétrico $A'B'C'$ ao triângulo ABC em relação ao eixo d mais complexa do que a construção da segunda metade da fortaleza. Para a construção da fortaleza, as crianças tinham como apoio o papel quadriculado, tornando o procedimento mais simples, e as dificuldades gestuais são quase desprezíveis, pois cada quadrado à esquerda do eixo de simetria é representado por um quadrado à direita. Outro fator facilitador da situação é o eixo de simetria ser vertical, além de a fortaleza ser formada por ângulos retos (Vergnaud, 1996a, 2007, 2019).

Já para a construção do triângulo $A'B'C'$, o nível de complexidade é mais elevado, sendo necessária uma abstração mais elaborada por parte da criança. Os elementos que tornam essa construção mais complexa são os mesmos que tornam a construção da fortaleza mais simples, não há uma malha, o eixo de simetria não é vertical e o triângulo não possui apenas ângulos retos. Dessa forma, não é imediata a percepção dos processos necessários para realizar essa construção, de forma que existe uma ruptura conceitual entre a primeira situação e a segunda, um salto epistemológico (Vergnaud, 2007). Nesse sentido, Vergnaud (1996a) apresenta quatro diferentes níveis conceituais da forma predicativa para essas situações:

- A fortaleza é simétrica;
- O triângulo $A' B' C'$ é simétrico do triângulo ABC em relação a d ;
- A simetria conserva os comprimentos e os ângulos;
- A simetria é uma isometria.

Tratando sobre cada uma das sentenças, a primeira enuncia a propriedade de um objeto concreto, aqui o termo simétrico é um adjetivo da fortaleza. Já o segundo enunciado torna-se mais complexo, passando a conter um predicado de três lugares, os dois triângulos e o traçado *d*. O terceiro enunciado é ainda mais complexo, em que o conceito de simetria deixa de ser um adjetivo, tornando-se um objeto do pensamento, que possui propriedades. Por fim, o quarto enunciado representa, para esse exemplo, o maior grau de conceitualização, ao tratar da relação entre dois tipos de objetos abstratos, as simetrias e as isometrias (Vergnaud, 1996a, 2001, 2019).

Sobre esse exemplo, Vergnaud (1996a) afirma que não são todas as crianças de 11 a 12 anos que se mostram capazes de expressar o triângulo demandado pelo segundo enunciado, dada sua complexidade. Com esse exemplo, o autor mostra que a forma predicativa do conhecimento pode se tornar mais rica e mais complexa (Vergnaud, 2000), e ainda que a linguagem pode agir de forma auxiliadora, permitindo que construções de maior complexidade sejam realizadas, tendo assim um papel junto à organização da ação (Vergnaud, 2001).

Embora ambos os exemplos apresentados aqui tenham envolvido a forma predicativa do conhecimento expressa em linguagem natural¹, os sistemas de significados e significantes, dos quais se destaca a linguagem natural, permitem expressar as propriedades dos objetos e das ações. Para além disso, muitas questões que concernem aos objetos e as ações podem ser colocadas em palavras, e isso contribui para o processo de conceitualização, porém não o esgota (Vergnaud, 2002).

Essa ideia está alinhada com a afirmação de que a forma predicativa do conhecimento auxilia a forma operatória (Vergnaud, 2002), porém, Vergnaud (2002, p. 14) expressa, ainda, que “[...] a forma operatória do conhecimento é sempre mais rica que a forma predicativa”. Assim, a língua, falada ou escrita, bem como os símbolos utilizados na ciência (tabelas, diagramas, álgebra) possuem um papel decisivo na conceitualização, sendo que a invariância da forma simbólica vem socorrer a invariância dos conceitos, permitindo enunciar objetos e propriedades, não acessíveis a percepção direta.

Vergnaud (2004) afirma que a forma predicativa do conhecimento é mais conhecida e mais facilmente identificada por professores e pesquisadores. Essa afirmação é baseada no fato que fórmulas, cálculos ou teoremas matemáticos são por si expressões da forma predicativa do conhecimento. Isso porque essas fontes são objetos do pensamento que

¹ Neste contexto, compreendemos como linguagem natural o português, escrito ou falado.

carregam de forma explícita propriedades e relações com outros objetos do pensamento, que visam expor um conhecimento e tentam comunicá-lo (Vergnaud, 2004; Régnier; Monin, 2009).

Já ao tratar da forma operatória do conhecimento, Vergnaud (2004) enfatiza que ela não é necessariamente explícita, sendo algumas vezes inconsciente pelo sujeito, justamente por sua natureza, uma vez que à forma operatória do conhecimento não cabe a comunicação ou explicitação. Todavia, esse caráter implícito não é uma característica obrigatória, isso porque muitos conhecimentos são passíveis de serem explicados e analisados, quanto aos invariantes, esquemas, símbolos ou propriedades que os compõem (Vergnaud, 2004, 1993).

Consoante ao que foi tratado até o momento, o conceito de esquema dado por Vergnaud (1993, p.2), compreendido como “[...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada”, implica que são nos esquemas apresentados pelos indivíduos que são identificados os conceitos e teoremas em ação, isto é, elementos cognitivos que fazem com que as ações se tornem operatórias, ou seja, que as ações sejam executadas. Dessa forma, o conceito de esquema configura tanto uma continuidade das formas operatória e predicativa do conhecimento, sendo a passagem de um registro epistêmico para um registro pragmático (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019), quanto os esquemas são o próprio conhecimento operatório manifestado, uma vez que, a teoria representa o conhecimento predicativo, enquanto o esquema representa o conhecimento operatório (Vergnaud, 1996b; 2004; 2008a).

Nesse sentido, considerando que “designam-se pelas expressões ‘conceito em ação’ e ‘teorema em ação’ os conhecimentos contidos nos esquemas” (Vergnaud, 1993, p. 4), interessa, a esta pesquisa, compreender que, para se analisar tanto a forma operatória do conhecimento quanto a forma predicativa, manifestadas por estudantes em uma ação, necessariamente deve haver um olhar sobre os invariantes operatórios atrelados a essa ação. Essa ideia é reforçada uma vez que “[...] é o conceito de invariante operatório que permite articular numa visão unitária e sintética as duas formas de conhecimento” (Vergnaud, 1996b, p. 290). Cabe ainda ter em mente que a passagem da forma operatória do conhecimento para a forma predicativa não é um movimento automático, e esquemas de enunciação são necessários para a explicitação ou a simbolização, de tal maneira, que a “[...] passagem, de uma forma operatória do conhecimento a uma forma predicativa feita de objetos, de propriedades e de relações enunciadas, é um dos maiores desafios da escola” (Vergnaud, 2008b).


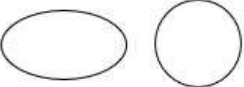

2.1.1 As estruturas aditivas

Vergnaud (1993) assume a possibilidade da existência de campos conceituais em outras áreas além da Matemática¹, porém ele explorou de forma mais enfática os campos conceituais das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. O campo conceitual das estruturas aditivas é estabelecido como o conjunto das situações que envolvem uma ou mais adições e subtrações, bem como o conjunto de teoremas e conceitos associados a essas situações (Vergnaud, 1993).


O campo conceitual aditivo é composto por seis classes de situações, de acordo com Vergnaud (1993), a citar: Composição de duas medidas em uma terceira; Transformação de uma medida inicial em uma medida final; Relação de comparação entre duas medidas; Composição de duas transformações; Transformação de uma relação; Composição de duas relações. Embora as situações sejam divididas em seis classes, Miranda (2019) argumenta que as classes, composição de duas transformações, transformação de uma relação e composição de duas relações, são combinações das demais classificações.

Cada uma das classes de situações mencionadas possui um esquema relacional proposto por Vergnaud, que visa auxiliar o professor ou pesquisador na compreensão das estruturas dessas classes. Assim, os problemas aditivos são representados cada qual por um esquema relacional, esses esquemas são compostos por símbolos e códigos estabelecidos por Vergnaud (2009b), conforme Quadro 4.

Quadro 4 – Códigos e representações dos esquemas

Nomenclatura	Símbolo	Significado
Retângulo		Número absoluto
Círculo ou elipse		Número relativo
Chave (horizontal ou vertical)		Composição de elementos da mesma natureza

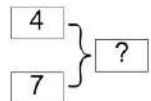
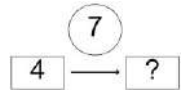
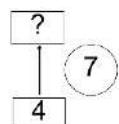
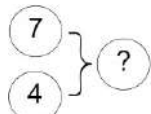
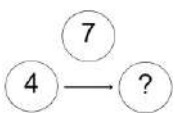
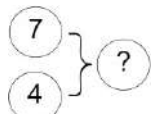
¹ Vergnaud (1996b) aponta a existência de campos conceituais junto a Física, Biologia, História, Geografia e Educação Física. Outras pesquisas vêm estudando campos conceituais junto a outras áreas para além da Matemática (Souza, Fávero, 2002; Almeida, Falcão, 2005; Filho 2010; Campos, 2014; Reis, 2023).

Flecha (horizontal ou vertical)		Uma transformação ou uma relação, quer dizer, a composição de elementos de natureza diferentes.
------------------------------------	---	---

Fonte: Vergnaud (2009b, p. 201).

Essas classificações são uma combinação entre considerações matemáticas e psicológicas quanto às dificuldades apresentadas por estudantes, durante a resolução de problemas aditivos, de forma que problemas que demandem a mesma operação numérica podem apresentar níveis de dificuldade distintas, segundo suas classificações (Vergnaud, 1993). Como forma de exemplificar essa complexidade, o Quadro 5 dispõe exemplos de situações para cada uma das classes aditivas propostas, e seus respectivos esquemas relacionais.

Quadro 5 – Classes de problemas do campo aditivo, exemplos e esquemas

Situação	Classificação	Variação	Esquema Sagital	Cálculo Numérico
Júlia possui 4 livros de ficção e 7 livros de romance. Quantos livros Júlia tem em sua coleção?	Composição de duas medidas em uma terceira	Dadas as partes, busca-se o todo		$4 + 7 = 11$
Júlia tinha 4 livros de ficção e ganhou 7 livros de romance. Com quantos livros Júlia ficou ao todo?	Transformação de uma medida inicial em uma medida final	Dada uma parte e uma transformação, busca-se o todo		
Júlia possui 4 livros e seu amigo Felipe possui 7 livros a mais que Júlia. Quantos livros Felipe possui?	Relação de comparação entre duas medidas	Dado o referente e a relação, busca-se o referido		
Em seu aniversário, Júlia ganhou 4 livros de seu amigo Felipe e 7 livros de sua amiga Larissa. Quantos livros Júlia ganhou de seus amigos?	Composição de duas transformações	Dadas duas transformações (parte) busca-se a transformação total (todo)		
Júlia possuía 4 livros a mais que Felipe. Em seu aniversário, Júlia ganhou 7 livros. Quantos livros Júlia possui a mais que Felipe agora?	Transformação de uma relação	Dada a relação inicial e a transformação, busca-se a relação final		
Júlia tem 4 livros a mais que seu amigo Felipe. Felipe, por sua vez, tem 7 livros a mais que Larissa. Quantos livros Júlia tem a mais que Larissa?	Composição de duas relações	Dadas duas relações (partes), busca-se outra relação (todo)		

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Magina *et al.* (2008) e Vergnaud (2009b).

Embora os sete problemas demandem a mesma operação, $4 + 7 = 11$, o sucesso durante a resolução desses problemas se altera de acordo com a faixa etária e nível de escolaridade em que eles são trabalhados. Essa distinção se dá pela organização das informações dadas pelos enunciados, pois estes possuem estruturas distintas entre si, o que os torna mais ou menos complexos, assim Magina *et al.* (2008, p. 20) pontuam que, “[...] a interpretação e a esquematização de um problema dependem, também, da forma como seu enunciado é proposto”.

As pesquisadoras tratam, ainda, que as situações aditivas envolvem diversos conceitos matemáticos que permeiam esse campo conceitual, a citar: conceito de medidas, conceito de adição, conceito de subtração, conceito de transformação de tempo, relações de comparação e composição de quantidades. Magina *et al.* (2008, p. 21) reforçam que “[...] é preciso que o professor esteja atento para as dificuldades que são inerentes aos tipos de situações, de maneira a não ficar apenas repetindo, ao longo da formação inicial do estudante, problemas que requeiram dele um único raciocínio”, de forma que, as competências necessárias para que um estudante resolva situações do campo conceitual aditivo sejam trabalhadas ao longo de sua escolarização.

Cada uma das seis classes apresentadas possibilita variações e subclasses, Miranda (2019) aponta setenta subclasses resultantes das seis classificações para os problemas do campo conceitual aditivo. Entretanto, não compreende, ao escopo desta pesquisa, a análise de cada subclasse, porém essa diversidade de subclasses reforça novamente um aspecto fundamental, de que sejam trabalhadas junto aos alunos situações diversas no que compreende a suas estruturas. Cabe pontuar, por fim, que, o processo para a realização das classificações das situações foi tratado brevemente, pois esse processo não está contido nos objetivos dessa pesquisa.

2.1.2 *As estruturas multiplicativas*

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é descrito por Vergnaud (1993) como um conjunto de situações que envolve operações de multiplicação, divisão ou a combinação entre elas. Esse campo conceitual abarca diversos conceitos matemáticos, dos quais podemos citar: proporção simples; proporção múltipla; fração; razão; razão escalar direta e inversa; funções, linear, bilinear e não linear; números racionais; taxas; produto

cartesiano; área e volume; combinação; dentre outros conceitos (Gitirana *et al.*, 2014).

Vergnaud (1993) enfatiza a distinção entre as estruturas multiplicativas em relação às estruturas aditivas, uma vez que a primeira envolve relações ternárias, enquanto a segunda compreende situações que envolvem relações ternárias e quaternárias. Gitirana *et al.* (2014, p. 31) reforçam essa descontinuidade entre essas estruturas:

A partir da análise dimensional fica ainda mais clara a descontinuidade entre a multiplicação e a adição. O ensino da multiplicação, como continuidade da adição, em geral traz dificuldades na aprendizagem da multiplicação quando ocorrem as rupturas necessárias entre as duas operações.

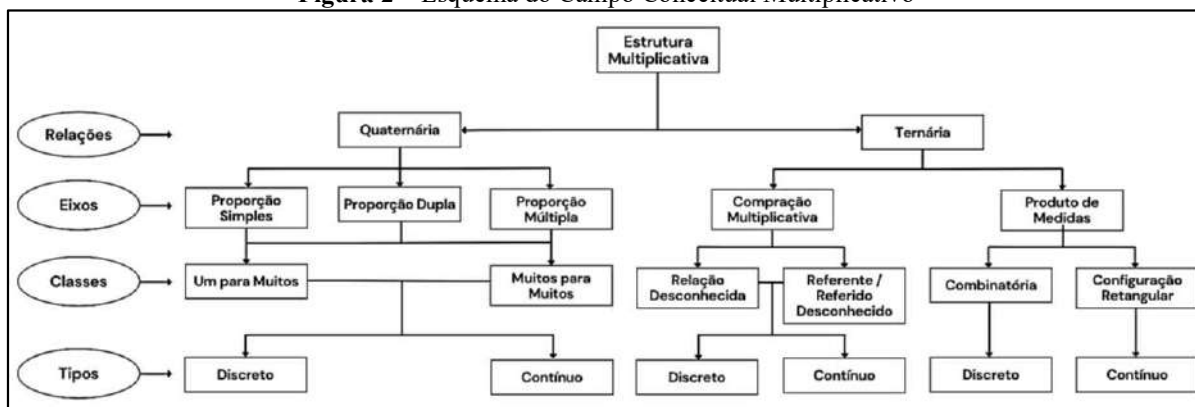
Nesse sentido, as autoras tratam sobre a necessidade da existência de uma descontinuidade do estudo da adição e da multiplicação, embora seja uma conduta comum na docência tratar da multiplicação como sendo o mesmo que somas repetidas, o que acaba por atravancar a compreensão da propriedade comutativa da multiplicação. Para exemplificar isso, Gitirana *et al.* (2014, p. 25) citam a seguinte situação: “em cada pacote de figurinhas vêm 3 figurinhas. Quantas figurinhas se obtém com 4 pacotes?”. Uma estratégia de resolução correta é operar, por meio de somas repetidas da seguinte maneira, *3 figurinhas + 3 figurinhas + 3 figurinhas + 3 figurinhas*, que resultaria no mesmo que 4×3 *figurinhas*, porém essa estratégia deixa de ser válida caso haja a soma dos pacotes, *4 pacotes + 4 pacotes + 4 pacotes*, que resultaria no mesmo que 3×4 *pacotes*, fazendo com que a situação perca o sentido.

Esse exemplo trata de uma relação quaternária de proporcionalidade que se encaixa na primeira, dentre cinco classes de problemas multiplicativos, a proporção simples. Assim como no campo conceitual das estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas também foram classificadas e categorizadas em cinco classes de situações. As classes previstas para o campo conceitual das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 2009b; Gitirana *et al.*, 2014), são:

- Isomorfismo de medidas ou proporção simples;
- Comparação multiplicativa;
- Função bilinear ou proporção dupla;
- Proporção múltipla;
- Produto de medidas ou produto cartesiano

O campo conceitual das estruturas multiplicativas apresenta complexidade em suas estruturas. Buscando sintetizar as classes e subclasses desse campo conceitual, Magina (2016), com base em Vergnaud (1996a, 2009b), propôs um diagrama para o campo multiplicativo. O diagrama ajustado é apresentado pela Figura 2.

Figura 2 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina (2016, p. 79).

No diagrama, é possível observar que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é dividido essencialmente em dois grupos: das relações ternárias e das relações quaternárias. Por sua vez, as relações ternárias são subdivididas em três eixos, sendo eles, proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. De igual maneira, as relações ternárias são divididas em dois eixos, comparação multiplicativa e produto de medidas. Essas subdivisões seguem, dividindo cada eixo em classes e, por fim, o diagrama trata do domínio assumido para cada situação, discreto ou contínuo.

Considerando que o escopo desta pesquisa não compreende propriamente a classificação de situações relacionadas à função afim, aqui são tratadas apenas a classificação de proporção simples, tendo em vista as classificações propostas para as situações que compõem o instrumento dessa pesquisa.

Com o intuito de fomentar uma discussão sobre as classes presentes no diagrama disposto na Figura 2, Souza e Magina (2017) apresentam exemplos de situações, não com vistas de esgotar o assunto, mas de contemplar as classes de situações presentes nesse campo conceitual. Os primeiros quatro exemplos se referem a problemas de proporção simples e estão dispostos no Quadro 6, acompanhados de seus esquemas sagitais.

Quadro 6 – Situações de proporção simples

Situação	Classificação	Variação	Esquema Sagital				
Um bombom custa R\$ 3,00. Quanto pagarei se comprar 4 bombons?	Proporção simples	um para muitos <i>multiplicação</i>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">?</td> </tr> </table>	1	3	4	?
1	3						
4	?						
Comprei 4 bombons iguais e paguei um total de R\$ 12,00. Quanto custou cada um?	Proporção simples	classe um para muitos <i>divisão-partição</i>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">?</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">12</td> </tr> </table>	1	?	4	12
1	?						
4	12						

Comprei R\$ 12,00 de bombons. Sabendo que cada bombom custou R\$ 3,00. Quantos bombons comprei?	Proporção simples	classe um para muitos <i>divisão-cotação ou cota</i>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr><tr><td style="padding: 2px 5px;">?</td><td style="padding: 2px 5px;">12</td></tr></table>	1	3	?	12
1	3						
?	12						
Comprei 3 bombons por R\$ 9,00. Quanto pagarei para comprar 12 bombons?	Proporção simples	muitos para muitos (quarta proporcional) <i>multiplicação e divisão</i>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td></tr><tr><td style="padding: 2px 5px;">12</td><td style="padding: 2px 5px;">?</td></tr></table>	3	9	12	?
3	9						
12	?						

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Vergnaud (2009b), Gitirana *et al.* (2014) e Souza e Magina (2017).

Nos exemplos apresentados, de proporção simples, o primeiro pode ser resolvido por meio de uma multiplicação, $x = 4 * 3$, já o segundo e terceiro exemplos são resolvidos por uma divisão, $x = \frac{4}{12}$ e $x = \frac{12}{3}$. Por fim, o quarto exemplo, de proporção simples, trata-se de um problema de quarta proporcional, de forma que sua resolução demanda uma operação de multiplicação e uma operação de divisão, conforme a situação proposta.

Por meio das cinco classes de situações – proporção simples, comparação multiplicativa, produto cartesiano, função bilinear e proporção múltipla –, é possível estabelecer dezoito subclasses, sendo quatro pertencentes à primeira classe, proporção simples, seis pertencentes à segunda classe, comparação multiplicativa, quatro pertencentes à terceira classe, produto de medidas, duas pertencentes à quarta classe, função bilinear ou proporção dupla e duas pertencentes à quinta classe, proporção múltipla (Miranda, 2019). Assim como mencionado na apresentação das estruturas aditivas, não cabe aqui o aprofundamento no estudo quanto às particularidades referentes a cada uma dessas subclasses.

2.1.3 As situações mistas

Para além dos problemas do campo conceitual aditivo e multiplicativo, Vergnaud (2009b) estabelece e discute problemas complexos, denominados como aqueles que envolvem em sua resolução mais de uma relação aditiva, mais de uma relação multiplicativa ou que comporte ao menos uma relação aditiva e uma multiplicativa. Dessa forma, os problemas complexos podem se apresentar respectivamente como puramente aditivos, puramente multiplicativos ou problemas mistos (Vergnaud, 2009b).

Os problemas mistos são problemas de complexidade elevada, por apresentarem várias relações e estruturas em jogo (Vergnaud, 2009b). Assim, o autor apresenta direcionamentos ao professor no que tange o trabalho com situações mistas: buscar que a criança formule perguntas que tragam sentido ao enunciado; voluntariamente introduzir informações

desnecessárias ou omitir informações necessárias; buscar que o estudante estabeleça relações operatórias das informações, perguntas e caminhos possíveis para resolução; propor a “tradução” entre as representações (enunciados verbais, tabelas, operadores, equações algébricas); e, em caso de falha na resolução, recorrer a uma reconstrução material e gesticulada da situação dada pelo enunciado, reestabelecendo elos entre a situação material e as representações associadas a ela.

Diferente dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, para os quais Vergnaud (2009b) estabeleceu classes para as situações que os compõem, o pesquisador não estabeleceu uma classificação para os problemas complexos, ao considerar que o número de possibilidades aumenta em relação ao número de relações elementares envolvidas. Aqui, foi tomado como base as pesquisas desenvolvidas por Miranda (2019) e por Fuzzo (2022) no que tange à classificação de situações mistas.

A análise de situações mistas foi feita por Miranda (2019) ao realizar uma aproximação junto a situações relacionadas à função afim, ao considerar que esse objeto carrega consigo uma operação multiplicativa e uma relação aditiva em sua forma algébrica, $f(x) = ax + b$. A pesquisadora propôs, em sua análise, *a priori* 30 possíveis classificações para as situações mistas. Em sua pesquisa, Miranda (2019) analisou livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, nos quais foram identificadas 89 situações mistas. Essas 89 situações foram classificadas de acordo com as análises de situações mistas proposta por Vergnaud (2009b), e em consonância com as relações elementares envolvidas nas classificações de situações das estruturas aditivas e multiplicativas.

A análise realizada por Miranda (2019) resultou em 9 classes de situações, a saber: proporção simples; produto de medidas; composição de medidas; proporção simples e composição de medidas; proporção simples e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas; comparação multiplicativa e transformação de medidas; proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; e comparação multiplicativa e proporção simples. Destas, sete foram pré-estabelecidas e duas emergiram durante o mapeamento das situações, o que mostra que essas classificações exemplificam, mas não esgotam essa tipologia, apontando para a necessidade de que outras pesquisas, incluindo novas fontes, fossem realizadas.

A partir disso, Rodrigues e Rezende (2021) mapearam situações mistas em livros didáticos do Ensino Fundamental, Anos Iniciais, e Cappelin e Rezende (2021) analisaram e classificaram situações relacionadas à função afim em um livro didático do Ensino Superior.

As classes de situações observadas nestas pesquisas já haviam sido identificadas por Miranda (2019), exceto uma, presente no livro do Ensino Superior, classificada como proporção simples (quarta proporcional) e composição de medidas.

Tieppo *et al.* (2023) realizaram uma análise de situações mistas em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Foram analisadas 10 situações mistas, cujas classificações se deram da seguinte maneira: dupla proporção simples e composição de medidas (3); proporção simples e composição de medidas (1); dupla proporção simples e dupla transformação de medidas (1); proporção simples e dupla composição de medidas (1); dupla proporção simples, dupla transformação de medidas e composição de medidas (1); proporção simples e transformação de medidas (1); dupla proporção simples, dupla transformação de medidas e comparação de medidas (1); comparação simples, proporção simples e composição de medidas (1). Dessas, apenas a classe de proporção simples e composição de medidas se repete nas demais pesquisas apresentadas, de forma que as demais classificações, apresentavam um número maior de estruturas aditivas, multiplicativas ou ambas. Tieppo *et al.* (2023) apontam que esse número maior de estruturas pode culminar em maiores dificuldades dos estudantes ao realizarem provas e avaliações desse teor, uma vez que as estruturas presentes no Enem divergem daquelas presentes em livros do Ensino Fundamental e Médio.

Fuzzo (2022), com o objetivo de estabelecer uma tipologia de situações de juros simples, realizou um estudo que teve como fonte de dados livros didáticos do Ensino Médio. As análises evidenciaram que as situações apresentaram características dos problemas complexos propostos por Vergnaud (2009b), sendo que, para o estabelecimento da tipologia, o autor dividiu a classificação das situações entre a questão principal do enunciado e etapas intermediárias de resolução, sendo essas as relações necessárias para obtenção dos dados que subsidiam a resolução da questão principal do enunciado.

Assim, com base nos resultados de Tieppo *et al.* (2023) e Fuzzo (2022), foram estabelecidas como foco do instrumento desta pesquisa situações-problema mistas relacionadas à função afim e que apresentam etapas intermediárias de resolução, buscando propor aos sujeitos da pesquisa situações-problema com um nível de complexidade de resolução mais elevado, considerando se tratar de estudantes de Licenciatura em Matemática.

3 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

O desenvolvimento desta investigação tomou como base alguns princípios da Engenharia Didática. Para tanto, neste capítulo, são apresentados os aspectos gerais da Engenharia Didática e as aproximações desta pesquisa com as fases da Engenharia Didática; também, são definidos o problema de pesquisa, os objetivos (geral e específicos), o instrumento de pesquisa e sua análise *a priori*, o protocolo de entrevistas e uma descrição do estudo piloto; além de uma descrição do processo de produção de dados junto ao estudo principal realizado.

Cabe esclarecer que, neste texto, foi adotado o termo *situações-problema* para se referir aos enunciados que compõem o instrumento de pesquisa.

3.1 A Engenharia Didática e direcionamentos para a presente investigação

A presente pesquisa não busca adotar a Engenharia Didática como metodologia central de seu desenvolvimento, porém, as etapas previstas para o desenvolvimento desta investigação tomam como base passos propostos pela Engenharia Didática. Nesse sentido, a Engenharia Didática auxilia como um direcionamento das etapas de pesquisa. Portanto, nesta seção, são apresentados os aspectos da Engenharia Didática e como ela auxiliou no desenvolvimento da pesquisa.

Na década de 1970, com a ascensão e consolidação das pesquisas em Didática da Matemática na França, emergiu a necessidade de uma metodologia que auxiliasse os pesquisadores no preparo e análise de suas pesquisas. Essas pesquisas analisavam sequências didáticas, com bases metodológicas oriundas do campo da Educação, que não atendiam às especificidades que emergiam das pesquisas em Didática da Matemática. Dado o exposto, era preciso uma metodologia que considerasse, simultaneamente, a especificidade do conteúdo matemático e as questões didáticas envolvidas (Bittar, 2017).

Na aurora das pesquisas em Didática da Matemática, os pesquisadores ainda não dispunham de uma metodologia que atendesse a essas especificidades, todavia, as intervenções realizadas acompanhavam padrões em seu preparo, implementação e análise. Assim, ainda na década de 1970, surgiram os primeiros trabalhos sobre a Engenharia Didática (ED), sendo que, na década de 1980, esses estudos passaram a ser sistematizados. Dentre os autores que participaram desse processo, cabe citarmos Guy Brousseau, Yves Chevallard,

Régine Douady e Michèle Artigue (Bittar, 2017; Machado, 2012).

Nesse contexto, a Engenharia Didática emergiu com o objetivo de criar modelos consistentes e relevantes, produzindo dispositivos para o ensino de conhecimentos específicos, destinados a descrever eventos observáveis, permitindo ao pesquisador coletar informações sobre esses eventos, que o permitam relatá-los, explicá-los *a posteriori*, exprimindo seu progresso ou resultados, assim como permitindo sua reprodução, consideradas as condições passíveis de serem reproduzidas (Brousseau, 2013). Nesse contexto, a Engenharia Didática assume duas vertentes, uma de ensino e outra de método, permitindo, tanto uma produção para o ensino quanto meios para se estudar empiricamente fenômenos didáticos e divulgá-los com precisão (Machado 2012; Perrin-Glorian, 2009).

Artigue (1996) descreve a ED como um esquema experimental, baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou ainda, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino, propondo o confronto entre análise *a priori* e *a posteriori*. Machado (2012) dialoga, no mesmo sentido, apontando como finalidade da ED analisar as situações didáticas associadas às pesquisas em Didática da Matemática, as quais incluem uma etapa experimental. Sob essa perspectiva metodológica, Artigue (1996) apresenta quatro fases que constituem a Engenharia Didática: análise preliminar; concepções e análise *a priori* das situações a serem propostas; experimentação; análise *a posteriori* e validação.

Essas fases apresentadas por Artigue (1996) não necessariamente se desenvolvem de maneira linear ou sequencial. Embora inicialmente as fases sejam ordenadas, a Engenharia Didática não é uma metodologia rígida ou fechada, pelo contrário, trata-se de uma metodologia dinâmica, permitindo não apenas a alternância entre as fases, como também que uma ou mais fases se repitam quantas vezes forem pertinentes (Bittar, 2017). Cada uma das fases pode ser retomada ou aprofundada ao longo da pesquisa, tendo em vista as necessidades emergentes diante de seu desenvolvimento (Almouloud, 2007).

A fase das análises preliminares é descrita por Bittar (2017) como um amplo estudo do objeto matemático, foco da sequência didática, tendo como objetivo fornecer uma base ao pesquisador para a elaboração da sequência didática. É durante as análises prévias que o pesquisador pode identificar problemas no ensino ou aprendizagem do objeto de estudo e delinear, de modo fundamentado, as problemáticas, hipóteses e fundamentos teóricos para a pesquisa (Almouloud, 2007). Segundo Artigue (1996), embora essa fase se apoie em um quadro teórico didático geral, baseado em conhecimentos prévios já adquiridos sobre o objeto estudado, existem algumas análises preliminares que são, em sua maioria, comuns entre as pesquisas, a citar:

- Análise histórica e epistemológica do conteúdo alvo da pesquisa;
- Análise do ensino atual e de seus efeitos;
- Análise das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- Análise dos entraves ou constrangimentos que os alunos possam enfrentar durante a implementação;
- Análise e consideração dos objetivos específicos da pesquisa.

Essas análises podem incluir diversas fontes, normalmente adotando o ponto de vista matemático ou de ensino do objeto estudado. Dessa forma, essa etapa perpassa pela análise de: livros didáticos; orientações curriculares; pesquisas anteriores relacionadas ao objeto de estudo, que abordem dificuldades relativas ao tema; e outras referências bibliográficas pertinentes (Bittar, 2017). Almouloud (2007) aponta como importante, ainda nessa fase, a definição das questões de pesquisa, discutindo e definindo os fundamentos teóricos e os procedimentos metodológicos que nortearão a fase experimental, as análises *a priori* e *a posteriori* da pesquisa.

Pautado pela análise preliminar, dá-se início a segunda fase, de elaboração da sequência didática, acompanhada da análise *a priori*. Embora a elaboração da sequência didática e a análise *a priori* caminhem juntas, há uma distinção quanto às ações do pesquisador ou professor, sendo que, uma possui papel de descrição e outra de antecipação. A elaboração da situação é realizada em função das variáveis didáticas¹, Almouloud (2007) destaca algumas características a serem consideradas: se há uma facilidade de compreensão dos dados da situação, permitindo o engajamento do aluno; se as situações colocam em jogo o conceito que se deseja explorar; se os conhecimentos prévios do aluno são insuficientes para resolução; e se o objeto do conhecimento que se deseja ensinar é a ferramenta central utilizada para se obter a solução final da situação.

Já a análise *a priori* é realizada sobre a sequência construída e tem por objetivo determinar como as escolhas efetuadas e as variáveis didáticas assumidas permitem que sejam elaboradas estratégias ou ferramentas que auxiliem na compreensão daquilo que será realizado pelos estudantes (Almouloud, 2007). Porém, é preciso compreender que, embora a análise *a priori* tenha uma característica de generalização, buscando antecipar possíveis comportamentos, isto é, como o aluno irá interagir com seu meio durante a experimentação, em geral, nem todas as estratégias que podem ser previstas já que é durante a análise *a*

¹ Variáveis didáticas: elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos (Bittar, 2017, p. 103).

posteriori que são realizadas as análises do comportamento cognitivo manifestado pelo aluno, diante da sequência proposta (Bittar, 2017).

Seguindo as fases da ED, uma vez preparada a sequência didática e realizada a análise *a priori* é dado início à implementação das situações, fase esta denominada de experimentação. A experimentação é o momento de colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, dedicando atenção para sua capacidade de fornecer as informações esperadas para o desenvolvimento da pesquisa e, assim, permitindo ao pesquisador que analise as interações dos alunos com o ambiente (Almouloud, 2007; Perrin-Glorian, 2009). Usualmente são observadas as produções dos alunos e são criadas formas de se analisar as interações entre os alunos, tomando notas durante as observações e, sempre que possível, acompanhadas da gravação em áudio ou vídeo (Perrin-Glorian, 2009).

Já a fase de análise *a posteriori*, pode ocorrer antes, durante ou após a experimentação, podendo ser retomada e repetida mediante a necessidade da pesquisa.. A análise *a posteriori* deve tomar, como fundamento de seus processos, o conjunto de dados recolhidos ou produzidos durante a fase de experimentação, sendo realizada à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos da pesquisa, das hipóteses construídas em fases anteriores e da problemática de pesquisa, sendo que a análise *a posteriori* de ser desenvolvida não somente após a experimentação, como também, ao longo da implementação da sequência (Almouloud, 2007).

A seguir, é apresentado o modo como a Engenharia Didática auxiliou no desenvolvimento desta pesquisa.

Como forma de criar uma base e fornecer subsídios para a elaboração do instrumento de pesquisa, foi realizada uma análise preliminar do conceito matemático em jogo, que compreende: uma análise histórica e de aspectos epistemológicos das funções; investigações do ponto de vista metodológico para o ensino de funções no Ensino Superior; uma análise de documentos curriculares associados a este objeto; e uma busca por referências bibliográficas e estudos de outras pesquisas que abordam aspectos, erros e obstáculos possíveis de serem manifestados por estudantes, principalmente no que se refere aos conhecimentos operatórios e predicativos relativos ao conceito de função.

Pautadas pela análise preliminar, as situações-problema que compõem o instrumento da presente pesquisa foram elaboradas considerando critérios previamente estabelecidos e tomando em consideração a questão e os objetivos do trabalho. Foram propostas situações-problema que demandaram atenção e reflexão por parte dos alunos para sua resolução, inclinando-os a tomarem as situações-problema como desafios. Com isso, buscou-se

contribuir para a construção de novos esquemas, que os permitissem prosseguir com as resoluções. Para cada situação-problema proposta foi realizada uma análise *a priori*, com vistas a explicitar e justificar as escolhas e critérios adotados quanto a elaboração das situações-problema, bem como explorar as estratégias de resolução e os principais acertos e erros que podem ser manifestados pelos estudantes.

Para a experimentação, realização da sequência didática e produção dos dados, durante a implementação da sequência didática, os estudantes foram organizados em duplas ou trios, e tiveram acesso restringido a qualquer material de consulta. As interações dialógicas entre eles foram gravadas e transcritas. Posteriormente, esses grupos foram entrevistados visando explorar pontos que não foram evidenciados durante as resoluções. As transcrições dos diálogos, em conjunto aos protocolos apresentados e a transcrição das entrevistas, compuseram os dados da pesquisa.

A análise *a posteriori* e validação foram realizadas a partir da análise dos seguintes materiais: protocolos produzidos pelos estudantes; anotações do diário de bordo do pesquisador, preenchido antes, durante e após a implementação do instrumento de pesquisa; transcrições dos diálogos decorridos das interações durante a experimentação, entre os estudantes e dos estudantes com o pesquisador; e transcrições das entrevistas. Durante esta etapa de validação houve a busca por possíveis manifestações no que diz respeito às formas operatória e predicativa do conhecimento, na forma de conceitos e teoremas em ação.

3.2 Problema e objetivos da pesquisa

Considerando as justificativas apresentadas para o desenvolvimento desta pesquisa na introdução deste texto, bem como os estudos preliminares realizados, aqui caracterizados pelos capítulos 1 e 2 da pesquisa, essa investigação se propôs a responder à seguinte questão: *Que conhecimentos matemáticos são manifestados por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática ao resolverem situações-problema de função afim?*

Com vistas a responder o problema de pesquisa apresentado, foram estabelecidos os seguintes objetivos, geral e específicos:

Geral:

Analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.

Específicos:

- Analisar as interações dialógicas estabelecidas entre os participantes da pesquisa.
- Analisar os esquemas apresentados pelos participantes da pesquisa ao resolverem as situações-problema propostas.

3.3 Instrumento de pesquisa e análises *a priori*

Nesta seção, são apresentadas as situações-problema que compõem o instrumento de pesquisa deste estudo, seguido pela classificação de cada situação-problema de acordo com suas tipologias na perspectiva da TCC e pela análise *a priori* realizada quanto às estratégias de resolução. São apresentados, ademais, os critérios estabelecidos para a elaboração das situações-problema. Para a classificação das situações-problema, considerou-se as pesquisas de Fuzzo (2022) e Tieppo (2023). Para distinguir os esquemas relacionais intermediários dos esquemas relacionais principais, Fuzzo (2022) propõe uma adaptação aos códigos estabelecidos por Vergnaud (Quadro 4), apresentando símbolos com linhas tracejadas para representar as etapas intermediárias de resolução e símbolos com linhas contínuas para as relações que fazem referência ao questionamento principal da situação-problema.

Já com base em Tieppo (2023), foi acrescentado um triângulo inscrito no retângulo ou círculo, como símbolo que designa a presença de uma variável. O triângulo inscrito no retângulo ocorre quando o número é positivo ou não tem sinal, já no círculo a inclusão ocorre quando há um número relativo. Essa adaptação trazida por Tieppo (2023) visa contemplar a classificação de funções afim junto as classificações trazidas por Vergnaud (1983, 1993, 2009b) para as situações aditivas, multiplicativas e mistas.

Devido ao fato de que problema de pesquisa apresentado tem como um de seus pontos fundamentais a função afim, o primeiro critério considerado durante a elaboração das situações-problema foi delineado de forma que todas as situações-problema permitissem, ao final, a modelação de uma função afim em sua forma algébrica. Dessa forma, todos os demais critérios possuem este como referência, sendo eles determinados e delineados buscando conservar, ao máximo, a premissa de que as soluções para os problemas sejam dadas por funções.

Embora durante a elaboração houvesse um intuito de que as situações-problema fossem relacionadas à função afim, as soluções não se limitam a esse objeto matemático. Os enunciados foram elaborados de forma a evitar o uso de termos que pudessem expor claramente aquilo que era esperado dos estudantes. Por isso, evitou-se a utilização de termos

como função, variável, regularidade, progressão, dentre outros costumeiramente presentes em situações-problema que envolvam função afim. Com isso, esperava-se que o conceito de função afim emergisse durante a resolução.


A possibilidade de que outras resoluções que não aquelas que considerem uma função afim em suas construções emergjam está diretamente relacionada ao segundo critério adotado, em que as situações-problema propostas não possuíssem subitens ou instruções detalhadas para resolução. Essa opção teve como direcionador um objetivo de pesquisa específico que visa à análise das interações dialógicas entre os participantes. Assim, tinha-se, por base, que a ausência de instruções fomentasse o diálogo, criando um ambiente em que os estudantes já estariam encorajados a dialogarem com seus pares.

Ainda considerando a diversidade de caminhos possíveis para cada situação-problema, as classificações aqui apresentadas buscam contemplar essa diversidade, preservando a ideia do aumento progressivo no número de etapas intermediárias. Assim, na situação-problema 1, a análise é realizada sobre a obtenção uma solução pertence a um domínio discreto, enquanto nas situações-problema 2 e 3 são apresentadas classificações com base em resoluções contidas em domínios contínuos.

Ao partir do exposto, bem como dos objetivos geral e específicos, foram estabelecidos os seguintes critérios para a elaboração das situações-problema:

- Situações-problema em que a solução ótima seja uma função afim.
- Situações-problema abertas, sem a presença de subitens ou instruções detalhadas de resolução.
- A presença de etapas intermediárias de resolução.
- A questão principal da situação-problema pertencer à classe de proporção simples e transformação de medidas.

3.3.1 Situação-problema 1



A gerência da sorveteria Latte Dulce quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação às vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

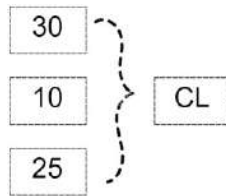
Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

Análise e classificação da situação-problema

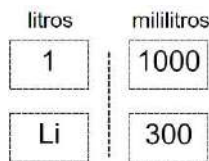
A situação-problema 1 pressupõe o menor número de etapas intermediárias dentre as três situações-problema propostas, o que, considerando o contexto da pesquisa, faz com que ela possa ser tida como a situação-problema de menor complexidade dentre as três que compõem este estudo. A situação-problema 1 apresenta dados quanto à produção e à comercialização de sorvetes, e sua questão principal propõe que seja apresentada uma representação matemática para o potencial de lucro ou prejuízo, considerando o número de sorvetes comercializados e os custos de produção e comercialização do produto. A representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, mediante as informações dadas pelo enunciado, demanda a realização de etapas intermediárias de resolução, uma vez que parte dos dados não pode ser imediatamente ligada à representação matemática referida. É solicitado, ainda, que seja realizada uma representação visual para a representação matemática obtida, que aqui é compreendida como a construção gráfica associada à representação matemática apresentada.

Dentre as informações apresentadas pelo enunciado, a primeira se refere aos custos dos ingredientes para a fabricação de um lote de 12 litros de sorvete. A soma dos custos com leite, açúcar e outros insumos, resulta no custo do lote (CL), dado pela soma $CL = 30 + 10 + 25 = 65$, em que os valores são dados em reais. Trata-se de uma relação ternária das

estruturas aditivas, da categoria composição de medidas, em que dadas as partes, busca-se o todo, conforme o esquema relacional a seguir.



O segundo ponto a ser abordado diz respeito às unidades de medida em que o sorvete é produzido e comercializado, de forma que há a necessidade de se realizar a conversão, ou do volume produzido para mililitros ou do volume comercializado para litros. Essa escolha, embora não afete o número de etapas intermediárias, altera a classificação dessas etapas, o que pode influenciar ativamente no nível de complexidade da situação-problema. O caminho aqui apresentado realiza a conversão do volume de sorvete comercializado de mililitros para litros, que pode ser representada algebricamente da seguinte maneira, $Li = 300/1000 = 0,3$. O esquema relacional referente à essa etapa está apresentado a seguir.



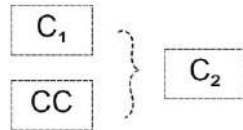
O esquema apresentado é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, da categoria de proporção simples, um para muitos, cota.

A etapa seguinte busca pelo custo de um sorvete ao ser comercializado (C_1), de forma que esse custo por ser obtido pela relação entre as grandezas obtidas nas duas etapas intermediárias anteriores, o custo de produção do lote (CL) e o volume de sorvete comercializado (Li). Algebricamente, tem-se, $C_1 = (65/12) * 0,3 = 1,625$. Especificamente, essa relação de proporcionalidade entre duas grandezas pertencente à categoria de proporção simples e classe muitos para muitos, quarta proporcional, e seu esquema relacional é descrito a seguir.

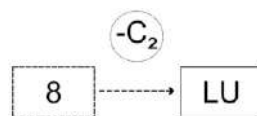


Outra informação que o enunciado apresenta corresponde ao custo de cada casquinha (CC) em que o sorvete é servido. A etapa anterior obteve o custo do sorvete comercializado (C_1), de forma que, uma vez que tanto o custo da casquinha quanto o custo do sorvete

comercializada se referem a uma unidade comercializada, torna-se possível relacionar ambos os valores para que seja obtido o custo total por sorvete comercializado (C_2), de forma que, algebricamente tem-se, $C_2 = 1,625 + 0,50 = 2,125$. Essa adição trata-se de uma relação entre duas medidas de mesma natureza, em que, dadas as partes, busca-se o todo, sendo essa uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria composição de medidas, em que o esquema relacional é apresentado a seguir.



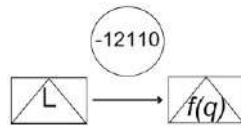
A etapa intermediária subsequente também é composta por uma relação entre duas grandezas, porém, nesse caso, embora sejam grandezas de mesma natureza, há uma relação dinâmica em que o lucro bruto unitário (R\$ 8,00) é transformado no lucro unitário (LU). Tal transformação negativa é representada algebricamente por $LU = 8 - 2,125 = 5,875$, conforme o seguinte esquema relacional.



Uma vez obtido o lucro unitário (LU), torna-se possível obter o lucro total da sorveteria (L), representado por uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, da categoria de proporção simples, um para muitos, multiplicação, a qual relaciona o lucro unitário (LU) a uma quantidade qualquer de sorvetes comercializados (q), conforme o esquema relacional apresentado a seguir.



Essa proporção simples é representada algebricamente como $L = 5,875 * q$. Por fim, obtido o lucro total da sorveteria (L), em função da quantidade de sorvete comercializada (q), é possível deduzir os custos fixos da sorveteria (R\$ 12.110,00), para que seja obtida a função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo dessa empresa ($f(q)$), representada algebricamente como $f(q) = 5,875 * q - 12110$. Aqui também há uma relação dinâmica entre as grandezas, caracterizando uma transformação negativa representada conforme o esquema relacional aqui apresentado.



A solução apresentada pelo problema, de acordo com as escolhas adotadas, resulta em uma função afim, dada por $f(q) = 5,875 * q - 12110$, porém algumas questões devem ser destacadas. A função apresentada $f(q)$ tem como variável a quantidade de sorvetes comercializados e o enunciado não aponta para a possibilidade de que essa comercialização possa ser feita sob outro volume que não 300ml por unidade, tratando-se, assim, de um domínio discreto.

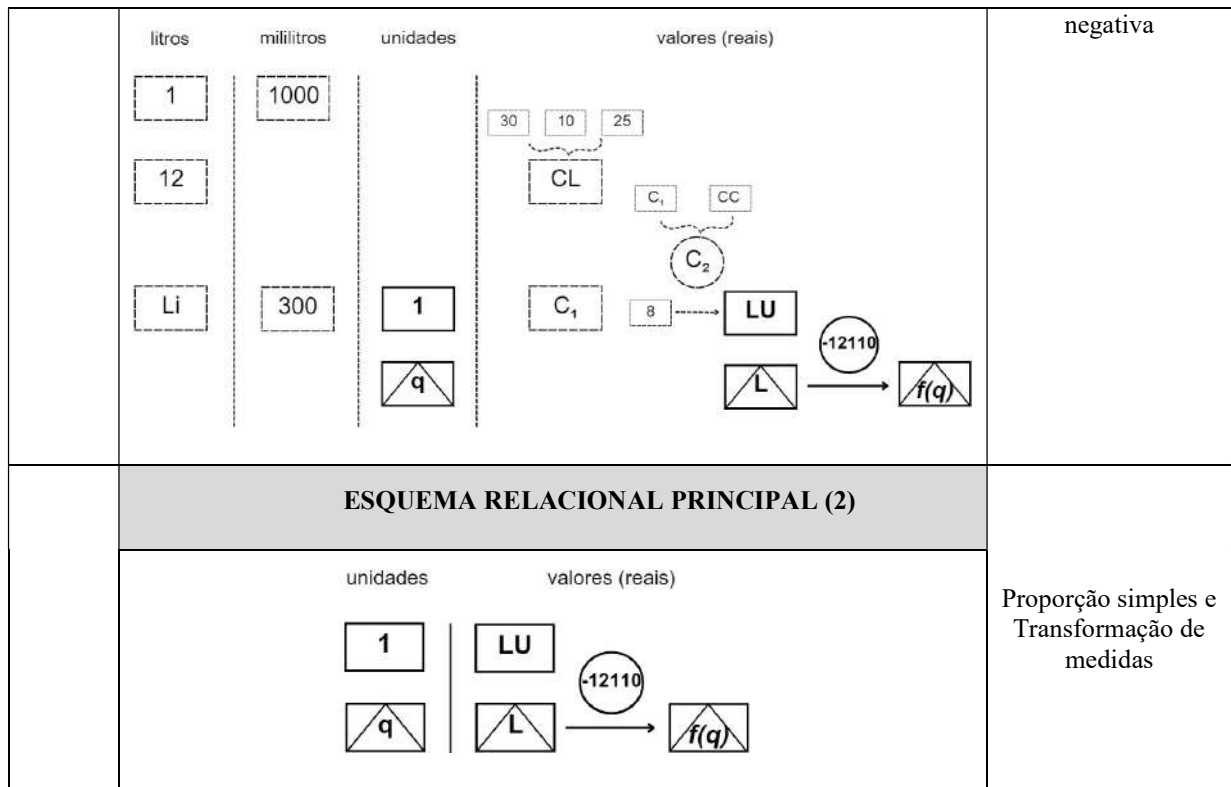
Dado o exposto, foram consideradas as relações estabelecidas entre: os custos com leite (R\$ 30,00), açúcar (R\$ 10,00) e outros insumos (R\$ 25,00), para obtenção do custo do lote (CL); o volume de sorvete comercializado em cada unidade (300 ml) e o número de mililitros em um litro (1000), para obtenção do volume de sorvete comercializado (Li); o custo de produção do lote (CL) e o volume de sorvete comercializado (Li), para se obter o custo do sorvete comercializado (C_1); o custo de cada casquinha (CC) e o custo do sorvete comercializado (C_1), para se obter o custo total por sorvete comercializado (C_2); o custo total por sorvete comercializado (C_2) e o lucro bruto unitário (R\$ 8,00), para se obter o lucro unitário (LU); o lucro unitário (LU) e uma quantidade qualquer de sorvetes comercializados (q), para se obter o lucro total da sorveteria (L); e o lucro total da sorveteria (L) e o custos fixos da sorveteria (R\$ 12.110,00), para obter função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ($f(q)$).

De acordo com o citado, por se tratar de uma situação-problema descrito por Vergnaud (2009b) como um problema complexo, para sua classificação foi adotado um caminho de resolução que simultaneamente atendesse ao que foi proposto pelo enunciado e que apresentasse o menor número de etapas intermediárias para resolução. Dessa forma, o Quadro 7 apresenta as expressões numéricas, seus esquemas relacionais e as categorias associadas a eles.

Quadro 7 – Classificação Situação-problema 1

Etapa	Expressão numérica (resultado)	Esquema relacional	Categoria
-------	--------------------------------	--------------------	-----------

INTERMEDIÁRIA	$30 + 10 + 25 = 65$ custo do lote (CL)		Composição de medidas										
	$\frac{300}{1000} = 0,3$ volume de sorvete comercializado (Li)	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">litros</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border-left: 1px dashed black; padding: 0 5px;"></td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">mililitros</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1000</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Li</td> <td></td> <td style="border-left: 1px dashed black; padding: 0 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">300</td> <td></td> </tr> </table>	litros	1		mililitros	1000	Li			300		Proporção simples <i>um para muitos - cota</i>
	litros	1		mililitros	1000								
	Li			300									
	$\frac{65}{12} * 0,3 = 1,625$ custo do sorvete comercializado (C_1)	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">litros</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border-left: 1px dashed black; padding: 0 5px;"></td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">valores (reais)</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">CV</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Li</td> <td></td> <td style="border-left: 1px dashed black; padding: 0 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">C_1</td> <td></td> </tr> </table>	litros	12		valores (reais)	CV	Li			C_1		Proporção simples <i>muitos para muitos</i>
	litros	12		valores (reais)	CV								
	Li			C_1									
$1,625 + 0,50 = 2,125$ custo total por sorvete comercializado (C_2)		Composição de medidas											
$8 - 2,125 = 5,875$ lucro unitário (LU)		Transformação negativa											
$5,875 * q$ lucro total da sorveteria (L)	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">quantidade</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">valores (reais)</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">LU</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">q</td> <td></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">L</td> <td></td> </tr> </table>	quantidade	1		valores (reais)	LU	q			L		Proporção simples <i>um para muitos - multiplicação</i>	
quantidade	1		valores (reais)	LU									
q			L										
$f(q) = 5,875 * q - 12110$ função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ($f(q)$)		<i>Transformação negativa</i>											
ESQUEMA RELACIONAL PRINCIPAL (1)			Proporção simples e Transformação										



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A classificação da situação-problema, considerando as nomenclaturas adotadas por Vergnaud (2009b) para as classes de situações do Campo Conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas e considerando ainda o que Fuzzo (2022) propõe para a classificação de situações que envolvam etapas intermediárias de resolução, a situação-problema aqui descrita foi classificada como *proporção simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de duas composições de medidas, três proporções simples e duas transformações de medidas*.

Discussão sobre as possíveis estratégias de resolução

Embora essa situação-problema apresente, dentre as três propostas para esta pesquisa, o menor número de etapas intermediárias, ela ainda é tida como um problema complexo conforme descrito por Vergnaud (2009b). Dessa maneira, a análise de todos os desdobramentos possíveis durante a resolução da situação-problema assume proporções que escapam ao escopo deste projeto. Todavia, aqui são aventadas algumas das possíveis estratégias de resolução da situação-problema, sejam elas, corretas, parcialmente corretas ou incorretas.

Além disso, apesar de a situação-problema em questão propor um número de estruturas e etapas intermediárias superiores a situações que envolvam função afim costumeiramente abordadas em livros didáticos, o contexto e o questionamento proposto pelo enunciado não devem causar estranhamento aos participantes da pesquisa, uma vez que problemas que envolvam funções com lucro, custo e receita, em função da quantidade de um objeto podem ser encontrados em outras fontes, como em livros didáticos de Matemática (Fuzzo, 2022; Miranda, 2019) e em avaliações de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Tieppo *et al.*, 2023).

A primeira questão a ser pontuada diz respeito a conversão das unidades de medida. A resolução apresentada realiza a conversão do volume de sorvete comercializado de mililitros para litros, porém uma possibilidade igualmente correta e que resulta no mesmo número de etapas intermediárias pode ser conduzida por meio da conversão do volume de sorvete produzido em um lote de litros para mililitros. Embora o número de etapas intermediárias seja o mesmo, a classificação dessa etapa em específico seria alterada, uma vez que, ao se realizar a conversão de litros para mililitros, haveria a configuração de uma proporção simples, um para muitos, multiplicação. Algebricamente, essa conversão é dada por $12 * 1000 = 12000$.

Com isso, a etapa subsequente, em que o custo por sorvete é obtido, por consequência, seria alterada, obtendo o custo pela seguinte expressão $(65/12000) * 300 = 1,625$. Embora haja uma alteração na expressão, a categoria dessa etapa permaneceria inalterada, compreendendo uma proporção simples, muitos para muitos.

Analisando o enunciado, um caminho de resolução parcialmente adequado seria a apresentação de uma função tendo como variável o volume de sorvete comercializado, dado em litros ou em mililitros. Apesar de o enunciado solicitar a projeção dos lucros em relação ao número de sorvetes comercializados, dado em unidades, a apresentação desta projeção em relação ao volume de sorvete comercializado é possível, sendo que, diferente da resolução apresentada durante a análise da situação-problema, o volume de sorvete comercializado poderia ser considerado uma grandeza contínua nesse contexto.

Igualmente é considerada a possibilidade de que seja desenvolvida uma solução que considere a projeção do lucro ou prejuízo em função do número de lotes, que embora também escape ao enunciado ao não apresentar a função em relação ao número de sorvetes. Quanto a classificação da situação-problema, não haveria a necessidade de se realizar uma proporção simples do tipo muitos para muitos que visa transformar os custos por lote em custos unitários, todavia, seria necessária uma etapa para que o custo da casquinha, dado em

unidades fosse convertido em um custo relativo a um lote de sorvetes, configurando uma proporção simples, um para muitos.

Outra possível resolução é a apresentação de um único ponto como resposta final. Embora existam outras possibilidades, cabe mencionar a igualdade entre o lucro bruto da sorveteria e seu custo fixo. Esse ponto diz respeito a resoluções que apresentam como resposta final a seguinte equação $5,875 * q = 12110$ que resulta em um ponto de equilíbrio entre o lucro bruto e seu custo fixo, um ponto em que a sorveteria não apresenta lucro ou prejuízo. Todavia, esse ponto não responde à questão principal apresentada pelo enunciado, que solicita a representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, vista aqui como uma função afim.

Quanto as possibilidades de representação visual para as resoluções apresentadas, são esperadas representações no plano cartesiano, compreendidas como retas para aquelas soluções que apresentarem uma função como representação do potencial de lucro ou prejuízo, ou como um ponto para soluções parcialmente adequadas que apresentem uma equação como solução.

Por fim, sobre a forma predicativa do conhecimento, apoiado pela análise conduzida no estudo piloto, são esperadas mobilizações dessa natureza em dois contextos: ao argumentar sobre, explicar ou defender alguma etapa de resolução proposta ou caminho de resolução adotado; e junto aos protocolos de resolução ao explicitar articulações realizadas entre os dados associados à resolução e seus significados. São esperadas manifestações da forma predicativa do conhecimento também por outras vias que não as aqui apresentadas, mas que escapam à essa análise *a priori* antevir.

3.3.2 Situação-problema 2

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.

Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem



consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

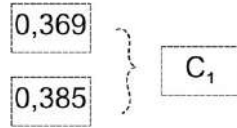
Represente essa comparação matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

Análise e classificação da situação-problema

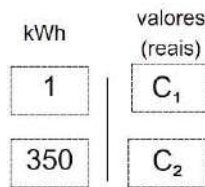
A situação-problema propõe que seja realizada uma comparação entre o valor gasto, sem a instalação de um sistema de energia solar e o valor gasto após a instalação do sistema, considerando que os valores fornecidos pelo enunciado não se alterem com o tempo. Assim foram identificadas, como etapas intermediárias, a obtenção dos valores a serem pagos antes e após a instalação do sistema e, como questão principal, a projeção do valor economizado. A comparação citada poderia ser apresentada de duas maneiras, com a apresentação de uma única função representando a diferença paga com e sem a instalação do sistema ou por meio de duas funções separadas que representassem cada uma um cenário, considerando os valores pagos com ou sem a instalação do sistema de geração de energia. Foi solicitado ainda que seja realizada uma representação visual para a parte matemática da situação-problema, que aqui é compreendida como a construção gráfica associada à representação matemática dada.

O enunciado, primeiramente, apresenta algumas informações sobre os valores e taxas que compõem a conta de energia. Os dois primeiros valores a serem analisados são o custo do kWh consumido, no valor de R\$ 0,369 por kWh e o custo de uso da estrutura da

concessionária, no valor de R\$ 0,385 por kWh consumido. Dessa maneira, o custo por kWh consumido (C_1) é obtido pela soma de ambos os custos, $C_1 = 0,369 + 0,385 = 0,754$. Trata-se de uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria composição de medidas, em que dadas as partes, busca-se o todo, conforme o esquema relacional a seguir.

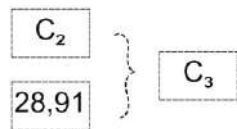


O enunciado apresenta o valor referente à taxa de iluminação pública, que será abordada mais adiante. Em seguida, são apresentadas as informações quanto ao consumo médio da residência, sendo este de 350 kWh por mês. Dessa forma, cabe determinar o custo médio pelo consumo (C_2), que pode ser obtido por meio de uma proporcionalidade entre o valor unitário de cada kWh consumido (C_1) e o consumo médio mensal (350 kWh), essa proporcionalidade é representada pelo esquema relacional a seguir.



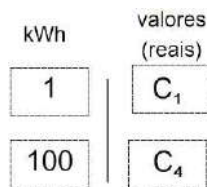
Esse esquema representa que a proporção considerada é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria proporção simples e classe um para muitos, multiplicação. Uma vez obtido o valor de cada kWh ($C_1 = 0,754$) e o gasto médio mensal da propriedade (350 kWh), torna-se possível obter o custo médio pelo consumo por meio da expressão $C_2 = 0,754 * 350 = 263,90$.

Conforme citado, há ainda uma taxa fixa referente à iluminação pública no valor de R\$ 28,91, que deve ser somada ao custo mensal sem sistema (C_2) para se obter o custo médio total (C_3). Essa relação pode ser descrita como, $C_3 = 263,90 + 28,91 = 292,81$. Dessa forma, C_3 representa o valor gasto em média na propriedade com energia elétrica, sem a instalação de um sistema de energia solar, sendo esse um dos questionamentos do enunciado.

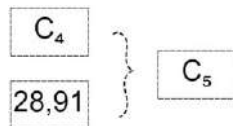


Agora quanto aos gastos considerando a instalação de um sistema de energia solar nas condições dadas pelo enunciado. Fica estabelecido que independentemente do valor gerado pelo sistema, os consumidores que possuem sistemas de geração própria de energia, devem pagar para a concessionária por no mínimo 100 kWh mensalmente, além da taxa fixa de

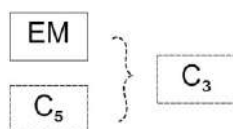
iluminação pública. Dessa forma, considerando que o dimensionamento do sistema, supre toda a demanda da propriedade, o valor pago após a instalação do sistema à concessionária ou custo mensal com o sistema (C_4) pode ser obtido conforme descrito a seguir. Em uma etapa intermediária anterior foi obtido o custo unitário por kWh consumido ($C_1 = 0,754$), considerando que a concessionária exige que haja o pagamento por no mínimo 100 kWh mensalmente, tem-se novamente uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria proporção simples e classe um para muitos, multiplicação, conforme o esquema relacional a seguir.



Algebricamente, $C_4 = 0,754 * 100 = 75,40$. A esse valor, cabe ainda a soma da taxa fixa de iluminação pública para a obtenção do custo médio total mensal após a instalação do sistema, $C_5 = 75,40 + 28,91 = 104,31$. Essa equação compõe uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria composição de medidas, que pode ser representada da seguinte maneira.

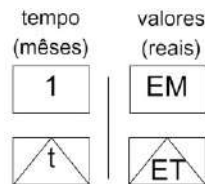


A partir da realização da etapa intermediária, obtêm-se a segunda informação demandada pelo enunciado, quanto ao valor a ser pago mensalmente após a instalação do sistema de geração de energia. Cabe, agora, realizar a comparação entre ambos os valores, para que haja a prospecção quanto ao valor economizado. Dessa forma, uma vez obtido o valor a ser pago antes da instalação do sistema e após a instalação, a diferença entre esses valores representa a economia realizada. Algebricamente, é possível obter a economia realizada da seguinte maneira, $EM = 292,81 - 104,31 = 188,50$. Essa situação representa uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria de composição de medidas, sendo que nessa situação-problema, tem-se o todo e uma das partes e busca-se a outra parte, conforme o esquema relacional a seguir.

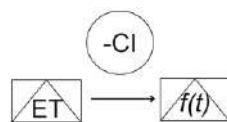


O valor dado por EM representa a economia mensal, assim para a etapa intermediária subsequente, há a necessidade de que seja realizada uma projeção desse valor em relação ao

tempo. Essa projeção pode ser realizada para um período qualquer (t), em que, algebricamente, é possível obter a economia realizada por meio da seguinte expressão, $188,50 * t$, sendo que essa operação é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria proporção simples e classe um para muitos, multiplicação e pode ser descrita pelo seguinte esquema relacional.



Por fim, a última das etapas intermediárias relaciona o valor economizado ao longo do tempo (ET) ao custo do investimento inicial para instalação do sistema (CI). Essa relação é constituída por uma relação ternária pertencente às estruturas aditivas da categoria de transformação negativa de medidas, conforme o esquema relacional a seguir.



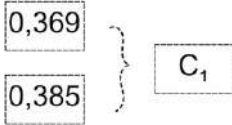
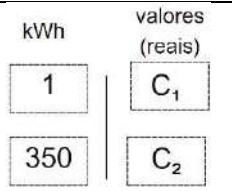
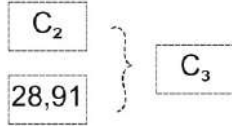
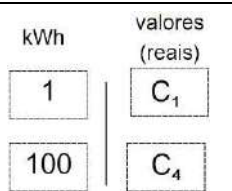
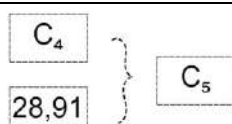
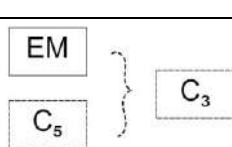
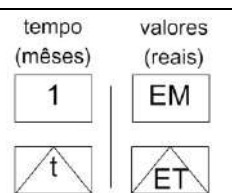
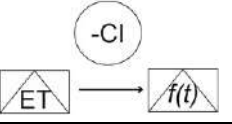
Aqui, há a interpretação de que havia uma economia total inicial (ET), a qual é transformada ao se deduzir o custo inicial de instalação do sistema (CI), o que resulta no real valor economizado ($f(t)$). Assim obtém-se, $f(t) = 188,50 * t - 14500$. Dessa maneira, a solução final para a questão principal da situação-problema é dada por uma função afim, que, por sua vez, é resultado de uma série de outras operações intermediárias. Essa função deve determinar o valor economizado ao longo do tempo, permitindo tanto a obtenção do período necessário para que o investimento inicial se pague, quanto possibilita uma representação gráfica da situação-problema.

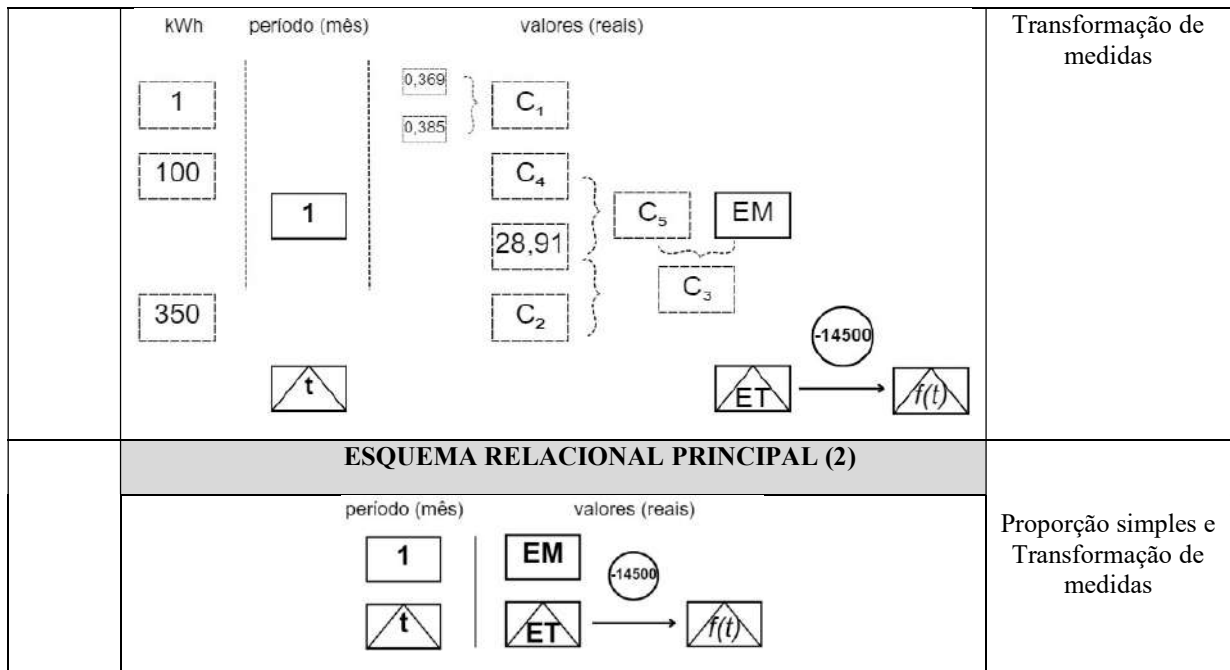
Isto posto, foram consideradas as relações estabelecidas entre: o custo do kWh (R\$ 0,369) e o custo pelo uso do sistema da concessionária (0,385), para obter o custo por kWh consumido (C_1); o valor unitário do kWh ($C_1 = 0,754$) e o gasto médio mensal da propriedade (350 kWh), para obter o custo médio pelo consumo (C_2); a taxa fixa de iluminação pública (R\$ 28,91) e o custo mensal sem o sistema (C_2), para obter o custo médio total (C_3); o valor unitário do kWh ($C_1 = 0,754$) e o quantitativo mínimo para pagamento (100 kWh), para obter o custo mensal com o sistema (C_4); a taxa fixa de iluminação pública (R\$ 28,91) e o custo mensal com o sistema (C_4), para obter o custo mensal total com o sistema (C_5); o custo mensal total sem o sistema (C_3) e o custo mensal total com o sistema (C_5), para obter a economia mensal (EM); economia mensal (EM) e o tempo, dado em meses

(t), para obter a economia total (ET); a economia total (ET) e o custo inicial de instalação do sistema (CI), para obter a função que expressa o real valor economizado ($f(t)$).

O Quadro 8 apresenta as expressões numéricas, seus esquemas relacionais e categorias.

Quadro 8 – Classificação Situação-problema 2

Etapa	Expressão numérica (resultado)	Esquema relacional	Categoria
INTERMEDIÁRIA	$0,369 + 0,385 = 0,754$ o custo por kWh consumido (C_1)		Composição de medidas
	$0,754 * 350 = 263,90$ custo médio pelo consumo (C_2)		Proporção simples <i>um para muitos multiplicação</i>
	$263,90 + 28,91 = 292,81$ custo médio total (C_3)		Composição de medidas
	$0,754 * 100 = 75,40$ o custo mensal com o sistema (C_4)		Proporção simples <i>um para muitos multiplicação</i>
	$75,40 + 28,91 = 104,31$ custo mensal total com o sistema (C_5)		Composição de medidas
	$292,81 - 104,31 = 188,50$ economia mensal (EM)		Composição de medidas
	$188,50 * t$ economia total (ET)		Proporção simples <i>um para muitos multiplicação</i>
	$f(t) = 188,50 * t - 14500$ a função que expressa o real valor economizado ($f(t)$)		<i>Transformação negativa</i>
ESQUEMA RELACIONAL PRINCIPAL (1)			Proporção simples e



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para cada etapa intermediária, foi utilizada a nomenclatura proposta por Vergnaud (2009b), tanto para as classes de situações do Campo Conceitual das estruturas aditivas, quanto para o Campo Conceitual das Estruturas multiplicativas. Foi considerado, ainda para a realização da classificação das situações, a proposta de Fuzzo (2022) para situações que envolvam etapas intermediárias de resolução. Assim sendo, a situação-problema pode ser descrita como uma *proporção simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de quatro composições de medidas, três proporções simples e transformação de medidas*.

Análise das possíveis estratégias de resolução

Na situação-problema 2 são apresentadas informações iniciais sobre o sistema de geração de energia instalado e os valores e taxas pagas à concessionária de energia, sendo solicitado ao estudante que seja determine o valor que seria gasto sem a instalação de um sistema de energia solar, o valor gasto caso o sistema seja instalado e que fosse analisada a economia gerada. Os dados do enunciado se relacionam entre si e resultam em novos dados necessários para a resolução, o que abre a possibilidade de diversos caminhos, resultantes das escolhas realizadas durante o percurso da resolução. Como citado anteriormente, não cabe aqui a exploração de todos os caminhos possíveis de resolução, todavia é pertinente que algumas das possibilidades, que alterariam a resolução, sejam discutidas, tais como: a taxa

fixa de iluminação pública poderia ser desconsiderada para obtenção do valor economizado; relacionando a média de consumo mensal com o quantitativo mínimo a ser pago; alterações nas unidades de medida para dias ou anos; além de outras possíveis decisões.

Conforme a abordagem dada por Vergnaud (2009b) na análise de problemas complexos, o número de estratégias de resolução aumenta exponencialmente. Todavia, aqui são abordadas algumas das possíveis estratégias de resolução da situação-problema em questão, não buscando esgotar as possibilidades de resolução. Dada a complexidade das situações-problema, a análise para cada etapa de resolução foi descrita separadamente, não buscando abordar a estratégia de resolução como um todo, isso pois, considerando a existência de etapas intermediárias, podem existir casos em que o participante da pesquisa execute corretamente um ou mais passos para a resolução, mas falhe em outra etapa, acarretando uma resolução incorreta da situação-problema.

O primeiro ponto a ser destacado é quanto à taxa fixa de iluminação pública. Conforme a resolução apresentada durante a classificação da situação-problema, somente no caso de a comparação entre os valores com e sem o sistema fossem apresentados, seria possível operar de duas maneiras que essa taxa deixa de ser necessária. Primeiramente, tal valor poderia ser desconsiderado da seguinte maneira $(263,90 + 28,91) - (75,40 + 28,91) = 188,50$, assim o valor da taxa de energia, caso não considerado, não afetaria o desenvolvimento da resolução, de forma que se obtém o mesmo resultado ao operar, $263,90 - 75,40 = 188,50$. A partir desse ponto, a resolução poderia ser conduzida conforme apresentada durante a classificação disposta nesta seção.

A segunda escolha, em que a taxa de iluminação pública não afetaria o resultado, parte de um ponto semelhante ao apresentado anteriormente, porém, aqui, o termo comum entre os custos com a conta de energia com e sem o sistema é isolado, assim obtendo o seguinte:

$$((0,754 * 350) + 28,91) - ((0,754 * 100) + 28,91) = 188,50$$

$$(0,754 * 350) - (0,754 * 100) = 188,50$$

$$0,754 * (350 - 100) = 188,50$$

$$0,754 * 250 = 188,50$$

Essa opção, por isolar o fator comum entre ambos os custos, pode ser apresentada independentemente da escolha por se considerar ou não a taxa de iluminação pública, uma vez que as resoluções seriam análogas.

Uma terceira condução para a resolução do problema que poderia levar ao mesmo resultado consiste na alteração das unidades de medida de tempo. Optou-se em trabalhar com

meses por ser essa a medida usual em que as concessionárias de energia efetuam suas cobranças, todavia, para os fins desse enunciado, outras unidades de tempo poderiam ser utilizadas, uma vez que as conversões necessárias fossem realizadas juntos das grandezas descritas pelo enunciado.

A próxima questão a ser destacada quanto à resolução do enunciado consiste em uma resolução parcialmente correta, composta pela apresentação de um ponto. Esse ponto pode ser expresso por $14500 = 188,50 * t$, de forma que a variável t representaria o tempo em que o investimento inicial seria pago pela economia gerada. Essa não pode ser considerada uma estratégia correta por não responder plenamente à questão principal do enunciado, todavia não se trata de uma resolução incorreta, uma vez que todos os dados considerados nessa equação estão corretamente relacionados aos dados do enunciado.

As estratégias de resolução incorreta também se diversificam, todavia, duas possíveis estratégias incorretas a serem destacadas correspondem a não observância do valor mínimo a ser pago à concessionária de 100 kWh por mês, e a não observância da taxa de iluminação pública. No primeiro caso, o participante da pesquisa poderia apontar que a economia gerada é dada por $0,754 * 350 = 263,90$, ao considerar como economia todo o valor consumido. No segundo caso, o participante da pesquisa consideraria a possibilidade de que a taxa de iluminação pública também fosse descontada pelos créditos gerados pelo sistema de energia solar, possibilitando uma economia dada por $188,50 + 28,91 = 217,41$, o que, de acordo com o enunciado, não é possível.

No que se refere às formas de representação visual das resoluções, é esperado que sejam utilizadas representações no plano cartesiano na forma de retas para as soluções que indicarem funções afim como solução da situação-problema. Não fica descartada a possibilidade de que a solução seja descrita como um ponto pelos estudantes, indicando o momento em que a instalação do sistema e a economia gerada atingem um ponto de equilíbrio.

Por fim, assim como na Situação-problema 1, aqui também são esperadas mobilizações da forma predicativa do conhecimento em momentos cujos estudantes busquem argumentar sobre, explicar ou defender alguma etapa de resolução proposta ou caminho de resolução adotado, bem como em seus protocolos de resolução ao explicitar articulações realizadas entre os dados associados à resolução e seus significados. Porém nessa situação-problema é esperada uma recorrência maior em mobilizações ocorridas em discussões entre os estudantes, tendo em vista que o enunciado propõe de forma mais enfática a realização de uma comparação entre os valores com e sem a instalação do sistema de geração de energia.

Assim como na Situação-problema 1, aqui também são esperadas manifestações da forma predicativa do conhecimento em outros momentos não previstos aqui.

3.3.3 Situação-problema 3

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00



Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.



Análise e classificação da situação-problema

A terceira situação-problema apresenta o maior número de etapas intermediárias em sua resolução. A situação-problema apresenta o contexto de uma propriedade rural que comercializa queijos, além de informações quanto aos custos de operação e de seu processo produtivo. A questão principal da situação-problema prevê que seja apresentada uma representação matemática para o potencial de lucro ou prejuízo sobre a venda de queijos. A representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo dessa situação-problema, considerando as informações dadas pelo enunciado, demanda a realização de etapas intermediárias de resolução, uma vez que parte dos dados não pode ser imediatamente ligada à representação matemática referida. É solicitado ainda que seja realizada uma representação

visual para a representação matemática obtida, que aqui é compreendida como a construção gráfica associada à representação matemática apresentada.

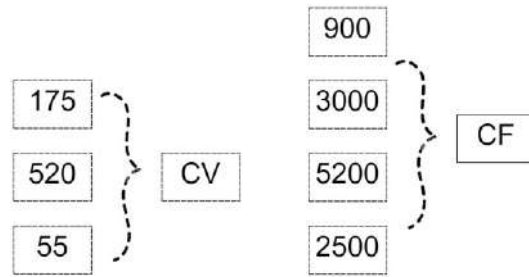
A primeira informação apresentada pelo enunciado corresponde ao volume de leite produzido diariamente por cada vaca na propriedade, seguido pelo volume necessário de leite para que seja produzido 1 kg de queijo. Com base nessas informações, torna-se possível realizar uma relação de proporcionalidade entre a produção de leite diária em litros (22) e o volume de leite por quilo de queijo em litros (11), para obter a quantidade de queijo diária por animal (QQD). Essa proporcionalidade pode ser representada algebricamente da seguinte maneira $QQD = 22/11 = 2$. Essa relação compreende uma relação quaternária, do campo multiplicativo, da categoria de proporção simples e classe um para muitos, cota, e pode ser representada pelo seguinte esquema relacional.

quilos		litros
1		11
QQD		22

O esquema apresentado evidencia que cada vaca da propriedade tem capacidade para fornecer leite suficiente para que sejam produzidos 2 quilos de queijo por dia. Na sequência, a próxima informação presente no enunciado corresponde ao peso de cada pacote de queijo produzido, sendo que cada pacote pesa 720 gramas. Uma vez que o enunciado apresenta parte dos dados em gramas e parte em quilos, torna-se necessário que seja realizada a conversão entre as unidades de medida, neste caso a conversão de gramas para quilos. Essa conversão, algebricamente representada por $Pct = 720/1000 = 0,72$, também é descrita por uma proporção simples, da classe um para muitos, cota, conforme o esquema relacional apresentado a seguir.

quilos		gramas
1		1000
Pct		720

A segunda parte do enunciado apresenta os custos por animal (CV) e os custos fixos da propriedade (CF). Ambos podem ser representados por estruturas aditivas da categoria de composição de medidas, em que dadas as partes, busca-se o todo. Assim, em relação aos custos por animal, algebricamente, tem-se $CV = 175 + 520 + 55 = 750$ e, em relação aos custos da propriedade, $CF = 900 + 3000 + 5200 + 2500 = 11600$. Essas operações podem ser representadas por meio dos seguintes esquemas relacionais.

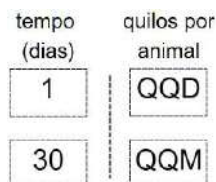


Considerando novamente a necessidade de que as unidades de medidas das grandezas que compõem o problema sejam iguais, e uma vez que o valor de venda fornecido pelo enunciado se refere a um pacote de 720 gramas, cabe determinar o valor de venda do quilo de queijo, aqui denominado de lucro bruto por quilo (LBQ). Dessa forma, é possível estabelecer uma relação ternária descrita por uma proporção simples, da classe um para muitos, cota, conforme o esquema relaciona apresentado a seguir.



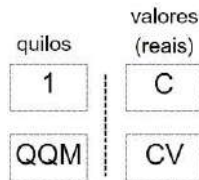
Algebricamente essa relação pode ser representada da seguinte maneira $LBQ = 36/0,72 = 50$. Assim, sendo que um pacote de 720 gramas de queijo é comercializado por R\$ 36,00, o quilo do queijo é comercializado por R\$ 50,00.

Uma vez que os custos por animal (CV) e os custos fixos (CF) são dados para o período de um mês, é necessário que outras grandezas também sejam dadas em meses. Devido ao fato de que, em uma etapa intermediária anterior, foi estabelecida a quantidade de queijo diária por animal (QQD) e considerando o mês comercial de 30 dias, cabe determinar a quantidade de queijo mensal por animal (QQM). Essa relação pode ser representada por uma proporção simples um para muitos – multiplicação, expressa algebricamente por $QQM = 30 * 2 = 60$ e que apresenta o seguinte esquema relacional.

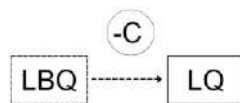


Diante disso, há a interpretação de que, se um animal produz 2 quilos de queijo por dia e se o mês comercial possui 30 dias, cada vaca possui capacidade produtiva de 60 quilos de queijo por mês. Uma vez que todas as grandezas estão descritas para o período de um mês, torna-se possível determinar o custo por quilo de queijo (C). Nesse sentido, o custo por quilo (C) deriva da relação entre a quantidade de queijo mensal por animal (QQM) e o custo por

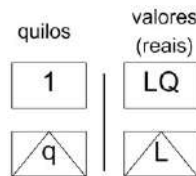
animal (CV). Assim, visto que 60 quilos de queijo possuem um custo de R\$ 750,00, o custo por quilo pode ser dado por uma relação quaternária de proporção simples, um para muitos, partição, que algebricamente é expressa como $C = 750/60 = 12,50$ e cujo esquema relacional é apresentado da seguinte maneira.



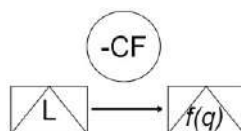
Com isso, o custo de produção para um quilo de queijo é igual a R\$ 12,50, de forma que, estabelecido o custo por quilo (C) e o lucro bruto por quilo (LBQ), é possível estabelecer o lucro por quilo (LQ). Algebricamente, o lucro por quilo pode ser expresso por $LQ = 50 - 12,50 = 37,50$. Aqui, há o entendimento de que o lucro bruto por quilo (LBQ) é transformado ao se subtrair o custo por quilo, no lucro por quilo (LQ). Esse entendimento decorre da interpretação de que a natureza das grandezas de custo e lucro são distintas, de forma que não há uma relação de parte todo. Assim, essa relação integra a categoria de transformação negativa de medidas, representado pelo seguinte esquema relacional.



Estabelecido o lucro por quilo (LQ), cabe considerar esse valor para uma quantidade qualquer de queijo, para que seja determinado o lucro (L). Algebricamente essa projeção pode ser descrita como uma relação entre o lucro por quilo (LQ) e a quantidade (q) da seguinte maneira, $L = 37,5 * q$. Essa multiplicação caracteriza uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria proporção simples e classe um para muitos, multiplicação e pode ser descrita pelo seguinte esquema relacional.



Por fim, a última das etapas intermediárias relaciona o lucro (L) ao custo fixo da propriedade (CF). Essa relação é constituída por uma relação ternária pertencente às estruturas aditivas da categoria de transformação (negativa) de medidas, conforme o esquema relacional a seguir.



Algebricamente, a relação estabelecida configura uma função afim, expressa da seguinte maneira, $f(q) = 37,5q - 11600$, em que $f(q)$ é dada pela multiplicação da quantidade de queijo comercializado (q) pelo lucro por quilo de queijo (LQ), subtraída pelo custo fixo da propriedade (CF). Dessa forma, a função estabelecida compreende a resposta final para a situação-problema, representando o lucro dentro de um mês da propriedade em função do volume de queijo comercializado. Cabe apontar que a função estabelecida considera apenas o período de um mês, conforme solicitado pelo enunciado, de forma que caso essa projeção fosse ampliada para um período qualquer, haveria a introdução de uma segunda variável (tempo) o que foge aos objetivos desta pesquisa.

A situação-problema apresenta, em seu enunciado, informações sobre a produção e comercialização de queijos em uma propriedade rural, além dos custos de manutenção da propriedade, solicitando a projeção de lucro dessa propriedade dentro de um mês. Os dados do enunciado, são dispostos de forma que a resolução da situação-problema apresente algumas possibilidades de escolhas ao longo da resolução, possibilidades estas que podem gerar caminhos adequados, parcialmente adequados ou inadequados de resolução. Essas escolhas compõem as etapas intermediárias de resolução da situação-problema e podem interferir em sua classificação, de forma que o caminho aqui apresentado foi considerado como aquele que apresenta o menor número de etapas intermediárias.

Dado o exposto, foram consideradas as relações estabelecidas entre: produção de leite diária em litros (22) e o volume de leite por quilo de queijo em litros (11), para obter a quantidade de queijo diária por animal (QQD); o peso de cada pacote de queijo em gramas (720) e o número de gramas em um quilo (1000), para obter o peso de cada pacote em quilos (*Pct*); vacinação, vermifugação e remédios (R\$ 175,00), alimentação e suplementação (R\$ 520,00) e outros custos por animal (R\$ 55,00), para obter o custo por animal (CV); manutenção de maquinário (R\$ 900,00), arrendamento da propriedade (R\$ 3.000,00), mão-de-obra (R\$ 5.200,00) e outros custos (R\$ 2.500,00), para obter os custos fixos (CF); o preço de venda do pacote (R\$ 36,00) e o peso de cada pacote em quilos (*Pct*), para obter o lucro bruto por quilo (LBQ); a quantidade de queijo diária por animal (QQD) e o número de dias em um mês comercial (30), para obter a quantidade de queijo mensal por animal (QQM); a quantidade de queijo mensal por animal (QQM) e o custo por animal (CV), para obter o custo por quilo (C); o lucro bruto por quilo (LBQ) e o custo por quilo (C), para obter o lucro por quilo (LQ); o lucro por quilo (LQ) e a quantidade comercializada (q), para obter o lucro (L); e

o lucro (L) e os custos fixos (CF), para obter função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ($f(q)$).

O Quadro 9 apresenta as expressões numéricas, seus esquemas relacionais e categorias.

Quadro 9 – Classificação situação-problema 3

Etapa	Expressão numérica (resultado)	Esquema relacional	Categoria
INTERMEDIÁRIA	$\frac{22}{11} = 2$ quantidade de queijo diária por animal (QQD)		Proporção simples <i>um para muitos - cota</i>
	$\frac{720}{1000} = 0,72$ peso de cada pacote em quilos (Pct)		Proporção simples <i>um para muitos - cota</i>
	$175 + 520 + 55 = 750$ o custo por animal (CV)		Composição de medidas
	$900 + 3000 + 5200 + 2500 = 11600$ custos fixos (CF)		Composição de medidas
	$\frac{36}{0,72} = 50$ lucro bruto por quilo (LBQ)		Proporção simples <i>um para muitos - divisão-partição</i>

$30 * 2 = 60$ quantidade de queijo mensal por animal (QQM)	tempo (dias) quilos por animal $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline QQD \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline 30 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline QQM \\ \hline \end{array}$	Proporção simples <i>um para muitos - multiplicação</i>																																				
$\frac{60}{750} = 12,50$ custo por quilo (C)	quilos valores (reais) $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline C \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline QQM \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline CV \\ \hline \end{array}$	Proporção simples <i>um para muitos - divisão-partição</i>																																				
$50 - 12,50 = 37,50$ o lucro por quilo (LQ)	$\begin{array}{ c } \hline LBQ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-C} \begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$	Transformação negativa																																				
$37,5 * q$ lucro (L)	quilos valores (reais) $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array}$	Proporção simples <i>um para muitos - multiplicação</i>																																				
$f(q) = 37,5q - 11600$ função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ($f(q)$)	$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$	Transformação negativa																																				
ESQUEMA RELACIONAL PRINCIPAL (1)																																						
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">período (dia)</th> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">quilos</th> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">gramas</th> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">litros</th> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">Custo (reais)</th> <th style="text-align: center;">lucros (reais)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 1000 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 11 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline C \\ \hline \end{array}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline LBQ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-C} \begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">Pct</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">Pct</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 720 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 175 \quad 520 \quad 55 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 36 \\ \hline \end{array}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">QQD</td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">CV</td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 175 \quad 175 \quad 520 \quad 55 \\ \hline \end{array}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 30 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">QQM</td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$</td> </tr> </tbody> </table>			período (dia)	quilos	gramas	litros	Custo (reais)	lucros (reais)	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 11 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline C \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline LBQ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-C} \begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$	Pct	Pct	$\begin{array}{ c } \hline 720 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 175 \quad 520 \quad 55 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 36 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	QQD		$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$	CV	$\begin{array}{ c } \hline 175 \quad 175 \quad 520 \quad 55 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 30 \\ \hline \end{array}$	QQM				$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$				$\begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$
período (dia)	quilos	gramas	litros	Custo (reais)	lucros (reais)																																	
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 11 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline C \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline LBQ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-C} \begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$																																	
Pct	Pct	$\begin{array}{ c } \hline 720 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 175 \quad 520 \quad 55 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 36 \\ \hline \end{array}$																																	
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	QQD		$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$	CV	$\begin{array}{ c } \hline 175 \quad 175 \quad 520 \quad 55 \\ \hline \end{array}$																																	
$\begin{array}{ c } \hline 30 \\ \hline \end{array}$	QQM				$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$																																	
$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$				$\begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$																																	
ESQUEMA RELACIONAL PRINCIPAL (2)																																						
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">quilos</th> <th style="text-align: center; border-right: 1px dashed black;">lucros (reais)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$</td> <td style="border-right: 1px dashed black; text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dashed black;"></td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$</td> </tr> </tbody> </table>			quilos	lucros (reais)	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$																												
quilos	lucros (reais)																																					
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline LQ \\ \hline \end{array}$																																					
$\begin{array}{ c } \hline q \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array}$																																					
	$\begin{array}{ c } \hline L \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-CF} \begin{array}{ c } \hline f(q) \\ \hline \end{array}$																																					

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considerando a análise realizada e o Quadro 9 apresentado, a situação-problema é classificada como uma situação de *proporção simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de seis proporções simples, duas composições de medidas e duas transformações de medidas*.

Análise das possíveis estratégias de resolução

A partir da definição da situação-problema 3 como a de maior complexidade em comparação às duas anteriores, dado seu maior número de etapas intermediárias, é possível inferir que aqui há uma maior possibilidade de escolhas durante a resolução. Por isso, esse momento de análise *a priori* buscou se concentrar nas escolhas que alterem a resolução de forma mais enfática, especialmente considerando que cada escolha incorre em diversas outras.

Para a resolução apresentada, optou-se por converter as grandezas dadas em dias para grandezas descritas em meses. Uma resolução que opta por converter os custos mensais apresentados, para custos diários, poderia ser considerada igualmente adequada. Todavia, essa escolha resultaria em uma etapa intermediária a mais do que o caminho aqui apresentado e, conforme descrito anteriormente, a resolução adotada presou pela execução do menor número de etapas intermediárias.

Um segundo ponto a ser tratado se trata da variável adotada para a resolução final. A resolução apresentada compreende uma função afim, descrita a partir da quantidade de queijo em quilos. Existem outras duas possíveis variáveis que podem ser adotadas, a primeira corresponde ao volume de leite e compreende um desenvolvimento próximo àquele disposto inicialmente nessa análise, contendo o mesmo número de etapas intermediárias. A segunda variável possível é o número de animais na propriedade, essa possivelmente é uma escolha adequada, a depender da interpretação do que se espera com o enunciado. As duas possíveis variáveis apresentadas anteriormente, quilos de queijo e litros de leite, contemplam como domínio os números reais (maiores que zero), enquanto ao se adotar o número de animais como variável, subentende-se que adotaria como domínio os números naturais.

Um último ponto a ser tratado quanto às possíveis resoluções, diz respeito à apresentação da projeção dos lucros para o período de um mês. Assim como na situação-problema 1, o enunciado foi elaborado tomando como premissa de que a solução ótima para

as situações-problema contemplasse a função afim, de forma que, caso essa projeção fosse ampliada para um período qualquer, haveria a presença de uma segunda variável. Todavia, não foi descartada a possibilidade de que surgissem resoluções que apresentassem projeções de lucro para além de um mês.

Já quanto a representação visual demandada pelo enunciado, assim como nas situações anteriores são esperadas aqui representações no plano cartesiano, descrevendo o potencial de lucro ou prejuízo como uma reta ou a indicação de um ponto que simbolize um ponto de equilíbrio entre receitas e custos.

Por fim, assim como nas situações-problema anteriores, os estudantes ao resolverem a Situação-problema 3, possivelmente devem manifestar mobilizações da forma predicativa do conhecimento ao discutir aspectos da resolução e junto aos protocolos de resolução ao explicitar articulações realizadas entre os dados associados à resolução e seus significados. Todavia essa será a terceira situação-problema apresentada aos grupos, sendo esperado que discussões realizadas durante a resolução das Situações-problema 1 e 2 sejam aproveitadas aqui, assim reduzindo o volume de diálogos dos grupos e por consequência o reduzindo a recorrência de mobilizações da forma predicativa do conhecimento nas discussões realizadas.

3.4 O Estudo Piloto

O estudo piloto desenvolvido consistiu na implementação do instrumento de pesquisa proposto (APÊNDICE A). Participaram do estudo quatro estudantes do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade da região centro-oeste do Paraná. A realização desse estudo piloto teve como propósito analisar as manifestações dos conhecimentos dos estudantes diante do instrumento, buscando por possíveis pontos de fragilidade na elaboração das situações-problema, roteiro de entrevista ou outros aspectos metodológicos. Assim, buscou-se, com base no estudo piloto, analisar a viabilidade do instrumento de pesquisa como meio para a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento e, associado a isso, sua viabilidade como meio para se alcançar os objetivos de pesquisa propostos. Buscou-se, ainda, modelar e refinar os critérios e procedimentos adotados para análise dos dados produzidos.

O estudo piloto teve início com a realização da observação de uma aula da disciplina de Didática da Matemática, na qual a regente da disciplina é a orientadora desta pesquisa. O instrumento de pesquisa foi implementado junto à turma no dia 24 de julho de 2023.

Participaram do estudo quatro estudantes, sendo esse o total de discentes que estavam frequentando a disciplina no período de realização do estudo. Considerando o número reduzido de estudantes, optou-se por realizar a implementação do instrumento de forma integral, o qual contemplou as três situações-problema.

Para a implementação, os estudantes foram divididos em duas duplas, e cada dupla recebeu duas cópias do instrumento. Os estudantes concordaram com a gravação em áudio de seus diálogos. Foi esclarecido que cada dupla teria até o final da aula para realizar a resolução, totalizando 1h15min disponíveis, e que o uso de calculadoras era permitido.

No dia 26 de julho de 2023, dois dias após a implementação do instrumento, cada dupla participou de uma entrevista conduzida pelo pesquisador, tendo como objetivo evidenciar aspectos que possivelmente não foram identificados nos protocolos dos estudantes ou nas gravações dos diálogos realizadas durante a implementação. No período entre a implementação e a entrevista, os protocolos e as gravações passaram por uma análise prévia a fim de tornar as perguntas das entrevistas mais assertivas.

No dia 31 de julho de 2023, foi proposto aos estudantes um momento de diálogo, em que os estudantes foram até o quadro e apresentaram as resoluções desenvolvidas por eles para cada situação-problema, sendo proposta uma discussão quanto às diferentes possibilidades de resolução para cada situação-problema. Embora esse momento não esteja contemplado nas análises, ele se mostrou pertinente no sentido de propor um fechamento para os estudantes que participaram desse estudo piloto.

A realização do estudo piloto evidenciou a necessidade de uma adequação quanto à redação das situações-problema. Nas três situações-problema, a questão principal demandava que os estudantes realizassem uma “projeção”, seja em relação ao lucro, seja em relação à economia. Com base nos diálogos das duplas e em sugestões, tanto do GEPeDiMa quanto da banca examinadora durante o exame geral de qualificação, foi evidenciada a necessidade de que esse termo fosse adequado. Nesse sentido, a questão principal das situações problemas foi alterada de modo a solicitar uma representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo. Ainda considerando as sugestões propostas pela banca do exame geral de qualificação, foi incluída, junto às três situações-problema, a solicitação de que a representação matemática obtida fosse representada graficamente, lido no enunciado como representação visual.

Durante a implementação do estudo piloto, ocorreram momentos em que a dupla conduziu a resolução das situações-problemas separadamente, reduzindo o número de interações e diálogos entre os estudantes. A fim de mitigar situações semelhantes, durante o estudo principal, cada Grupo somente recebeu a situação-problema seguinte, após a entrega

da situação-problema anterior. Foi considerada, ainda, a limitação de tempo imposta durante o estudo piloto, assim para o estudo principal não foi estabelecido um tempo específico para a resolução.

Também se notou a necessidade em conduzir as entrevistas de forma mais objetiva, buscando por respostas mais precisas. A entrevista, realizada junto aos estudantes no estudo piloto, teve perguntas contextualizadas nas resoluções apresentadas, ressaltando alguns de seus aspectos, o que possivelmente pode ter influenciado as respostas dos estudantes. Para o Estudo principal, as perguntas foram realizadas de forma imparcial e direta, a fim de evitar o direcionamento das respostas.

Por fim, considerando as interações dialógicas estabelecidas entre os estudantes em conjunto aos esquemas apresentados por eles, tanto em suas falas quanto em seus protocolos, foi possível realizar uma análise quanto às manifestações, tanto da forma operatória do conhecimento, na figura de teoremas em ação, quanto da forma predicativa do conhecimento. Portanto, o estudo piloto realizado apontou a viabilidade do instrumento de pesquisa proposto como meio para responder à questão de pesquisa.

3.5 O protocolo de entrevista

Considerando a necessidade de compreender mais profundamente determinadas passagens na resolução dos estudantes e com a intenção de se apropriar de informações mais fidedignas, a realização de entrevistas visou propiciar mais um momento para que os estudantes participantes do estudo manifestem seus conhecimentos, principalmente relativos à forma predicativa do conhecimento.

O instrumento implementado possui, em sua elaboração, a intencionalidade de que diferentes caminhos de resolução emergjam, o que tornou a realização de uma entrevista padrão inviável, sendo mais apropriado que a entrevista fosse adaptada à resolução apresentada pelos grupos. Assim, entre o momento de implementação das situações-problema e a realização da entrevista, foi prevista uma análise prévia dos áudios com diálogos dos estudantes, bem como das resoluções apresentadas, com vistas a tornar a entrevista mais efetiva.

Todavia, mesmo que algumas questões pudessem sofrer alterações ou mesmo que outras questões fossem incorporadas à entrevista, a depender da resolução ou da resposta apresentadas pelos estudantes durante as entrevistas, alguns questionamentos deram base para

a entrevista. Esses questionamentos-base são apresentados na sequência e se repetiram para cada uma das situações-problema que compõem o instrumento de pesquisa:

- Vocês já resolveram situações-problema semelhantes a essa?
- Como vocês julgam essa questão em relação ao nível de dificuldade?
- Vocês poderiam me explicar a resolução que vocês apresentaram?
- O que a solução apresentada e os elementos que a compõem representam?
- Quanto ao valor de x , quais valores ele poderia assumir?
- Vocês consideraram a construção de um gráfico para representar a solução que vocês apresentaram?
- Teve algum motivo para a escolha dessa grandeza em específico ser adotada como variável?
- Vocês chegaram a considerar a possibilidade de adotar alguma outra grandeza como variável?
- Vocês mudariam algo na resolução dessa situação-problema?

Os estudantes estavam de posse de uma cópia da resolução apresentada por eles durante a realização da entrevista. Essas entrevistas foram realizadas considerando o menor intervalo de tempo possível entre a implementação e a condução da entrevista, visando evitar que ideias ou interpretações dos estudantes se perdessem. Para o estudo principal esse intervalo de tempo variou entre 6 e 7 dias.

3.6 A produção de dados

O estudo principal foi desenvolvido inserido nas aulas da disciplina de Modelagem Matemática, de um 4º ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade da região centro-oeste do Paraná e teve início com a realização da fase de observação junto à turma na qual o estudo foi realizado. Essa observação se estendeu durante 2 meses, considerando o espaço cedido no cronograma da disciplina para o desenvolvimento do estudo. Uma semana antes da implementação do instrumento de pesquisa (APÊNDICE B) os estudantes realizaram uma leitura conjunta, dos termos de Autorização para Utilização de Imagem e Voz (APÊNDICE C), de Compromisso de Utilização de Dados (APÊNDICE D) e de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE E), entregues aos estudantes e assinados em duas vias de igual teor. Essa etapa foi realizada com antecedência a fim de destinar a data prevista

para implementação, somente para a resolução das situações-problemas.

O instrumento de pesquisa foi implementado junto à turma no dia 08 de dezembro de 2023. Participaram do estudo sete estudantes, de um total de oito matriculados na disciplina supracitada. Para a implementação, os estudantes foram divididos em três Grupos, compostos por 2 ou 3 estudantes cada. Foi esclarecido aos estudantes que cada Grupo teria seus diálogos gravados e que eles receberiam uma situação-problema por vez, de forma que, ao término da resolução, eles deveriam entregar o protocolo e, a partir disso, uma nova situação-problema lhes seria entregue. Não foi estabelecido um tempo específico para a resolução de cada situação-problema ou para o total de tempo disponível. Os Grupos levaram entre 1h10 e 2h00 para resolverem as três situações-problema.

Nos dias 14 e 15 de dezembro de 2023, cada grupo participou de uma entrevista conduzida pelo pesquisador, tendo como objetivo evidenciar aspectos que possivelmente não foram identificados nos protocolos dos estudantes ou nas gravações dos diálogos realizadas durante a implementação. No período entre a implementação e a entrevista, os protocolos e as gravações passaram por uma análise prévia a fim de adequar o protocolo de entrevista àquilo que foi apresentado como resolução por cada Grupo.

Diferente do Estudo piloto, após a implementação do estudo principal, não foi possível conduzir uma socialização junto aos estudantes acerca do estudo realizado ou das situações-problema propostas em decorrência do eminente término do período letivo. Nesse sentido, a fim de estabelecer um fechamento para o estudo junto a esses estudantes, após a realização de cada entrevista foi realizada uma discussão entre o pesquisador e os membros do Grupo entrevistado, tratando das resoluções apresentadas, dificuldades enfrentadas e outros aspectos associados à resolução das situações-problemas propostas.

Assim, fazem parte dos dados desta pesquisa: os protocolos de resolução apresentados por cada Grupo para as três situações (APÊNDICE F), a transcrição dos diálogos dos estudantes (APÊNDICE G) e a transcrição das entrevistas realizadas (APÊNDICE H). O Capítulo seguinte apresenta a análise e discussão desses dados.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo são apresentadas as análises sobre as resoluções realizadas dos estudantes que participaram da pesquisa. Essa análise considerou os registros escritos dos estudantes, a gravação dos diálogos dos grupos durante a implementação (APÊNDICE G) e as gravações das entrevistas realizadas (APÊNDICE H).

Para melhor organização do texto e buscando preservar a identidade dos sujeitos, as duplas ou trios foram nomeadas como “Grupo”, seguida de um número de identificação, e cada estudante foi referenciado pela palavra “Estudante” seguida de um número de identificação, de forma que: o Grupo 1 foi composto pelos Estudantes 1 e 2; o Grupo 2 foi composto pelos Estudantes 3 e 4; e o Grupo 3 foi composto pelos estudantes 5, 6 e 7. Os teoremas em ação são indicados pelas siglas TAV, para os teoremas em ação verdadeiros, e TAF, para os falsos, ambos seguidos por um número de identificação, conforme a sequência em que eles primeiro aparecem nas análises.

Para as análises, buscou-se identificar: os teoremas em ação verdadeiros ou falsos identificados nas resoluções apresentadas ou em falas dos estudantes; possíveis manifestações da forma operatória do conhecimento associados aos teoremas em ação; e possíveis manifestações da forma predicativa do conhecimento identificadas nas resoluções apresentadas ou em falas dos estudantes.

Cabe aqui um esclarecimento, a pesquisa tem como um objetivo específico "analisar os esquemas apresentados pelos participantes da pesquisa ao resolverem as situações-problema propostas", a análise dos esquemas é vista aqui como estreitamente relacionada à análise da forma operatória do conhecimento proposta pelo objetivo geral. Essa relação se estabelece ao se considerar que os esquemas são, segundo Vergnaud (1996b; 2004; 2008a), o próprio conhecimento operatório manifestado e que os teoremas em ação são os conhecimentos contidos nos esquemas (Vergnaud, 1993). Assim, ao se realizar a análise dos teoremas em ação mobilizados, fica estabelecida a análise dos esquemas e, por consequência, a análise do conhecimento operatório manifestado pelos estudantes.

Ainda quanto à multiplicidade de caminhos adequados para a resolução, como meio de organizar as análises, os protocolos dos estudantes foram analisados conforme a ordem com que as resoluções foram desenvolvidas pelos estudantes, buscando aproximar as análises de etapas que foram desenvolvidas de forma similar entre os Grupos.

Nas seções a seguir, são apresentadas as análises para cada situação-problema.

4.1 Análise e Discussão da Situação-problema 1



A gerência da sorveteria Latte Dulce quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

O primeiro dado apresentado pelo enunciado corresponde ao volume de sorvete produzido por lote. Uma vez que o volume de sorvete comercializado é dado em mililitros, os estudantes tinham como opção transformarem os mililitros em litros ou os litros em mililitros. Os Grupos 2 e 3 optaram por realizar a transformação de litros para mililitros, já quanto ao Grupo 1, não foi possível identificar explicitamente qual o caminho adotado, todavia, considerando que o Grupo, no restante da resolução, trata cada casquinha como tendo 300 mililitros, pode-se afirmar que o Grupo 1 também realizou a transformação de litros para mililitros.

Essa relação de proporcionalidade manifestada pelos três Grupos de Estudantes pode ser representada matematicamente pela expressão $\frac{1}{12} = \frac{1000}{x}$, ou ainda, $f(12 * 1) = 12 * 1000$. Esse teorema em ação verdadeiro foi manifestado de forma implícita pelo Grupo 1, e de maneira explícita pelos Estudantes dos Grupos 2 e 3. O trecho abaixo, extraído do Grupo 2, ilustra o raciocínio desenvolvido pelos Estudantes.

Estudante 4 ah você quer converter de ml para litro?

Estudante 3: 1000 ml são 1 litro, faz regrinha de 3

Estudante 4 sim

Estudante 3: então é vezes 1000, 12000

Estudante 4 12000 ml, cada casquinha tem 300 ml.

Um diálogo análogo a este ocorreu também entre os estudantes 5 e 7 do Grupo 3. Esse

teorema em ação verdadeiro foi identificado pela sigla TAV1, e pode ser modelado, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme o enunciado a seguir.

TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) = k * f(x)$, com $k, x \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).

Esse teorema em ação é mencionado por Vergnaud (1983, 1996c, 2007) como um exemplo quanto às propriedades de isomorfismo da função linear. Pavan (2010) e Rodrigues (2021) identificaram o TAV1 em resoluções de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em situações multiplicativas e mistas. Esse teorema em ação também foi identificado por Calado (2020) junto a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Uma vez realizada a proporção entre os litros e mililitros produzidos, os estudantes passaram a considerar a quantidade em unidades produzidas em um lote. Para isso, os grupos associaram o volume dado em mililitros ao volume presente em cada unidade de sorvete comercializada. Aqui, novamente os Grupos 2 e 3 manifestam explicitamente a operação realizada, ao desenvolverem o cálculo disposto na Figura 3.

Figura 3 – Recorte 1 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1

The image shows a handwritten solution on a piece of paper. At the top, it says 'Sorvete mL'. Below this, there is a proportion: '1' is written above 'x', and '300' is written above '12000'. A diagonal line is drawn from the '1' to the '12000', and another diagonal line is drawn from the 'x' to the '300'. Below the proportion, the calculation $\frac{12000}{300} = 40$ is written, with the result '40 sorvetes' boxed in.

Fonte: Acervo da pesquisa.

O Grupo 2 realizou uma operação semelhante a essa, porém evidenciando somente a operação $12000/300 = 40$. Já o Grupo 1, novamente, não apresentou explicitamente o esquema utilizado para obtenção do quantitativo de sorvetes presentes em um lote produzido, tanto no protocolo, quanto em seus diálogos. Embora o Grupo 1 não tenha apresentado o procedimento adotado para obtenção do quantitativo de sorvetes, durante a entrevista, o Estudante 1 diz o seguinte: "aí a gente dividiu esses 12 litros por 300 ml, para saber quantos sorvetes dava. Se não me engano, dava 40." Assim, é possível apontar que as grandezas utilizadas e operações realizadas pelo Grupo 1 foram as mesmas que os Grupos 2 e 3.

Com base nisso, e em esquemas apresentados por Rodrigues (2021) e Siqueira (2023), a relação estabelecida entre essas grandezas pode ser associada à propriedade padrão do

coeficiente de proporcionalidade. Essa relação é caracterizada pelo teorema em ação verdadeiro identificado pela sigla TAV2.

TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

Essa relação de proporcionalidade entre duas grandezas está presente em resoluções apresentadas por estudantes desde o 5º ano do Ensino Fundamental (Rodrigues, 2021), assim como por estudantes do Ensino Médio (Bernardino, 2022; Siqueira, 2023). Nesse sentido, é esperado que tal teorema em ação também seja manifestado por estudantes do Ensino Superior.

Uma vez estabelecida a quantidade de sorvetes produzidos no lote, os grupos passaram a trabalhar com os custos de produção, porém cada grupo optou por tratar os dados de uma maneira distinta. O Grupo 1, após identificar a quantidade de sorvetes produzidos em um lote, optou por identificar o custo unitário de cada insumo utilizado na produção daquele lote. Para isso, realizou a divisão dos valores – fornecidos no enunciado – pela quantidade de sorvetes produzidos, conforme a Figura 4:

Figura 4 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1

The image shows a handwritten calculation on a piece of paper. The equation is $0,75 + 0,25 + 0,62 + 0,50 = 2,12$. Below the first three terms, there are vertical arrows pointing upwards to each term, with the fraction $\frac{39}{40}$ written below the first arrow, $\frac{19}{40}$ below the second, and $\frac{25}{40}$ below the third. This indicates that the unit costs for the first three items are $\frac{39}{40}$, $\frac{19}{40}$, and $\frac{25}{40}$ respectively, which sum to the total cost of 2,12.

Fonte: Acervo da pesquisa.

A estratégia dos Estudantes 1 e 2, apresentada na Figura 4, corresponde a duas etapas de resolução distintas. A primeira etapa configura uma sucessão de divisões dos custos dos ingredientes pelo número de sorvetes produzidos por lote. A proporcionalidade desenvolvida por esse Grupo corresponde à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade (Vergnaud, 1996c), assim como o TAV2, porém, aqui, o que se busca é a taxa. Dessa forma, há um teorema em ação verdadeiro, identificado pelo código TAV3, o qual foi modelado considerando $f(x)$ uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas conforme descrito a seguir:

TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.

Ferraz (2016) e Rodrigues (2021) identificam esse teorema em ação verdadeiro ao analisarem situações junto a estudantes do 5º e do 6º ano do Ensino Fundamental. Ainda na Figura 4, os Estudantes 1 e 2 realizam uma operação derivada do resultado obtido pelo emprego do TAV3, o Grupo realizou a soma dos custos de produção unitários, obtendo o custo de produção unitário. Matematicamente, essa operação é apresentada da seguinte maneira: $0,75 + 0,25 + 0,62 + 0,50 = 2,12$. Essa operação se relaciona a uma estrutura aditiva de parte todo, em que dadas as partes, busca-se o todo, e representa um teorema em ação verdadeiro expresso da seguinte maneira:

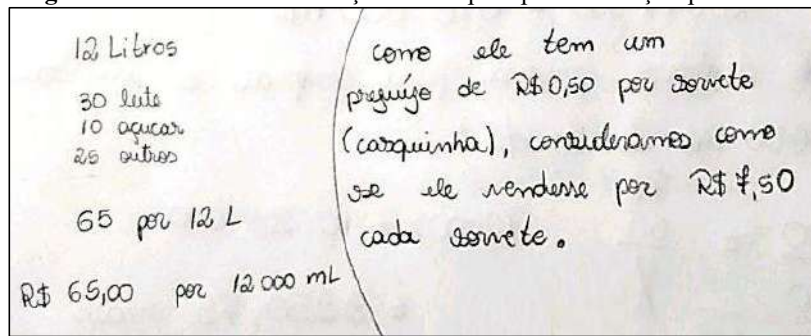
TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.

Esse teorema está associado a uma das estruturas aditivas de menor complexidade, sendo um dos primeiros tipos de situações aditivas esquematizados por crianças, pois esse tipo de situação-problema e o procedimento por ela requisitado, juntar partes para encontrar um todo, está presente dentre as primeiras representações de adição, que, em geral, são associados ao processo de contagem (Magina *et. al*, 2008).

Durante a resolução da etapa disposta na Figura 4, o Estudante 1 tratou das operações que seriam realizadas da seguinte maneira, “os 30 reais divide por 40 na verdade, que é quanto ele gasta de leite por cada sorvete, pega o 10 reais divide por 40 que é quanto ele gasta de açúcar, aí depois a gente vai somar tudo e colocar junto nesse 50 centavos, que é quanto ele vai gastar por sorvete”. Nessa transcrição, estão dispostos os procedimentos relativos aos teoremas em ação verdadeiro, 3 e 4, de forma que o Estudante não apenas anuncia e explica os passos a serem realizados, como define o significado do resultado das operações realizadas. Nesse sentido, esse momento pode ser indicado como uma possível manifestação do conhecimento predicativo desse estudante, associado ao TAV3 e TAV4.

O Grupo 2, ao tratar um dos custos de produção, manifesta o TAV4 conforme a Figura 5:

Figura 5 – Recorte 1 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

À esquerda, há uma manifestação do TAV4 com uma estrutura análoga à operação realizada pelo Grupo 1, todavia utilizando os valores totais de cada ingrediente, obtendo o custo para a produção de 40 unidades. Nessa operação, assim como apresentado pela Figura 4, existe uma estrutura aditiva de parte todo, em que, dadas as partes, busca-se o todo. Já à direita da Figura 5, há uma segunda estrutura aditiva, que está associada à ideia de “perda”, referenciada pelos Estudantes 3 e 4 como “um prejuízo” (Magina *et. al*, 2008). Algebricamente, essa operação é interpretada como $F = 8 - 0,50 = 7,50$ e pode ser modelada conforme o teorema em ação verdadeiro descrito na sequência e identificado como TAV5.

TAV5: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.

Seguindo a resolução apresentada pelo Grupo 2, após obterem o custo das casquinhas de cada unidade de sorvete, o grupo buscou estabelecer a receita obtida pela venda de 40 unidades de sorvete. Essa operação se refere à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade (Vergnaud, 1996c). Matematicamente, essa proporcionalidade é representada por $f(40) = 7,50 * 40 = 300$ e, como teorema em ação, é expressa conforme o TAV6 a seguir.

TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a * x$, com a e $x \in \mathbb{R}$.

Esse teorema em ação também foi identificado em estudantes do Ensino Fundamental e Médio (Rodrigues, 2021; Siqueira, 2023). O Grupo 3 também manifestou esse teorema em ação verdadeiro, porém sem considerar os custos de produção, realizando a operação $8 * 40 = 320$, que pode ser associada à $f(40)$. O Grupo 1 embora não tenha apresentado, em seu

protocolo, uma operação desse teor, considera essa etapa conforme o trecho transcrito a seguir:

Estudante 2: será que é só isso?

Estudante 1: não.

Estudante 2: ele tem o lucro.

Estudante 1: supondo que ele vendeu os 40 picolés...

Estudante 2: dá 235 reais e 20 centavos de lucro.

Estudante 1: não, eu quero saber sem tirar o custo dele.

Estudante 2: hum?

Estudante 1: sem tirar o custo.

Estudante 2: 320 reais.

Estudante 1: 40 vezes 8.

O valor apontado pelo estudante 2 corresponde numericamente às operações $8 - 2,12 = 5,88$ e $5,88 * 40 = 235,20$, que carregam em suas estruturas os teoremas em ação verdadeiros, TAV5 e TAV6 respectivamente. Ainda, considerando a Figura 5 e o fragmento da transcrição apresentada, é elencado o primeiro teorema em ação falso identificado. Os três grupos, em um primeiro momento, associaram a quantidade de sorvetes produzidos em um lote ao total de sorvetes comercializados, indicando valores específicos oriundos da venda de 40 unidades de sorvete. Assim, embora a situação-problema assumisse a quantidade de sorvetes comercializados como uma possível variável, neste momento os estudantes associam um valor fixo a uma variável. Esse teorema em ação falso é apontado também nas pesquisas desenvolvidas por Siqueira (2023) e Calado (2020), sendo descrito da seguinte maneira:

TAF1: Uma grandeza variável é indicada como fixa.

Essa resistência em se trabalhar com generalizações é tratada por Tinoco (2011), quando a autora afirma que a maioria dos estudantes generalizam fatos, buscando verificar sua validade apenas para casos particulares. Porém, em contraponto aos resultados apresentados por estudantes do Ensino Fundamental e Médio, nas pesquisas de Siqueira (2023) e Calado (2020), nesta pesquisa, os estudantes notam que o valor fixo associado à variável geraria problemas frente ao contexto da situação-problema ou mesmo que esse valor não responde à questão principal.

Essa percepção acaba por direcionar, novamente os grupos, a compreender que a quantidade de sorvetes vendidos é uma variável, fazendo com que a situação-problema recaia sobre uma função. Um exemplo dessa percepção está presente nas falas dos Estudantes 1 e 2:

Estudante 1: então o lucro dele é 300 vezes... é, 40 vezes 8.

Estudante 2: vezes 8 não, porque o sorvete tem um custo, o sorvete custa 2,12.

Estudante 1: ah é, não me liguei no total, tem que subtrair todo o custo.

Estudante 2, mas eu já sei quanto que é o lucro dele para uma receita, 235 reais e 20 centavos.

Estudante 1: “considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente”.

Estudante 2: e agora?

Estudante 1: é uma função...

A partir deste ponto, o Grupo 1 descarta a ideia de trabalhar com a receita ou lucro associado a um lote e passa a trabalhar com uma função cuja variável é uma unidade de sorvete. Já os Grupos 2 e 3 passam a buscar pelo lucro unitário, e ambos realizaram a subtração dos custos de produção dos valores que haviam obtido como receita oriunda da venda dos sorvetes presentes em um lote, mobilizando ambos o TAV5, conforme disposto na Figura 6.

Figura 6 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1

A handwritten calculation on a piece of paper. At the top, the number '320' is written. Below it, there are four lines of subtraction, each with an arrow pointing to the right and a label: '- 20 -> casquinha', '- 10 -> açúcar', '- 30 -> leite', and '- 25 -> insumos'. A horizontal line is drawn under the '25' and the word 'insumos'. Below this line, the result 'R\$ 235 Lucro' is written. The '235' is circled.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Após realizada essa subtração, ambos fazem a divisão do lucro obtido com a venda de um lote pelo número de unidades produzidas em um lote, assim obtendo o lucro por unidade de sorvete, numericamente $\frac{235}{40} = 5,875$ e mobilizando aqui o TAV3. Embora o Grupo 3 não tenha apresentado diretamente essa operação, é inferido que os estudantes realizaram esse cálculo uma vez que o resultado é utilizado em etapas seguintes. Já o Grupo 2 apresenta uma explicação direta quando ao cálculo que está sendo realizado conforme a Figura 7.

Figura 7 – Recorte 2 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1

Como ele ganha 235 por 40 casquinhas, ganha $235:40 = \frac{47}{8}$ por casquinha, que equivale a aproximadamente R\$ 5,88.

com $x = \text{casquinha (quantidade)}$ e $f(x) = \text{total de lucro vendendo } x \text{ casquinhas}$

$f(x) = \frac{47}{8} x$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 7, para além das operações realizadas, há ainda uma atribuição de significado ao resultado encontrado, de forma a explicar e comunicar tanto o resultado obtido como os cálculos para obter tais resultados. Dessa forma, é possível apontar, com base em Vergnaud (1996b, 2004), a indicação de uma manifestação da forma predicativa do conhecimento, associada ao TAV3. Ainda na mesma figura, o Grupo 2 expressou uma função, descrita como $f(x) = \frac{47}{8}x$, e associada ao TAV6, uma vez que há nela uma relação de proporcionalidade do tipo $f(x) = a * x$, com a e $x \in \mathbb{R}$. Novamente, aqui, o grupo apresenta um significado associado a essa função, como sendo “total do lucro vendendo x casquinhas”, direcionando essa passagem como uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento, agora associada ao TAV6.

Os Grupos 1 e 3, uma vez que obtiveram o custo unitário e estabeleceram uma relação entre o preço de venda e os custos unitários, obtendo o lucro unitário, passaram a tratar do custo mensal, conforme apresentado na transcrição a seguir entre os estudantes do Grupo 3:

Estudante 5: *isso beleza, então essa vai ser a quantidade de lucro, então nossa função vai ser f de x , a função de lucro né? vai ser, f de x , igual ao lucro por sorvete vezes x , que daí é a quantia de sorvete, menos, 12110, isso, isso, acabou. Então essa é a função que representa o lucro.*

Estudante 7: *menos? Não é mais?*

Estudante 5: *é menos porque é um custo né? Por que aqui é positivo? Porque aqui é a quantidade de lucro que a gente está tendo por sorvete, para a gente saber o lucro final...*

Estudante 7: *esse aqui está pagando*

Estudante 5: *isso, por isso é negativo.*

Um excerto semelhante é encontrado nos diálogos do Grupo 1, quando o Estudante 2 expressa que a receita “menos o custo, dá o lucro... é isso, então vai ser 5,88 vezes a quantidade de sorvetes, menos que é 12110, essa é a função de lucro”. Assim, algebricamente

ambos os Grupos, 1 e 3, apresentam a função do lucro como $f(x) = 5,88x - 12110$. Conforme as Figuras 8 e 9:

Figura 8 – Recorte 2 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1

The image shows two handwritten equations on a piece of paper. The first equation is $f(x) = 2,12x + 12110,00 \Rightarrow \text{custo}$. The second equation is $f(x) = (5,88x) - 12110,00 \Rightarrow \text{lucro}$.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 9 – Recorte 3 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1

The image shows a single handwritten equation: $L = 5,88 \cdot x - 12.110$.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Além disso, é possível verificar que, na Figura 8, os Estudantes 1 e 2 apresentaram uma segunda função relacionada à situação problema, $f(x) = 2,12x + 12110$, que expressa o custo total em relação ao número de sorvetes produzidos. Dessa maneira, ambos os Grupos, ao manifestarem os teoremas em ação verdadeiro, TAV5 e TAV6, acabam por mobilizar um terceiro teorema em ação verdadeiro que está associado particularmente a ideias correspondentes à função afim, ao definirem $f(x)$ como uma relação funcional que representa uma função afim em que a é a taxa e b é o coeficiente linear. Esse teorema em ação, identificado aqui como TAV7, pode ser modelado da seguinte maneira.

TAV7: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

Esse teorema em ação também é manifestado na resolução apresentada pelos Estudantes 1 e 2 e foi identificado nas pesquisas de Rodrigues (2021) e Siqueira (2023) junto a estudantes do Ensino Fundamental e Médio.

Ainda sobre a Figura 8, a função custo é apresentada como $f(x)$ e a função lucro também como $f(x)$, durante a entrevista, o grupo não reconhece que, se tratando de funções distintas, letras distintas deveriam ser utilizadas para representar as relações funcionais, por exemplo, $f(x)$ e $g(x)$. Esse problema de identificação também é apresentado pelo Grupo 1 nas situações-problema 2 e 3, assim como pelo Grupo 3 nas situações-problema 2 e 3. Analisando as transcrições da implementação e da entrevista, é possível identificar aspectos

que indicam que esses estudantes tiveram a percepção de que as funções estabelecidas eram distintas e representavam contextos distintos, bem como, os Grupos descreveram adequadamente o que cada função representa em seus protocolos.

Nesse sentido, é possível inferir que há, aqui, uma falha na compreensão desses estudantes não com o que cada função representa, mas sim, quanto a compreensão de que funções diferentes devem ser nomeadas ou identificadas por letras diferentes quando inseridas em um mesmo contexto ou situação-problema. Nesse sentido, considerando a recorrência desse erro junto aos Grupos 1 e 3, ele é descrito conforme o teorema em ação falso apresentado a seguir.

<p>TAF2: Em um mesmo contexto, mais de uma função pode ser representada pela mesma letra.</p>
--

Ainda em relação aos dois últimos excertos apresentados, na página 94, em ambos os casos, há uma enunciação correspondente ao esquema associado ao TAV7, em que os Estudantes 2 e 5 expõem características da relação funcional estabelecida pela situação-problema. Em ambos os trechos, os Estudantes expressaram, em suas falas, operações, conhecimentos ou esquemas que haviam sido manifestados anteriormente. Ao considerar que tais falas nesse momento assumem uma expressa intencionalidade de explicar ou comunicar o esquema relacionado ao TAV7, que, por si, já engloba a relação entre outros dois teoremas em ação, é possível apontar ambas as falas como indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento relacionadas ao TAV7. O Estudante 5, por exemplo, apresenta falas semelhantes ao excerto disponibilizado em outros dois momentos, sendo que, em ambos, ele reafirma o esquema associado ao TAV7, de forma que esses outros dois momentos também podem ser apontados como possíveis manifestações da forma predicativa do conhecimento.

Embora a intencionalidade de comunicação corresponda a um fator determinante para o apontamento de tais trechos como possíveis manifestações da forma predicativa do conhecimento, isoladamente essa intencionalidade não possui força para que se estabeleça uma manifestação da forma predicativa do conhecimento. Mais adiante, ainda nesta seção, essa questão é retomada ao considerar um registro em que há a intenção em comunicar, mas que não representa uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento. Assim, ao considerar que “a forma operatória e a forma predicativa são diferentes, porém, complementares” (Vergnaud, 2017), de maneira que o conhecimento operatório engloba parte

da forma predicativa do conhecimento (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019), e que a forma operatória do conhecimento não pressupõe a comunicação, sendo ela em sua maior parte implícita (Vergnaud, 2004, 1993), não é possível firmar que há um indício de forma predicativa do conhecimento tão somente quando há uma intenção em se comunicar algo.

A função apresentada pelos Grupos 1 e 3 corresponde aquilo que foi previsto pela análise *a priori* em relação ao enunciado da situação-problema no que se trata do potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria e sua representação matemática. Caberia aos Grupos, a partir disso, trabalharem na construção de um gráfico, que era esperado como a representação visual da parte matemática. Porém, nesse momento, os três Grupos voltam a manifestar o TAF1 e direcionam seus esforços para determinar um valor específico para o qual a sorveteria não teria lucro ou prejuízo, ou seja, buscam pela raiz da função encontrada. Cabe apontar que, embora o Grupo 2 não tenha apresentado uma função que considerasse o custo mensal, o Grupo utilizou o valor deste custo para determinar o mesmo ponto que os outros dois Grupos.

Essa resistência em aceitar uma generalização como resultado de uma situação-problema pode ser ilustrada no trecho transcrito abaixo da entrevista conduzida junto ao Grupo 3. Quando solicitado que os Estudantes descrevessem a resolução apresentada, foi afirmado o seguinte:

Estudante 6: *A gente montou uma função para que a gente conseguisse identificar quantos sorvetes eram necessários ele vender, para que fosse possível é... estabilizar, não ficar nem no lucro, nem no prejuízo, no caso seria a raiz da função.*

Pesquisador: *vocês encontraram a função...*

Estudante 5: *é...*

Estudante 6: *para saber quantos sorvetes no mínimo ele teria que vender para que não ficasse no vermelho.*

Esse trecho contradiz uma resposta dada anteriormente pelo Grupo, quando questionados a respeito de qual seria a resposta final para a situação problema. O Estudante 5, naquele contexto, afirmou que “a forma matemática seria a própria função e a forma geométrica, de representação visual, é o gráfico dela”.

Para determinar esse ponto referido pelo Estudante 6, em que não haveria nem lucro nem prejuízo, os três Grupos recorreram ao TAV2, operando $x = \frac{f(x)}{a}$, especificamente os Grupos 1 e 3 operaram, $x \approx 12110/5,88 \approx 2059,52$, resultado que foi arredondado para 2060, por considerarem que “é melhor arredondar pra cima, melhor ele vender um a mais para garantir que ele vai ter lucro”, conforme dito pelo Estudante 5. O Grupo 2 optou por trabalhar

com os resultados em sua forma fracionária, operando $x = 12110 / \frac{47}{8} \approx 2061,28$, resultado que foi arredondado para 2062 unidades.

Essa etapa de obtenção da raiz da função foi considerada, nesse momento, como não pertinente, pois esse valor foi determinado sem um propósito específico pelos Grupos o que pode levar a um possível conhecimento associado ao TAF1. Em entrevista, os três Grupos, quando questionados pelo motivo para a obtenção desse valor, trataram de indicar o significado do valor, como pode ser observado na fala do Estudante 6 “é que a gente precisa obter a raiz da função, ou seja, qual é aquele ponto que marca o crescimento ou decréscimo da função” e também do Estudante 1: “[...] para a pessoa saber, tipo, olha eu preciso... no caso do sorvete, eu preciso produzir, no mínimo... e vender no mínimo tantos sorvetes, para eu não ter... pelo menos não ter o prejuízo”. Caso esse valor fosse buscado como parte do processo de construção do gráfico, uma nova interpretação haveria de ser realizada, todavia, considerando as discussões realizadas durante a implementação, a entrevista e o protocolo apresentado pelos Grupos, a indicação desse valor específico foi interpretada como uma possível mobilização do TAF1, em que uma variável x foi associada a um valor fixo.

Nesse ponto, o Grupo 2 havia determinado os valores para $f(x)$, x , e para a taxa. Embora a dupla não tenha associado o valor de 12110 ao coeficiente linear de uma função, mas sim com o valor específico para $f(x)$, era esperado que a resolução da situação-problema tivesse sido encerrada nesse momento, todavia, foi inferido que os estudantes não realizaram a associação entre os valores encontrados a seus respectivos significados, uma vez que cálculos adicionais foram realizados para a obtenção de valores já determinados anteriormente. Os cálculos adicionais estão dispostos nas Figuras 10 e 11.

Figura 10 – Recorte 3 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1

$$12110 = \frac{47}{8}x$$
$$x = 12110 \cdot \frac{8}{47}$$
$$x = \frac{96880}{47} \approx 2061,28$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 11 – Recorte 4 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1

$$\text{ganho vendendo meta mínima} = 2062 \cdot \frac{47}{8} = \frac{48457}{4} = 12114,25$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 10, está disposta a seguinte operação, $12110 = \frac{47}{8}x$, a qual retorna como resultado a raiz da função. Porém, o grupo realizou uma segunda operação, apresentada na Figura 11, $f(x) = x * a$, em que o TAV3 é mobilizado. Nessa operação, o Grupo busca pelo valor de $f(x)$ para $x = 2062$, valor esse que já havia sido utilizado anteriormente pelo grupo, ao considerar que a sorveteria deveria possuir uma receita de 12110 para que não houvesse prejuízo. Porém, o grupo utilizou uma aproximação do resultado obtido pela operação $x = 12110 / \frac{47}{8}$, para determinar $y = 0$. Isso pode indicar uma possível incompreensão do Grupo quanto às operações realizadas, uma vez que o grupo utiliza uma aproximação de x , 2062, para determinar o numerador dessa mesma operação, 12110, chegando ao resultado 12114,25.

Assim, embora o Grupo 2 tenha manifestado um conhecimento verdadeiro, que pode ser modelado pelo teorema em ação verdadeiro (TAV3), a dupla o emprega utilizando aproximações obtidas em cálculos anteriores, buscando determinar os mesmos valores utilizados em tais cálculos.

O Grupo 2 realizou, ainda, mais dois cálculos adicionais, no primeiro foi determinado o volume de sorvetes produzidos, considerando a produção de 2062 unidades de sorvetes, obtêm-se o seguinte, $2062 * 300 = 618600$, havendo a manifestação do TAV6. E o segundo cálculo adicional mobilizou o TAV2 para buscar determinar o custo se fossem produzidos 618600 ml de sorvete, ao organizar uma regra de três da seguinte maneira, $\frac{12000}{618600} = \frac{65}{x}$, resultando em $x = 3350,75$. Aqui, os Estudantes embora tenham mobilizado dois teoremas em ação verdadeiros, TAV2 e TAV6, ambos estão apoiados sobre um teorema em ação falso, TAF1.

Durante a entrevista junto ao Grupo 2, quando questionados sobre o motivo de não terem recorrido à função afim como um caminho para resolverem a situação-problema, os Estudantes 3 e 4, afirmaram o seguinte:

Estudante 4: *acho que a ideia era bem parecida na verdade, que dava para usar funções... a gente não usou, mas dava... era o intuito da atividade.*

[...]

Estudante 4: *a gente teve muita dificuldade também em entender o que era*

representação... como era a pergunta? Represente... visualmente, isso aí que complicou a gente, porque inicialmente a gente tinha pensado em gráfico, mas depois, poxa, trabalhador comum... acho que a linguagem mais fácil dele entender não seria um gráfico. Então acho que a gente meio que se distanciou de funções aí.

Pesquisador: entendi, então foi a questão da representação visual que tirou vocês de funções?

Estudante 4: sim.

[...]

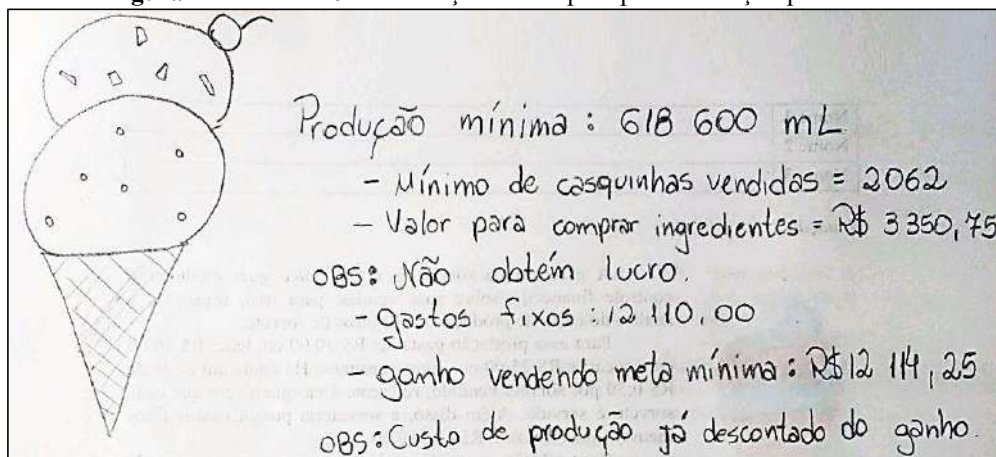
Estudante 3: foi por causa do represente visualmente, porque a gente pensou, como é que a gente vai representar essas coisas que a gente colocou de forma visual... o que que foi a resposta que fez a gente...

Estudante 4: de forma que os funcionários entendem.

Estudante 3: foi isso que fez a gente se distanciar, de forma que os funcionários entendem... daí a gente, gráfico eles não iriam entender, então a gente vai ter que escrever, porque é uma forma que pessoas tipo... uma pessoa leiga que não conhece muito, ela não vai entender um gráfico muitas vezes, ela vai achar bem mais fácil escrito da forma que a gente fez, aí pensamos, ah vamos fazer assim, foi onde a gente se despreendeu totalmente de função...

Considerando a transcrição apresentada, o Grupo 2, ao abordar a questão da representação visual apresentou o seguinte como resposta:

Figura 12 – Recorte 5 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 1



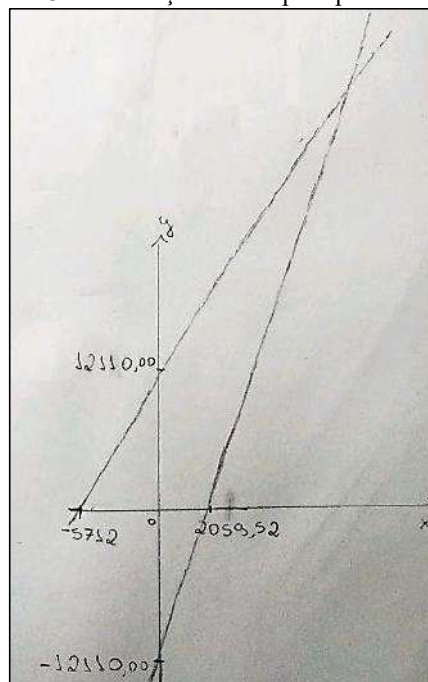
Fonte: Acervo da pesquisa.

A resposta do Grupo 2, apresentada na Figura 12, reflete o que foi dito pelos Estudantes no trecho da transcrição apresentado, em que o Estudante 3 afirma que “então a gente vai ter que escrever, [...] ela vai achar bem mais fácil escrito da forma que a gente fez”. Durante a entrevista, o Estudante 4 afirma que “[...] daí a gente fez o *explique para sua vó*”, essa afirmação expressa uma intencionalidade de comunicação que levanta esse registro como uma possível manifestação da forma predicativa desses estudantes, porém, aqui, não é possível associar tal manifestação a um conhecimento operatório em particular. Isso se dá, pois aquilo que se está comunicando compreende um compilado de resultados obtidos em

outros momentos, de forma que esse registro não carrega em si propriedades, cálculos ou teoremas matemáticos, mas sim a exposição resultante destes. Considerando o exposto, embora haja, no protocolo apresentado, uma intenção em comunicar, não há aqui uma manifestação da forma predicativa do conhecimento, posto ainda que tais manifestações resultaram estão indicadas e analisadas em outros momentos desta seção.

Acerca das etapas finais de resolução dos Grupos 1 e 3, como meio para representar visualmente o potencial de lucro ou prejuízo demandada pelo enunciado, bem como representar a função obtida em passos anteriores, ambos os Grupos realizaram a construção de um gráfico. A Figura 13 ilustra o gráfico construído pelo Grupo 1 e apresenta duas retas, associadas às funções descritas pelo Grupo como $f(x) = 2,12x + 12110$, referente ao custo e $f(x) = 5,88x - 12110$, referente ao lucro.

Figura 13 – Recorte 3 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Quanto ao gráfico construído, alguns apontamentos podem ser realizados. O primeiro compete ao domínio das funções obtidas, as retas são dispostas de forma que $x \in \mathbb{R}$, isso mostra que o grupo possivelmente não compreende que o contexto da situação-problema e a variável adotada pelo Grupo limitam o domínio aos números naturais. Nos diálogos decorridos durante a implementação, também não há indícios de que o Grupo tenha considerado o domínio da função durante a construção do gráfico ou interpretação dos

resultados. Nesse sentido, a apresentação de uma função cujo domínio seja discreto como uma reta, pode ser apontado como um teorema em ação falso conforme se vê a seguir:

TAF3: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e x pertencente a um domínio discreto, sua representação gráfica é dada por uma reta.

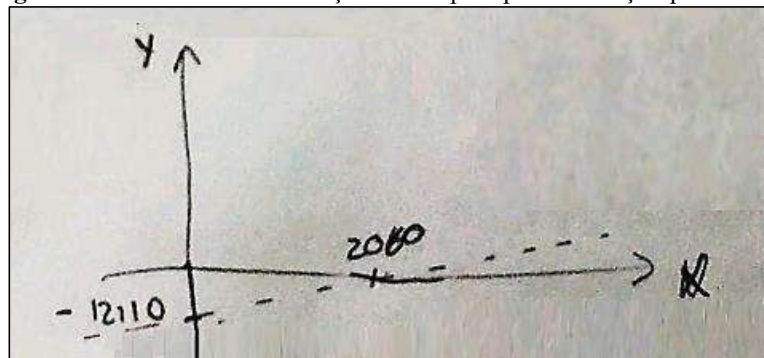
Durante a entrevista, quando questionados sobre o domínio da função, o Estudante 1 afirmou o seguinte, “a única coisa que acho que a gente errou foi o gráfico, que a gente fez contínuo e não era contínuo”. Todavia, durante a entrevista, foi dito pelo grupo que eles chegaram a isso somente após passado o momento de implementação do instrumento de pesquisa, ao dialogarem com outros participantes desse estudo, seus colegas de turma.

O segundo aspecto a ser analisado no gráfico (Figura 13) é o intercepto entre as duas retas. Durante a implementação, o Estudante 1 afirmou o seguinte, “o certo era ele se encontrar aqui, porque quando ele vender isso aqui de sorvete ele não vai ter nem lucro nem prejuízo, vai dar zero, não é isso?”, aqui o estudante se refere às retas de custo e lucro, porém a interpretação dada por ele corresponde à reta de custo e uma terceira reta, não considerada pelo grupo, que correspondente à receita da sorveteria, e que poderia ser expressa como $g(x) = 8x$.

Conforme descrito, aqui, os valores $x = 5712$ e $x = 2059,52$, não foram interpretados como um teorema em ação falso (TAF1), pois esses valores específicos são determinantes para a construção das retas apresentadas. Dessa forma, foi mobilizado o TAV2.

Na Figura 14, está disposto o gráfico da função $f(x) = 5,88x - 12110$, referente ao lucro, construído pelo Grupo 3.

Figura 14 – Recorte 4 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Assim como na representação gráfica realizada pelo Grupo 1, o valor $x = 2060$ não corresponde a um teorema em ação falso uma vez que, embora o valor dado como variável

seja associado a um valor fixo, essa associação não interfere na compreensão de regularidade ou de generalização junto aos Estudantes.

A representação assume $x \in \mathbb{Z}$, ao apresentar não uma reta, mas um tracejado para representar os pontos para os quais está definido o domínio da função. Durante a implementação, em mais de um momento, os Estudantes do Grupo 3 trataram do domínio da função, como destacado pelo Estudante 5 ao afirmar: “[...] só fazer um gráfico, em que o domínio, vai ser números naturais, porque não tem como vender meio sorvete e não tem como vender menos 1 sorvete, ou raiz de 2 sorvetes”. Em um segundo momento, o mesmo estudante reafirma “[...] então ele vai começar aqui, menos 12110, daí ela vem, pontinho, pontinho, pontinho, até interceptar aqui que vai ser em 2060, daí ela vai indo”. Considerando os diálogos realizados durante a implementação, é possível inferir que não há propriamente uma incompreensão quanto ao domínio para o qual a função estava definida, todavia, para a situação-problema 1, a representação gráfica não deve englobar valores para $x < 0$.

Tanto o Grupo 1 quanto o Grupo 3, ao realizarem suas construções, apresentam gráficos que englobam valores para $x < 0$, mesmo quando consideram que o domínio da função expressada não compreende esses valores. Esse erro se repete junto ao Grupo 1 também nas situações-problema 2 e 3, quando representam graficamente valores para $x < 0$ para uma função cujo domínio seja definido somente para o conjunto dos números naturais ou ainda, $x \geq 0$. Esse conhecimento equivocado que os Estudantes mobilizaram foi modelado como um teorema em ação falso, TAF4, que pode ser descrito da seguinte maneira:

TAF4: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}$, sua representação gráfica é dada de tal forma que $x \in \mathbb{R}$.

Por fim, cabe tratar da própria construção de um gráfico como escolha dos Grupos 1 e 3 de representação visual e, associado a isso, a representação gráfica como representação da forma predicativa do conhecimento. A forma predicativa do conhecimento está associada a uma intenção de comunicação, que pode ser realizada tanto por meio da linguagem natural, quanto de forma simbólica, dada por tabelas, diagramas, álgebra e nesse caso particular, por um gráfico (Vergnaud, 2002, 2004, 2017). Nesse sentido, a apresentação de um gráfico, como meio para expressar a função obtida, de forma a articular propriedades matemáticas e outros conhecimentos que dão suporte para essa representação, pode ser classificada como uma expressão do conhecimento predicativo desses alunos. Cabe ainda pontuar que, mesmo que a representação gráfica possua erros, isso não a invalida como manifestação do conhecimento

predicativo, uma vez que a forma predicativa do conhecimento pode agir como auxiliadora da forma operatória do conhecimento (Vergnaud, 2002).

A partir da análise das estratégias de resolução dos Grupos para a situação-problema 1, foram identificados os possíveis teoremas em ação manifestados pelos estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem a situação-problema proposta. O Quadro 10 apresenta uma síntese dos teoremas em ação verdadeiros e falsos, acompanhados pelos indícios de suas manifestações, e conforme descrito anteriormente, os teoremas em ação agrupados pelo Quadro 10, sintetizam também os conhecimentos operatórios mobilizados pelos estudantes.

Quadro 10 – Teoremas em ação identificados na situação-problema 1

Indícios dos teoremas em ação	Modelação dos teoremas em ação (verdadeiros e falsos)	Recorrência
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$.	TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) = k * f(x)$, com k e $x \in \mathbb{R}$, sendo k a razão (um escalar).	G1 (1) G2 (1) G3 (1)
Ao dividir $f(x)$ pela taxa de variação (a) para determinar (x).	TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com x e $a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.	G1 (3) G2 (3) G3 (3)
Ao dividir $f(x)$ por (x) para determinar a taxa de variação (a).	TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.	G1 (1) G2 (2) G3 (2)
Ao somar as partes (P) para determinar o todo (T).	TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G2 (1)
Ao realizar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F).	TAV5: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.	G1 (1) G2 (2) G3 (1)
Ao multiplicar a taxa de variação (a) por (x).	TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a * x$, com x e $a \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G2 (3) G3 (1)
Ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (a) por (x) para obter $f(x)$.	TAV7: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$, com a, b e $x \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G3 (1)
Ao atribuir uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	TAF1: Uma grandeza variável é indicada como fixa.	G1 (3) G2 (3) G3 (2)
Ao utilizar a mesma letra para nomear relações funcionais distintas em um mesmo contexto.	TAF2: Em um mesmo contexto, mais de uma função pode ser representada pela mesma letra.	G1 (1) G3 (1)
Ao representar uma função de domínio discreto por meio de uma reta.	TAF3: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e x pertencente a um domínio discreto, sua representação gráfica é dada por uma reta.	G1 (1) G3 (1)
Ao representar graficamente valores para $x < 0$ de uma função cujo domínio seja somente definido para $x \geq 0$.	TAF4: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}$, sua representação gráfica é dada de tal forma que $x \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G3 (1)

Nos esquemas mobilizados pelos alunos, foram identificados sete teoremas em ação verdadeiros e dois teoremas em ação falsos. Foram identificados, ademais, ao menos nove momentos em que existem indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento, sendo eles: do Estudante 1, ao explicar o TAV3 e TAV4; dos Estudantes 3 e 4, ao apresentarem uma explicação para o TAV3; dos Estudantes 3 e 4, ao apresentarem uma explicação para o TAV6; do Estudante 2, ao explicar o TAV7; três momentos em que o Estudante 2 explica o TAV7; do Grupo 1, ao apresentar uma representação gráfica da solução; do Grupo 3, ao apresentar uma representação gráfica da solução.

4.2 Análise e Discussão da Situação-problema 2

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.

Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo,

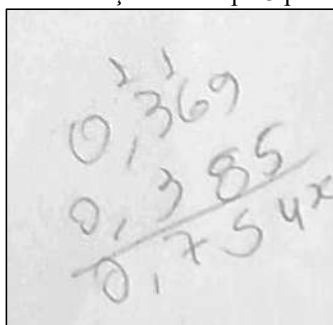
apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

Represente essas projeções matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

Antes de adentrar nas análises, cabe o apontamento de que, em comparação à situação-problema 1, as situações-problema 2 e 3, mesmo possuindo um número de etapas intermediárias maior, correspondem a um menor detalhamento em suas resoluções, de forma que os três Grupos apresentaram resoluções mais sucintas.

O primeiro dado apresentado pelo enunciado é acerca dos valores pagos à concessionária de energia sobre o consumo e uso da estrutura do sistema. Para a resolução, os Grupos poderiam optar tanto por somar esses valores, quanto por operá-los separadamente. O Grupo 3 optou por somar esses custos, mobilizando o TAV4 ao somar as partes (P) para determinar o todo (T), numericamente, $0,369 + 0,385 = 0,754$, conforme a Figura 14.

Figura 15 – Recorte 1 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2


$$\begin{array}{r} 0,369 \\ 0,385 \\ \hline 0,754x \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Junto ao resultado apresentado, o Grupo 3 indicou uma variável x . Essa abordagem representa uma interpretação inicial do enunciado pelo Grupo, uma vez que, nesse momento, a variável tempo ainda não havia sido adotada pelo Grupo. Ao multiplicar a taxa de variação (a), determinada por meio do TAV4, por x , o Grupo 3 manifestou um segundo teorema em ação verdadeiro, o TAV6. Após determinar a taxa de variação, $0,754$, o Grupo 3 realizou a seguinte operação:

Figura 16 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2

Handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, there is a vertical addition: 0,754 plus 100,000, with a horizontal line and the result 100,754 written below. Below this, there is a linear equation: 100,754 * x + 28,92, with the text "com Place" written next to it. At the bottom, the number 1237,958 is written, with some scribbles above it.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na operação apresentada pela Figura 16, o Grupo 3 realizou a soma entre a taxa (a) e um escalar (k), para, então, expressar o resultado dessa soma em função de x. Em termos genéricos essa operação pode ser descrita como $f(x) = (a + k) * x + b$, o que pode ser visto como um teorema em ação falso, TAF5, descrito da seguinte maneira:

TAF5: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = (a + k) * x + b$, com k, b e $x \in \mathbb{R}$, sendo k um escalar.

Esse teorema em ação falso, embora não identificado em outras pesquisas, se aproxima a um teorema em ação falso apresentado por Calado (2020) e Bernardino (2022) ao descreverem situações que são representadas por $f(kx) + c$, em que, para qualquer k natural, o estudante realiza a soma de k com a constante c e multiplica por x ou ainda, $f(kx) + c = (k + c) * x$, com k, x e $c \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar). Todavia, não podemos inferir que tal manifestação corresponde a um conhecimento equivocado, estabelecido junto a esse Estudante ou se a operação realizada corresponde somente a um erro pontual. A operação está presente ao lado do enunciado e não junto ao restante da resolução do Grupo, de igual maneira, ela não é citada durante a implementação ou na entrevista. Considerando ainda que o Grupo 3 não utilizou o resultado da operação realizada na Figura 15, descartando essa operação, há uma possibilidade de que se trate de um erro pontual, decorrente de uma interpretação incorreta do enunciado.

Apesar de, em um primeiro momento, o grupo ter realizado a soma correta entre os custos do kWh consumido e o custo por uso da estrutura da concessionária, $0,369 + 0,385 = 0,754$, conforme apresentado na Figura 15, ao realizar novamente essa soma, dessa vez

utilizando a calculadora, ao inserir os valores na calculadora, um dos Estudantes do Grupo 3 acaba inserindo um dígito incorreto, assim, somando, $0,3699 + 0,385 = 0,7549$. Considerando que os mesmos valores foram somados anteriormente de forma correta e por se tratar de um dígito que foi inserido incorretamente, é possível inferir que se trata de um erro pontual, nesse sentido, a análise que segue não irá considerá-lo.

Nesse momento, o Grupo 3 descarta os cálculos realizados e inicia novamente a resolução. Nessa nova tentativa, o grupo realiza as operações descritas anteriormente em uma única passagem, que engloba o TAV4, ao somarem as taxas cobradas por kWh, e o TAV7, ao colocar a soma das taxas cobradas por kWh em função de uma variável e somar a isso a taxa de iluminação pública, conforme Figura 17.

Figura 17 – Recorte 3 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2

The image shows a handwritten note with the following content:

$$f(x) = 0,7549 \cdot x + 28,92$$

$$f(x) = 0,7549 \cdot 350 + 28,92$$

R\$ 293,13

Fonte: Acervo da pesquisa.

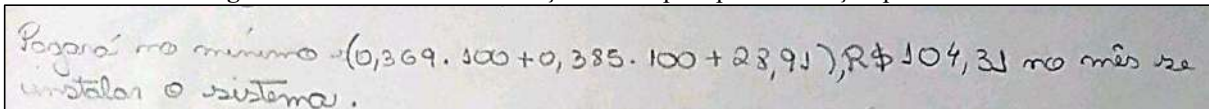
Na Figura 16, após o Grupo 3 apresentar a função que relaciona o consumo de energia ao valor a ser pago, os estudantes calculam $f(350)$ para determinar o valor que será pago mensalmente sem a instalação do sistema de geração de energia. Essa operação não pode ser interpretada como uma manifestação do TAF1, pois esse está associado à atribuição de uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer, aqui, o contexto da situação problema dispõe que o valor de 350 kWh não se altera ao longo do tempo, mais ainda, considerando o caminho de resolução adotado pelo Grupo 3, determinar a $f(350)$ corresponde a uma etapa intermediária necessária para a resolução da situação-problema. Nesse sentido, há uma relação de proporcionalidade, que se assemelha ao TAV1, porém há aqui uma distinção: a soma de um coeficiente linear. Logo, essa estrutura pode ser interpretada como um teorema em ação verdadeiro, TAV8, descrito da seguinte maneira:

TAV8: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) + c = k * f(x) + c$, com k, c e $x \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).

Os Grupos 1 e 2, ao abordarem as etapas descritas anteriormente, operaram da seguinte maneira, $0,369 * 350 + 0,385 * 350 + 28,91 = 292,81$. Nesse momento, os Grupos manifestaram uma série de teoremas em ação verdadeiros simultaneamente. Ao

multiplicar a taxa por um escalar, $0,369 * 350$ e $0,385 * 350$, analisadas uma a uma, tem-se uma relação de proporcionalidade, tal que $f(k * x) = k * f(x)$, com $k, x \in \mathbb{R}$, o que poderia indicar a mobilização do TAV1, todavia trata-se de uma única operação, apresentada como um todo, de forma que também sua análise deve considerar o todo. Outrossim, há a possibilidade de apontar para a manifestação do TAV8, porém a estrutura apresentada pelos Grupos 1 e 2 ultrapassa aquilo descrito pelo TAV8 ao considerar duas funções $f(x)$ e $g(x)$. Esse processo é repetido pelos Grupos 1 e 2 ao determinarem o valor que seria pago após a instalação do sistema de geração de energia, numericamente, $(0,369 * 100 + 0,385 * 100 + 28,91) = 104,31$, conforme a Figura 18.

Figura 18 – Recorte 1 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 2



Pagará no mínimo $(0,369 * 100 + 0,385 * 100 + 28,91)$, R\$ 104,31 no mês se instalar o sistema.

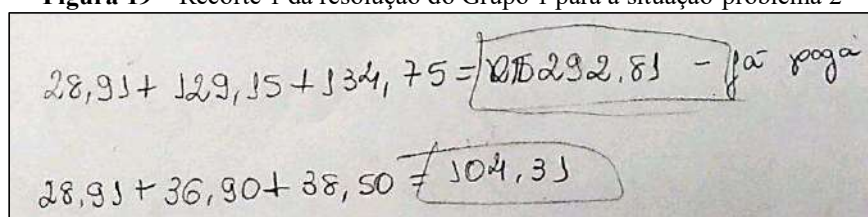
Fonte: Acervo da pesquisa.

Algebricamente a operação realizada na Figura 18 pode ser descrita como $f(kx) + g(kx) + c = k * f(x) + k * g(x) + c = k * (f(x) + g(x)) + c$, que, embora seja algo pontual para atender o contexto introduzido pela situação-problema, se repete tanto no Grupo 1 quanto no Grupo 2. Assim, em termos matemáticos, ao considerar f como uma função real que associa o número de kWh e a taxa iluminação pública, há um isomorfismo das relações de proporcionalidade, algebricamente: $f(kx) + g(kx) + c = k * f(x) + k * g(x) + c$, com c, k e $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, essa estrutura foi considerada como um teorema em ação verdadeiro, referenciado pela sigla TAV9 e descrito conforme a sentença a seguir:

TAV9: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) + g(k * x) + c = k * f(x) + k * g(x) + c$, com k, x e $c \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).

Nesse sentido, ainda deve ser destacado que a manifestação do TAV9, incorre na posterior manifestação do TAV4, uma vez que, após os coeficientes serem multiplicados pelo escalar, as partes são somadas para se obter o todo, conforme a Figura 19.

Figura 19 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 2



$28,91 + 129,15 + 134,75 = \text{R\$ } 292,81$ - por pagar
 $28,91 + 36,90 + 38,50 = 104,31$

Nesse momento, os três Grupos realizaram a multiplicação dos valores pagos com e sem a instalação do sistema de geração de energia por 12. Essa escolha por determinar o valor específico para $f(12)$ foi questionada aos Grupos durante a entrevista, os Grupos 1 e 2 descreveram que realizaram essa etapa, porque o enunciado apresentava esse período, conforme o Estudante 2 descreve: “de 12 meses? Por causa do enunciado ali, com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se...”. Considerando, ainda, que os Grupos seguiram utilizando o número de meses como variável, essa operação foi designada como um teorema em ação falso, especificamente o TAF1, já que uma quantidade específica foi utilizada para representar uma quantidade variável.

Essa interpretação não pode ser aplicada à resolução apresentada pelo Grupo 3, embora esse grupo também tenha encontrado o valor para $f(12)$, porque as etapas subsequentes desenvolvidas pelo Grupo passaram a adotar como grandeza o número de anos, e não mais o número de meses. Durante a entrevista, o Estudante 5, quando questionado quanto à escolha da variável, expõe o seguinte: “o ano? É por conta da experiência pessoal que eu sabia que ia ser muitos meses, porque geralmente a gente calcula em anos, o retorno, aí para facilitar ficou em anos”. Nesse sentido, a apresentação de uma $f(12)$ foi apontada junto ao Grupo 3 não como um teorema em ação falso, mas sim como uma mobilização do TAV1.

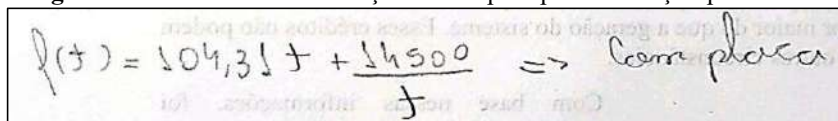
Munidos dos resultados determinados até esse momento, os Grupos poderiam apresentar funções que respondiam ao enunciado da situação problema quanto à representação matemática. Os Grupos 1 e 3 apresentaram, ambos, generalizações para os valores pagos com e sem a instalação do sistema de geração de energia. Como os Grupos apresentaram funções distintas, a análise foi conduzida separadamente. Em relação à generalização para o valor pago sem o sistema de geração, o Grupo 1 apresentou como resposta, $f(t) = 292,81t$ sendo t o número de meses. Essa função foi elaborada com base no valor que o Grupo havia determinado anteriormente, ao mobilizar o TAV9 e o TAV4, que foi colocado em função do tempo (t) dado em meses, mobilizando, desse modo, o TAV6, tal que, há uma relação de proporcionalidade do tipo $f(x) = ax$, em que a taxa (a), e a variável (x) $\in \mathbb{R}$.

O Grupo 3 apresentou um procedimento semelhante ao Grupo 1, todavia, conforme descrito anteriormente, o Grupo utilizou como variável o número de anos. Por isso, a taxa de variação apresentada pelo grupo foi 12 vezes maior, assim apresentando como generalização para o valor a ser pago sem a instalação do sistema de geração, $f(x) = 3517,50x$ sendo x o número de anos. Neste momento, o grupo havia determinado o valor pago ao ano, ao operar

$f(12 * 1) = 12 * 293,125 = 3517,50$, mobilizando o TAV1 para, então, deixar esse valor em função do tempo (x) dado em anos, mobilizando o TAV6 ao estabelecer uma relação de proporcionalidade do tipo, $f(x) = ax$ em que a taxa de variação (a), e a variável (x) $\in \mathbb{R}$.

Já para o valor pago considerando a instalação do sistema de geração de energia, o Grupo 1 apresentou como resposta a função disposta na Figura 20.

Figura 20 – Recorte 2 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 2



The image shows a handwritten mathematical expression on a piece of paper. The expression is $f(t) = 104,31t + \frac{14500}{t} \Rightarrow \text{com placa}$. The handwriting is in black ink on a light-colored background. The text "com placa" is written to the right of the equation.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a entrevista, o Estudante 2 afirmou o seguinte a respeito da resolução: “[...] mas demorou a entrar na minha cabeça, que esse 14500, eu ia definir em quanto tempo ele iria pagar, independente se ele ia pagar em 2 anos, 1 ano, de qualquer forma ia entrar no custo... eu demorei a entender por causa disso”. Essa dificuldade em compreender a maneira que o custo total de instalação seria pago acabou sendo refletida na resposta apresentada para a situação, visto que, ao explicar a resolução durante a entrevista, o Estudante 1 descreveu a função apresentada da seguinte maneira, “Então lá ele dá os custos por kWh, então é o 104,31 por 100 kWh, vezes o tempo, o 14500 é o que ele vai pagar na placa, dividido pelo tempo, que daí é o tempo ele vai demorar pagar essa placa”. A fala do Estudante 1 leva à interpretação de que a variável associada aos custos por kWh, 104,31 não é a mesma variável associada ao valor pago pela instalação, 14500, porém a resposta é apresentada como uma única função racional. Os Estudantes 1 e 2 discutiram, ainda, quanto à pertinência da forma de pagamento do custo de instalação.

Estudante 2: Mas eu quero saber da parcela, por que ele vai pagar à vista? Ele vai pagar parcelado? Como é que ele vai pagar?

Estudante 1: mas isso não interessa

Estudante 2: claro que interessa, eu quero saber quanto que vai ficar... olha, ao longo do tempo. Ele não vai pagar só 104,31, ele vai pagar a parcela aqui também.

[...]

Estudante 1: eu acho que isso aqui não interessa pra gente, isso aqui e isso aqui interessa

Estudante 2: eu acho que interessa, por que faz parte do custo dele... então por que que tem essa informação?

(longa pausa)

Estudante 1: será que é só isso?

Estudante 2: não é só isso

Estudante 1: lógico que é, acho que se não tá especificado não interessa

Ao analisar os diálogos entre os Estudantes 1 e 2 e a função apresentada como resposta, é possível apontar que os Estudantes tiveram dificuldade em compreender o 14500 como um coeficiente linear de uma função afim, o que acabou levando o Grupo a construir uma função racional na tentativa de englobar uma ideia de parcelamento do custo de instalação. Trata-se de um erro específico associado ao contexto da situação-problema. Nesse sentido, não foi possível identificar um teorema em ação que pudesse ser associado ao aspecto algébrico dessa passagem.

Já o Grupo 3 apresentou como generalização para o valor pago considerando a instalação do sistema de geração, desenvolvendo a função $f(x) = 1252,80x + 14500$ sendo x o número de anos. Essa função foi determinada com base no valor pago ao ano, ao operar $f(12 * 1) = 12 * 104,4 = 1252,80$, mobilizando aqui o TAV1, para, então, somar a constante (14500) com a multiplicação da taxa de variação (1252,80) por (x), obtendo uma relação funcional f dada por $f(x) = ax + b$, com a , b e $x \in \mathbb{R}$. Para isso, mobilizou o TAV7.

O Grupo 2 não apresentou uma resposta que generalizasse os valores pagos mensalmente ou anualmente, todavia os estudantes realizaram a comparação solicitada pelo enunciado ao subtraírem os valores pagos com e sem o sistema de geração de energia, $292,81 - 104,31 = 188,50$, apresentando esse resultado como a “economia por mês tendo o sistema”. Essa operação é associada ao TAV5, ao considerar 292,81 como um estado inicial, -104,31 como uma transformação e o valor economizado de 188,50 como o estado final. Em seguida o Grupo 2 voltou a manifestar o TAF1 ao apresentar o valor economizado por ano, $188,50 * 12 = 2262,00$. Aqui, o Grupo 2 apresentou seu último registro quanto à situação-problema 2, que segue:

Figura 21 – Recorte 2 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 2

Dividindo 14500 ÷ 188,50 encontramos que levaria aproximadamente 77 meses para recuperar o investimento da instalação do sistema utilizando apenas a economia mensal, ou seja, levaria $\frac{77}{12}$ x 6 anos e 5 meses.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao dividir o custo de instalação do sistema, 14500, pelo valor designado pelo Grupo como economia por mês, 188,50, o grupo mobilizou o TAV2, uma vez que, considerando 14500 como uma $f(x)$, e 188,50 como uma taxa de variação (a), o grupo determinou um valor para x , operando, $x = \frac{f(x)}{a}$, com x e $a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. Ainda na Figura 21, há uma

segunda manifestação do TAV2, ao realizar a conversão do número de meses necessários para o equivalente em anos.

Assim como na situação-problema 1, aqui, o Grupo 2 realizou uma explicação acerca do resultado encontrado. Porém, diferente da resposta final apresentada para a situação-problema 1, que somente expunha os resultados obtidos, neste momento, há tanto uma explicação de quais operações foram realizadas, quanto uma atribuição de significado ao resultado, oriundo da interpretação do contexto presente no enunciado. Nesse sentido, o Grupo não apenas explicou como determinou os valores apresentados, como os descreveu, articulando informações de resultados obtidos anteriormente, de forma que essa passagem pode ser apontada como uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento, associada ao TAV2.

Essa comparação entre os valores pagos, com ou sem a instalação do sistema, também é realizada pelo Grupo 1, porém essa emerge em uma discussão entre os Estudantes sobre a pertinência ou não da forma de pagamento do custo de instalação do sistema. O excerto a seguir expõe o cálculo realizado pelo Grupo 1.

Estudante 1: vamos ter que pegar um tempo aqui como base, os 5 anos.

Estudante 2: os 5 anos ali é só porque fica de crédito. 188,50, 14500 dividido por 188,50 ele demoraria 77 meses para pagar, pagando o mesmo valor aqui

Estudante 1: dividido por quanto?

Estudante 2: 77 dividido por 12, ele demoraria 6 anos e meio quase para pagar

Estudante 1: dividiu em um ano?

Estudante 2: não, eu dividi isso aqui... ele paga isso, eu peguei esse menos esse, dá 188,50 e dividi isso por 188,50, eu calculei quantos meses ele precisaria pagar esse mesmo valor para quitar essa dívida aqui e ficar a mesma coisa, elas por elas, porque depois que ele terminar de pagar isso aqui ele vai pagar só isso daqui por mês... não entendi nada dessa questão.

Assim como a operação realizada pelo Grupo 2, primeiramente o grupo mobilizou o TAV5, ao operar $292,81 - 104,31 = 188,50$ e, em seguida, o TAV2, dividindo 14500 por 188,50. Porém, aqui, o Grupo 2 aparenta novamente ter dificuldade em compreender a forma de pagamento do custo de instalação, associando esse valor não ao tempo em que os custos com e sem a instalação do sistema seriam equivalentes, mas ao número de parcelas necessárias para quitar o investimento inicial. Ainda nesse mesmo excerto, pode ser apontada uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento pelo Estudante 2, ao descrever os procedimentos associados aos teoremas em ação verdadeiros, 2 e 5, porém a descrição quanto ao significado das operações realizadas carrega a incompreensão do

enunciado pelo Estudante citada anteriormente. Quando o Estudante 2 expressa que “eu calculei quantos meses ele precisaria pagar esse mesmo valor para quitar essa dívida aqui e ficar a mesma coisa, elas por elas”, ele aponta que aquele seria o tempo para que os dois cenários fossem equivalentes financeiramente, o que está adequado ante ao enunciado da situações-problema, porém ele realiza essa interpretação associada a um hipotético parcelamento, que não é descrito pelo enunciado.

O Grupo 3 realizou também a busca pelo momento que os valores pago com ou sem a instalação do sistema seriam equivalentes, porém utilizando uma estratégia diferente dos demais Grupos, o trecho a seguir expõe o diálogo relacionado à estratégia adotada.

Estudante 5: *Então, essas são as funções, agora a gente monta um sisteminha para achar onde elas se interceptam, que é onde tanto faz um ou outro, o consumo...*

Estudante 6: *a gente precisava ter mais um valor aqui pra gente montar esse sistema*

Estudante 5: *não, aqui a constante é zero ué.*

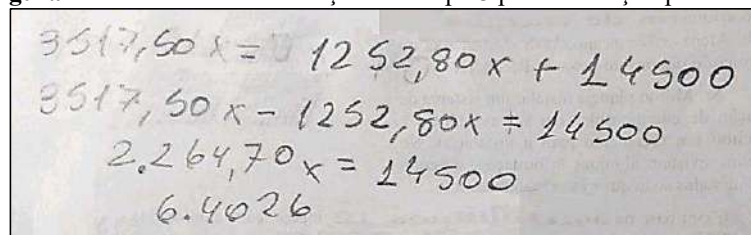
Estudante 6: *mas é só igualar as duas*

Estudante 5: *é se igualar as duas vai dar também*

Estudante 6: *coisas iguais e as mesmas coisas, também são iguais entre si*

No trecho apresentado, o Estudante 5 propõe que seja montado um sistema utilizando as duas funções determinadas anteriormente pelo Grupo. Trata-se de uma estratégia válida, ao considerar que a interpretação geométrica da solução de um sistema de equações lineares possível e determinado, corresponde ao encontro de duas retas em um plano cartesiano. Por outro lado, o Estudante 6 sugere que basta igualar as funções para determinar a intersecção entre elas. Dessa forma, o Grupo 3 chega a apresentar o cálculo disposto na Figura 22.

Figura 22 – Recorte 4 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2



The image shows a piece of paper with handwritten mathematical work. The equations are as follows:

$$3517,50x = 1252,80x + 14500$$
$$3517,50x - 1252,80x = 14500$$
$$2.264,70x = 14500$$
$$6.4026$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

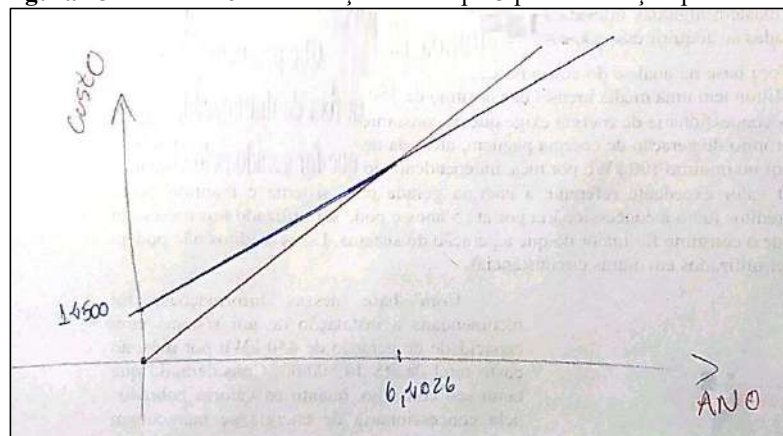
A estratégia apresentada pelo Grupo 3 de igualar duas funções para determinar o valor de x em que há seu encontro pode ser interpretada como um teorema em ação verdadeiro, descrito aqui pelo TAV10:

TAV10: Tem-se a intersecção de duas retas não coincidentes se e somente se, $f(x) = g(x)$, para algum valor de $x \in \mathbb{R}$.

Em seguida, o Grupo 3 manifestou o TAV1 para determinar o equivalente em meses ao resultado estabelecido pelo Grupo ao mobilizar o TAV10, numericamente, $x = 12 * 6,4 = 76,8$. Buscando aumentar a precisão do resultado, o Estudante 6 sugere que seja realizada uma nova proporcionalidade, considerando apenas a parte decimal do resultado, para que seja determinado o número de dias referente a essa parte, $x = 30 * 0,8 = 24$.

Por fim, os Grupos 1 e 3 apresentaram, ambos, representações gráficas para as generalizações determinadas para a situação-problema. A Figura 23 apresenta a construção gráfica do Grupo 3 com duas retas, associadas às funções descritas pelo Grupo como $f(x) = 3517,50x$, referente ao valor pago anualmente sem a instalação do sistema de geração e $f(x) = 1252,80x + 14500$, referente ao valor pago anualmente com a instalação do sistema de geração.

Figura 23 – Recorte 5 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 2



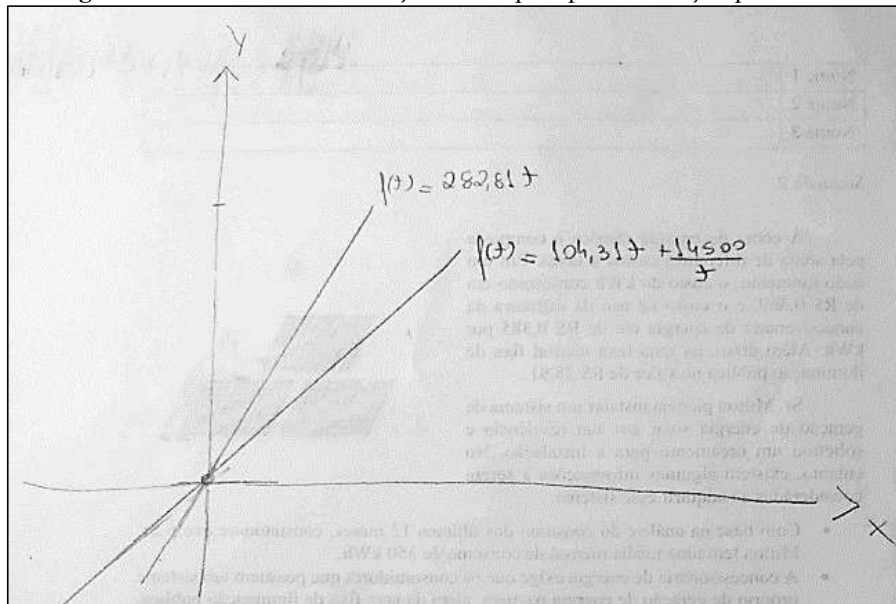
Fonte: Acervo da pesquisa.

Conforme descrito junto a situação-problema anterior, a representação gráfica pode ser indicada como uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento, esse apontamento é reforçado com base naquilo que Vergnaud (2017, p. 29) afirma em: “[...] a forma predicativa expressa, através das palavras e enunciados, a partir de uma linguagem natural e de outras formas simbólicas, como álgebra, gráficos e outros”. Nesse sentido, a construção gráfica realizada pelo Grupo 3 é, aqui, apontada como uma manifestação da forma predicativa do conhecimento.

Cabe ainda apontar para a nomenclatura adotada para ambas as funções, $f(x)$. Mesmo o Grupo tratando e descrevendo de forma distinta as funções, ao nomear a relação funcional, utilizam f para ambas, caracterizando uma manifestação do TAF2.

Já a construção gráfica apresentada pelo Grupo 1 carrega algumas particularidades. A Figura 24 apresenta a construção realizada pelo Grupo 1 com duas retas, associadas às funções descritas pelo Grupo como $f(t) = 282,81t$, referente ao valor pago mensalmente sem a instalação do sistema de geração e $f(t) = 104,31t + \frac{14500}{t}$, referente ao valor pago mensalmente com a instalação do sistema de geração.

Figura 24 – Recorte 3 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

Primeiramente, assim como o Grupo 2, o Grupo 1 também mobilizou o TAF2 ao nomear ambas as relações funcionais como f .

Quanto à função $f(t) = 282,81t$, que busca representar o valor pago sem que haja a instalação de um sistema de geração de energia, cabe apontar para o domínio representado. Durante a entrevista, quando questionados sobre os valores que t poderia assumir, o Estudante 1 afirmou que ele somente poderia assumir valores positivos, por se tratar do tempo, entretanto, ao representar graficamente valores para $x < 0$ de uma função cujo domínio seja definido para $x \geq 0$, o Grupo 1 voltou a mobilizar o TAF4. Isso reafirma a solidez desse teorema em ação falso junto aos Estudantes do Grupo 1.

A segunda função representada pelo Grupo 1, $f(t) = 104,31t + \frac{14500}{t}$, buscou representar o valor pago após a instalação do sistema de geração de energia. Embora se trate

de uma função racional, o grupo a representa graficamente como uma reta, conforme dito pelo Estudante 1 em: “essa aqui vai cortar em zero, porque o zero disso aqui é só.... é reta”. Ao analisar a construção realizada e a frase transcrita, é possível inferir que a reta apresentada pode corresponder somente ao primeiro elemento da função, $104,31t$, ao considerar $14500/t$ como zero. Durante a entrevista o Grupo, foi questionado quanto a essa construção.

Pesquisador: *vocês apresentaram um gráfico, com duas retas, vocês poderiam me explicar como vocês construíram essas retas? Esse gráfico?*

Estudante 2: *ah sim, é que ambas as funções... eu não lembro, você lembra se a função com placa ela tinha raiz zero?*

Estudante 1: *eu não lembro.*

Estudante 2: *eu lembro que uma tem valor da raiz zero, a que tem o valor constante, vezes o t, só ia zerar ali... mas na hora fazia todo sentido.*

Pesquisador: *certo, e vocês conseguem me falar o que o encontro dessas duas retas representa?*

Estudante 1: *essa é uma ótima pergunta... na verdade as duas estão saindo de zero, então elas saem as duas de zero, porque pode ser tempo nenhum, nenhum mês... na hora foi o que a gente pensou.*

Embora questionados a respeito da construção, as respostas apresentadas indicaram poucos indícios quanto ao raciocínio desenvolvido durante a construção, sendo que não foram encontrados outros elementos, na transcrição da implementação, na entrevista ou no protocolo apresentado, que ajudem a compreender o que levou o Grupo a apresentar essa construção gráfica.

Por fim, embora a representação gráfica não esteja isenta de erros, isso não a invalida como manifestação do conhecimento predicativo, uma vez que a forma predicativa do conhecimento pode agir como auxiliadora da forma operatória do conhecimento (Vergnaud, 2002). Todavia, há de ser considerado que “[...] a teoria é a forma predicativa do conhecimento por excelência, assim como o esquema é a forma operatória do conhecimento por excelência” (Vergnaud, 1996b, p. 290). Nesse sentido, torna-se necessário ponderar, nessa análise, se uma representação que carrega incoerências teóricas pode ser apontada como uma manifestação da forma predicativa do conhecimento. Vergnaud (2000, p. 9) aborda brevemente essa questão, ao afirmar que “só estamos em condições de expressar por meio de palavras uma parte dos conhecimentos que usamos na ação, e podemos até mesmo raciocinar formulando as coisas apenas de maneira falsa ou inconsistente”. Essa questão escapa ao alcance desse estudo, mas que não deve ser desconsiderada nessa análise.

Assim, para fins de análise, assume-se, aqui, que o Grupo 1, embora tenha apresentado uma manifestação da forma predicativa do conhecimento, entendido, nesse contexto, como a

construção gráfica, esta foi construída com base em um teorema em ação falso, TAF4, que possivelmente está associado a conhecimentos prévios desses Estudantes, no sentido de que toda função afim é representada por uma reta, ou seja, a representação gráfica de uma função afim compreende o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Esse registro possivelmente está associado à ideia de níveis de manifestação da forma predicativa do conhecimento (Régnier, 2014; Vergnaud, 1996a). Todavia, conforme descrito anteriormente, não está no escopo dessa pesquisa realizar um aprofundamento quanto à tais níveis.

A partir da análise das estratégias de resolução dos Grupos para a situação-problema 2, foram identificados os possíveis teoremas em ação manifestados pelos estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem a situação-problema proposta. O Quadro 11 apresenta uma síntese dos conhecimentos operatórios, lidos aqui como os teoremas em ação verdadeiros e falsos manifestados, acompanhados pelos indícios que de suas manifestações.

Quadro 11 – Teoremas em ação identificados na situação-problema 2

Indícios dos teoremas em ação	Modelação dos teoremas em ação (verdadeiros e falsos)	Recorrência
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$.	TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) = k * f(x)$, com k e $x \in \mathbb{R}$, sendo k a razão (um escalar).	G3 (3)
Ao dividir $f(x)$ pela taxa de variação (a) para determinar (x).	TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.	G1 (1) G2 (2)
Ao somar as partes (P) para determinar o todo (T).	TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G2 (1) G3 (2)
Ao realizar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F).	TAV5: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.	G1 (1) G2 (1)
Ao multiplicar a taxa de variação (a) por (x).	TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a * x$, com x e $a \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G3 (2)
Ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (a) por (x) para obter $f(x)$.	TAV7: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$, com a, b e $x \in \mathbb{R}$.	G3 (2)
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$ e somar a constante (c)	TAV8: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) + c = k * f(x) + c$, com k, c e $x \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).	G3 (1)
Ao multiplicar a razão (k) tanto por $f(x)$ quanto $g(x)$ e somar a constante (c).	TAV9: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) + g(k * x) + c = k * f(x) + k * g(x) + c$, com k, x e $c \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).	G1 (1) G2 (1)
Ao igualar duas funções, $f(x)$ e $g(x)$ para encontrar seu ponto de intercepto.	TAV10: Tem-se a intersecção de duas retas não coincidentes se e somente se, $f(x) = g(x)$, para algum valor de $x \in \mathbb{R}$.	G3 (1)

Ao atribuir uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	TAF1: Uma grandeza variável é indicada como fixa.	G1 (2) G2 (1)
Ao utilizar a mesma letra para nomear relações funcionais distintas em um mesmo contexto.	TAF2: Em um mesmo contexto, mais de uma função pode ser representada pela mesma letra.	G1 (1) G3 (1)
Ao representar graficamente valores para $x < 0$ de uma função cujo domínio seja definido somente para $x \geq 0$.	TAF4: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}$, sua representação gráfica é dada de tal forma que $x \in \mathbb{R}$.	G1 (1)
Ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (x) pela soma da razão (k) com a taxa de variação (x) para obter $f(x)$.	TAF5: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = (a + k) * x + b$, com k, b e $x \in \mathbb{R}$, sendo k um escalar.	G3 (1)

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Nos esquemas mobilizados pelos alunos, foram identificados nove teoremas em ação verdadeiros e três teoremas em ação falsos para a situação-problema 2. Foram identificados, ainda, ao menos quatro momentos em que existiram indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento, sendo eles: do Grupo 2 ao explicar o TAV2; do Estudante 2, ao explicar o TAV2 e TAV5; do Grupo 1 ao apresentar uma representação gráfica da solução; Grupo 3 ao apresentar uma representação gráfica da solução.

4.3 Análise e Discussão da Situação-problema 3

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles:

manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00

Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo



de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

Conforme descrito anteriormente, a situações-problema 3, em comparação às situações-problema 1 e 2, embora possua um número de etapas intermediárias superior, apresenta um menor detalhamento em suas resoluções, de forma que menos etapas foram evidenciadas nos protocolos dos Grupos. Assim, as análises contam com momentos em que foi necessário realizar inferências quanto às operações e às etapas de resolução desenvolvidas pelos Estudantes.

Quando confrontados com o enunciado da situação-problema 3, os três Grupos apontaram que essa situação-problema era semelhante à situação-problema 1, como mostra a afirmação do Estudante 5: “é, mesma coisa que a do sorvete”. Ademais, mesmo que a situação-problema 3 apresentasse um número de etapas intermediárias superior, os Estudantes a consideraram mais simples que a situação-problema 1, tanto durante a implementação quanto durante os questionamentos nas entrevistas. Por exemplo, os Estudantes 3 e 6 colocaram a situação-problema 3 como mais simples que a situação-problema 1, conforme fala do Estudante 3, “como essa a gente assemelhou muito a primeira, ela foi mais fácil”. Essa interpretação quanto à dificuldade das situações, direciona para a ideia de que esses estudantes não possuíam esquemas estruturados previamente para resolverem situações-problemas semelhantes àquelas propostas para essa pesquisa, mesmo com 4 dos 7 Estudantes indicando que já haviam resolvido situações semelhantes às propostas. Isso pode também ser evidenciado pelo excerto a seguir.

Estudante 2: 175, 520, mais 55, essas vacas custam caro, vou ser fazendeira mais não. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade. R\$ 900,00 mais 3000, mais a mão de obra, então o custo fixo, 3900, mais 5200, mais 2500, 11600. Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; e são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo. Então cada vaca produz 2 kg. E 720 gramas, 36 reais. Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. Quantas vacas ele tem? Não sei. Então, 2 kg de queijo, dividido por 720 gramas, então dá para produzir 2 queijos, virgula 7. Cada vaca, por dia... é por dia? É por dia... 100 reais. Se ele tirar leite todo dia, então em 1 mês, elas produzem R\$ 3.000,00. Então o lucro por vaca... menos 750, dá 2250 por vaca, todo mês, de lucro.

Estudante 1: hum?

Estudante 2: cada vaca dá um lucro de 2250 por mês, já tirando o custo dela.

Estudante 1: cada vaca?

No trecho da transcrição, o Estudante 2 realiza etapas de resolução concomitantemente à leitura do enunciado, algo que não ocorreu nas situações-problemas anteriores. Durante a leitura do enunciado, o Estudante 2 apresentou 6 falas que são associadas a teoremas em ação verdadeiros. Essas mobilizações de forma mais direta, ocorridas somente na situação-problema 3, podem ser um indicativo de que, em um primeiro momento, a pesquisa apresentou situações tidas como novas para eles, porém, ao longo da implementação, esses Estudantes possivelmente realizaram associações que os ajudaram a resolver as situações subsequentes de forma mais assertiva.

Isso também é reforçado em uma discussão inicial presente nos diálogos do Grupo 3.

Estudante 5: ela produz isso aqui por dia, não é? Olha, presta atenção, qual é o preço do queijo? R\$ 36,00, então por dia ela dá isso aqui de lucro. Lembra do sorvete que a gente pegou o preço que era vendido e subtraiu da produção? $750 \times \dots$ só que teria que mudar as variáveis, aqui seria menos 750, opa... isso mesmo, menos 11000, aí a nossa função estaria certinha para lucro, sacou a ideia? Então cada vaca dá 100 reais de dinheiro, não é lucro, aí a gente tem que ver por dia, só que esse custo aqui é dado em que? Ah... então por mês elas dão R\$ 3000,00. R\$ 3000,00 cada vaca, então vai ser 3000 menos 750, menos 11 e 60, vai ser assim a função. Pode fazer aí...

Estudante 6: considerando o potencial de lucro ou prejuízo. Vamos lá...

Estudante 5: coloca parênteses aqui, porque esse aqui é mês, tá ligado.

Estudante 7: pera aí, deixa eu ver como vocês pensaram

Estudante 5: olha Estudante 7...

Estudante 7: a função vai ser 22 vezes x né? Porque 22 é referente a quantidade de leite que cada vaca dá, produz.

Estudante 5: não...

Estudante 7: cada vaca produz 22 litros diariamente

Estudante 5: não, olha, ela produz 2 quilos de leite, quantas gramas pesa cada peça de leite que ela vende?

Estudante 7: 720

Estudante 5: então 2 quilos não é 2000 gramas? dividido por 720 gramas, por dia ela produz isso aqui de leite, só que quanto custa cada peça de leite? De queijo... ela produz isso aqui de queijo

Estudante 7: 36

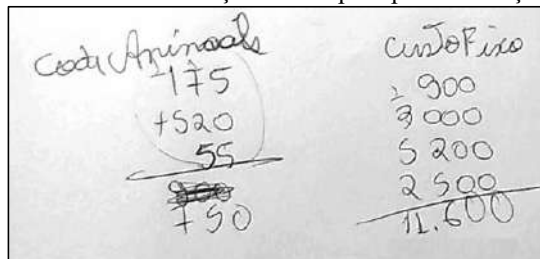
Estudante 5: então se a gente multiplica por 36 reais, que é o preço de cada peça... por dia, cada vaca gera R\$ 100,00 de receita. No mês, que é o mês comercial, ela geraria R\$ 3000,00 cada uma de receita. Aquela primeira função que a gente fez é o custo das vacas mensalmente, entendeu? Daí o que a gente faz, a gente pega o custo mensal e subtrai e subtrai do tanto que ela gera de receita.

Em dois momentos, o Estudante 5 apresenta as etapas necessárias que o grupo deveria atender para a resolução da situação-problema. Assim como o Estudante 2, do Grupo 1, o Estudante 5 na primeira frase da transcrição apresenta ao menos 4 mobilizações de teoremas

em ação verdadeiros. Além disso, na última frase da transcrição, ao argumentar com os demais Estudantes o Estudante 5 atribui significado aos resultados, explicando os procedimentos que podem ser associados aos teoremas em ação verdadeiros 1 e 5, indicando uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento.

Acerca da análise das resoluções, o primeiro dado apresentado pelo enunciado corresponde a alguns custos por animal e custos de manutenção da propriedade. A depender do caminho de resolução adotado pelos grupos, algumas operações poderiam ter sido realizadas, todavia, os três Grupos iniciaram a resolução da situação-problema a partir da soma dos custos por animal e dos custos fixos mensais da propriedade, conforme a Figura 25.

Figura 25 – Recorte 1 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao realizarem essas somas, assumindo aqui uma relação de parte todo, os grupos mobilizaram o TAV4.

Neste momento, os Grupo 1 e 3 buscaram apresentar uma generalização para os custos determinados pela etapa anterior. Para tal, ambos consideraram o custo por animal, 750, em função do número de animais, mais os custos fixos, adotado como o coeficiente linear de uma função afim. Dessa forma, os grupos apresentaram uma função descrita como $f(v) = 750v + 11600$ pelo Grupo 1 e $g(x) = 750x + 11600$ pelo Grupo 3. Aqui, tanto o Grupo 1 quanto o Grupo 3 mobilizaram o teorema em ação verdadeiro 7, TAV7, ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (a) por (x) para obter $f(x)$.

Já o Grupo 2 passou a buscar pelo volume mensal de leite, operando $22 * 30 = 660$, que pode ser lido como a produção diária de leite por vaca, multiplicado pelo período de um mês, o que resultou na produção mensal de leite de cada animal. Essa operação pode ser lida algebricamente como uma relação de proporcionalidade, em que f representa a relação e k um escalar, tal que $f(k * x) = k * f(x)$ ou $k * f(1)$, indicando assim a mobilização do TAV1.

Aqui, as resoluções dos três grupos convergem, de forma que os três realizam implicitamente a operação $\frac{1}{x} = \frac{11}{22}$ ou apenas, $22 \div 11 = 2$. Considerando tanto as transcrições quanto os protocolos apresentados, nenhum dos grupos especificam a operação realizada,

evidenciando somente o resultado. Dessa forma, foi considerado que aqui os três grupos mobilizaram o TAV3, ao dividirem uma $f(x)$ por (x) , para determinarem uma taxa de variação (a), ou ainda, $a = \frac{f(x)}{x}$ com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.

Uma vez mais a resolução do Grupo 2 se difere dos outros dois Grupos. O Grupo 2 operou $2 * 30 = 60$, que pode ser lido como, se um animal produz 2 quilos de queijo por dia, ao multiplicar essa produção por 30 dias, tem-se que um animal fornece leite suficiente para que se produzam 60 quilos de queijo por mês. Assim como no cálculo dos litros de leite produzidos mensalmente, novamente o grupo mobiliza o TAV1.

Nesse momento, os três grupos mobilizaram o TAV3 novamente, ao considerarem uma relação de proporcionalidade utilizando o preço de uma peça de queijo (R\$ 36,00) e seu peso (720 gramas) para determinarem o preço por quilo (Grupo 2) ou o preço a para 2 quilos (Grupos 1 e 3). Para exemplificar essa passagem, segue a operação realizada pelo Grupo 2, disposta na Figura 26.

Figura 26 – Recorte 1 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 3

The image shows a handwritten mathematical solution. On the left, there is a proportion: $\frac{720 \text{ g}}{1000} = \frac{36 \text{ R\$}}{x}$. To the right of this, the text reads: "x = 50 reais por Kg de queijo, 100 reais por 2kg de queijo (porção diária produzida)".

Fonte: Acervo da pesquisa.

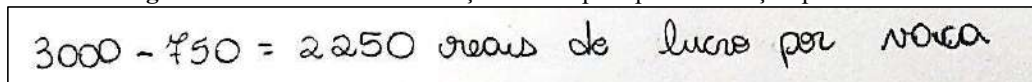
Considerando que os Grupos 1 e 3 realizam essa proporcionalidade tendo em vista 2 quilos ou 2000 gramas, há implícita nessa mobilização do TAV3, uma segunda proporcionalidade, $\frac{1000}{2000} = \frac{1}{x}$, ao converterem quilos para gramas, configurando uma nova mobilização do TAV3. Já o Grupo 2, também apresentou um segundo teorema em ação verdadeiro associado à essa etapa, ao operarem $50 * 2 = 100$, para determinar o valor para a “porção diária produzida”. Considerando que a operação realizada não foi apresentada pelo Grupo 2, possivelmente o grupo manifestou o TAV1 caso tenha operado $2 * 50 = 100$, genericamente descrito como $k * f(1)$ ou o grupo pode ainda ter realizado uma segunda mobilização do TAV3, ao relacionarem a mesma proporcionalidade que os Grupo 1 e 3, $\frac{720}{2000} = \frac{36}{x}$, não sendo possível determinar, com base nos dados disponíveis, qual caminho foi adotado.

Nesse momento, os três Grupos apontaram para a receita gerada mensalmente, porém as três resoluções apresentaram variações. O Grupo 1 mobilizou o TAV1, ao multiplicar 30 (dias), pelo preço para 2 quilos de queijo, $30 * 100 = 3000$, um processo semelhante ao

adotado pelo Grupo 2, que multiplicou o total de quilos produzidos mensalmente, 60, pelo preço do quilo do queijo, $60 * 50 = 3000$, também mobilizando o TAV1. Já o Grupo 3 operou, também, de forma semelhante ao Grupo 1, inicialmente $30 * 100 = 3000$, porém associado à mobilização do TAV1, o Grupo 3 colocou a receita gerada por animal, 3000, em função do número de animais, x , estabelecendo uma relação de proporcionalidade, tal que f determina a relação, e a a taxa, tal que $f(x) = a \times x$, com x e $a \in \mathbb{R}$, assim mobilizando o TAV6.

Aqui, os Grupos 1 e 2, seguiram com a resolução realizando a subtração entre receita gerada por animal e os custos mensais, $3000-750=2250$, o que resultou naquilo que tanto o Grupo 1 quanto o Grupo 2 identificam como sendo o “lucro por vaca”, conforme a Figura 27.

Figura 27 – Recorte 2 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 3



3000 - 750 = 2250 reais de lucro por vaca

Fonte: Acervo da pesquisa.

Analisando essa etapa intermediária a luz da Teoria dos Campos Conceituais, ao realizar a subtração descrita, é possível interpretar que ocorreu uma transformação do estado inicial para encontrar o estado final, pois, dentro do contexto do enunciado, a receita foi transformada em lucro ao deduzir o custo, desta forma caracterizando uma mobilização do TAV5 pelos Grupos 1 e 2.

O Grupo 1, após ter determinado o valor de R\$ 2250,00, referente ao lucro por animal, colocou o lucro por animal em função do número de animais, considerando ainda como coeficiente linear da função o custo fixo da propriedade. Dessa forma, o Grupo apresentou como função associada ao lucro mensal da propriedade em função do número de animais, $f(v) = 2250v - 11600$. Assim como na função que representa os custos da propriedade, novamente aqui o Grupo 1 mobiliza o teorema em ação verdadeiro 7, TAV7, ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (a) por (x) para obter $f(x)$.

Já o Grupo 3, considerando que nas etapas anteriores apresentou duas funções, uma associada ao custo da propriedade, $g(x) = 750x - 11600$, e outra à receita, $g(x) = 3000x$, ambas em função do número de animais, mobilizaram também o TAV5, porém em um contexto distinto dos outros dois Grupos. Cabe apontar para a manifestação do TAF2 pelo Grupo 3, ao nomear funções distintas, ambas como $g(x)$. O excerto a seguir apresenta parte das discussões realizadas quanto à etapa intermediária em que ambas as funções são igualadas.

Estudante 5: Essa é a produção diária, mensalmente R\$ 3000,00. Coloca dia, só colocar aqui na frente.

Estudante 6: vou colocar aqui, olha, g... eu vou colocar essa aqui sendo g de x também, você vai entender. Então aqui vai ser 3000 vezes x, que x é o número de vacas.

Estudante 5: não daí você está viajando, não precisa fazer isso. A função que a gente vai usar, que vai estabelecer o lucro ou prejuízo, vai ser, 3000...

Estudante 6: mas Estudante 5, é isso.

Estudante 5: é 3000, mas você precisa tirar o custo, é 3000 menos 750, por vaca, menos 11600

Estudante 6: mas quando a gente for montar sistema...

Estudante 5: não precisa montar sistema.

Estudante 6: montar sistema é modo de falar

Estudante 5: não precisa, se você já monta assim, onde você achar a raiz é o que vai mudar as coisas... não, não faz sistema

Estudante 6: eu não estou montando sistema

Estudante 5: você está igualando as funções

[...]

Estudante 7: eu acho que eu entendi o que o Estudante 6 quis dizer

Estudante 5: 3000 o lucro que elas dão, cada vaca, menos R\$ 750,00, que é o custo médio de cada vaca, então cada vaca, vai dar de receita R\$ 2250,00 ao mês, menos o custo dos outros aparelhos que não tem nada a ver com as vacas, que tá dando 11600. Essa é a função do... que representa o lucro ou não, se você pega 2250 x, menos 11600, iguala a zero e isola isso aqui, você acha o número de vacas que eles precisam ter para ter lucro mensalmente.

Estudante 6: é o que eu ia achar aqui.

Quanto ao trecho apresentado, cabe aqui a análise de três pontos. Primeiro, o trecho apresentado resulta na operação apresentada na Figura 28.

Figura 28 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 3

The image shows a handwritten mathematical derivation on a piece of paper. At the top, it says $g(x) = 3000x$ with a note "onde x é número de vacas". Below this, the equation $+750x + 11600 = 3000x$ is written. The next line shows the result of subtracting $750x$ from both sides: $g(x) = 2250x - 11600$. To the right of this, the equation $2250x = 11600$ is written and circled.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 28, o Grupo iguala as funções determinadas para o custo e a receita e opera algebricamente para determinar uma terceira função. Essa etapa pode ser vista também como uma mobilização do TAV5, ao analisar a operação $3000x - 750x = 2250x$. Nesse sentido o Grupo 3 chega a mesma função apresentada pelos demais, $g(x) = 2250x - 11600$, porém apresentando um caminho distinto, o que implica nos mesmos teoremas em ação verdadeiros mobilizados pelos demais Grupos, TAV5 e TAV7.

O segundo ponto a ser tratado sobre a transcrição é apresentação outro teorema em ação verdadeiro, quando o Estudante 5 determina que “não precisa, se você já monta assim, onde você achar a raiz é o que vai mudar as coisas”. A frase do Estudante, embora posta em linguagem coloquial, carrega um conhecimento predicativo que está associado ao TAV10, ao assumir que, igualando as funções, a raiz da função resultante determina o ponto em que a receita irá superar o custo. O Estudante 5 atribuiu significado aos resultados, explicando os procedimentos que podem ser associados aos teoremas em ação verdadeiros 1 e 5, indicando uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento.

Ao final da última frase do Estudante 5 do trecho apresentado, há ainda uma descrição do procedimento adotado pelo Grupo para determinar a raiz da função que descreve o lucro por animais. A operação descrita pelo Estudante pode ser associada à mobilização do TAV2, ao dividir $f(x)$ pela taxa de variação (a) para determinar (x). E, por fim, é possível apontar para uma manifestação da forma predicativa do conhecimento nessa mesma fala do Estudante 5. A fala descreve e contextualiza alguns procedimentos realizados pelo Grupo, indicando uma manifestação da forma predicativa do conhecimento associada aos teoremas em ação verdadeiros, 2, 5, 7 e 10.

Aqui, os três Grupos determinaram o número de animais que representaria a raiz da função $f(x) = 2250x - 11600$. Nas duas situações-problemas anteriores, a etapa em que os Estudantes determinaram a raiz da função foi associada ao TAF1, salvo para os casos em que em que o valor foi utilizado como subsídio para a construção gráfica, sendo esses casos interpretados como a mobilização do TAV2. Todavia, a análise das operações semelhantes a essa deve observar também a interpretação dada pelos estudantes quanto ao resultado, uma vez que o TAF1 está associado apenas à interpretação dada e não à operação realizada, sendo a operação relacionada, nesses casos, ao TAV2.

Apontadas essas questões, os três grupos determinaram o número de animais necessários para que os custos fossem equivalentes à receita, fazendo-o por meio da mobilização do TAV2, todavia a maneira como o TAV2 é mobilizado e a interpretação desse procedimento por parte dos Grupos se diferem. O Grupo 2 não chegou a apresentar uma resposta que representasse uma generalização para os custos, receita ou lucro, porém o Grupo apresentou, em sua resposta, elementos e ideias-base que podem ser associadas ao conceito de função. A Figura 29 apresenta a resposta final apontada pelo Grupo para a situação-problema 3.

Figura 29 – Recorte 3 da resolução do Grupo 2 para a situação-problema 3

$11600 : 2250 = \frac{232}{45} \approx 5,156$

Ou seja, ele precisa de no mínimo 6 vacas para não ter prejuízo e pagar todos os lucros e já dotem

$13500 - 11600 = 1900$ reais de lucro com isso.

Mais de 6 vacas gera 2250 reais de lucro por vaca!

Fonte: Acervo da pesquisa.

O Grupo realizou a operação $11600/2250 = 5,156$, a fim de indicar o número mínimo de animais para que não houvesse prejuízo, esse valor foi arredondado para 6, ao considerarem que o contexto da situação-problema previa a resposta dentro do domínio dos números naturais. Conforme descrito, essa operação é associada ao TAV2, uma vez que a operação realizada pode ser lida genericamente como uma relação de proporcionalidade, tal que $x = \frac{f(x)}{a}$, com x e $a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. Já ao analisar a interpretação dada pelo Grupo para essa operação, ao serem questionados a respeito de qual seria a resposta final para a situação-problema, o Estudante 3 afirmou o seguinte: “no mínimo 6 vacas para não ter prejuízo e a partir disso, R\$ 2250,00 de lucro por cada vaca”.

A resposta dada pode ser observada em duas partes, na primeira o Estudante 3 afirma que a resposta final são 6 vacas, configurando uma interpretação que pode ser associada ao TAF1; na sequência ele afirma que, a partir daquele ponto, há um lucro de R\$ 2250,00, uma afirmação semelhante àquela presente na Figura 29. A fala do Estudante 3 e o registro da Figura 29 remetem ambos para a ideia-base da generalização, que, embora não tenha sido formalizada ou registrada no protocolo de resolução do Grupo, foi expressa verbalmente, indicando, assim, estar presente junto a esses estudantes.

Ainda na Figura 29, há outros dois teoremas em ação verdadeiros mobilizados pelo Grupo ao realizarem a operação $13500 - 11600 = 1900$. A operação descrita representa uma mobilização do TAV5, partindo da interpretação de que foi subtraído da receita o custo, transformando-a no lucro, ou ainda, ao realizar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F). Já o segundo teorema em ação presente junto a essa operação trata-se do TAV1, quando o Grupo realiza $6 * 2250 = 13500$, operação que não foi

evidenciada no protocolo entregue, mas que caracteriza uma etapa intermediária necessária para a resolução apresentada.

Por fim, bem como na situação-problema 2, a Figura 29 apresenta uma explicação do Grupo 2 acerca dos resultados encontrados, assim como há uma atribuição de significado aos resultados, oriundas da interpretação do contexto presente no enunciado. Nesse sentido, o Grupo não apenas explicou a forma que determinou os valores apresentados, como os descreveu, articulando informações de resultados obtidos anteriormente, de modo que essa passagem pode ser apontada como uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento, associada aos teoremas em ação verdadeiros 1, 2 e 5.

Já o Grupo 3, conforme descrito anteriormente, igualou as funções de custo e receita, determinando a função de lucro, $g(x) = 2250x - 11600$. Para determinar a quantidade mínima de animais, o Grupo igualou essa função a 0, $2250x - 11600 = 0$, para então mobilizar o TAV2 ao operar, $x = \frac{11600}{2250}$. Assim como o Grupo 2, o Grupo 3 após obter o resultado de 5,15 considerou o mínimo de 6 vacas, segundo o Estudante 5: “a gente arredondou pra cima, porque se arredonda-se para baixo ele teria prejuízo no mês”. Os Estudantes do Grupo 3 foram questionados sobre a resposta final deles para a situação-problema. O Estudante 5 afirma: “ah a resposta final da parte matemática é 6 vacas, que vem da função”, essa afirmação vai ao encontro do que o Estudante 6 afirma no seguinte excerto da entrevista:

Pesquisador: e agora uma última questão para finalizarmos, nas três situações vocês buscaram por um valor em que não havia nem lucro, nem prejuízo, por que vocês buscaram por esses valores?

Estudante 5: nessa questão aqui?

Pesquisador: nas três

Estudante 6: é que a gente precisa obter a raiz da função, ou seja, qual é aquele ponto que marca o crescimento ou decréscimo da função. Para saber quanto em média ele teria que vender de sorvete, para que ele se mante-se, quanto que ele teria que ter de vacas, produzindo, considerando o quanto uma vaca produz.

Ambos os Estudantes direcionam suas respostas no sentido de que a função foi obtida como objetivo meio, sendo o objetivo fim a obtenção da raiz dessa função. Essa questão novamente remete à resistência dos estudantes para trabalharem com generalizações tratada por Tinoco (2011) e, nesse caso específico, em aceitar que uma generalização, aqui representada por uma função afim, também pode caracterizar a resposta para uma situação matemática. Tal dificuldade coloca indícios de que a aprendizagem relacionada à

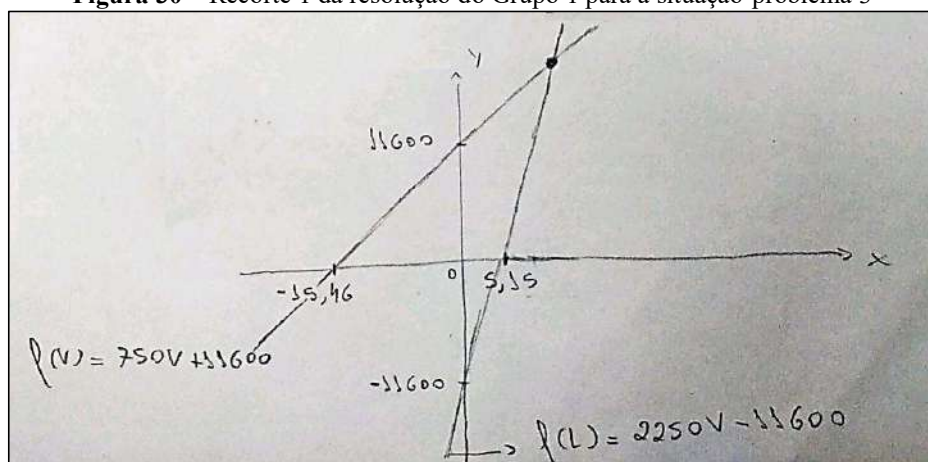
generalização não foi eficaz junto a esses estudantes, futuros professores de matemática, mesmo ao se considerar o contato próximo vivenciado por eles nos anos recentes de suas escolarizações, durante o curso de licenciatura. Nesse sentido, caberia um estudo dedicado especificamente a compreender tais lacunas na aprendizagem da ideia de generalização, sendo isso uma possibilidade para pesquisas futuras.

Isso posto, a interpretação dada pelos Estudantes para o resultado numérico obtido, 5,15, pode ser interpretado como uma manifestação do TAF1.

Por fim, o Grupo 1, assim como os demais Grupos, apresenta a informação de que “ele precisa de 6 vacas para não ter prejuízo”. Porém, analisando o protocolo, a transcrição da implementação e as entrevistas, não foi possível identificar se o Grupo 1 chega a esse resultado igualando a função obtida à zero como o Grupo 3, se ele utiliza os valores como o Grupo 2 ou se um terceiro caminho foi adotado. Essa passagem é vista sob o ponto de vista dessa análise como uma provável mobilização do TAV2.

Após a abordagem da representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo prevista pelo enunciado, os Grupos 1 e 3 passaram a realizar a representação visual dos resultados obtidos. Bem como nas duas situações-problema anteriores, ambos os Grupos, como meio para representar visualmente o potencial de lucro ou prejuízo, realizaram a representação gráfica da função obtida. A Figura 30 apresenta o gráfico construído pelo Grupo 1, nele estão dispostas duas retas associadas às funções descritas pelo Grupo como $f(v) = 750v + 11600$, referente ao custo e $f(l) = 2250v - 11600$, referente ao lucro.

Figura 30 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

O primeiro ponto a ser abordado compreende a manifestação do TAF2 pelo Grupo 1, ao nomear ambas as funções como f . Já quanto às variáveis presentes, a função custo é

apresentada como $f(x)$ e a função lucro como de $f(l)$, assumindo variáveis distintas, porém, durante a entrevista, os Estudantes do Grupo 1 apontaram para isso, indicando que o correto seriam ambas serem apresentadas como $f(v)$. Embora essa afirmação dos Estudantes reforce o TAF2 aqui presente, o erro na nomenclatura das variáveis, v e l , foi tomado com um erro pontual. O Grupo também identificou o eixo das abscissas como x , mesmo tendo adotado v como variável, esse erro se repetiu também na situação-problema 1, porém não ocorreu na situação-problema 2, não sendo possível caracterizá-lo como um teorema em ação falso, mas ressalta o quão forte é a ideia de que o eixo horizontal é representado por x e o eixo vertical é representado por y .

Após a construção do Gráfico, o Estudante 2 afirmou o seguinte.

Estudante 2: esse é o custo que ele tem, e agora do lucro, coloca aí, f de l , vai ser 2250, vezes a quantidade de vaca, mais... menos, menos, menos, 11600. É isso, é igual a outra né?

Estudante 1: tudo de função afim... o gráfico aqui...

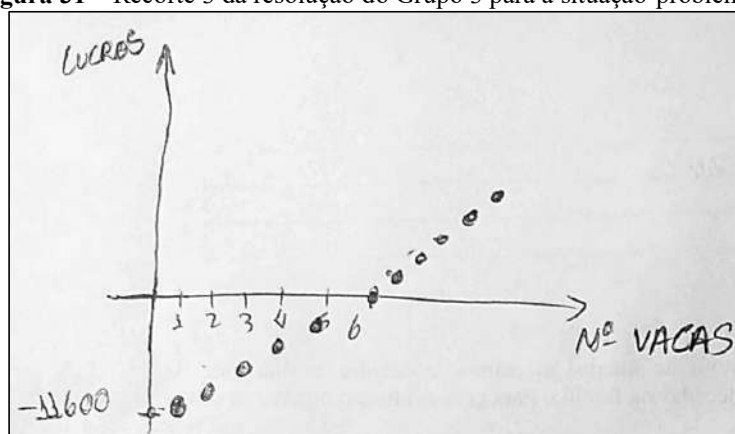
Estudante 2: porque se eu tenho 750 por vacas, então 10 vacas, eu vou ter, um custo de 7500 por vaca, mais os 11600. 7500 mais 11600, se tiver 10 vacas eu vou ter um custo de 19100, mas com essas mesmas 10 vacas, eu tenho um lucro de 10900... tá bom... acho que eu quero ter vaquinha sim... vamos entregar?

Nesse momento, o Estudante 2 está associando uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer, de forma a caracterizar uma mobilização do TAF1, já que uma grandeza variável é indicada como fixa.

Ao representar ambas as funções como retas, o Grupo acabou manifestando o TAF3, pois uma função definida para o domínio dos números naturais foi representada por uma reta. Ainda quanto ao domínio, quando indagados sobre os valores que v poderia assumir, o Estudante 1 afirmou “valores inteiros, positivos” e o Estudante 2 complementou dizendo que “não dá pra ter meia vaca né?”. Porém, ao representar graficamente ambas as funções, o Grupo assumiu valores para $v < 0$, mesmo tendo assumido verbalmente como domínio da função $v \geq 0$, o que caracteriza o TAF4.

Já o Grupo 3 apresentou a seguinte representação para a função determinada pelo Grupo para expressar o potencial de lucro por animal, $g(x) = 2250x - 11600$, conforme a Figura 31.

Figura 31 – Recorte 3 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

A apresentação de um gráfico como meio para expressar a função obtida, de forma a articular propriedades matemáticas e outros conhecimentos que dão suporte para essa representação, pode ser classificada como uma expressão do conhecimento predicativo tanto do Grupo 3, quanto do Grupo 1, cujo gráfico foi apresentado há pouco (Figura 30).

Partindo da análise das estratégias de resolução dos Grupos para a situação-problema 3, foram identificados os possíveis teoremas em ação manifestados pelos estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem a situação-problema proposta. O Quadro 12 apresenta uma síntese dos teoremas em ação verdadeiros e falsos manifestados, acompanhados pelos indícios de suas manifestações.

Quadro 12 – Teoremas em ação identificados na situação-problema 3

Indícios dos teoremas em ação	Modelação dos teoremas em ação (verdadeiros e falsos)	Recorrência
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$.	TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) = k * f(x)$, com k e $x \in \mathbb{R}$, sendo k a razão (um escalar).	G1 (1) G2 (4) G3 (1)
Ao dividir $f(x)$ pela taxa de variação (a) para determinar (x).	TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.	G1 (2) G2 (1) G3 (3)
Ao dividir $f(x)$ por (x) para determinar a taxa de variação (a).	TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.	G1 (3) G2 (2) G3 (3)
Ao somar as partes (P) para determinar o todo (T).	TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.	G1 (1) G2 (1) G3 (1)
Ao realizar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F).	TAV5: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.	G1 (1) G2 (2) G3 (2)
Ao multiplicar a taxa de variação (a) por (x).	TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a * x$, com x e $a \in \mathbb{R}$.	G3 (1)

Ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (a) por (x) para obter $f(x)$.	TAV7: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$, com a, b e $x \in \mathbb{R}$.	G1 (2) G3 (1)
Ao igualar duas funções, $f(x)$ e $g(x)$ para encontrar seu ponto de intercepto.	TAV10: Tem-se a intersecção de duas retas não coincidentes se e somente se, $f(x) = g(x)$, para algum valor de $x \in \mathbb{R}$.	G3 (1)
Ao atribuir uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	TAF1: Uma grandeza variável é indicada como fixa.	G1 (1) G2 (1) G3 (1)
Ao utilizar a mesma letra para nomear relações funcionais distintas em um mesmo contexto.	TAF2: Em um mesmo contexto, mais de uma função pode ser representada pela mesma letra.	G1 (1) G3 (1)
Ao representar uma função de domínio discreto por meio de uma reta.	TAF3: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e x pertencente a um domínio discreto, sua representação gráfica é dada por uma reta.	G1 (1)
Ao representar graficamente valores para $x < 0$ de uma função cujo domínio seja definido somente para $x \geq 0$.	TAF4: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}$, sua representação gráfica é dada de tal forma que $x \in \mathbb{R}$.	G1 (1)

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Nos esquemas mobilizados pelos alunos, foram identificados oito teoremas em ação verdadeiros e quatro teoremas em ação falsos relacionados à situação-problema 3. Foram identificados, ainda, ao menos sete momentos em que existiram indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento, sendo eles: dois momentos do Estudante 5 ao explicar o TAV1 e o TAV5; do Estudante 5 ao explicar o TAV10; do Estudante 5 ao explicar o TAV2, TAV5, TAV7 e TAV10; do Grupo 2 ao explicar o TAV1, TAV 2 e TAV5; do Grupo 1 ao apresentar uma representação gráfica da solução; Grupo 3 ao apresentar uma representação gráfica da solução.

4.4 Análise e Discussão dos Protocolos como Manifestações da Forma Predicativa do Conhecimento

É foco, nesta seção, a discussão quanto a própria resolução apresentada pelos estudantes como uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento. Manifestações da forma predicativa do conhecimento não necessariamente ocorrem apenas em língua natural, estas manifestações podem se desenvolver também por meio da linguagem simbólica, expressos como fórmulas, cálculos, gráficos tabelas, diagramas e teoremas matemáticos (Vergnaud, 2004, 2017; Régnier, 2009).

Ao considerar ainda que o conhecimento operatório é, em parte, implícito, as

operações registradas nos protocolos dos Estudantes não necessariamente correspondem unicamente aos conhecimentos operatórios, pode-se subternder que os registros carregam consigo uma segunda forma do conhecimento. Isto posto, o apontamento dos registros apresentados pelos estudantes nos protocolos como manifestações da forma predicativa do conhecimento recai, à primeira vista, sobre a intencionalidade com que eles foram realizados. Para exemplificar isso, são apresentados dois recortes, nas Figura 32 e 33.

Figura 32 – Recorte 2 da resolução do Grupo 3 para a situação-problema 1

Handwritten calculation showing a list of items and their costs, followed by a sum and a profit result:

$$\begin{array}{r}
 320 \\
 - 20 \rightarrow \text{casoquin} \\
 10 \rightarrow \text{açúcar} \\
 30 \rightarrow \text{leite} \\
 25 \rightarrow \text{insomol} \\
 \hline
 R\$ 235 \text{ Lucro}
 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 32 apresenta um recorte da resolução do Grupo 3 em que os Estudantes realizaram a subtração dos custos de cada ingrediente para obterem o lucro por lote. Aqui, é possível considerar que o Grupo, ao apresentar os valores acompanhados de seus significados, visou, além de organizar as operações, comunicar ao leitor o que está sendo realizado, podendo esse registro ser caracterizado tanto uma manifestação explícita de um conhecimento operatório (TAV5), quanto uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento. Esse detalhamento, acrescido da interpretação de que a situação-problema não indicou a necessidade de apresentação de cálculos, somente do potencial de lucro ou prejuízo, aqui compreendida como uma função afim, abre a possibilidade de que os protocolos apresentados pelos estudantes componham por si manifestações da forma predicativa do conhecimento, a excluir-se algumas operações pontuais, como a apresentada pela Figura 33.

Figura 33 – Recorte 1 da resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1

Handwritten addition of fractions:

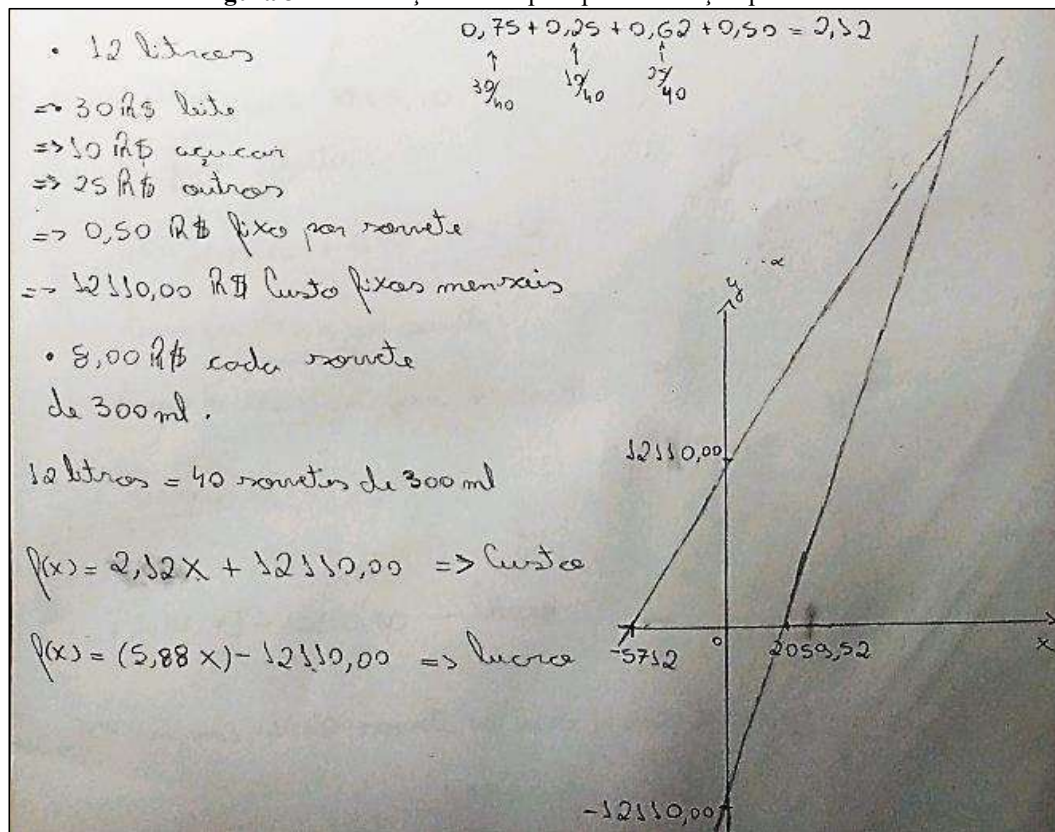
$$\begin{array}{r}
 0,75 + 0,25 + 0,62 + 0,50 = 2,12 \\
 \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 \frac{30}{40} \quad \frac{19}{40} \quad \frac{25}{40}
 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 33 apresenta uma operação realizada pelo Grupo 1, para obterem a taxa de uma das funções indicada como solução para a situação-problema 1. Conforme a operação, é possível inferir que o registro está apresentado no protocolo tão somente como uma organização do esquema mobilizado pelos estudantes durante a resolução e não visa comunicá-lo, uma vez que, sem que haja uma contextualização dessa etapa, para o leitor, a operação não comunica um significado específico.

Todavia, a questão a ser ponderada não se limita a operações pontuais ou recortes dos protocolos, mas à resolução apresentada como um todo. Retoma-se, então, a resolução apresentada pelo Grupo 1, para a situação-problema 1, agora vista como uma unidade.

Figura 34 – Resolução do Grupo 1 para a situação-problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao observar todas as etapas de resolução desenvolvidas pelo Grupo, é possível compreender que o protocolo apresentado prioriza a organização pessoal em detrimento da comunicação. Um exemplo disso é o recorte da Figura 33. Por outro lado, há passagens que demonstram a intenção de explicar as operações e seus significados. Essa interpretação pode ser transmitida para os demais Grupos, considerando as três situações-problema.

Nesse sentido, é possível indicar os protocolos de resolução apresentados como possíveis mobilizações do conhecimento predicativo desses Estudantes, associados aos

conhecimentos operatórios citados ao longo do capítulo 4 na forma de teoremas em ação, mesmo que parte dos registros presentes nos protocolos quando analisados isoladamente não representem manifestações da forma predicativa do conhecimento. Isso reforça a ideia de que a forma predicativa do conhecimento não se limita ao *saber explicar*, mas se entrelaça à forma operatória do conhecimento em determinadas passagens, uma vez que as duas formas são derivadas de uma mesma estrutura cognitiva, constituindo uma dependência entre elas. Assim, há sempre uma parte predicativa no conhecimento operatório e há sempre uma parte operatória no conhecimento predicativo (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento da pesquisa, buscamos responder a seguinte questão: *que conhecimentos matemáticos são manifestados por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática ao resolverem situações-problema de função afim?* Para isso, estabelecemos como objetivo geral, analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto, analisamos as interações dialógicas estabelecidas entre os participantes da pesquisa e analisamos os esquemas apresentados por eles ao resolverem as situações-problema propostas. Entendemos por conhecimentos matemáticos, nesse contexto, os teoremas em ação manifestados pelos estudantes e os indicativos de sua manifestação.

A pesquisa foi composta por cinco etapas: um estudo de aspectos históricos relacionado às funções, de documentos curriculares, de pesquisas relacionadas às funções com foco nas formas operatória e predicativa do conhecimento; um estudo sobre a Teoria dos Campos Conceituais; a elaboração e análise *a priori* das situações-problema propostas para o instrumento de pesquisa; a realização de um estudo piloto, caracterizado pela implementação do instrumento de pesquisa e análise de uma situação-problema; por fim, a implementação do instrumento de pesquisa junto aos participantes da pesquisa e a análise dos dados produzidos.

Para o estudo principal, realizamos a observação de aulas da disciplina de Modelagem Matemática junto a uma turma do 4º ano de Licenciatura em Matemática, durante o período de outubro a dezembro de 2023, a fim de conhecermos os estudantes e como eles se organizam nas aulas da disciplina escolhida. A investigação consistiu na resolução das situações-problema pelos estudantes acrescida da entrevista conduzida. Assim, os dados dessa pesquisa foram compostos pelos protocolos de resolução apresentados por cada Grupo para as três situações-problema, a transcrição dos diálogos dos estudantes e as transcrições das entrevistas realizadas. Participaram desta pesquisa sete estudantes, os quais foram organizados em três grupos, sendo duas duplas e um trio.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) contribuiu com esta pesquisa tanto no suporte para a elaboração do instrumento de pesquisa, quanto para as análises, especialmente em relação à análise dos esquemas que propiciaram a identificação de teoremas em ação mobilizados pelos estudantes. Ainda, a análise dos teoremas em ação, mobilizados pelos estudantes durante a pesquisa, juntamente com os protocolos escritos e com os diálogos dos estudantes nos permitiu analisar e discutir os conhecimentos operatório e predicativo.

Para o instrumento de pesquisa, foram elaboradas três situações-problema,

classificadas a partir das tipologias na perspectiva da TCC como proporção simples e transformação de medidas, sendo que as três situações-problema possuíam etapas intermediárias de resolução. Foi considerado o incremento gradativo do número de etapas intermediárias proposto, de forma que as situações-problema possuíam respectivamente seis, oito e dez etapas intermediárias. Os enunciados não continham subitens ou instruções detalhadas para resolução, assim como foi evitado o uso de termos costumeiramente associados às funções. Essa escolha teve como intuito fomentar discussões entre os participantes da pesquisa, e com isso possíveis manifestações da forma predicativa do conhecimento.

A partir da análise das estratégias de resolução dos Grupos, identificamos os possíveis teoremas em ação manifestados pelos estudantes do 4º ano de Licenciatura em Matemática ao resolverem situações envolvendo função afim. O Quadro 13 apresenta uma síntese dos conhecimentos operatórios, descritos aqui como teoremas em ação verdadeiros e falsos manifestados, acompanhados pelos indícios de suas manifestações.

Quadro 13 – Teoremas em ação verdadeiros identificados

Indícios dos teoremas em ação	Modelação dos teoremas em ação (verdadeiros)
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$.	TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) = k * f(x)$, com k e $x \in \mathbb{R}$, sendo k a razão (um escalar).
Ao dividir $f(x)$ pela taxa de variação (a) para determinar (x).	TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com x e $a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.
Ao dividir $f(x)$ por (x) para determinar a taxa de variação (a).	TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.
Ao somar as partes (P) para determinar o todo (T).	TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.
Ao realizar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F).	TAV5: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.
Ao multiplicar a taxa de variação (a) por (x).	TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a * x$, com x e $a \in \mathbb{R}$.
Ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de variação (a) por (x) para obter $f(x)$.	TAV7: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$, com a, b e $x \in \mathbb{R}$.
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$ e somar a constante (c)	TAV8: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) + c = k * f(x) + c$, com k, c e $x \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).
Ao multiplicar a razão (k) tanto por $f(x)$ quanto $g(x)$ e somar a constante (c).	TAV9: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k * x) + g(k * x) + c = k * f(x) + k * g(x) + c$, com k, x e $c \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).
Ao igualar duas funções, $f(x)$ e $g(x)$ para encontrar seu ponto de intercepto.	TAV10: Tem-se a intersecção de duas retas não coincidentes se e somente se, $f(x) = g(x)$, para algum valor de $x \in \mathbb{R}$.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Em relação aos conhecimentos equivocados, cinco teoremas em ação falsos foram identificados nas estratégias de resolução dos Grupos. O Quadro 14 apresenta cada um desses conhecimentos, juntamente com os indícios de suas manifestações nas estratégias apresentadas.

Quadro 14 – Teoremas em ação falsos identificados

Indícios dos teoremas em ação	Modelação dos teoremas em ação (falsos)
Ao atribuir uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	TAF1: Uma grandeza variável é indicada como fixa.
Ao utilizar a mesma letra para nomear relações funcionais distintas em um mesmo contexto.	TAF2: Em um mesmo contexto, mais de uma função pode ser representada pela mesma letra.
Ao representar uma função de domínio discreto por meio de uma reta.	TAF3: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e x pertencente a um domínio discreto, sua representação gráfica é dada por uma reta.
Ao representar graficamente valores para $x < 0$ de uma função cujo domínio seja somente definido para $x \geq 0$.	TAF4: Seja $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}$, sua representação gráfica é dada de tal forma que $x \in \mathbb{R}$.
Ao somar a constante (b) com a multiplicação de x pela soma da razão (k) com a taxa de variação (a) para obter $f(x)$.	TAF5: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = (a + k) * x + b$, com k , b e $x \in \mathbb{R}$, sendo k um escalar.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Nas resoluções, os Grupos manifestaram quinze teoremas em ação, sendo dez verdadeiros e cinco falsos. Na primeira situação-problema, os estudantes manifestaram o TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV6 e TAV7, além do TAF1, TAF2, TAF3 e TAF4. A situação-problema 2 apresentou uma maior diversidade de teoremas em ação mobilizados, sendo os verdadeiros o TAV1, TAV2, TAV4, TAV5, TAV6, TAV7, TAV8, TAV9 e TAV10 e, os falsos, TAF1, TAF2, TAF4 e TAF5. Por fim, na situação-problema 3 os estudantes mobilizaram o TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV6, TAV7 e TAV10, além do TAF1, TAF2, TAF3 e TAF4. As situações-problema 1 e 3, foram apontadas pelos estudantes, tanto em seus diálogos quanto durante as entrevistas, como possuidoras de características semelhantes. Essa percepção é refletida nos teoremas em ação mobilizados, dado que os teoremas são os mesmos, a excluir-se o TAV10, mobilizado na situação-problema 3 e não na situação-problema 1.

Retornando ao objetivo geral desta pesquisa, especificamente a sua parte ligada a análise das mobilizações da forma predicativa do conhecimento. Considerando que esquemas

podem ser entendidos sob a perspectiva da TCC como a organização invariante do comportamento de um sujeito (Vergnaud, 1993), sendo eles a manifestação do conhecimento operatório do indivíduo (Vergnaud, 1996b; 2004; 2008a), e ainda, que os esquemas comportam os invariantes operatórios, que por si representam os elementos cognitivos que permitem que uma ação seja executada, ou seja, a torne operatória, é possível estabelecer uma relação entre os invariantes operatórios e o conhecimento operatório. Nesse sentido, ao descrevermos os teoremas em ação mobilizados pelos Estudantes ficam estabelecidas também as mobilizações referentes ao conhecimento operatório desses mesmos Estudantes.

Outrossim, conforme descrito anteriormente, os teoremas em ação e os indícios de suas manifestações refletem os conhecimentos matemáticos mobilizados pelos estudantes. A identificação, descrição e análise desses teoremas tem em vista contemplar a questão de pesquisa proposta, a qual permeia identificar os conhecimentos matemáticos manifestados por esses estudantes ao resolverem situações-problema de função afim.

Quanto às mobilizações de conhecimentos operatórios, cabe o apontamento de algumas questões. Um dos teoremas em ação falsos que apresentou maior expressividade nessa pesquisa corresponde à associação de uma variável a um valor fixo (TAF1), sendo identificado em ao menos 14 momentos, outras pesquisas, como Calado (2020), Bernardino (2022) e Siqueira (2023), apontam para dificuldades de estudantes da Educação Básica em generalizar as situações e reconhecer as variáveis envolvidas. Embora o TAF1 tenha sido manifestado ao longo das três situações-problema, pelos três Grupos, a dificuldade encontrada junto aos estudantes do Ensino Superior, mesmo que descrita de forma semelhante a outras pesquisas, aparenta distanciar-se das dificuldades encontradas em outros níveis de ensino. Quando entrevistados a respeito desse teorema em ação falso, os estudantes direcionaram suas respostas no sentido de que as funções foram obtidas como objetivo meio, sendo o objetivo fim das resoluções apresentadas a obtenção das raízes dessas funções.

Nesse sentido, é possível inferir que, em parte, a dificuldade apresentada reside na aceitação de uma generalização, aqui representada por uma função afim, como resposta para uma situação matemática e não na obtenção da generalização em si. Essa dificuldade aponta para uma possível lacuna na compreensão da ideia de generalização por futuros professores de matemática, nesse sentido apontamos para a possibilidade de um estudo futuro dedicado especificamente em se investigar tais lacunas.

Quanto aos protocolos de resolução, há uma redução gradativa no detalhamento das resoluções apresentadas, a despeito do número de etapas intermediárias presentes em cada situação-problema. Essas resoluções de forma mais direta podem ser um indicativo de que,

em um primeiro momento, a pesquisa apresentou situações tidas como novas para os estudantes participantes da pesquisa, porém, ao longo da implementação, esses estudantes possivelmente realizaram associações que os ajudaram a resolver as situações-problema subsequentes de forma mais assertiva. Esse apontamento pode ser reforçado ao observarmos frases ditas pelos Estudantes, tais como, “como essa a gente assemelhou muito a primeira, ela foi mais fácil”, dita pelo Estudante 3 quando questionado sobre o nível de dificuldade da situação-problema 3, ou ainda, o que o Estudante 5 aponta quanto ao mesmo questionamento sobre a situação-problema 3, “[...] mas a do sorvete teve a questão da casquinha... como era a primeira questão, no meu caso, a gente não estava com essa malícia de se atentar ao preço a cada unidade vendida [...] aqui a gente já pegou a malandragem”.

Nesse sentido, foram encontrados argumentos para sustentar a afirmação de que, a princípio, as situações-problema foram tidas como novas para esses estudantes, mas que, ao longo da implementação, esses estudantes realizaram associações que os ajudaram a resolver as situações-problema subsequentes. Todavia, o apontamento a respeito do menor detalhamento nas resoluções apresentadas deve tomar em consideração a extensão do instrumento de pesquisa. Uma nova implementação que considere a resolução das situações-problemas em ordens distintas por cada grupo pode ser uma alternativa para abordar essa questão de forma específica.

Uma vez mais, retornando ao objetivo geral de pesquisa, além da forma operatório do conhecimento, buscou-se também a análise da forma predicativa do conhecimento. No que tange à forma predicativa do conhecimento, foram identificadas dez mobilizações dessa forma do conhecimento nas falas dos estudantes, sendo elas: cinco momentos na situação-problema 1; um momento na situação-problema 2; e quatro momentos na situação-problema 3. Essas mobilizações foram associadas ao TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV7 e TAV10, ocorrendo com maior frequência em TAV5 e TAV7. Essencialmente, esses indícios de mobilização do conhecimento predicativo ocorreram em dois cenários: quando um estudante buscou explicar um resultado, operação, interpretação da situação-problema ou de suas etapas de resolução; e em momentos em que os estudantes estavam interpretando dados ou organizando seus esquemas de forma explícita.

A intencionalidade de comunicação embora tenha sido um fator determinante para o apontamento desses indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento, isoladamente ela não possui sustentação para que uma manifestação seja apontada. Considerando ambas as formas do conhecimento como complementares entre si, e ainda que a forma operatória não engloba a comunicação, mas que ela pode ser verbalizada, ao voltarmos

as análises para as falas dos estudantes, por vezes foram identificados momentos em que o estudante enunciou e comunicou um resultado, mas que esse não foi aqui apontado como uma mobilização de um conhecimento predicativo, todavia, essas carregam de algum modo, também uma parte predicativa.

Já quanto às possíveis mobilizações da forma predicativa do conhecimento presentes nos protocolos de resolução, ao longo das análises, foram apontadas quatro mobilizações da forma predicativa apresentados de forma escrita em língua natural pelos Grupos, além de seis mobilizações da forma predicativa do conhecimento dispostas na forma de gráficos, inicialmente totalizando dez mobilizações junto aos protocolos de resolução. Todavia, esse quantitativo é pouco representativo ao considerarmos que manifestações da forma predicativa do conhecimento não necessariamente ocorrem apenas em língua natural, estas manifestações podem se desenvolver também por meio da linguagem simbólica, expressos como fórmulas, cálculos, gráficos tabelas, diagramas teoremas matemáticos (Vergnaud, 2004, 2017; Régnier, 2009).

Ao considerar ainda que o conhecimento operatório é, em parte, implícito, as operações registradas nos protocolos dos Estudantes não correspondem unicamente aos conhecimentos operatórios, podemos subtender que os registros carregam consigo uma segunda forma do conhecimento. Nesse sentido, é possível indicar os protocolos de resolução pelos três Grupos, para as três situações-problema, também, como mobilizações do conhecimento predicativo desses Estudantes. Isso reforça a concepção de que a forma predicativa do conhecimento não se limita ao *saber explicar*, e essa se entrelaça - e por vezes se sobrepõe - à forma operatória do conhecimento, uma vez que as duas formas são derivadas de uma mesma estrutura cognitiva, constituindo uma dependência entre elas.

Especificamente quanto aos registros gráficos, algumas observações podem ser realizadas. A forma predicativa do conhecimento está associada ao léxico e à sintaxe da língua, bem como está associado a qualquer outro sistema de signos (Vergnaud, 2000). Nesse sentido, a apresentação de um gráfico como meio para expressar a função obtida, de forma a articular propriedades matemáticas e outros conhecimentos que dão suporte para essa representação, pode ser classificada como uma expressão do conhecimento predicativo desses alunos.

Todavia, cabe ainda pontuar que, mesmo que a representação gráfica possua erros, isso não a invalida como manifestação do conhecimento predicativo, uma vez que a forma predicativa do conhecimento pode agir como auxiliadora da forma operatória do conhecimento (Vergnaud, 2002). Isso ocorre mesmo que somente parte dos conhecimentos

utilizados na ação possam ser expressos por palavras, assim como é possível que formulações sejam estabelecidas de maneira falsa ou inconsistente (Vergnaud, 2000). Quando Vergnaud (2003) expressa a forma predicativa como o explicar, o dizer, e a forma operatória do conhecimento como o fazer, abre-se espaço para a seguinte questão: se o *fazer* apresenta falhas, mas o sujeito explica aquilo que fez, há ali o conhecimento predicativo no que tange o conhecimento (equivocado) que o sujeito apresenta? Esse questionamento possivelmente é associado à ideia de níveis de manifestação da forma predicativa do conhecimento (Régner, 2014; Vergnaud, 1996a) todavia, escapa ao alcance e objetivos deste estudo realizar um aprofundamento quanto a tais níveis, sendo tal questão, uma sugestão para pesquisas futuras.

Portanto, esperamos que os resultados desta pesquisa sirvam de suporte para pesquisas futuras, em relação à ação de professores e futuros professores, no que diz respeito à compreensão dos conhecimentos mobilizados pelos estudantes diante de situações-problema associadas à função afim. Esperamos ainda que este estudo e seus resultados sirvam como subsídio para pesquisas futuras com enfoque no ensino ou aprendizagem do conceito de função e/ou, ainda, estudos que permeiem as formas operatória e predicativa do conhecimento junto a outros objetos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. V.; FALCÃO, J. T. R. A estrutura histórico-conceitual dos programas de pesquisa de Darwin e Lamarck e sua transposição para o ambiente escolar. **Ciência & Educação**, v. 11, n. 1, p 17-32. 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/8KdcVyJ8Fxm6Pzs8jhmJBB/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 01 maio 2024.
- ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- ALVES, C. A. **Os Saberes Mobilizados por Futuros Professores em Atividades de Modelagem Matemática Envolvendo a Função Afim**. 2015. 158f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: <https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2439>. Acesso em: 03 set. 2023.
- ANTUNES, F. C. A. **Um Percurso de Estudo e Pesquisa para Abordar Conceitos da Didática da Matemática em uma Perspectiva Inclusiva**. 2022. 316f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2022. Disponível em: <https://tede.unioeste.br/handle/tede/6266>. Acesso em: 03 set. 2023.
- ARAÚJO, A. D. **Estudo das Relações Esperadas dos Estudantes com a Função Afim**. 2019. 231f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade anhanguera de São Paulo, 2019. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/31948> Acesso em: 03 set. 2023.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. *In*: BRUN, Jean (Org). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.
- BERNARDINO, F.; TEIXEIRA, F. O.; MARTINS, G. M.; TOMADON, M. C. S.; BAZANELA, P. E.; REZENDE, V. Ideias-base do conceito de função mobilizadas por estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. *In*: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (org.). **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática**. Curitiba: CRV, 2019. p.51- 70.
- BERNARDINO, F. **Função Afim E Problemas Mistos: uma investigação com estudantes do Ensino Médio**. 2022. 173f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, 2022.
- BITTAR, Marilena. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. *In*: TELES, Rosinalda; MONTEIRO, Carlos; BORBA, Rute. (Org.) **Investigações em Didática da Matemática**. Recife: UFPE, 2017. p.100-131.
- BRANDÃO, R. V. **A Estratégia da Modelagem Didático Científica Reflexiva para a Conceitualização do Real no Ensino de Física**. 2012. 230f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

BRASIL. **Lei nº 9394 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, 1996.

BRASIL. Resolução nº 2, de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, n. 124, p. 8-12, 2 jul. 2015.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal, 2016. 496 p. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf. Acesso em: 24 maio 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2018.

BRASIL. Resolução nº 2, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNCFormação). **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, n. 247, p. 115-119, 23 dez. 2019.

BROUSSEAU, G. **Introdução à engenharia didática**, Laboratoire Cultures, Education, Sociétés (LACES), Université Bordeaux: 2013. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nagerie-didactique3.pdf> Acesso em: 28 fev. 2023.

CABELLO, C. A. S. Relações Institucionais para o Ensino da Noção de Juros na Transição Ensino Médio e Ensino Superior. 2010. 163f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

CALADO, T. V. **Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização**: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 193 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

CAMPOS, A. **A Conceitualização do Princípio de Conservação da Energia Mecânica: os processos de aprendizagem e a Teoria dos Campos Conceituais**. 2014. 299f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação Interunidades em Ensino de Ciências, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/81/81131/tde-02122014-152425/pt-br.php>. Acesso em: 01 maio 2024.

CAPPELIN, A.; REZENDE, V. Livro didático do ensino superior e função afim: um estudo de tarefas que envolvem aspectos gráficos e/ou situações. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **Anais** [...]. Uberlândia: SBEM, 2021. p. 2832-2846.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. 2 ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARDOSO, M. B. **Múltiplas Representações Semióticas no Ensino de Função Afim: Enfoque na Formação Inicial de Professores de Matemática.** 2015. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <https://siduece.uece.br/siduece/trabalhoAcademicoPublico.jsf?id=83414>. Acesso em: 03 set. 2023.

CIANI, A. B.; NOGUEIRA, C. M. I.; BERNIS, M. A construção do Conceito de Função. *In*: CEOLIM, A. J.; REZENDE, V.; HERMANN, W. (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de matemática.** Curitiba: CRV, 2019. p.29-50.

DENARDI, V. B. **Contribuições das Representações Semióticas para Compreensão de Conceitos Fundamentais para o Cálculo Diferencial e Integral por Alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática.** 2019. 285f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Franciscana de Santa Maria, Santa Maria, 2019. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7637806. Acesso em: 03 set. 2023.

DEZILLIO, K. **Ideias de Função e Problemas Mistos: um estudo com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.** 2022. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022. Disponível em: <http://prpagem.unespar.edu.br/dissertacoes/resumos/karina-dezilio>. Acesso em: 22 mar. 2023.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 219 p.

EVEN, R. Pre-service teacher's conceptions of the relationships between functions and equations. *In*: PROCEEDINGS OF THE TWELFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 1988. **Anais [...].** Veszprem, Hungria, 1988, p. 304-311.

FERRAZ, S. R. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo: um estudo com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG).** 2016. 217 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

FERREIRA, R. D. Contribuições do Geogebra para o Estudo de Funções Afim e Quadrática em um Curso de Licenciatura em Matemática. 2013, 229f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, 2013. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10973>. Acesso em: 03 set. 2023.

FILHO, M. A. B. **Conhecimento estereoquímico na acepção da Teoria dos Campos Conceituais.** 2010. 280f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Química, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/46/46135/tde-16062010-094810/pt-br.php>. Acesso em:

01 maio 2024.

FOSSA, J. A. Razão e proporção: A herança antiga. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 11, n. 23, p. 1-6, 2011. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/109>. Acesso em: 10 maio 2023.

FUZZO, R. A. **Uma Tipologia de Situações de Juros Simples com Base na Teoria dos Campos Conceituais**. 2022. 129f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022. Disponível em: <https://tede.unioeste.br/handle/tede/6347>. Acesso em: 22 mar. 2023.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. G. **Repensando Multiplicação e Divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais**. 1 ed. São Paulo: Proem Editora, 2014.

GUEDES, M. Q. Política de formação docente: as novas diretrizes e a base nacional comum instituídas. **Sul-Sul - Revista de Ciências Humanas e Sociais**, Bahia, v. 1, n. 01, p. 82–103, 2020. Disponível em: <https://revistas.ufob.edu.br/index.php/revistasul-sul/article/view/658>. Acesso em: 28 fev. 2023.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, v. 20, n. 4, p. 282–300, 1989.

LESSA, V. E. **A programação de computadores e a função afim: um estudo sobre a representação e compreensão de invariantes operatórios**. 2018. 184 f. (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Passo Fundo, 2021. Disponível em: <http://tede.upf.br/jspui/handle/tede/1656>. Acesso em: 18 de mar. 2024.

LIMA, R. G. A. **Engenharia didática em um processo de formação continuada: um estudo com uma professora de matemática**. 2021. 264 f. (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4022>. Acesso em: 14 mar. 2023.

LORENCINI, P. B. M. **Possibilidades inclusivas do diálogo entre videntes e alunos com deficiência visual em uma sequência didática sobre Função Afim**. 2019. 226 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências e Educação Matemática Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2019. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/4670>. Acesso em: 11 ago. 2022.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012. p. 233-248.

MAGALHÃES, A. R. Mapas Conceituais Digitais como Estratégia para o Desenvolvimento da Metacognição no Estudo de Funções. 2009, 257f. (Tese) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11436?mode=full>. Acesso em: 03 set. 2023.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 3. ed. São Paulo: PROEM,

2008.

MAGINA, S. A Estrutura Multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: Uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO, J. et al. **Matemática, Cultura e Tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016, p.66-82.

MALIK, M. A. Historical and pedagogical aspects of the definition of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 11, n. 4, p. 489-492, 1980. DOI: 10.1080/0020739800110404.

MANZAN, A. P. A. L. A Apropriação dos Conceitos de Função Afim e Quadrática por Estudantes de Cursos de Engenharia. 2014. 162f. (Dissertação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Uberaba, Minas Gerais, 2014. Disponível em: <https://repositorio.uniube.br/handle/123456789/942>. Acesso em: 03 set. 2023.

MERLI, R. F. **Do Pensamento Funcional ao Campo Conceitual de Função: o desenvolvimento de um conceito**. 2022. 215f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022. Disponível em: <https://tede.unioeste.br/handle/tede/6451>. Acesso em: 22 maio 2023.

MINISINI, E. G. **A Evolução do Sentido da Noção de Função Afim para um Grupo de Estudantes de Licenciatura em Matemática**. 2016. 254f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/21798>. Acesso em: 03 set. 2023.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais**. 2019. 160f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/4671>. Acesso em: 10 mar. 2023.

MOREIRA, M. A. O Iceberg da Conceitualização. *In*: GROSSI, E. P. (Org.). **Coleção Campos Conceituais**. Porto Alegre: CIP, 2017. p. 61-113.

MOSSI, S. V. **Análise Discursiva das Representações Semióticas Mobilizadas por Licenciados em Matemática no Ensino e na Aprendizagem de Funções**. 2016. 91f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/6764>. Acesso: 03 de set. 2023.

NASCIMENTO, R. A. Modelagem Matemática com Simulação Computacional na Aprendizagem de Funções. 344f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4113>. Acesso em: 03 set. 2023.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. A Teoria dos Campos Conceituais no Ensino de Números Irracionais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática. **Psicologia e Epistemologia Genéticas**, São Paulo, v.6, n.1, p. 41-63, 2014.

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática sobre o Conceito de Função. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM**, Londrina, v.10, n.2, p.65-71, 2017. Disponível em: <https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/5503>. Acesso em: 09 out. 2022.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino aprendizagem**. 1997. 174 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PANTOJA, G. C. F. **Sobre o ensino do conceito de evolução temporal em Mecânica Quântica**. 2011. 269 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

PASTRÉ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD, G. A didática profissional. *In*: GRUBER, C.; ALLAIN, O.; WOLLINGER, P. (Ed.). **Didática Profissional: Princípios e referências para a Educação Profissional**. Florianópolis: IFSC, 2019. p. 11-87.

PAVAN, L. R. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. *In* : MARGOLINAS, et al. (org.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. v.1 Grenoble: La Pensée Sauvage, 2009. p. 57-78.

PERON DA SILVA, L. C. **As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função**. 2021. 555 f. (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/5773>. Acesso em: 11 ago. 2022.

PIRES, R. F.; MERLINE, V.; MAGINA, S. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. **Educação Matemática em Revista**, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

PIRES, R. F. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo, SP. **Anais [...]** São Paulo: SP, 2016.

PONTE, J. P. M. The History of the Concept of Function and some Educational implications. **The Mathematics**, v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3168>. Acesso em: 9 jan. 2023.

RÉGNIER, N. M. A. Como Traduzir o Caminho do Burro em um Teorema em Ação: análise de situações de conhecimento matemático contextualizado à luz da Teoria dos Campos Conceituais. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, v. 5, n. 1, p. 1-21, 2014.

RÉGNIER, N. M. A.; MONIN, N. Da teoria dos campos conceituais à didática profissional para a formação de professores: contribuição da psicologia e da sociologia para a análise de práticas pedagógicas. **Revista Educação Unisinos**, São Leopoldo, v.13, n.1, p.1-12, 2019.

REIS, M. T. **Ensino e aprendizagem de astronomia sob a perspectiva do ensino por investigação e da teoria dos campos conceituais a partir da base nacional comum curricular**. 2023. 198f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2023, Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br/handle/1/29366>. Acesso em: 01 maio 2024.

REZENDE, V.; BORGES, F. A. Futuros professores de Matemática nos Anos Iniciais e suas estratégias diante de problemas do campo conceitual aditivo. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo v.19, n.1, p.327-352, 2017.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, Tamires Vieira. Função afim na Educação Básica: estratégias e ideias-base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**. Florianópolis, v.13, n.2, p.25-50, 2020.

RODRIGUES, C. L. H. **Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental**. 2021. 179 f. (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/5815>. Acesso em: 11 mar. 2023.

RODRIGUES, C. L. B. H.; REZENDE, V. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 17, n. 39, p. 271-287, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/10713>. Acesso em: 15 out. 2022.

ROSS, D. J. **Functions in contemporary secondary mathematics textbook series in the united states**. 2011. (Doctor in Education) - Faculty of the Graduate School, University of Missouri-Columbia, 2011.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das Praxeologias**. 2006. 384 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SANTO, C. E. **Formação de professores: Um estudo sobre o ensino de matemática para crianças em tratamento oncológico**. 2022. 151f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2022.

SANTOS, C. R. O. **Análise Histórica, Epistemológica, Curricular e Didática do Conceito de Função**. 2022. 98f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2022, Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/5268>. Acesso em: 03 set. 2023.

SERRAZINA, L. A Formação para o Ensino da Matemática: perspectivas futuras. *In*: SERRAZINA, L. (Org.). **A Formação para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico**. Lisboa: Porto, 2002. p. 9-19.

SIERPINSKA, A. Epistemological Remarks on Functions. *In*: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 12. 1988. **Anais [...]**. Veszprem, Hungria, 1988, p. 568-575.

SILVA C. T. J. **A Engenharia Didático-Informática na Prototipação de um Software para Abordar o Conceito de Taxa de Variação**. 2016. 163f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/19687>. Acesso em: 03 set. 2023.

SILVA, E. M.; MIRANDA, D. S. P.; CABRAL, N. F. Função: uma reconstrução histórica do conceito. *In*: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 13., 2019. **Anais [...]**. Fortaleza, Ceará: SBHMat, 2019, p. 489-503. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7. Acesso em: 7 jan. 2023.

SIQUEIRA, F. K. S. **Complexidade de situações mistas associadas à fundação afim: uma investigação com estudantes do Ensino Médio**. 2023. 231f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2023.

SOUZA, C. M. S. G.; FÁVERO, M. H. Análise de uma situação de resolução de problemas de física, em situação de interlocução entre um especialista e um novato, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 55-75. 2002. Disponível em: <https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/570/362>. Acesso em: 01 maio 2024.

FOSSA, J. A. Razão e proporção: A herança antiga. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 11, n. 23, p. 1-6, 2011. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/109>. Acesso em: 10 maio 2023.

SOUZA, E. I. R.; MAGINA, S. M. P. A Concepção de Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 24, p. 799-815. 2017.

TIEPPO, S. M.; CAPPELIN, A.; ZANATTA, L. F.; NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Um panorama de situações do tipo misto em provas do Exame Nacional do Ensino Médio. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 29, p. 1-17, 2023. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320230009>. Acesso em: 22 maio 2023.

TINOCO, L. A. A. **Álgebra: pensar, calcular, comunicar**. 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2011.

YOUSCHKEVITCH, A. A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976. Disponível em: www.jstor.org/stable/41133460. Acesso em: 20 jan. 2023.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structure. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Academic Press Inc, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, 1993, p. 1-27.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, p. 9-19, 1996a.

VERGNAUD, G. Au fond de l'action, la conceptualisation. *In*: BARBIER, J. M. **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: Paris Presses Universitaires de France, 1996b. p. 275-292.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais**. *In*: BRUN, Jean (org.). Didáctica das Matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996c, p.155-191.

VERGNAUD, G. **A respeito de Frege**. Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre, Tradução de Camila Rassi. Nice: IREM, v. 3. 2000. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 mar. 2021.

VERGNAUD, G. **Construtivismo e a aprendizagem da matemática**. Tradução de Camila Rassi. Actes du Colloque Constructivismes: Usages et Perspectives em Éducation. Genève: Service de la Recherche em Education, cahier 8, 143-155, 2001. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 mar. 2021.

VERGNAUD, G. A incorporação dos professores na teoria dos campos conceituais: contribuição em homenagem a Claude Comiti. Tradução de Camila Rassi, *In* : BESSOT, A. (Ed.). **Formation des enseignants et Étude Didactique de l'Enseignant**. Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti, Grenoble: CNRS/ INPG/UJF. 2002. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 16 fev. 2023.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. *In*: GROSSI, E. P. (Org). **Por que ainda há quem não aprende?** 2 ed. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 21-64.

VERGNAUD, G. Pourquoi tant de bruit sur la compétence?. **Nouveaux Regards**. n. 24, p. 20-24. 2004.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. *In*: Anais do I **Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática**. Tandil: Argentina, Unicen, 2007.

VERGNAUD, G. Da didática das disciplinas à didática profissional, nada mais que um passo. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. **Travail et Apprentissages**, v. 1, p. 1-7, 2008a. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 fev. 2023.

VERGNAUD, G. Cultura e conceitualização: Não há uma sem a outra. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. **Carrefours de l'Éducation**, v. 2, p. 83-98, 2008b. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 fev. 2023.

VERGNAUD, G. O que é aprender. *In*: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009a. p. 13-35.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009b.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. Especial, p. 15-27, 2011.

VERGNAUD, G. Conceitualização. *In*: COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS, 2. 2017. **Anais [...]**. Brasília: Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia da Pesquisa e Ação, 2017, p. 28-49.

VERGNAUD, G. Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder?. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, 2019.

ZANATTA, L. F.; MACEDO, K. da S.; SEISCENTOS, R. L. C.; REZENDE, V.; MORAN, M. A Geometria dos Fractais na Educação Básica: uma exploração por meio de materiais manipuláveis. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá, MS. 2019a.

ZANATTA, L. F.; MACEDO, K. da S.; SEISCENTOS, R. L. C.; MORAN, M.; REZENDE, V. O Fractal Hexágono de Dürer: uma possibilidade de exploração com materiais manipuláveis. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, Londrina, PR. **Anais [...]**. Londrina, PR, 2019b.

ZANATTA, L. F.; REZENDE, V. Conhecimentos de funções afim e quadrática manifestados por estudantes de licenciatura em matemática. **Revista Cocar**, v. 17, n. 35, p. 1-19, 2022a. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5292> . Acesso em: 05 fev. 2023.

ZANATTA, L. F.; REZENDE, V. Conhecimentos de Estudantes de Licenciatura em Matemática Acerca de Funções Afim e Quadrática. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 14, online. **Anais [...]**. 2022b, p. 3533-3542.

APÊNDICES

APÊNDICE A – INSTRUMENTO DE PESQUISA DO ESTUDO PILOTO



A sorveteria, *Latte Dulce*, precisa realizar uma projeção do seu lucro sobre a venda de sorvetes. Para isso, realizou o levantamento dos seguintes custos de produção para cada 12 litros de sorvete, gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. A sorveteria possui alguns custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00. Além desses, há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete referente às casquinhas em que o sorvete é servido.

A sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Apresente a projeção do lucro da sorveteria *Latte Dulce* sobre a venda de sorvetes para o período de um mês.

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,396 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.

Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua chácara e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresenta o valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e a projeção da economia com a instalação do sistema de energia solar.

A família Barboza é produtora de queijos artesanais. Em média são retirados 22 litros de leite por dia de cada vaca na propriedade. São necessários aproximadamente 11 litros de leite para que se produza 1 kg de queijo. Cada peça de queijo produzido pesa 720 gramas e é comercializado por R\$ 36,00.



O manejo dos animais demanda alguns custos de produção, a família levantou os seguintes custos médios mensais por animal: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00.



Apresente a projeção do lucro da família Barboza sobre a venda de queijos para o período de um mês.

APÊNDICE B – INSTRUMENTO DE PESQUISA DO ESTUDO PRINCIPAL



A gerência da sorveteria Latte Dulce quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.



Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

Represente essa comparação matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00



Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

APÊNDICE C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM E VOZ



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR
Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos
CEP UNESPAR

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM E VOZ

Eu, _____, autorizo a utilização da minha imagem e som de voz, na qualidade de participante no projeto de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNESPAR, sob responsabilidade da Dra. Veridiana Rezende da instituição Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR e do pesquisador Leonardo Ferreira Zanatta, que terá como objetivo promover e analisar a manifestação das formas operatória e predicativa do conceito de função afim, por estudantes do Curso de Matemática.

Minha imagem e som de voz podem ser utilizadas apenas para análise por parte da equipe de pesquisa, apresentações em conferências profissionais e/ou acadêmicas, atividades educacionais, desde que resguardado meu anonimato.

Tenho ciência de que não haverá divulgação da minha imagem nem som de voz por qualquer meio de comunicação, sejam elas televisão, rádio ou internet, exceto nas atividades vinculadas ao ensino e a pesquisa explicitadas anteriormente. Tenho ciência também de que a guarda e demais procedimentos de segurança com relação às imagens e sons de voz são de responsabilidade do(a) pesquisador(a) responsável.

Deste modo, declaro que autorizo, livre e espontaneamente, o uso para fins de pesquisa, nos termos acima descritos, da minha imagem e som de voz.

Este documento foi elaborado em duas vias, uma ficará com o(a) pesquisador(a) responsável pela pesquisa e a outra com o(a) participante.

A pesquisa será realizada na Universidade Estadual do Paraná, campus de Campo Mourão, no segundo semestre de 2023, no horário de aula. Para isso, serão usadas atividades impressas e gravação dos diálogos das duplas. O uso das atividades impressas e do gravador são considerados seguros, mas é possível ocorrer desconforto, timidez ou sentimento de insegurança se o sujeito da pesquisa não conseguir se adaptar com as atividades propostas.

Fls. 1 de 2



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

CEP UNESPAR

Salientamos que em qualquer momento o aluno (a) poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa.

Em caso de dúvidas com relação ao estudo ou aos riscos relacionados, você deve contatar o pesquisador principal ou membro de sua equipe sendo a Dra. Veridiana Rezende (pesquisadora responsável) E-mail: rezendeveridiana@gmail.com, telefone: (44) 997711572 e Leonardo Ferreira Zanatta (pesquisador acadêmico) E-mail: leonardo.zanatta04@gmail.com, telefone: (44) 98843-1232 ou diretamente junto ao Comitê de Ética em Pesquisa da Unespar, no seguinte endereço: Universidade Estadual do Paraná - campus Paranavaí, Avenida Gabriel Esperidião, S/N - Sala 20, Jardim Morumbi, Paranavaí –PR, CEP: 87.703-000.

Campo Mourão, _____ de _____ de 2023

Assinatura do(a) aluno(a)

(Assinatura do Pesquisador Responsável ou quem aplicou o termo)

APÊNDICE D – TERMO DE COMPROMISSO DE UTILIZAÇÃO DE DADOS



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR
Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos
CEP UNESPAR

TERMO DE COMPROMISSO DE UTILIZAÇÃO DE DADOS

Nós, Veridiana Rezende (pesquisadora responsável) e Leonardo Ferreira Zanatta (pesquisador acadêmico) abaixo assinado(s), nos comprometemos a manter a confidencialidade sobre os dados de áudio e dados físicos em papel, coletados por gravadores de áudio e das atividades impressas, bem como a privacidade de seus conteúdos, respeitando as normas da Resolução CNS/MS nº 466/2012 e suas complementares.

Informamos que os dados a serem coletados dizem respeito aos dados das respostas e gravações de áudio dos sujeitos participantes da pesquisa ao resolverem os problemas propostos. Os dados serão coletados e utilizados para fins de publicações científicas num período de até cinco anos, contados a partir de julho de 2023. Ficamos ainda comprometidos a enviar um novo parecer ao Comitê de Ética em Pesquisa caso haja necessidade de prorrogação da pesquisa.

Campo Mourão, 24 de julho de 2023.

Nome	RG	Assinatura
Leonardo Ferreira Zanatta	10.814.688-5	
Veridiana Rezende	7.549.093-3	

Obs.: Todos os pesquisadores que terão acesso aos documentos do arquivo deverão ter o seu Nome e RG informado e **deverão assinar este termo antes de enviar para o CEP UNESPAR**. Será vedado o acesso aos documentos a pessoas cujo nome e assinatura não constarem neste documento.

APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR
Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos
CEP UNESPAR

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) _____, você está sendo convidado(a) a participar uma pesquisa que faz parte do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNESPAR, sob a responsabilidade da Dra. Veridiana Rezende da instituição Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR e do pesquisador Leonardo Ferreira Zanatta, que terá como objetivo promover e analisar a manifestação das formas operatória e predicativa do conceito de função afim, por estudantes do Curso de Matemática.

O presente projeto de pesquisa foi aprovado pelo CEP UNESPAR.

DADOS DO PARECER DE APROVAÇÃO

Emitido Pelo Comitê de Ética em Pesquisa, CEP UNESPAR.

Número do parecer: 5.915.347

Data da relatoria: 28 fevereiro de 2023

1. PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA: A sua participação é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: responder o instrumento de pesquisa envolvendo problemas de função afim.

2. RISCOS E DESCONFORTOS: Existe a possibilidade dessa pesquisa trazer riscos mínimos, como desconforto, timidez, insegurança e vergonha ao responder o instrumento de coleta de dados, além de constrangimento durante as gravações de áudio e o medo da quebra de sigilo. Salientamos que, em qualquer momento você poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa, se sentir desconfortável e que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade.

3. BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados são:

- Esperamos que os resultados da pesquisa realizada, sirva de respaldo para pesquisas futuras e que eles sejam considerados para as ações de professores em sala de aula. Especialmente ao considerarmos que a pesquisa possui como objetivo não apenas analisar manifestações do conhecimento sobre funções afim, como promovê-las entre os futuros professores participantes desta pesquisa.

4. CONFIDENCIALIDADE: Informamos ainda que suas as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Serão utilizados gravadores de áudio ao qual ficará sob os cuidados do pesquisador Leonardo Ferreira Zanatta durante o período necessário para a escrita das análises dos dados, ao qual será mantido sigilo absoluto. Após todas as informações coletados, as gravações serão excluídas.

Suas respostas e dados pessoais ficarão em sigilo e seu nome não aparecerá em lugar nenhum em nossas análises, arquivos de áudio e transcrições, sua identidade também será mantida em sigilo quando os resultados forem apresentados.

Fls. 1 de 4



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

CEP UNESPAR

Além disso, os dados a serem coletados só serão utilizados para fins de publicações científicas, num período de até cinco anos, a partir do ano de 2023. Após este período os dados serão descartados.

5. ESCLARECIMENTOS: Caso você tenha mais dúvidas ou necessite esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, antes, durante e depois da sua participação, você pode entrar em contato conosco por meio dos endereços abaixo ou contatar o Comitê de Ética em Pesquisa da UNESPAR, cujo endereço consta neste documento.

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida pela **pesquisadora responsável ou o pesquisador acadêmico**, conforme o endereço abaixo:

Nome da pesquisadora responsável: Veridiana Rezende

Endereço: Av. Curitiba, 1231, Centro, Peabiru-PR.

CEP: 87250-000

Telefone para contato: (44) 99969-4445

E-mail: rezendeveridiana@gmail.com

Pesquisador acadêmico: Leonardo Ferreira Zanatta

Endereço: Rua Aroeira, 147, Jardim Araucária, Araruna-PR

CEP: 87260-000

Telefone para contato: (44) 98843-1232

E-mail: leonardo.zanatta04@gmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (CEP) envolvendo Seres Humanos da UNESPAR, no endereço abaixo:

CEP UNESPAR

Universidade Estadual do Paraná - campus Paranavaí

Avenida Gabriel Esperidião, S/N - Sala 20

Jardim Morumbi, Paranavaí -PR

CEP: 87.703-000

6. RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso você aceite participar da pesquisa, não receberá nenhuma compensação financeira.

7. CUSTOS: Foi esclarecido de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por sua participação na pesquisa, tendo em vista que sua participação é voluntária.

Fls. 2 de 4



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

CEP UNESPAR

PREENCHIMENTO DO TERMO: Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e por você, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você), como garantia do acesso ao documento completo.

TERMO 1

Pelo presente instrumento que atende às exigências legais, o Sr.(a) _____, declara que, após leitura minuciosa do TCLE, teve oportunidade de fazer perguntas, esclarecer dúvidas que foram devidamente explicadas pelo (a) pesquisador(a), ciente dos serviços e procedimentos aos quais será submetido e, não restando quaisquer dúvidas a respeito daquilo lido ou explicado, firma seu CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO em participar voluntariamente desta pesquisa. Assim, por estar de acordo, assina o presente termo.

Campo Mourão, _____ de _____ de 2023

Assinatura do participante

Fls. 3 de 4



Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

CEP UNESPAR

TERMO 2

Eu Veridiana Rezende declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

Campo Mourão, 07 de dezembro de 2023

Veridiana Rezende
Pesquisadora Responsável

Leonardo Ferreira Zanatta
Pesquisador Acadêmica

APÊNDICE F – PROTOCOLOS DE RESOLUÇÃO

Situação 1:

SITUAÇÃO 1 - GRUPO 1 - pg. 1-2



A gerência da sorveteria *Latte Dulce* quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

- 12 litros
 - ⇒ 30 R\$ leite
 - ⇒ 10 R\$ açúcar
 - ⇒ 25 R\$ outros
 - ⇒ 0,50 R\$ fixo por sorvete
 - ⇒ 12.110,00 R\$ custos fixos mensais
- 8,00 R\$ cada sorvete de 300 ml.

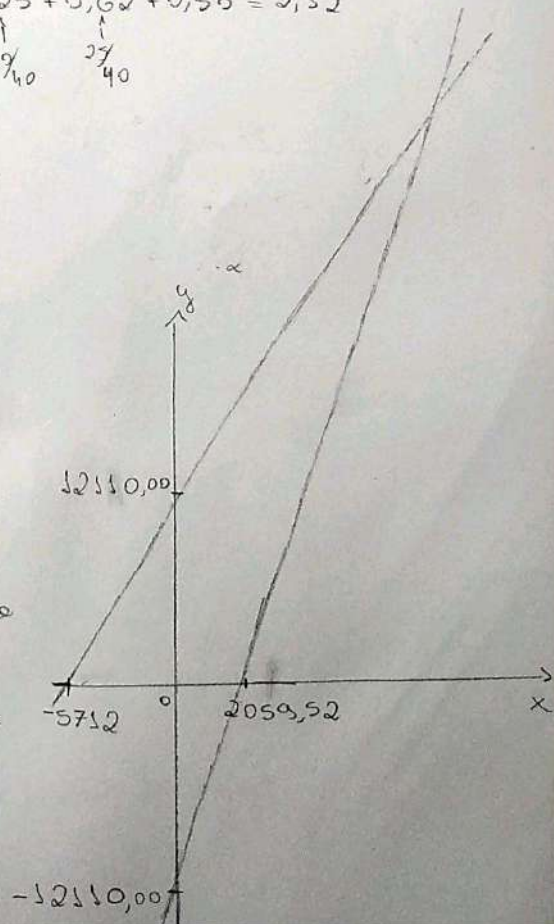
12 litros = 40 sorvetes de 300 ml

$$f(x) = 2,12x + 12.110,00 \Rightarrow \text{custo}$$

$$p(x) = (5,88x) - 12.110,00 \Rightarrow \text{lucro}$$

$$0,75 + 0,25 + 0,62 + 0,50 = 2,12$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $\frac{30}{40}$ $\frac{10}{40}$ $\frac{25}{40}$





A gerência da sorveteria *Latte Dulce* quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

12 litros - custo: R\$ 65,00

↳ faz 40 sorvetes

1,62 p/ sorvete + 0,50 = R\$ 2,12

Lucro de R\$ 5,88 por sorvete

Lucro de R\$ 235,20 para 40 sorvetes

$12110,00 + 2,12 \times x$

$(5,88 \cdot x) - 12110,00 = \text{Lucro}$

no mínimo 2060 sorvete no mês p/ não ter prejuízo

Situação 2:

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91. —



Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

Represente essas projeções matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

$$28,91 + 129,15 + 134,75 = \boxed{292,81} \text{ - } \text{fa} \text{ } \text{paga}$$

$$28,91 + 36,90 + 38,50 = \boxed{104,31}$$

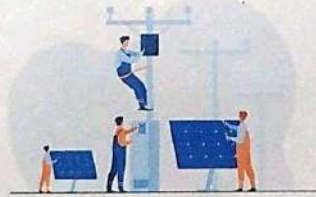
$$(100(0,75d) + 28,91) \cdot t + \frac{14500}{t} \text{ - } \text{com } \text{placa}$$

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.



Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



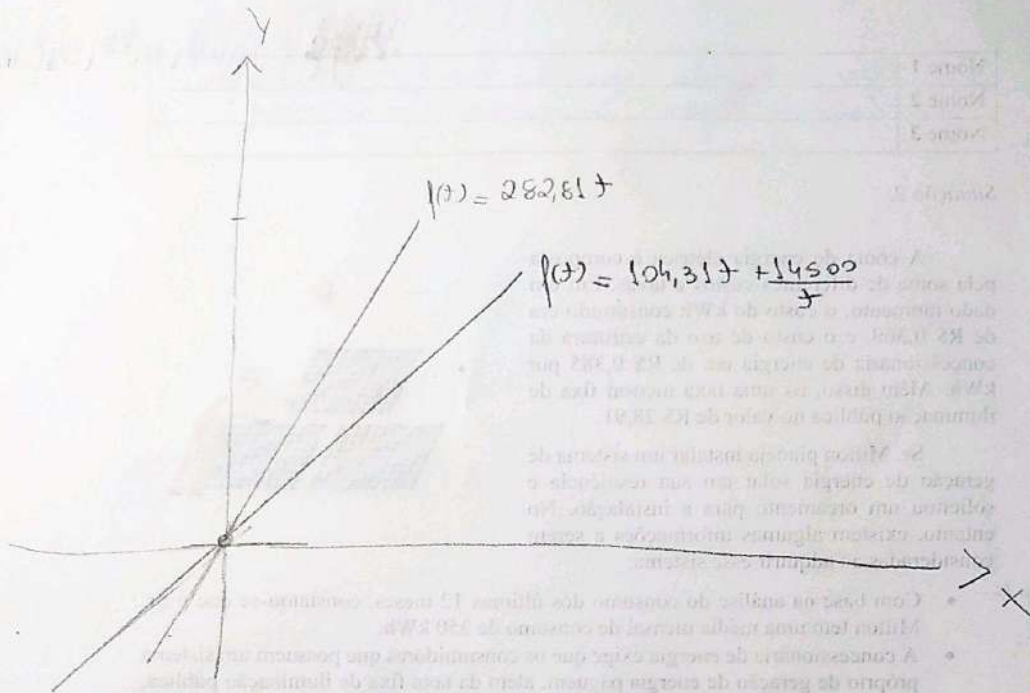
Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

Represente essas projeções matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

$$(0,369 + 0,385) \cdot \text{kWh} + 28,91$$

$$\rightarrow P(t) = (350 \cdot (0,369 + 0,385) + 28,91) \cdot t$$

$$P(12) = (350 \cdot 0,754 + 28,91) \cdot 12 = 3813,72 //$$



$f(t) = 282,81 \cdot t \Rightarrow$ Empresa Privada

$f(t) = 104,31t + \frac{14500}{t} \Rightarrow$ Com. pública

Situação 3:

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00



Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

Por mês cada animal custa: R\$ 750,00

Custo fixo: R\$ 11.600

Cada vaca produz 2kg de queijo

Cada vaca por dia, produz R\$ 100,00

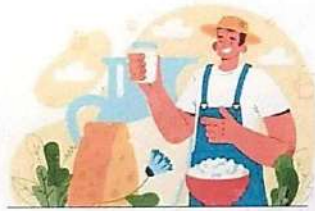
Em um mês elas produzem R\$ 3000,00

Lucro por vaca: R\$ 2.250,00

Ele precisa de 6 vacas p/ mês ter prejuízo

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00



Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

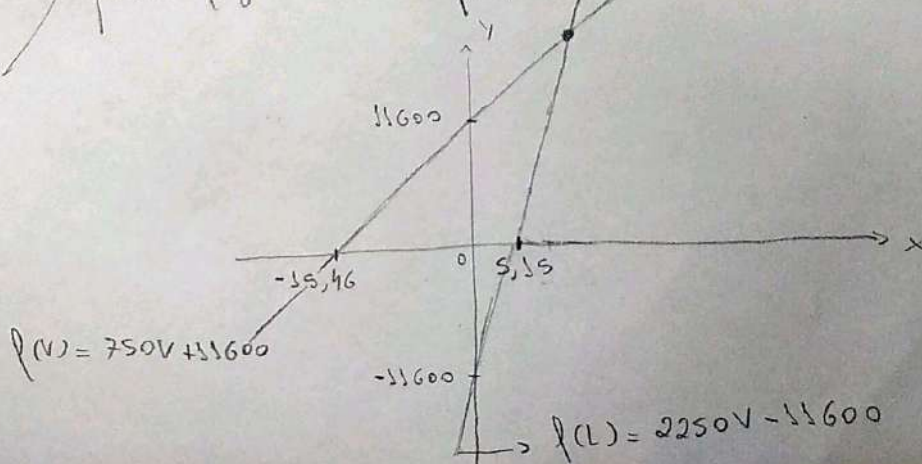
Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

- 175 remédios
 - 520 alimentação
 - 55 outros
- } por animal

- 900
 - 3000
 - 5200
 - 2500
- } fixos fazenda

$$P(V) = 750 \cdot V + 11600 \text{ Custos}$$

$$P(L) = 2250 \cdot V - 11600 \text{ Lucro}$$



Situação 1:



A gerência da sorveteria *Latte Dulce* quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

12 Litros

30 leite
10 açúcar
25 outros

65 por 12 L

R\$ 65,00 por 12.000 ml

$12.000 \overline{) 300}$
40

ou seja, gasta de
R\$ 65,00 por 40 sorvetes

L dl cl ml

Como ele tem um
prejuízo de R\$ 0,50 por sorvete
(casquinha), consideramos como
se ele vendesse por R\$ 7,50
cada sorvete.

$$40 \cdot 7,5 = 300$$

Logo, em 40 casquinhas
vendidas, ele tem rendimento bruto
de 300 reais e com o gasto de R\$ 65,00 de
produção, tem um lucro de 235 reais

Como ele ganha 235 por 40 casquinhas, ganha $235 : 40 = \frac{47}{8}$ por casquinha,
que equivale a aproximadamente R\$ 5,88.

$$f(x) = \frac{47}{8} x$$

com $x =$ casquinha (quantidade) e $f(x) =$ total de lucro
vendendo x casquinhas



$$12\,110 = \frac{47}{8}x$$

$$x = 12\,110 \cdot \frac{8}{47}$$

$$x = \frac{96\,880}{47} \approx 2\,061,28$$

ou seja, precisa vender no mínimo 2062 casquinhas para não ter prejuízo, ou seja, qualquer quantidade de venda maior que isso, gera lucro.

Como 1 casquinha tem 300 mL,

$$2062 \text{ tem } 2062 \times 300 = 618\,600 \text{ mL}$$

Calculando quanto de dinheiro precisa para comprar os ingredientes para produzir 618 600 mL de sorvete:

$$\frac{12\,000 \text{ mL}}{618\,600} = \frac{65 \text{ R\$}}{x} \quad 12\,000x = 40\,209\,000$$

$$x = 3\,350,75 \text{ reais}$$

Mas como 65 reais é pela produção de 12L, vamos fazer por "lote":

$$618\,600 : 12\,000 = 51,55$$

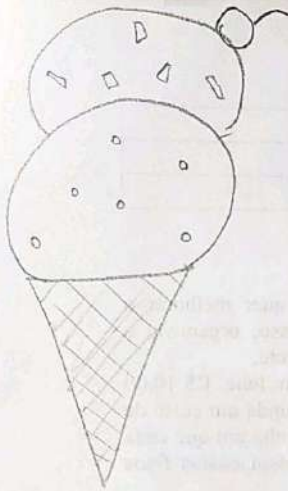
Ou seja, para não ter prejuízo, precisaria fazer 52 lotes de 12L.

$$\frac{1 \text{ Lote}}{52} = \frac{65 \text{ R\$}}{x}$$

$$x = 3\,380 \text{ reais}$$

↳ Descartamos essa teoria

$$\text{quanto vendendo meta mínima} = 2062 \cdot \frac{47}{8} = \frac{48\,457}{4} = 12\,114,25$$



Produção mínima: 618 600 mL

- Mínimo de casquinhas vendidas = 2062

- Valor para comprar ingredientes = R\$ 3 350,75

obs: Não obtém lucro.

- gastos fixos: 12 110,00

- ganho vendendo meta mínima: R\$ 12 114,25

obs: Custo de produção já descontado do ganho.

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.

Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.

Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

Represente essas projeções matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.



Ele gasta em média $\frac{29281}{100}$, ou seja: R\$ 292,81 usando a energia fornecida pela concessionária $(0,369 \cdot 350 + 0,385 \cdot 350 + 28,91)$

Em 12 meses gasta: R\$ 3513,72

Pagará no mínimo $(0,369 \cdot 100 + 0,385 \cdot 100 + 28,91)$, R\$ 104,31 no mês se instalar o sistema.

Em 12 meses gasta: R\$ 1251,72

Economia por mês tendo o sistema: R\$ 188,50

Economia por ano tendo o sistema: R\$ 2262,00

Fazendo $14500 \div 188,50$ encontramos que levaria aproximadamente 77 meses para recuperar o investimento da instalação do sistema utilizando apenas a economia mensal, ou seja, levaria $\frac{77}{12} \times 6$ anos e 5 meses.

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00



Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

Custo por animal: 750
Custo da fazenda: 11600

$22 \cdot 30 = 660$ L de leite por vaca ao mês (30 dias)

$2 \cdot 30 = 60$ Kg de queijo ao mês

$$\frac{720}{1000} = \frac{36}{x}$$

$x = 50$ reais por Kg de queijo, 100 reais por 2kg de queijo (porção diária produzida)

$60 \text{ Kg} \cdot 50 \text{ reais} = 3000$ reais de receita bruta ao mês por vaca

$3000 - 750 = 2250$ reais de lucro por vaca

$$11600 : 2250 = \frac{232}{45} \approx 5,156$$

Ou seja, ele precisa de no mínimo 6 vacas para não ter prejuízo e pagar todos os lucros e já obtém

$$13500 - 11600 = 1900 \text{ reais de lucro com isso.}$$

Mais de 6 vacas gera 2250 reais de lucro por vaca!



A gerência da sorveteria *Latte Dulce* quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

gastos mensais

R\$ 30,00 em leite
 R\$ 10,00 em açúcar
 R\$ 25,00 em insumos
 R\$ 0,5 por unidade
 12.110,00 gasto mensais

Função Valor do Sorvete

Sorvete x mL

1 L / 300
 x / 12000

$$\frac{12000}{300} = 40 \text{ sorvetes}$$

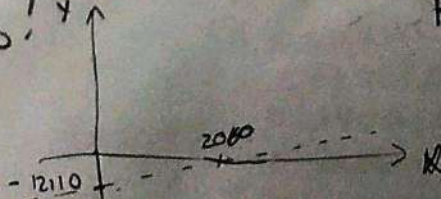
Lucro

$$40 \cdot 8 = R\$ 320$$

$$L = 5,88 \cdot x - 12.110$$

para garantir que a empresa não fique em deficit ele tem que vender pelo menos 2060 sorvetes.

320
 - 20 → casquinha
 - 10 → açúcar
 - 30 → leite
 - 25 → insumos
 R\$ 235 Lucro





A gerência da sorveteria *Latte Dulce* quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação as vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

12 litros Sorvetes
 30 reais leite
 10 reais açúcar
 25 reais outros
 0,50 venda
 12110,00 custo fixo

Sorvete 8 reais 300 ml
 x 12 litros em ml
 $\frac{12000}{300} = 40$ unidades

Custo Para produzir 40 sorvetes

$30 + 10 + 25 + 20,00 = 85,00$ custo de cada 40 unidades
 * Cada sorvete custa 1,64 R\$/ produzir de e vendido a 8 reais, então o lucro a cada sorvete é de R\$ 6,36

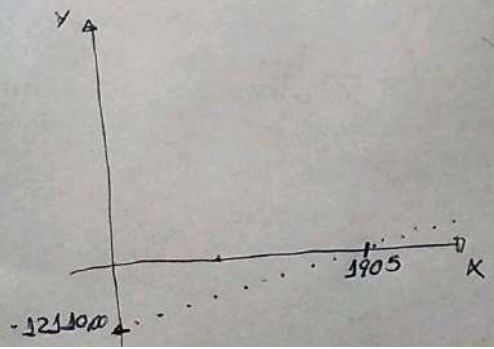
$$f(x) = 6,36 \cdot x - 12.110$$

$$6,36 \cdot x - 12.110 = 0$$

$$6,36x = 12.110$$

$$x = 1.904,09$$

$x = 1.905$, A PARTIR de 1.905 UNIDADES A SORVETERIA COMEÇA A TER LUCRO!



A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.

Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.



Represente essas projeções matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

$$f(x) = 0,7549 \cdot x + 28,91$$

$$f(x) = 0,7549 \cdot 350 + 28,91$$

$$\text{R\$ } 293,13$$

$$f(x) = 0,7$$

Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

14.500

$f(x)$

Sem os placas ele gastaria:

$$f(x) = 3517,50 \cdot x \quad \text{— onde } x \text{ é o ano}$$

com as placas anualmente

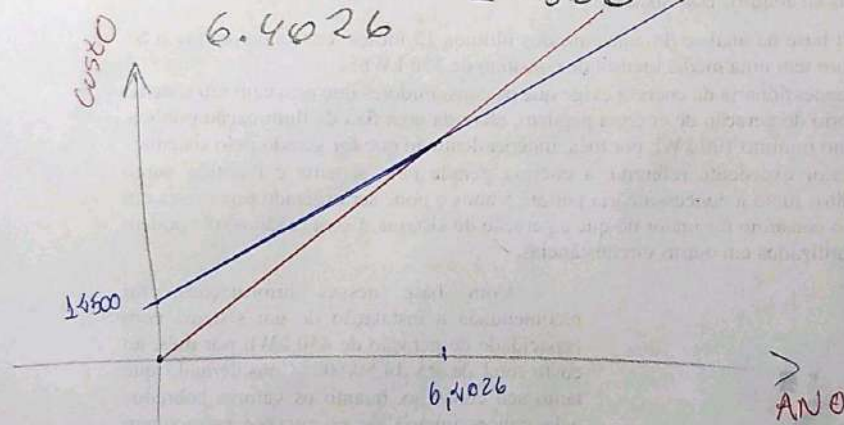
$$f(x) = 1252,80 \cdot x + 14500$$

$$3517,50x = 1252,80x + 14500$$

$$3517,50x - 1252,80x = 14500$$

$$2.264,70x = 14500$$

$$6,4026$$



$$\begin{array}{ccc} & 1 & \rightarrow 12 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 6,4 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = 12 \cdot 6,4 \rightarrow 76,8$$

76 meses.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 1 & \rightarrow 30 \\ \downarrow & 0,87 & \times \downarrow \end{array} \left(\approx 76 \text{ meses e } 24 \text{ dias.} \right)$$

Situação 2:

A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385 por kWh. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91.



Sr. Milton planeja instalar um sistema de geração de energia solar em sua residência e solicitou um orçamento para a instalação. No entanto, existem algumas informações a serem consideradas ao adquirir esse sistema:

- Com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo de 350 kWh;
- A concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema;
- O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Esses créditos não podem ser utilizados em outras circunstâncias.

12.390 =
4200 kWh
100 kWh
5 anos

0,369
0,385
0,754
0,754 x 28,91

0,754
100,000
+ 100,754
100,754 x 28,91
2910,58
com placa



Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.

Represente essas projeções matematicamente. E apresente como elas podem ser representadas visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por Sr. Milton.

450 kWh por mês
custo total R\$ 14.500

Situação 3:

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00



Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

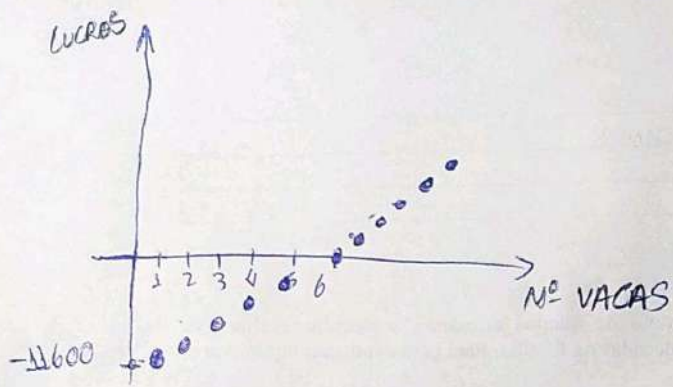
custos médicos, R\$ 175
 alimentação • R\$ 520
 outros custos • R\$ 55
 Fixo
 manutenção R\$ 900
 propriedade 3000
 mão de obra 5200
 outros custos 2500

$g(x) = 3000x + 750x + 11600$

sabe que cada vaca produz 22 litros de leite e que gera 2kg de queijo
 720g kg R\$
 720 36
 2000 — x

$720x = 7200$
 $x = \frac{7200}{720}$
 $x = 10$

$g(x) = 2250x - 11600$
 $2250x = 11600$
 $x = 5,15 \approx 6$ VACAS.



APÊNDICE G – TRANSCRIÇÃO DOS DIÁLOGOS DOS ESTUDANTES

Transcrição Grupo 1:

Estudante 1: Eu acho que é de função.

Estudante 2: será?

Estudante 1: de função afim. Tem caneta aí? Tem um lápis aí?

Estudante 2: só tenho lapiseira, dá uma olhada aí.

Estudante 1: 40 sorvetes, aí 65 dividido por 40, 1,62 por sorvete, mais 50 centavos. Então vai custar por sorvete, 2,12, ele vende 8 reais, então por sorvete... menos 2,12, ele tem um lucro de 5,88. Olha, é importante destacar o custo fixo.

Estudante 2: uhum.

Estudante 1: que vai ser, a constante... coeficiente linear da função. Então tem 50 centavos fixo...

Estudante 2: 5,88 vezes 40, 235 reais de lucro... tá, então isso ele gasta para fazer esses 40 sorvetes e isso é quanto ele lucra em 40 sorvetes.

Estudante 1: 12 litros é quantos sorvetes?

Estudante 2: 40 sorvetes.

Estudante 1: sorvetes de 300?

Estudante 2: uhum.

Estudante 1: então o lucro dele é 300 vezes... é, 40 vezes 8.

Estudante 2: vezes 8 não, porque o sorvete tem um custo, o sorvete custa 2,12.

Estudante 1: ah é, não me liguei no total, tem que subtrair todo o custo.

Estudante 2, mas eu já sei quanto que é o lucro dele para uma receita, 235 reais e 20 centavos.

Estudante 1: *considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente.*

Estudante 2: e agora?

Estudante 1: é uma função.

Estudante 2: é, se você pensar, esse é o valor fixo de gasto do mês...

Estudante 1: qual que é o valor total?

Estudante 2: aqui olha, o valor que ele gasta todo mês é isso aqui.

Estudante 1: somando isso já?

Estudante 2: não, *além disso, a sorveteria possui custos fixos*, isso aqui, aí tem mais tudo isso aqui.

Estudante 1: soma esse com esse.

Estudante 2: não, esse é por sorvete, esse aqui é multiplicado pela quantidade de sorvetes. Então tem o fixo de 12110... só que aí, tem esse 65 reais...

Estudante 1: olha, a gente vai fazer seguinte...

Estudante 2: ah já sei... mais, x vezes 2,12.

Estudante 1: não, só vê esse daqui, pega esses 30 reais e divide por 12, aí você vê quanto ele gasta de leite. O 30 reais divide por 40 na verdade, que é quanto ele gasta de leite por cada sorvete, pega o 10 reais divide por 40 que é quanto ele gasta de açúcar, aí depois a gente vai somar tudo e colocar junto nesse 50 centavos, que é quanto ele vai gastar por sorvete.

Estudante 2: ah é, por picolé... ah isso mesmo, então vamos lá.

Estudante 1: 30 dividido por 40.

Estudante 2: dividido por 40, 75 centavos.

Estudante 1: 0,75, mais...

Estudante 2: 10 dividido por 40, 25 centavos.

Estudante 1: 0,25 centavos.

Estudante 2: e 62 centavos.

Estudante 1: mais 50 centavos, quanto dá?

Estudante 2: 2,12, é o que eu já tinha feito, não é?

Estudante 1: então tá certo.

Estudante 2: 0,75, mais 0,25, mais 0,62, mais...

Estudante 1: 50 centavos.

Estudante 2: 2,12, o que eu já tinha calculado.

Estudante 1: então 2,12x...

Estudante 2: mais.

Estudante 1: mais o custo.

Estudante 2: 12110.

Estudante 1: 12110, pronto.

Estudante 2: será que é só isso?

Estudante 1: não.

Estudante 2: ele tem o lucro.

Estudante 1: supondo que ele vendeu os 40 picolés.

Estudante 2: dá 235 reais e 20 centavos de lucro.

Estudante 1: não, eu quero saber sem tirar o custo dele.

Estudante 2: hum?

Estudante 1: sem tirar o custo.

Estudante 2: 320 reais.

Estudante 1: 40 vezes 8.

Estudante 2: uhum... tá, quantos picolés ele tem que vender para ele cobrir o custo... ele tem que vender 2059, 2060 picolés para pagar esse custo fixo aqui, para ele não ter lucro, mas nem prejuízo.

Estudante 1: essa função é de custo.

Estudante 2: de custo, e de lucro? 2060 sorvetes, tá, então aqui olha, a de lucro a gente tem que fazer... é... para ele ter lucro ele tem que cobrir isso daqui... não é aqui, 5,88 vezes x, menos esse valor, para saber o lucro.

Estudante 1: como assim?

Estudante 2: olha, esse daqui, cada sorvete não dá um lucro de 5,88? Para mim isso é a função do lucro, não é isso aqui, vezes a quantidade de sorvetes, menos isso aqui?

Estudante 1: é, é a receita menos o custo.

Estudante 2: menos o custo, dá o lucro... é isso, então vai ser 5,88 vezes a quantidade de sorvetes, menos que é 12110, essa é a função de lucro.

Estudante 1: esse 5,88, não tem que colocar parênteses aí.

Estudante 2: eu sei, mas eu gosto, acho mais bonito... então no mínimo 2060 sorvetes no mês.

Estudante 1: não pera aí, de onde você tirou esse valor? De 5,88.

Estudante 2: ué, ele vende a 8 reais, cada sorvete custa 2,12, então sobra isso de lucro, com 8 reais ele paga isso e ainda sobra isso, por sorvete, de 300 ml.

Estudante 1: então uma função calcula o custo e uma função calcula o lucro.

Estudante 2: ele quer gráfico né?

Estudante 1: hum?

Estudante 2: ele quer um gráfico.

Estudante 1: é? Fácil demais.

Estudante 2: é?

Estudante 1: ué, uma função afim de primeiro grau.

Estudante 2: será que é só isso?

Estudante 1: muito fácil, essa aqui vai ser fácil, essa daqui vai ser mais difícil... vamos fazer esse ponto aqui...

Estudante 2: 12110.

Estudante 1: faz aí, 12110, dividido por 2,12.

Estudante 2: 12110 dividido por 2,12, 5712.

Estudante 1: 5712.

Estudante 2: por que dividiu?

Estudante 1: porque se for igualar isso daqui a zero e descobrir o valor de x é só... ah não, é -12110 dividido por 2,12.

Estudante 2: então vai dar -5712.

Estudante 1: certeza que não é 5 virgula?

Estudante 2: certeza Estudante 1, é um número grande dividido por um número pequeno.

Estudante 1: tá.

Estudante 2: agora o outro vai dar 2059,52, é que que eu disse, que ele tem que vender 2060 sorvetes.

Estudante 1: aqui menos. Aí é mais, positivo dividido por... quanto deu?

Estudante 2: menos 5,88, não né?

Estudante 1: é 2000.

Estudante 2: 2059. Eim, pergunta, essa daqui... decrescente?

Estudante 1: crescente.

Estudante 2: crescente? Certeza?

Estudante 1: sim... qual é o valor.

Estudante 2: 2059,52... mas essa também é crescente.

Estudante 1: uhum.

Estudante 2: acho que essa é decrescente...

(longa pausa)

Estudante 2: tá bom, terminamos.

Estudante 1: chega uma hora que elas se encontram né?

Estudante 2: é, porque vai ser zero.

(longa pausa)

Estudante 2: o certo era ele se encontrar aqui, porque quanto ele vender isso aqui de sorvete ele não vai ter nem lucro nem prejuízo, vai dar zero, não é isso? Quanto elas se encontram? Mas tá bom, deu para entender. Vamos entregar, ir para a outra?

(pausa)

Estudante 2: *A conta de energia elétrica é composta pela soma de diferentes custos e taxas. Em um dado momento, o custo do kWh consumido era de R\$ 0,369, e o custo de uso da estrutura da concessionária de energia era de R\$ 0,385. Além disso, há uma taxa mensal fixa de iluminação pública no valor de R\$ 28,91. Então ele gasta, 28,91, mais 0,369, 129,15, mais 350 vezes 0,385, 134,75, que é igual a 150, não tá errado a conta que eu fiz aqui. R\$ 292,81, 292,81. Tá, a concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês, independente do que for gerado pelo sistema. Tá, ele vai pagar 36,90, mais 38,50, mais 28,91, 104 reais. O valor excedente referente a energia gerado pelo sistema é mentido como créditos junto à concessionária por até 5 anos e pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior do que a geração do sistema. Com base nessas informações, foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de geração de 450 kWh por mês, ao custo total de R\$ 14.500,00. Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo*

considerando a instalação do sistema de energia solar. Mas não fala quanto tempo ele vai pagar. Olha, ele pago de média de energia isso aqui, 292, se ele colocar... ah olha, exige que os consumidores que possuem sistema próprio paguem, eles têm uma taxa fixa da iluminação pública e eles tem que pagar no mínimo 100 kWh, então mesmo que ele coloque ele ainda vai pagar isso aqui, mais a parcela disso aqui, só que a energia dele gera 450 kWh por mês, e ele gasta 350.

Estudante 1: então ele já paga isso aqui.

Estudante 2: ele vai pagar isso e mais o gerador.

Estudante 1: ele quer o que?

Estudante 2: uma comparação. *Com base nessas informações foi recomendada a instalação de um sistema com capacidade de... tá... com custo total de R\$ 14.500,00, considerando que tanto seu consumo quanto os valores cobrados pela concessionária se mantenham estáveis ao longo do tempo... ah tá então ele vai continuar gastando 350... apresente uma comparação do valor que seria pago de energia elétrica sem a instalação do sistema... tá... sem a instalação é isso que ele vai pagar.*

Estudante 1: e com a instalação?

Estudante 2: agora com a instalação que eu não sei. Olha ele vai usar... ele usa 350, então ele vai ter 100 sobrando todo mês e ele pode usar durante 5 anos. Não sei.

Estudante 1: tá, tá fazendo diferença isso aqui?

Estudante 2: é mais eu quero saber isso aqui, em quantas vezes vai ser pago? *O valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos. Ai eu não sei...*

(Grupo chama o pesquisador)

Estudante 2: não sei se você pode responder, mas isso aqui, ele vai pagar parcelado ou ele vai pagar de uma vez?

Pesquisador: não foi especificado.

Estudante 2: então não interessa?

Pesquisador: bom, aí compreende a interpretação de vocês, vocês acham que foi pago parcelado?

Estudante 2: não sei.

Pesquisador: retomem o enunciado e pensem sobre.

Estudante 1: Se fizer uma função. Você já tem uma função do gasto que ele tem já?

Estudante 2: 14500 dividido por...

Estudante 1: por que você está dividindo isso aqui?

Estudante 2: porque o custo total é para instalar tudo... então não é só isso aqui, ele tem que pagar isso aqui também.

Estudante 1: Vamos pegar como base 5 anos então.

Estudante 2: 5 anos são... 60 meses.

Estudante 1: então 5 anos, ele paga isso aqui por mês, isso daqui vezes 5 anos, mais o custo fixo.

Estudante 2: não isso aqui é o que ele já paga.

Estudante 1: e no total, com o custo fixo.

Estudante 2: com o custo fixo que é o valor da iluminação pública.

Estudante 1: o que que não é fixo? Que é variável? 38 e...

Estudante 2: isso.

Estudante 1: então tenho que somar esses dois aqui, multiplicar pelo tempo que é nossa variável x.

Estudante 2: não por tempo, isso aqui é por kWh, isso aqui é o tanto que ele usa, ele usa em média 350 por mês.

Estudante 1: por mês, então nossa variável vai ser tempo, vai ser hora. Então vai ser...

Estudante 2: só que todo mês, vai sobrar 100 kWh, porque ele usa 350 e ele tem 450... não entendi essa pergunta, esse crédito é esse valor que vai gerar para ele? Como que é?

Estudante 1: que esse 300 kWh é a média...

Estudante 2: que ele usa todo mês.

Estudante 1: dos 30 dias, do consumo.

Estudante 2: mas a quantidade de dias não interessa pra gente.

(longa pausa)

Estudante 1: preciso saber quanto é o uso.

Estudante 2: sim, 350. Ele vai pagar por 100, mas o dele gera 450... e ele usa, 350... ele vai pagar 100 e tá sobrando 100 pra ele todo mês... mas esse crédito...

Estudante 1: o que é isso aqui?

Estudante 2: o que ele não usa no mês, fica como crédito durante 5 anos por anos, quanto ele usar mais do que gerou, mas é um crédito em kWh? Ou é um crédito em valor?

Estudante 1: é um crédito em energia né? Em energia, em kWh.

Estudante 2: mas por que o 100 interessa? Eu não entendi por que isso aqui me interessa?

Estudante 1: ele quer fazer um comparativo das duas coisas, se ele pagasse... se ele usasse a Copel ou se ele usasse o privado.

Estudante 2: se ele usar mais da Copel ele vai ter que pagar mais e na outra se ele acabar gastando mais ele tem pra gastar, não vai precisar, só vai precisar pagar os 100. Mas eu quero saber da parcela, por que ele vai pagar avista? Ele vai pagar parcelado? Como é que ele vai pagar?

Estudante 1: mas isso não interessa

Estudante 2: claro que interessa, eu quero saber quanto que vai ficar... olha, ao longo do tempo. Ele não vai pagar só 104,31, ele vai pagar a parcela aqui também.

Estudante 1: vamos ter que pegar um tempo aqui como base, os 5 anos.

Estudante 2: os 5 anos ali é só porque fica de crédito. 188,50, 14500 dividido por 188,50 ele demoraria 77 meses para pagar, pagando o mesmo valor aqui.

Estudante 1: dividido por quanto?

Estudante 2: 77 dividido por 12, ele demoraria 6 anos e meio quase para pagar.

Estudante 1: dividiu em um ano?

Estudante 2: não, eu dividi isso aqui... ele paga isso, eu peguei esse menos esse, dá 188,50 e dividi isso por 188,50, eu calculei quantos meses ele precisaria pagar esse mesmo valor para quitar essa dívida aqui e ficar a mesma coisa elas por elas, porque depois que ele terminar de pagar isso aqui ele vai pagar só isso daqui por mês... não entendi nada dessa questão.

Estudante 1: eu acho que isso aqui não interessa pra gente, isso aqui e isso aqui interessa.

Estudante 2: eu acho que interessa, por que faz parte do custo dele... então por que que tem essa informação?

(longa pausa)

Estudante 1: será que é só isso?

Estudante 2: não é só isso.

Estudante 1: lógico que é, acho que se não tá especificado não interessa.

Estudante 2: então por que que tem essa... não faz sentido, não faz.

Estudante 1: de onde você tirou esse 28.

Estudante 2: é a taxa fixa.

Estudante 1: 129?

Estudante 2: é o 0,369 vezes 350.

Estudante 1: então você está considerando para 12 meses? Para um ano?

Estudante 2: não, eu estou considerando para um mês que ele gastou em média 350, é um mês, média mensal, não é um ano, eles fizeram uma média do último ano, teve mês que ele gastou mais teve mês que ele gastou menos.

Estudante 1: então multiplica isso por isso, vezes o tempo.

Estudante 2: não é o tempo, isso aqui não é por tempo, é por kWh, não isso aqui é por kWh, isso mais isso é vezes a quantidade, isso aqui é fixo, todo mês ele tem isso aqui. Faz no verso.

Estudante 1: então soma 385, 369.

Estudante 2: 0,754, vezes o kWh.

Estudante 1: mais...

Estudante 2: 28,91. Tá esse é sem a....

Estudante 1: só que isso aqui é uma taxa fixa mensal, isso aqui é...

Estudante 2: mensal.

Estudante 1: isso aqui é uma taxa fica mensal...

Estudante 2: uhum e isso aqui que você fez é mensal também.

Estudante 1: mas isso aqui não é kWh.

Estudante 2: mas é o que ele paga por mês.

Estudante 1: isso aqui é o que ele paga por hora?

Estudante 2: isso aqui é no mês, olha aqui, no mês foi 350 kWh.... por que 12? De onde saiu 12?

(longa pausa)

Estudante 1: se ele gasta por mês, se ele usar duas horas, ele vai pagar duas vezes isso aqui, 3 horas, 3 vezes isso aqui...

Estudante 2: então o que é isso daqui?

Estudante 1: todo mês.

Estudante 2: não...

Estudante 1: não o valor médio do mês todos os dias...

(longa pausa)

Estudante 1: e isso aqui?

Estudante 2: ele vai pagar 100 todo mês.

Estudante 1: de onde esse 36,90 que você tirou?

Estudante 2: ué, 100 vezes 369.

(longa pausa)

Estudante 1: isso aqui é por mês.

Estudante 2: meu Deus, lê, lê a questão.

Estudante 1: eu não entendo.

Estudante 2: eu já li 3 vezes, se leu o problema? Eu não entendi nada desse problema.

Estudante 1: esse 3900?

Estudante 2: ele gasta no ano.

Estudante 1: multiplicou 350 por 12? Ele gasta isso aqui pagando pra Copel por exemplo, a taxa fixa de iluminação pública é no mínimo isso, então no mínimo ele tem que pagar isso aqui vezes 12. Então ele pode colocar isso, pagar isso aqui, vezes doze, para a empresa privada, e o que sobra é dele.

Estudante 2: não entendi.

Estudante 1: tipo ele pode até ter um gerado de energia, só que obrigatoriamente ele tem que pagar...

Estudante 2: isso eu entendi, já fiz a conta aqui.

Estudante 1: então isso aqui por mês, mais o custo fixo... beleza... então para ele colocar o gerador, ele vai gerar isso aqui por mês.

Estudante 2: uhum.

Estudante 1: por mês ele vai tirar esse valor aqui, 104 do bolso dele e vai sobrar para ele líquido quanto.

Estudante 2: então, mas ele tem o custo que ele não pagou ainda.

Estudante 1: ah então 400 kWh ao mês, ao custo, então 14500 dividido por 450.

Estudante 2: o custo total, mas isso aqui é por mês, isso aqui é o total.

(longa pausa)

Estudante 2: se eu dividir em 12 meses, 1208.

(longa pausa)

Estudante 1: vai ser essa função, 350 kWh, vezes isso aqui, a soma desses dois, mais o custo fixo, vezes tempo, que seria meses, o tanto de meses. A gente da sabe que se o tempo aqui for 12, isso vai ser igual a 4000 né? Por que se multiplicou 350 vezes doze, deu 4000.

Estudante 2: não daí 4000 é isso aqui, 4200 é isso aqui.

Estudante 1: kWh, a gente quer saber o...

Estudante 2: tá mais essa é a função sem a placa.

Estudante 1: sem a placa.

Estudante 2: por que você não coloca a soma direta?

Estudante 1: aí deixa claro o que foi feito, 350 kWh vezes isso aqui é o valor, mas esse valor, vezes o número de meses, aí é o tanto que ele vai gastar.... isso não vai dar 4000 isso vai dar o valor de um ano.

Estudante 2: então a outra seria... 350... 350 não, cadê minha borracha?

(longa pausa)

Estudante 2: por que 350?

Estudante 1: isso aqui ele vai gastar de dinheiro em um ano... com a rede privada.

Estudante 2: então deu errado, algum dos dois tá errado.

Estudante 1: o que está errado?

Estudante 2: porque olha, no mês ele gasta 292,81, vezes doze não dá isso. O que é esse 721?

Estudante 1: é a soma, disso aqui.

Estudante 2: não, 754.

Estudante 1: ah fiz errado então.

Estudante 2: dá isso aqui, vezes 12, 3513,72.

Estudante 1: aí agora a gente vai fazer um gráfico da função.

Estudante 2: já fiz.

Estudante 1: deu como?

Estudante 2: 0,754, vezes... mais 28,91, vezes 12, mais 14500, dividido por 12, 2460.

Estudante 1: então é muito mais...

Estudante 2: claro que é.

Estudante 1: melhor do que colocar energia...

Estudante 2: deixa eu ver se está certo, 14500 dividido por 12 dá 1208, por mês, mais 104,31 então por mês 1312, vezes 12... não tá errada essa conta minha aqui, 100 vezes 0,754.... mais 28,91, 104,31, vezes 12, 1251,12, mais 14500, dividido por 12, que é o tempo.

Estudante 1: faz por partes, faz primeiro isso aqui... ah entendi, primeiro você tem que dividir isso aqui, depois somar isso aqui, você não pode ter mais....

Estudante 2: eu fiz mais, abri parênteses, calculadora entende os parênteses.

Estudante 1: você fez, isso aqui vezes tudo isso, mais isso aqui, ótimo, quanto deu? guarda

Estudante 2: que é o que eu já tinha aqui.

Estudante 1: multiplica agora por 12. Agora soma isso daqui.

Estudante 2: por quê?

Estudante 1: 14500 dividido por 12, 1208.

Estudante 2: 1208, 2460, mas está errado.

Estudante 1: o que está errado? Tinha que dar quanto.

Estudante 2: 14500 dividido por 12, mais 104,31 vezes 12, tá certo.

Estudante 1: hum?

Estudante 2: tá certo, se a gente fizer em mais meses, vai compensar mais ainda.

Estudante 1: aí faz a função, a primeira função tem... 292,81 vezes t. E a sua é? A outra. Faz toda essa conta aqui.

Estudante 2: que conta?

Estudante 1: essa aqui.

Estudante 2: 104,31.

Estudante 1: isso é em função de t, é igual a 104,31 t... vai ter as duas funções aqui. Agora você encontrar comigo.... então essa função é da empresa privada né?

Estudante 2: com placa.

Estudante 1: vai cortar em zero essa aqui.

Estudante 2: hum?

Estudante 1: essa aqui vai cortar em zero, porque o zero disso aqui é só.... é reta.

Estudante 2: ela segue o eixo y? zero... o x... as duas é pra cima.

Estudante 1: ela não fica acima do eixo y, ela fica coladinha.

Estudante 2: ok.

Estudante 1: desse jeito aqui.

Estudante 2: tem que especificar qual que é qual e acabamos.

(pausa)

Estudante 2: 175, 520, mais 55, ***** essas vacas custam caro, vou ser fazendeira mais não. *Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade.* R\$ 900,00 mais 3000, mais a mão de obra, então o custo fixo, 3900, mais 5200, mais 2500, 11600. *Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; e são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo.* Então cada vaca produz 2 kg. E 720 gramas, 36 reais. *Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente.* Quantas vacas ele tem? Não sei. Então, 2 kg de queijo, dividido por 720 gramas, então dá para produzir 2 queijos, virgula 7. Cada vaca, por dia... é por dia? É por dia... 100 reais. Se ele tirar leite todo dia, então em 1 mês, elas produzem R\$ 3.000,00. Então o lucro por vaca... menos 750, dá 2250 por vaca, todo mês, de lucro.

Estudante 1: hum?

Estudante 2: cada vaca dá um lucro de 2250 por mês, já tirando o custo dela.

Estudante 1: cada vaca?

Estudante 2: uhum.

Estudante 1: esse 750 mais 11600?

Estudante 2: sim... não, o 11600 é para todas as vacas, esse aqui é por vaca. Então eu acho que eu tenho que fazer isso aqui vezes a quantidade de vacas, né? Menos o valor que... esse vai ser o de lucro, que eu não sei quantas vacas ele tem.

Estudante 1: é por isso que eu coloquei aqui, a variável minha é vacas.

Estudante 2: isso.

Estudante 1: vezes vacas, mais 11600.

Estudante 2: esse é o custo que ele tem, e agora do lucro, coloca aí, f de l, vai ser 2250, vezes a quantidade de vaca, mais... menos, menos, menos, 11600. É isso, é igual a outra né?

Estudante 1: tudo de função afim... o gráfico aqui...

Estudante 2: porque se eu tenho 750 por vacas, então 10 vacas, eu vou ter, um custo de 7500 por vaca, mais os 11600. 7500 mais 11600, se tiver 10 vacas eu vou ter um custo de 19100, mas com essas mesmas 10 vacas, eu tenho um lucro de 10900... tá bom... acho que eu quero ter vaquinha sim... vamos entregar?

Transcrição Grupo 2:

Estudante 4 ah você quer converter de ml para litro?

Estudante 3: 1000 ml são 1 litro, faz regrinha de 3.

Estudante 4 sim.

Estudante 3: então é vezes 1000, 12000.

Estudante 4 12000 ml, cada casquinha tem 300 ml.

Estudante 3: 65 reais...

Estudante 4 300 ml cada casquinha.

Estudante 3: e esse 50?

Estudante 4 os 50 centavos entram como gasto. 50 centavos por sorvete.

Estudante 3: será que está dando para ouvir?

Estudante 4 com certeza, qualquer coisa depois ele amplia.

Estudante 3: que a gente está falando bem baixinho. Não é gasto...

Estudante 4 é gasto, 50 centavos por sorvete.

Estudante 3: *como ele tem um prejuízo de R\$ 0,50 por sorvete, consideramos como se ele vendesse por R\$ 7,50 cada sorvete...*

Estudante 4 65... Bruto é sem descontar os gastos, líquido é descontando os gastos.

Estudante 3: 40 dividido por 65...

Estudante 4 ele teve gasto, então não é 300 reais, o líquido é esse aqui... quantidade que é gasto por sorvete.

(longa pausa)

Estudante 4 mas como a gente vai saber quantos litros que a gente vai precisar?

Estudante 3: vezes 12.

Estudante 4 sim, mas ideia acho que não é usar...você vai ter que escrever na forma de uma função, para saber quanto vai ter que vender, para não sair no prejuízo. Porque a principal pergunta é: ele vai sair no lucro ou no prejuízo... mas não tem como a gente saber se ele vai sair no lucro ou no prejuízo... só com isso aí...

Estudante 3: tá, 40 casquinhas... 235 reais.

Estudante 4 dá pra gente usar proporção... 235 reais dá 40 casquinhas. Tá a gente tem 235 vezes x, tem que ser igual a... esse é o lucro para 40 casquinhas, certo?

Estudante 3: então, dividido por 40...

Estudante 4 Tem que ser igual 12110, porque os gastos já estão descontados da casquinha nesse aqui. Então as casquinhas já vão estar cobertas quando a gente multiplica por 235, daí a gente precisa chegar nisso aqui para ele não ter prejuízo. Então vamos fazer...

Estudante 3: vamos fazer por casquinha.

Estudante 4 por que por casquinha?

Estudante 3: por que aí fica 12 litros.

Estudante 4 sim.

Estudante 3: então só que ele não vai precisar produzir só 12 litros, tá vendo?

Estudante 4 sim, acho que dá pra ser... (inteligível) ... é tanto faz. Isso é só para não ter prejuízo. Para lucrar ele teria que vender mais do que isso... *ou seja precisa vender no mínimo 2062 casquinhas... ou seja, qualquer quantidade de venda maior que essa, gera lucro.* A gente coloca quanto ml que seria essa quantidade de casquinha?

Estudante 3: acho que sim.

Estudante 4 1 casquinha, 300 ml, 2062 casquinhas, x. Estou pensando na próxima parte, o que seria representar visualmente?

Estudante 3: essa segunda parte?

Estudante 4 é, essa pergunta.

Estudante 3: aqui ele vai ter prejuízo né? quanto de prejuízo que isso gera?

Estudante 4 o mesmo valor que da prova que eu fiz, idêntico... não, agora... *considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente e apresente*

como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria. Faltou a parte visual.

Estudante 3: mas...

Estudante 4 matematicamente está bem explicado.

Estudante 3: bem escrito...

Estudante 4 eu não faço ideia se seria um gráfico, mas para construir um gráfico com todas essas informações... tipo... muita poluição visual... ou uma tabela, mas não sei se seria uma representação visual, uma tabela. O que é uma representação visual? Não sei o que é... eu não sou de área nenhuma, vai que eu esqueço disso.

Estudante 3: a gente desiste (risos).

Estudante 4 desassina o papel (risos)... como que a gente colocaria isso visualmente?

Estudante 3: não sei o que é...

Estudante 4: quantidade de casquinhas... como que....

Estudante 3: dava para gente ver...

Estudante 4 acho que não tem sentido, aí a gente não teria prejuízo. Estou pensando em construir a relação no Excel.

Estudante 3: construir no Excel?

Estudante 4: vamos fazer uma tabela então, aí a gente coloca essas informações na tabela.

Estudante 3: deixa eu anotar o que a gente tem.

Estudante 4: 12 litros, 12000 ml, 65 reais... 12 litros... depois a gente escreve.

(longa pausa)

Estudante 4: 65 reais, vamos fazer...

Estudante 3: pelo lote.

Estudante 4 dividido por 12000, menos de 52 lotes. Depois a gente vai precisar calcular de...

(longa pausa)

Estudante 4: 660 ml, então essa sua regra de 3, você faz só com 612 ml, porque o gasto vai ser diferente, aí aqui em cima, a gente vai ter que considerar diferente, porque o gasto da outra... deixa eu ver, vai sobrar, 6600 ml, daí dá para fazer por regrinha de três, porque daí, 12000 ml, custam 65 reais né?

Estudante 3: 52, coloca 52, x.

Estudante 4: ah não, sim.

Estudante 3: se não vai mudar tudo aqui em cima.

Estudante 4 não vai, porque daí a gente considera o lote fechado, vamos mudar se a gente considerar o lote aberto.

Estudante 3: o que?

Estudante 4: a gente considerou o lote fechado aqui.

(longa pausa)

Estudante 4: sai 35,75 a produção daquelas casquinhas.

(longa pausa)

Estudante 4: o gasto dele vai ser... isso vai ser de 51 lotes, mais 45,75.

Estudante 3: por quê?

Estudante 4: porque é 12000 litros mais... 3380 reais.

(longa pausa)

Estudante 4: Eu não sei o que é essa parte visual.

Estudante 3: vamos perguntar para ele.

Estudante 4: ele não vai dizer se a gente perguntar, porque eu acredito que essa seja a parte mais interessante da pesquisa. Três dias para fazer isso aí...

Estudante 3: a gente é muito...

Estudante 4: porque cada hora a gente pensa uma coisa diferente. É para escrevermos nossos nomes? Ai, eu não quero fazer nada visual, eu nem enxergo direito, se eu fechar o olho esquerdo eu não enxergo.

Estudante 3: será que tem que desenhar?

Estudante 4: é (nome do pesquisador) né?

(Grupo chama o pesquisador)

Pesquisador: sim?

Estudante 4: a parte visual tem que ser desenhada?

Pesquisador: é como vocês interpretam que é possível apresentar para a sorveteria, visualmente, a resposta ou respostas que vocês apresentaram para o problema.

Estudante 4: acho que assim já está bem visual.

Pesquisador: se vocês acham que assim pode ser apresentado, tudo bem, sem problemas.

Estudante 4: eu não sei...

Pesquisador: mas o que vocês pensaram?

Estudante 3: mas assim, precisa estar na folha, ou a gente pode fazer...

Estudante 4: pode fazer digital?

Pesquisador: olha... acho...

Estudante 3: isso que eu queria saber, tem que ser então feito...

Estudante 4: é que a gente pensou em fazer no Excel.

Pesquisador: Excel?

(pausa)

Pesquisador: estou pensando aqui... sobre o Excel...

Estudante 4: não, a gente faz na mão, a gente faz na mão.

Estudante 3: vamos escrever.

Estudante 4: meta de produção.

Estudante 3: e o salário dos funcionários?

Estudante 4: provavelmente deve estar nos custos fixos.

Estudante 3: então em teoria, 12110 ele já está...

Estudante 4: vocês da nossa cabeça disseram que... o salário dos funcionários...

Estudante 3: está incluso nesse 12110 e é isso. Porém para fazer essa quantidade, a gente precisa fazer uma produção, ou seja, a gente é obrigado a ter lucro.

Estudante 4: acho que eu concordo. Acho que não vou escrever mais nada não, já escrevemos a folha inteira, ele aponta os nossos erros depois.

Estudante 3: quanto ele precisa para produzir o necessário? 3350.

Estudante 4: vamos simplesmente riscar isso aqui.

Estudante 3: eu nem sei o que você está falando.

Estudante 4: o gasto por uma casquinha, ao invés da gente ficar fazendo por lote, seria mais inteligente a gente fazer por casquinha. É mais inteligente a gente fazer por casquinha, a gente por casquinha. Como faz para tirar a fração disso aqui? Isso, ao invés de pôr isso daqui a gente por isso aqui. Quanto é 47 dividido por 8?

Estudante 3: mas sabe o que é o problema disso, aqui é dado os ingredientes fechados.

Estudante 4: mas nada informou que eles precisam produzir 12 litros, nada informou que eles não podem produzir meio litro, só falou, eles produzem 12 litros com esse valor.

Estudante 3: sim, só que daí...

Estudante 4: eu acho que não... não afirmou que eles precisam produzir exatamente.

Estudante 3: só que daí... 30 reais de leite, são suficientes para 12 litros...

Estudante 4: vai dar 1,63 aproximadamente por casquinha.

Estudante 3: mas aí, eu não acho que vai dar certo.

Estudante 4: eu acho, não, eu tenho certeza.

Estudante 3: não, por que vamos supor aqui, ele teria que afirmar...

Estudante 4: que eles produzem, mas se a gente for fazer essa suposição, a gente tem que fazer que eles podem fazer só 12, ou eles podem fazer de 5 em 5, eles podem fazer de 3 em 3, ou podem fazer qualquer quantidade, por que o enunciado não afirma para gente o que eles podem fazer, só passou os valores de 12 litros, aí você que está supondo que eles só podem produzir 12 litros.

Estudante 3: eu supus que eles só podem fazer 12 litros.

Estudante 4: e eu supus o contrário, e agora?

Estudante 3: nessa hora é suposição.

Estudante 4: por suposição então. Eu acho que minha suposição é mais vantajosa, mas você pode jogar essa folha fora e começar a fazer de novo.

Estudante 3: não.

Estudante 4: porque vai dar tudo errado, se for considerando que só pode com 12 litros, se já nem podia fazer isso aqui, você tinha que considerar fechado. Que é o que eu queria fazer no começo, mas aí você falou, não, vamos fazer por casquinha que dá mais certo. Agora você continua sua ideia por casquinha, gastamos 1,63 por casquinha.

Estudante 3: agora sustenta.

Estudante 4: eu comecei fazendo, 225 vezes x, para saber a quantidade de litros. O que a gente vai apresentar?

Estudante 3: essa parte de baixo a gente tira.

Estudante 4: eles estão em outro já, eles estão falando de kWh, eu acho que a gente viajou na batatinha.

Estudante 3: vamos fazer a resposta dela.

Estudante 4: nem precisa justificar, ele vai ter transcrito isso aqui tudo, ele vai saber a justificativa.

Estudante 3: tá, mas para ficar mais visual.

Estudante 4: tá o que mais há pra saber?

Estudante 3: gastos fixos para mim é o...

Estudante 4: observação...

Estudante 3: ganho vendendo meta mínima, 12114,25.

Estudante 4: algo mais que isso?

(longa pausa)

Estudante 3: vamos deixar assim.

Estudante 4: sim, isso é o que os funcionários vão entender.

(pausa)

Estudante 3: nessa segunda não vamos fazer tudo aquilo não.

Estudante 4: se a gente achar um erro no meio do caminho a gente vai desistir.

(longa pausa)

Estudante 4: então da Copel ele paga isso aqui e eles consome em média 350 kWh. Eu não entendi muito bem. *Considerando que tanto seu consumo, quanto os valores cobrados pela concessionária de energia se mantenham estáveis ao longo do tempo, apresente uma comparação do valor que seria pago de energia solar e o valor que será pago ao longo do tempo considerando a instalação do sistema de energia solar.* Ele pagaria isso aqui e... ele pagaria isso aqui sim e pagaria isso aqui com... economia?

Estudante 3: pega isso aqui e descobrir quanto tempo vai demorar.

Estudante 4: é vou colocar quanto tempo ele demoraria para suprir o valor da instalação. Agora o que esses 5 anos entre no meio, eu não sei.

Estudante 3: (inteligível)

Estudante 4: uhum, em um mês ele pagaria isso aqui em 12 ele pagaria isso aqui.

Estudante 3: só que vamos supor...

(longa pausa)

Estudante 4: dá 78 meses.

Estudante 3: pode colocar.

Estudante 4: ou seja, vai demorar 6,5 anos.

Estudante 3: 6 anos e 5 meses.

Estudante 4: mas é o que deu aqui, deu 6 virgula... mas esse aqui não tá em meses tá em meses. 77 meses são aproximadamente 6,41 anos, ou 6,5 anos. Você vai chegar no mesmo resultado.

Estudante 3: 100 vezes...

Estudante 4: aí a gente arredonda pra cima, exatamente. 5 meses, fica o sexto mês para ele não sair do prejuízo.

Estudante 3: mas 77 meses dividido por 12.

Estudante 4: então... 6,41 ano que equivale a...

Estudante 3: 6 anos e 5 meses.

Estudante 4: o que mais pediu para gente fazer?

Estudante 3: uma comparação.

Estudante 4: só ver, eu já fiz bem... ele gasta em média isso... em um ano isso... eu acho que eu já deixei tipo, bem suscito, eu coloquei o que eu fiz. Você quer apresentar?

Estudante 3: não, eu acho que não.

Estudante 4: Eu acho que tipo é só isso.

(pausa)

Estudante 4: a gente vai fazer do mesmo jeito que a gente fez aquela ali... nossa é de educação financeira esse negócio, não é?

Estudante 3: nossa que caro.

Estudante 4: uhum é caríssimo manter vaca.

Estudante 3: (inteligível)

Estudante 4: não, só falou que uma vaca produz 22 litros de leite. Acho que temos que ver quanto de queijo tem que ser vendido, daí a gente olha a quantidade de vacas. Na verdade, não quer saber a quantidade de animal, só quer saber quanto que tem que lucrar. Só isso que a gente tem que fazer.

Estudante 3: então depois que a gente fizer o valor a gente faz.

Estudante 4: 22 litros por dia, em 30 dias, produz 660 litros cada vaca.

Estudante 3: se não é importante quantos animais... lembra o do sorvete? A gente vai fazer a mesma coisa aqui.

Estudante 4: uhum. Uma vaca quanto é que... uma vaca faz aí.

Estudante 3: 22 litros.

Estudante 4: primeiro quantos litros elas produzem no mês, elas produzem 660 litros no mês, cada uma.

Estudante 3: onde isso.

Estudante 4: aqui olha, 22 litros diariamente, vai dar 660 litros por mês.

Estudante 3: 22...

Estudante 4: litros diariamente.

Estudante 3: vezes...

Estudante 4: 30 dias.

Estudante 3: 660.

Estudante 4: 660 litros por vaca, por vaca ao mês, considerando 30 dias.

Estudante 3: aí...

Estudante 4: 11 litros para fazer 1 quilo, quanto vai gastar em 720 gramas.

Estudante 3: 22...

Estudante 4: 2 quilos diariamente.

Estudante 3: 2 quilos. Então 2 vezes 30.

Estudante 4: 60 quilos de queijo ao mês. Ai ao invés de usar 720 gramas, 720 gramas, vai dar 36 reais, 720 gramas, 36 reais, 1000 gramas, que é um quilo, x, então vai ser, 1000 vezes 36, dividido por 720, 50 reais o quilo.

Estudante 3: cada peça de queijo é 720 gramas.

Estudante 4: é, 720 gramas, 36 reais, 1 quilo tem 1000 gramas, então 1000 gramas por x, que deu 50 reais, 50 reais o quilo... tipo...

Estudante 3: será que a gente já coloca 2000.

Estudante 4: acho que tanto faz...

Estudante 3: é.

Estudante 4: que daí daria 100 reais, que cada vaca produz.

Estudante 3: é 20 depois 36, não fala, o preço de produção...

Estudante 4: fala o gasto com os animais, ai variados, que deve... entra a produção junto.

Estudante 3: 50 reais né?

Estudante 4: uhum... por quilo de queijo. Elas produzem 2 quilos por dia, vezes... 60, 60 vezes 50, 1200 ao mês.

Estudante 4: 1200 quilos ao mês.

Estudante 3: que conta você fez para chegar nisso?

Estudante 4: 60, vezes 50... não, por que que eu coloquei 20? 60 vezes 100... não é 50 o preço do quilo, é 60 vezes 50, 3000 reais ao mês, cada vaca rende. 60 quilos, vezes 50 reais, dá 3000 reais por mês.

Estudante 3: na verdade, 60 quilogramas, vezes...

Estudante 4: vezes 50 reais, 3000 reais ao mês... de queijo ao mês.

Estudante 3: lucro?

Estudante 4: tem o bruto e o líquido.

Estudante 3: é... ao mês por vaca.

Estudante 4: agora a gente tira o gasto e faz a mesma coisa.

Estudante 3: então 3000 menos 750, 2250... líquido.

Estudante 4: não é líquido ainda porque não foi descontado... não é nem bruto nem líquido, porque só foi descontado o...

Estudante 3: lucro total.

Estudante 4: não é lucro porque não é ganho.

Estudante 3: é, coloca lucro por vaca, porque aqui é custo por animal, isso aqui é por animal.

Estudante 4: agora quantas vacas a gente vai precisar para pagar o custo da fazenda?

Estudante 3: 11600 dividido por 2250...

Estudante 4: 2250... nossa, só 5 vacas?

Estudante 3: 6 né?

Estudante 4: é... para cobrir os gastos, na verdade 6 vacas dá 13500, ou seja, ele precisa de no mínimo 6 vacas... e conseguir pagar todos os gastos, tanto dos animais quanto da fazenda... é essa é mais simples que a do sorvete.

Estudante 3: quantos que dá?

Estudante 4: o que?

Estudante 3: de lucro.

Estudante 4: 13500.

Estudante 3: e o custo.

Estudante 4: 11600.

Estudante 3: e quanto que dá?

Estudante 4: 1900.

Estudante 3: de lucro.

Estudante 4: e ainda tem 1900 de lucro. Parecia um gasto absurdo por animal, mas no final não foi né? Só seis animais para manter... gerando 2250...

Estudante 3: só gera lucro, porque a gente descontou o preço de custo da vaca.

Estudante 4: ou você escreve, gera-se 2250 a cada vaca a mais, de lucro a cada vaca a mais... quanto que era? 2250.

Transcrição Grupo 3:

Estudante 5: a gente tem que entregar para ele o cálculo.

Estudante 7: não só peguei uma folha para pensar.

Estudante 5: terminou?

Estudante 7: uhum, aqui a gente tem os custos, aí nos custos a gente tem cada um o seu custo e um custo fixo mensal...

Estudante 5: é função.

Estudante 7: sim, é função... aí a gente tem aqui 8 reais, 300 ml.

Estudante 5: aí o que que dá para a gente fazer, vamos converter a produção, quanto que da... isso, quanto que ele vai receber de dinheiro, aí a gente faz a soma dos custos, pode ser?

Estudante 7: converter de litros para ml, como que a gente vai fazer a divisão.

Estudante 5: não...

Estudante 7: é por 1000 né?

Estudante 5: uhum é 1000.

Estudante 7: regra de 3?

Estudante 5: não, não precisa, é só multiplicar por 1000, 12 litros são 12000 ml.

Estudante 7: 12000 ml, dividido por 350.

Estudante 5: isso, é 300 né, não é 350 não, simplifica, corta, corta, não esses zeros depois da vírgula não... isso...

Estudante 7: 120 dividido por 3, 40.

Estudante 5: 40, então dá pra gente fazer 40 sorvetes, se cada um é vendido a 8 reais, então são 320 reais por lote, então pode calcular lá, 320... você não quer fazer aqui?

Estudante 7: então vamos colocar aqui, 12 litros...

Estudante 5: igual...

Estudante 7: de sorvetes... informações que a gente está colocando tá... 30 reais de leite...

Estudante 5: ah tá você...

Estudante 7: são as informações que a gente pega aqui, pra ficar entendido depois. 10 reais açúcar, que é o que ele usa para fazer e 25 reais os outros. Ai em cima da venda mais 50 centavos, venda. Ai o custo fixo da empresa total...

Estudante 5: isso, é de 12110. Então o que a gente pode fazer, a gente cria uma função, a gente pega o preço do sorvete e subtrai o preço do custo, tá? Ai a gente vai ter que somar os preços...

Estudante 7: isso aqui é tudo do sorvete.

Estudante 5: o custo, sim... aí o que a gente faz, a gente pega o preço de venda, subtrai o preço do custo, a gente vai ter um valor fixo que a gente pode multiplicar pela quantidade de sorvetes vendidos, daí esse valor a gente subtrai o preço fixo ali do aluguel...

Estudante 7: uhum.

Estudante 5: então vamos fazer isso.

Estudante 7: então aqui o que a gente fez, a gente transformou em litros.

Estudante 5: uhum, vamos calcular primeiro o custo.

Estudante 7: tá.

Estudante 5: coloca aqui, custo, para, produzir, 40, sorvetes, 40 unidades, 40 sorvetes...

Estudante 7: e se eu colocar só.... a gente pegou isso aqui.

Estudante 5: é vamos somar.

Estudante 7: 12 litros, em ml, a gente ficou com 12000, dividido por 300, aqui deu 40...

Estudante 5: unidades.

Estudante 7: unidades.

Estudante 5: é isso aqui na verdade a gente não precisa explicar tão bem, escrito, por que vai usar aqui... então beleza, então a gente vai ver quanto que custa aqui, ele gastou 30 reais com leite, vamos usar a calculadora.

Estudante 7: 42, 52, 77.

Estudante 5: não, 52? Você somou a quantidade de litros, litros não é um custo.

Estudante 7: ah é, me desculpa, tira isso, a gente já usou.

Estudante 5: 30 reais.

Estudante 7: 40, 55...

Estudante 5: mais 10.

Estudante 7: 55 mais 50.

Estudante 5: isso, mais 0,50.

Estudante 7: 65,50?

Estudante 5: isso... mas isso para produzir 40 unidades né? Olha lá, 30 reais do leite, mais 10 pila do açúcar, mais 25 em outros insumos, mais 50 centavos... 65,50... isso é só isso mesmo... igual 65,50, daí o custo... coloca custo, a cada 40 unidades, então por unidade... cada unidade... o teu está aproximado? Vamos ver... vamos colocar.

Estudante 7: tira tudo, desprograma ela.

Estudante 5: não, não, não tem problema, por que no centavos a gente só usa duas casas decimais mesmo, então tem que fazer uma aproximação... dividido por 40, então cada sorvete tem em média... vamos arredondar pra cima...

Estudante 7: de custo.

Estudante 5: é de custo, de custo 1,64, arredonda pra cima... que daí é mais fácil para garantir o lucro.

Estudante 7: fala, sorvete custa 1,64.

Estudante 5: para produzir, isso...então se ele é vendido, se ele é vendido a 8 reais, então o lucro a cada sorvete... é de R\$ 6,36, isso beleza, então essa vai ser a quantidade de lucro, então nossa função vai ser, f de x, a função de lucro né? vai ser, f de x, igual ao lucro por sorvete vezes x, que daí é a quantia de sorvete, menos, 12110, isso, isso, acabou. Então essa é a função que representa o lucro.

Estudante 7: menos? Não é mais?

Estudante 5: é menos porque é um custo né? Por que aqui é positivo? Porque aqui é a quantidade de lucro que a gente está tendo por sorvete, para a gente saber o lucro final...

Estudante 7: esse aqui está pagando.

Estudante 5: isso, por isso é negativo. Então agora o que ele quer saber mais?

Estudante 7: *considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente*, a gente representou com a função.

Estudante 5: uhum.

Estudante 7: *e apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria*. No caso a gente tem que fazer pra não ter prejuízo.

Estudante 5: é acho que aqui... não, exatamente, mas é que.... só fazer um gráfico, em que o domínio, vai ser números naturais, porque não tem como vender meio sorvete e não tem como vender menos 1 sorvete, ou raiz de 2 sorvetes.

Estudante 7: só nos naturais.

Estudante 5: isso, a função inclusive ela não vai ser contínua, ela vai ser desenhadinha, ela vai ser discreta.

Estudante 7: é só calcular aqui, para x.

Estudante 5: é ela começa em menos 12110, aqui, a função vai começar lá embaixo... pode puxar o y aqui lá para baixo.

Estudante 7: a gente pode fazer na outra folha?

Estudante 5: não, não tem problemas, não tem muito problema a escala. É só a gente tomar cuidado nas raízes, onde ele começa e onde ele vai interceptar... então aqui vamos colocar...

Estudante 7: joga esse eixo x pra cima.

Estudante 5: tem problema não... e agora a gente tem que achar o intercepto com o x, pra gente achar quantos sorvetes ele tem que vender pra ficar zero a zero, então vai ser... é só a gente pegar... é só igualar a zero...6,36 vezes x, menos 12110, igual a 0.

Estudante 7: para encontrar a raiz né.

Estudante 5: isso, exatamente... então vai ficar $6,36x$, igual 12110, x igual... agora vamos fazer as divisões, 12110, dividido por 6,36, então deu... só que daí deu aproximado né? x vai ser aproximadamente 1904,09, aproximar uma casa decimal, para duas casas decimais. Então como ele tem que ser natural, a gente tem que fazer uma escolha importante, a gente arredonda pra baixo ou pra cima? Como é lucro...

Estudante 7: x é a quantidade de sorvetes.

Estudante 5: é melhor arredondar pra cima, melhor ele vender um a mais para garantir que ele vai ter lucro. Então ele tem que vender...

Estudante 7: não dá pra vender metade do sorvete.

Estudante 5: para ele ficar no zero a zero, ele tem que vender 1905 sorvetes. Como ele é discreto, aqui a representação ficaria pontinhos.

Estudante 7: uhum.

Estudante 5: aqui onde ele interceptaria, né.

Estudante 7: quanto mais ele vende, mais sobe, vai ficar reto.

Estudante 5: é, só que ele não vai ser direta, isso que é o problema, porque ele tem que ser natural, o domínio aqui ele tem que ser natural, porque não tem como a gente vender meio sorvete.

Estudante 7: eu acho que ela vai interceptar o eixo x, ela vai ser uma função afim...

Estudante 5: é, ela vai ter uma característica de função afim, ela vai ir subindo, só que ela não vai ser contínua.

Estudante 7: uhum, ela vai ter uma quebra.

Estudante 5: é ela vai ter vai vários pontinhos, vai ter um pontinho x igual a 1, x igual a 2 e tal, então só que aqui... cadê a régua? Pega alguma coisa pra gente fazer uma régua.

Estudante 7: eu acho que eu tenho uma régua aqui... a régua eu tenho.

Estudante 5: a gente não precisa... a gente não precisa tão bem... é só a gente... fidedigno o y e x, é só a gente ir traçando...

Estudante 7: é que não tem escala, então a gente vai ter que fazer o que der.

Estudante 5: é então... é só a gente ter essa noção de que ele vai ser discreto, já facilita, beleza? Então essa aí foi a primeira.

Estudante 7: essa foi a primeira.

Estudante 5: uhum... vou colocar o nome.

Estudante 7: é a gente esqueceu do nosso nome.

(discussão sobre a ordem dos nomes)

Estudante 7: mostra para ele.

Estudante 5: Estudante 6 chegou atrasado.

Estudante 7: mas ele tem que ver, vai que ele tem uma ideia diferente da gente.

Estudante 5: as vezes a gente fez errado né?

Estudante 7: o que você tem sobre isso Estudante 6?

Estudante 5: vai precisar entregar o teu? É um por grupo? Para registro, o Estudante 6 chegou atrasado.

Estudante 7: tadinho, você não tá bem né Estudante 6?

Estudante 5: verdade vou pegar uma máscara.

Estudante 6: eu não estou com virose.

Estudante 5: mas vai que passa pra mim.

Estudante 6: pode ficar tranquilo.

Estudante 7: você está pensando como nós Estudante 6? Quer discutir o que você fez?

Estudante 6: os outros já terminaram?

Estudante 7: não.

Pesquisador: não se preocupem com os outros grupos.

Estudante 5: faltou a gente escrever aqui...

Estudante 7: escreve aí, sorvetes, quantidades. O que está fazendo aí Estudante 6? Vai fazer com funções também ou outro tipo de cálculo?

Estudante 6: também dá... se a função for uma função do primeiro grau, talvez dá para relacionar com sequências.

Estudante 7: com sequências? É função afim...

Estudante 6: então gasta... ele deu 235 reais de lucro? Para vender os 40 sorvetes? As 40 unidades?

Estudante 5: não, a gente não fez assim, a gente pegou o custo, dividiu por 40 e viu o custo por cada unidades, daí o valor da venda e subtraiu o custo da unidade... é que ele fez para 40 sorvetes, ele fez direto o custo.

Estudante 7: ah você já fez direto, você jogou uma aí fora? Não ele fez igual a gente, dividiu os litros, transformou em ml, olha lá.

Estudante 5: não é isso que estou falando, ele fez diferente.... que a gente calculou o lucro por unidade vendida, ele fez pelas 40 unidades, entendeu? Olha a cada 40 unidades ele fez... mas tenta fazer por unidade vendida que fica mais fácil para representar, para fazer em forma de função.

Estudante 7: então ele tá tendo de lucro R\$ 5,87?

Estudante 5: não, tá errado... como você fez? Deixa eu ver, 40 vezes 8, isso aqui é o que ele vende, tá... total, só que... vamos ver...

Estudante 6: eu descontei 20 reais de cada um, que daí 40 vezes 0,5, 50 centavos...

Estudante 5: é tá errado... tá, 10, 30 do leite, 25, tá, beleza...

Estudante 6: aí foi o lucro para ele vender os 40 sorvetes.

Estudante 5: isso aqui é o total, divide por 4, por 40.

Estudante 6: 235 dividido por 40...

Estudante 5: é o arredondamento, 5,87 deu o dele, ué, deu errado.

Estudante 7: o que que deu?

Estudante 5: é que... como ele fez direitão, lembra que a gente teve que arredondar um pouquinho pra cima, aí ficou diferente.

Estudante 7: uhum, a gente arredondou.

Estudante 6: você conseguiu ver o lucro em valores? 5,87 vezes o valor...

Estudante 5: ah não, está certo, olha aqui o problema.

Estudante 7: 0,50.

Estudante 5: é, só que isso aqui é para cada casquinha.

Estudante 7: é para cada casquinha.

Estudante 5: só que aqui a gente colocou como se fosse o custo das 40, entendeu?

Estudante 7: uhum.

Estudante 5: então aqui é... o do Estudante 6 está certo... tem que colocar aí no 50 centavos, 20 reais, aqui... valeu Estudante 6.

Estudante 7: é eu tava olhando, tinha um erro mesmo, mas eu não sabia da onde vinha o erro

Estudante 5: agora, aumenta 19,50.

Estudante 7: não é 20 redondo?

Estudante 5: sim é que aqui...

Estudante 7: é 20 redondo.

Estudante 5: 20 redondo.

Estudante 6: então o lucro da pra escrever assim olha...

Estudante 5: 85, dividido por 40.

Estudante 6: você vai arredondar para mais?

Estudante 5: tem que ser para mais.

Estudante 6: 5,87.

Estudante 5: não pera, deu isso aqui o preço por unidade.

Estudante 7: tem que arredondar porque aqui tem que ser inteiro, não pode ser metade.

Estudante 6, então vamos arredondar para 88?

Estudante 5: pode ser, fica mais fácil.

Estudante 7: para cima é melhor, porque é em sorvetes, sorvetes não tem metade.

Estudante 5: o lucro dele vai ser assim, por unidade.

Estudante 6: por unidade.

Estudante 5: isso, aí menos os 12110, que é o custo mensal, isso, que aqui a gente já descontou o custo de produção, agora é menos os 12110. Aí agora como que a gente apresenta isso... isso é a forma matemática que ele pediu aqui, represente matematicamente, agora a forma geométrica a gente tem que fazer uma função, só que ela não vai ser... o domínio dela vai ser os naturais, porque ser meio sorvete, ou não tem como ter menos 1 sorvete, então a representação vai ser uma representação discreta, vai ser vários pontinhos, entendeu? Vai ter um ponto no x igual a 1, no x igual a 2... daí agora, o que eu falei para a gente tomar cuidado, faz o plano cartesiano, só coloca o inicial, intercepto de y, que é menos 12110, né? Quando não vendeu nenhum e daí na raiz, agora vai ter que calcular, igualar a zero isso aqui... faz aí... vai ser 12110, dividido por 5,88... então ele tem que vender, para garantir... a gente aproximou para cima, 2060 sorvetes, mais ou menos... daí vai ser o intercepto ali, vai ser a raiz... faz o gráfico cartesiano...

Estudante 6: eu acho que esse aqui.

Estudante 5: tem que arredondar para cima, esse aqui é a quantidade de sorvetes vendidos.

Estudante 6; tem que vender...

Estudante 5: isso se ele vender, 2059 ponto, ele vai ter prejuízo ainda, porque ele precisa ter essa gordurinha, então para garantir ele vai ter que vender 2060, entendeu? Está conferindo? É vacilamos aqui.

Estudante 7: acontece, por isso gosto de analisar os dados com calma. Deu 2059,52?

Estudante 5: é, daí é 60. Faz o gráfico, ele pede pra represente visualmente, faz assim olha, deixa eu fazer... a gente faz assim olha, unidade e aqui é...

Estudante 7: desenha na outra folha.

Estudante 5: então ele vai começar aqui, menos 12110, daí ela vem, pontinho, pontinho, pontinho, até interceptar aqui que vai ser em 2060, daí ela vai indo.

Estudante 7: aqui é o sorvete, lá no negócio é o lucro. No eixo x é sorvetes que se coloca

Estudante 5: é só que como a gente fez uma projeção, acho que não precisa. Olha aqui, x é a unidade de sorvete, y é o retorno das vendas.

Estudante 7: é o lucro.

Estudante 5: não necessariamente, porque antes desse ponto não é lucro, é prejuízo... então só chama de x e y que é melhor, para garantir.

Estudante 7: o Estudante 6 fez regra de três como nossa primeira opção.

Estudante 5: mas é a mesma coisa... ah não, aqui ele fez para...

Estudante 7: litros, transformar litros em ml.

Estudante 6: eu ia montar uma regra de 3.

Estudante 5: ele ia usar uma regra de 3 para saber quantos sorvetes vai ser feito, não para transformar litros em ml.

Estudante 7: sim... a não, já estava em ml.

Estudante 5: vamos passar para a próxima.

(pausa)

Estudante 5: uhum... tá...sabe que a ideia é conversar né?

Estudante 6: tem que montar duas funções né?

Estudante 5: isso, uma função do custo sem a unidade, uma com o custo com a unidade e comparar né? Colocar sem placa, o custo por kWh é... vai ser uma f de x... zero... vamos somar, 0,369, que é por kWh consumido, mais 0,385.

Estudante 6: 28,91.

Estudante 5: ata o 28 do final... não, além do kWh consumido, tem o custo do kWh pela estrutura, então não é só 0,369, é 0,369, mais 0,385, por kWh também. Então vai ser isso aqui, olha aqui na calculadora, 0,749, mais 28,91, entendeu? Só que daí...

Estudante 7: vocês estão muito rápidos, eu estava lendo, vou ter que ler de novo.

Estudante 5: 0,749, x, mais 28... vê se você concorda.

Estudante 6: isso mesmo.

Estudante 7: eu não lembro nem o que eu acabei de ler, Jesus amado, minha cabeça, eu não consigo...

Estudante 6: é muito texto né? Então essa é a função de custo né? Então depois aplica um sistema, daí a gente vai ver quando elas se encontram, depois a gente vai ver depois né?

Estudante 6: *com base na análise do consumo dos últimos 12 meses...*

Estudante 5: é, ele precisa... então olha, então é o seguinte... o que a gente precisa...

Estudante 6: vamos ver quanto ele vai pagar.

Estudante 5: isso, em 12 meses, por mês, só multiplicar vezes 350.

Estudante 6: olha, 350.

Estudante 5: eu vou fazer aqui na calculadora, *answer*, vezes 350 kWh, mais 28,91, isso, então por mês, sem placa ele gastaria R\$ 293,13, arredondar um tracinho, aproximar... coloca o sinalzinho de aproximado daí. Beleza, então esse é o gasto que ele tem por mês, sem placa.

Estudante 6: 12 meses.

Estudante 5: é, daí depois a gente faz, isso mesmo, depois a gente faz o cálculo.

Estudante 6: *a concessionária de energia exige que os consumidores que possuem um sistema próprio de geração de energia paguem, além da taxa fixa de iluminação pública, por no mínimo 100 kWh por mês.*

Estudante 5: isso, então eles vão pagar 28 e pouco, e no mínimo 100 kWh, então a gente tem que pegar... é só a gente colocar na função, 100 kWh, que a gente já vai ver o preço que ele vai pagar no mínimo, né?

Estudante 6: é só multiplica isso aqui por 100.

Estudante 5: é mais sabe o que está me incomodando? Porque ele gasta 350 em média, a geração dele é 450, então assim... é... esse excedente vai ficar guardado e ele não vai conseguir vender, a gente não vai ter nada disso.

Estudante 6: *com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, contatou-se que o Sr. Milton tem uma média mensal de consumo... tá...*

Estudante 5: isso aqui, eu até sei por que o Pesquisador colocou, já vou falar aqui, é só para garantir que não vai ter nenhum mês que ele vai pagar, por que tem mês que produz menos, tá? Pode ser.

Estudante 7: eu ainda não entendi.

Estudante 5: é assim, é a conta de luz, aqui ele está falando os preços da conta de luz, ele paga 0,369 para cada kWh, para manter a estrutura da concessionária, quer dizer, o preço da energia, e para manter a concessionária é 0,385 e mais uma taxa fixa de 28,91, da iluminação

pública... daí a gente fez aqui, a gente somou esses aqui que é por kWh, multiplicou por x, na função, aí mais 28,91, essa que é a função do custo.

Estudante 7: agora ele vai instalar aí vai ser outro.

Estudante 5: aí ele quer saber, para comparar os preços. Então ele tá falando, se ele tiver... ele gasta um consumo de 350 kWh por mês, né? Aí a gente tem que ver, a gente pegou esses 350 e substituiu na primeira função e viu quanto ele gastaria sem o coisa... na verdade acho que nem precisava disso, nem precisava a gente substituir é só fazer o sistema depois, mais enfim... depois o que ele fez, fala que no mínimo ele tem que pagar 100 kWh, tá? Que é o gasto que ele tem que pagar no mínimo mais a taxa fixa, então a gente vai tirar uma outra função para quando ele tiver as placas.

Estudante 7: aí essa taxa fixa aqui.

Estudante 5: você quer fazer essa outra função Estudante 6?

Estudante 6: mas então ele gasta... ele já paga isso, isso é fixo.

Estudante 5: isso é o que ele gasta por mês.

Estudante 6: ele gasta mais que 100.

Estudante 5: é então, quando você coloca placa solar, mesmo você não consumindo você tem que pagar isso aqui por mês, mesmo a tua placa gerando 450 kWh, tá gerando excedente, você tem que pagar 100 kWh por mês, tá? Então o custo vai ser... a gente vai ter que substituir 100 ali para ver quanto ele vai ter que pagar, mais a taxa fixa de iluminação pública, 0,75... é 49.

Estudante 6: 104.

Estudante 5: R\$ 104,00 é o que ele vai pagar por mês, isso é o que vai vir na fatura pra ele por mês... 140? Eu não estou vendo.

Estudante 6: R\$ 104.

Estudante 5: então esse é o valor que vai ser pago por mês... nem vamos perder tanto tempo escrevendo porque é mais o áudio. Daí ele tem o custo para comprar, que foi de 14500.

Estudante 6: *o valor excedente referente a energia gerado pelo sistema é mantido como créditos...*

Estudante 5: é mais isso não vai ser tão vantajoso, porque todo mês o sistema gera 450 por mês, já está gerando mais do que ele consome, então se ele não aumentar o consumo dele, vai ficar esse crédito lá ou não vai usar pra nada, vai ficar lá. Tipo, na realidade o que acontece, tem meses que ele produz menos, aí o que está no crédito abate, mas aqui estamos usando média né?

Estudante 7: então vai calcular um com gerado e um sem gerado.

Estudante 5: isso que falei com Estudante 6, a gente tem que fazer um sistema, aí a gente vai encontrar onde as funções vão se encontrar, que é onde... naquele ponto, se ele consumir aquela quantidade de kWh, tanto faz um ou outro que seria o mesmo preço que ele iria pagar. Daí depois temos que analisar qual seria mais vantajoso, a partir daquilo, ou antes também né?

Estudante 7: ou a gente pode fazer um gráfico também.

Estudante 5: é, que daí gera um gráfico, isso aí. Só que a gente tem que fazer um sistema, que se não a gente não acha o ponto exato.

Pesquisador: viu, você não quer sentar ali do ladinho, fica mais fácil para vocês conversarem, ou o Estudante 6 vem aqui e você aqui, entendeu?

Estudante 5: vamos aqui Estudante 6. Então aqui é o consumo, a gente já substituiu, a gente precisa dessa expressão, agora a gente tem que gerar uma expressão para isso aqui. Só temos que tomar cuidado para não trocar as variáveis, entendeu? O f de x, que é o y, é o custo, então...

Estudante 6: é o custo... esse é o custo fixo.

Estudante 5: isso...

Estudante 7: a gente não vai fazer um f de a e f de b?

Estudante 6: a gente precisa fazer um custo mensal para isso aqui.

Estudante 5: então vai ser aqueles cento e poucos que ele vai ter que pagar de iluminação e taxa mínima, mais 14500.

Estudante 7: vamos chamar de f de a o que a ainda não tem o gerado e f de b o que vai ser, que daí a gente não confunde.

Estudante 5: mas a gente está separado, aqui sem as placas, agora eu vou colocar com as placas, entendeu?

Estudante 7: uhum, a única coisa que vai trocar aqui é o...

Estudante 5: assim, não tem problema a gente colocar o mais 14000 porque ele não está atrelado com o x, ele é um custo fixo, então independente do tanto de kWh, ele vai gastar aquilo para construir as placas.

Estudante 7: mas esse custo não é a construção das placas, então ele não vai cair todo mês, vai ser parcelado.

Estudante 5: sim, por isso ele não estava com o x, entendeu?

Estudante 7: vai chegar uma hora que não vai ter mais.

Estudante 5: é que essa primeira função não tá dada por mês.

Estudante 7: pera lá, a gente está falando 450 kWh por mês.

Estudante 6: é olha, *o valor excedente referente a energia gerada pelo sistema é mantido como créditos junto à...*

Estudante 7: acho que a gente tinha que pegar esse valor e dividir por 12, aí atrelar a divisão de 12...

Estudante 5: só que o problema é que as placas não duram só 12 meses.

Estudante 7: só que o valor que a gente está calculando é para 12 meses.

Estudante 5: não, negativo, a gente está calculando um valor de custo mensal, aqui ele só fala o valor médio, por ano, não sei se precisa fazer para todos.

Estudante 7: ele não estipulou o mês?

Estudante 5: não, ele não fala em quanto tempo que ele vai fazer isso.

Estudante 6: mas aqui olha....

Estudante 5: não isso aí é o que vai ficar sobrando de excedente esses 5 anos, o que ele produzir a mais fica guardado na rede, não fica guardado né, mas vai ficar lá em crédito. Deixa eu pensar aqui.

Estudante 6: então por que não dividir por 5 anos, se ele vai ficar em excedente e ele vai ficar devendo isso? Vamos dividir essa conta em 5 anos.

Estudante 5: por quê? Não faz sentido isso Estudante 6.

Estudante 6: a gente dividiu, não vai ficar 5... que vai ficar guardado, durante 5 anos, e ele não vai ter que pagar tudo isso? Porque a gente não divide mensalmente para que também não fique pesado para ele, porque ele pagar isso em uma porrada só fica pesado.

Estudante 5: mas é que é... não fala que foi dividido. Deixa eu pensar como que podemos fazer.

Estudante 6: outra coisa, a gente não pode usar isso em uma função, porque isso não é um custo que ele vai usar sempre, para qualquer valor...

Estudante 5: ah já sei o que a gente pode fazer, sabe o que a gente pode fazer? 350 kWh por mês, multiplica por 12 a gente vai ter o tanto de kWh em um ano, daí sim dá pra fazer o negócio, daí dá pra gente... a gente faz depois, relacionando ano a ano, não a função relacionando mês a mês, relacionando ano a ano, porque gerando o investimento de uma placa solar ela dá lucro depois de alguns anos, entendeu? Sacou o que eu quis dizer?

Estudante 7: esse daqui foi feito uma análise dos últimos 12 meses

Estudante 5: então... mas isso aqui é a média, foi 350 por mês.

Estudante 7: uhum que ele fez a análise dos últimos 12 meses.

Estudante 5: então se a gente calcular anual fica melhor ainda.

Estudante 7: então, anual é 12 meses.

Estudante 5: sim então multiplica 350 por 12.

Estudante 6: vai dar...

Estudante 5: quantos kWh ele vai gastar por ano?

Estudante 6: 3000... não eu coloquei o valor...

Estudante 5: não, vamos ver quantos kWh ele vai gastar em um ano, a gente não vai substituir ainda na função, a gente vai criar ainda uma função relacionando um ano.

Estudante 6: então vai ser... 350 vezes 12...

Estudante 5: 4200 kWh por ano, então vamos anotar aqui, 4200 kWh, no total, a cada ano, beleza? Então aqui com as placas, vai ser... qual vai ser o valor? Ele paga 100 kWh por mês, mais a taxa fixa, então o que ele vai ter que fazer? Quanto que deu?

Estudante 6: 100 kWh deu 104,40.

Estudante 5: deu 104,40 por mês? Desse aqui? Certeza?

Estudante 6: sim.

Estudante 5: então multiplica por 12, daí a gente vai ter quanto ele vai ter de custo... de custo.

Estudante 7: olha essa taxa fixa é iluminação pública, 100 kWh por mês.

Estudante 5: 1252,8 vezes x mais o valor do coiso, porque se a gente ficar em mês, daria certo também.

Estudante 7: 350 kWh?

Estudante 5: é que a função aqui agora vai ser diferente né? Ah não é só a gente multiplicar... ah quantos que deu? 4200 né? Substituir nessa função pra gente ver quanto que vai dar... aqui olha, isso daqui... deixa eu pensar, que que é por kWh né? O x a gente quer mudar, aqui o x tá marcando kWh, só que a gente vai fazer por ano, então vai ser zero setenta e pouco aqui, vezes...

Estudante 6: se é por ano multiplica por 12 ué.

Estudante 5: não, não, não, aqui já tá por ano, aqui já está quanto ele vai gastar por ano de kWh, aí a gente tem que ver.... aqui é o valor do preço né?

Estudante 6: sim, preço mensal.

Estudante 5: isso, então substitui esse aqui, vezes 12, aí multiplica mais.... na verdade, esses dois, tudo multiplicado por 12.

Estudante 6: foi o que eu falei, multiplica por 12.

Estudante 5: não, aqui é 4200, aqui é o tanto que ele gastou, e aqui vai multiplicar por 12 na verdade, porque cada mês ele paga isso aqui, então em um ano vai ser isso aqui, vezes 12, certo? Só de taxa de iluminação pública e em um ano ele gasta 4200 kWh, então vai ser 0,7549 que é o preço de cada kWh...

Estudante 6: aí eu te pergunto, pra onde vai a variável?

Estudante 5: aí a variável vai se tornar o ano, o x vai ser o tempo em ano, a cada ano vai aumentar aquele custo, sacou? Que a gente vai estipular um custo total por ano.

Estudante 7: por que a gente tem por ano, ele fez uma pesquisa em cima de 12 meses.

Estudante 5: sim só que... você entendeu o que eu falei? Qual é o preço do kWh, 0,7549, ele não produz, ele gasta 350 por mês? Então em um ano ele gasta 4200, então só em kWh, quanto que ele vai gastar? O preço de cada kWh, vezes 4200, tá? Mais, a iluminação pública por mês é 28,81, 91, só que em um ano tem 12 meses, então, vai ser um total que ele vai gastar anualmente vai ser esse valor aqui, sem as placas. Então anota aí, sem placa. Daí coloca lá na f de x.

Estudante 7: eim, mas esses dois a gente pode juntar?

Estudante 5: sim, se a gente colocar as mesmas variáveis a gente pode juntar para fazer o sistema, isso aqui sim, porque olha, o custo consumido é de 0,369 cada kWh e 0,385 cada kWh também, então dá para juntar sim.

Estudante 7: hum.

Estudante 5: a função de x vai ser, x vezes isso aqui, o custo anual, em um ano ele vai gastar isso aqui, em dois anos vai ser o dobro... 3517,5.

Estudante 6: tá, 3517,5.

Estudante 5: vezes x , isso, esse é o preço, onde x é o ano, só pra gente lembrar. E aqui das placas, né? A gente fez a mesma coisa, se por mês ele tem que paga no mínimo 100 kWh, então qual é o preço do kWh? A gente já viu, é 0,75, então vamos lá, 0,7549, vezes 100 kWh, que é o que ele tem que pagar, por mês, no ano ele vai pagar vezes 12, vai dar 905 reais, só que daí em a iluminação pública que ele tem que pagar que é de 28 e 91, opa, 28,91, só que ela também é cobrada mensalmente, então multiplica por 12, então no final com as placas, sem lembrar o valor do preço, sem o valor da placa, sem o preço da instalação ainda, por ano ele vai dar... vai ter 1252, vezes x , mais 14500.

Estudante 6: redondo?

Estudante 5: é... não, 52,8... vezes x , mais 14500. Isso, que daí a gente fica relacionando ano a ano e daí a gente fica fixo o preço. Não sei se está fazendo sentido, pra mim está, talvez não esteja, deu? Beleza? Então essas são as funções, agora a gente monta um sisteminha, para achar onde elas se interceptam, que é onde tanto faz um ou outro, o consumo...

Estudante 6: a gente precisava ter mais um valor aqui, pra gente montar esse sistema.

Estudante 5: não, aqui a constante é zero ué.

Estudante 6: mas é só igualar as duas.

Estudante 5: é se igualar as duas vai dar também.

Estudante 6: coisas iguais e as mesmas coisas, também são iguais entre si.

Estudante 5: então o que a gente tinha que tomar cuidado era o que o x representava e o y representava, se um a gente fizesse custo do mês e um do ano, aí ficaria...

Estudante 6: só que a gente tem que lembrar...

Estudante 5: não isso é um constante independente, não está variando conforme o tempo, é aquele preço ali e acabou, sacou? Preciso ir no banheiro.

Estudante 7: mas aí tem um outro dado aqui, que o que exceder esse valor que é uma taxa né, ele vai ser mantido por 5 anos né, daí dentro desses 5 anos, pode ser utilizado nos meses em que o consumo for maior.

Estudante 5: só que não faz diferença, porque como a gente fez no ano, por mais que teve mês que foi mais que o outro, quando a gente calcula os 42000, 4200 kWh, vai ser o que ele vai gastar no ano, um mês mais ou outro. Só que ele produz 450, ele não fala se ele vai vender ou não, então não faz...

Estudante 7: não por que se ele vai abatendo o valor...

Estudante 5: não abate. Funciona assim, vamos dizer, em um mês você gastou 350 e ele produziu 450, então ficou 100 de excedente, então se mês que vem ele não produzisse nada, ele teria que pagar 350 que é a média, menos os 100, só que todo mês ele produz a mais do que ele gasta, então ele nunca vai... e não tem como ele vender, então não faz muita diferença para nós.

Estudante 7: então ele vai exceder.

Estudante 5: então porque não fala aqui se ele vai vender ou não, sacou? Daí como a gente estipula para 1 ano, aí essas variações acho que fica melhor.

Estudante 7: ela se mantém estável.

Estudante 5: sim... você resolveu o sistema aí garotão? Deu isso aqui? Vamos fazer a prova real, substitui, deu 6000? Substitui na função com placa...

Estudante 6: deu 6.40.

Estudante 5: ah é 6 anos, é...

Estudante 6: mas agora a gente tem que transformar esse 40 em...

Estudante 5: não mas vamos...

Estudante 6: então demoraria 6 anos...

Estudante 5: é daria para fazer a conversão, mas primeiro vamos ver se você acertou. Pega e substitui você na função com placa, sem placa... é porque tem que dar o mesmo valor. 1252,80, vezes 6,4026, mais 14500, 2 2 5 2 1. Agora vamos aqui na outra, 3517,5, vezes 6,4026, 2 2 5 2 1, deu isso né? Então tá certo.

Estudante 6: agora a gente tem só que...

Estudante 5: agora vamos representar graficamente, não precisa a gente fazer por mês, vamos fazer aqui graficamente. Vamos até usar a corzinha diferente aqui... sem placa vamos fazer vermelho e com placa azul, então olha, com placa quando nosso custo, vamos ver... isso que a gente tem que tomar cuidado, se a função estiver maior a partir daquele ponto é vantajoso ou não? O y não é o custo, a vantagem é que ele seja o menos possível, não é? Só a gente tomar cuidado com isso, diferente da questão passada que a gente fez os custos, fazendo negativo, tá ligado? O custo da energia aqui está positivo, sacou? Então vamos ver aqui, com placa, então ele começa em 1400 e pouco... então ele vai começar aqui quando o x for 0, ele vai estar em 14500, é o custo dele certo? Daí lá em.. vamos fazer ele até 6,4026, é uma função crescente, então ela vai estar assim, linear. É uma função discreta? Nesse caso eu acho que não, porque o kWh, você consome meio kWh, então eu acho que dá pra ser assim, só acho que ela tem que ser real positiva, tá? Ou racional positivo, por que raiz de 2 eu não sei se tem como consumir raiz de 2, entendeu? Então um racional positivo, então ele vai estar aqui mais ou menos, então vamos ver a outra, a outra tem custo se ele não consumir? Até tem né? Mas é que a gente está calculando por ano então ela não vai ter, x igual a 0... ah tá certo, o que é isso aqui, ano e isso é o custo, está certo? Se não passou nenhum ano não tem custo, então ela vai começar em zero. Daí ela vai chegar aqui também, opa essa aqui é vermelha, então é vermelha e vem até aqui assim. A partir desse momento, qual que vai estar maior? A vermelha né? Ela vai exceder ali, então se a gente pegar... aqui, como é uma função afim, a gente pode prolongar o seguimento sem problemas. Então esse aqui é o negócio, então a partir desse período, o consumo... os painéis solares é mais vantajoso... faz a regra de 3, para achar os meses... 1 igual a 12, 0,4... vou no banheiro.

(longa pausa)

Estudante 5: é isso mesmo, sem placa, com placa, tá. Quer ser mais preciso? Dá pra gente fazer 1, 365, vai que dá aí o dia certinho, porque 76,8... ou só vê esse 0,8 quanto dá. Se bem que os meses é tudo quebrado, 30, 31.

Estudante 6: só que o mês que é considerado é 30.

Estudante 5: é?

Estudante 6: é que um vai ter 28, mas o outro vai ter 31.

Estudante 7: com placa deu quanto?

Estudante 6: vai equiparando.

Estudante 5: a função que ficou anualmente é isso aqui.

Estudante 7: e o valor final?

Estudante 5: não, não tem valor final, a gente gerou duas funções que relacionavam o custo anualmente, daí com o intuito para fazer um sistema entre elas para saber onde elas se interceptam.

Estudante 7: não, mas eu quero saber, 1252,8.

Estudante 5: anualmente.

Estudante 6: sem as placas você vai perceber que sem as placas tem um custo maior a curto prazo.

Estudante 5: a curto prazo.

Estudante 6: mais a longo prazo...

Estudante 5: o custo fica menor se comparado com o coisa.

Estudante 7: não, eu estou analisando se não tem nenhum erro ali em cima, nos dados que a gente pegou daqui. Isso aí eu já entendi. Porque quando a gente relaciona isso aqui... agora eu estou entendendo o que ele está falando aqui desse a mais... os 100 kWh é inserido a mais do valor que ele gasta no mês...

Estudante 5: 30 igual 1, 0,8... só pegar 30 e dividir por 0,8.

Estudante 6: 0,8 igual a x.

Estudante 5: é só dividir né?

Estudante 6: não pera aí, aqui está diminuindo.

Estudante 5: não, mesma coisa, é diretamente isso aí.

Estudante 6 vai dar 24 dias, então 76 meses e 24 dias.

Estudante 5: aproximadamente, porque a gente considerou o mês 30.

Estudante 6: aproximadamente, mas ué Estudante 5, é padrão, sistema internacional.

Estudante 5: faz 12 vezes 30, não dá 365, entendeu?

Estudante 6: 360, só que o que que acontece, Estudante 5...

Estudante 5: eu sei que tem o bissexto.

Pesquisador: é o mês comercial, o mês comercial tem 30 dias e o ano comercial tem 360.

Estudante 5: é? Não sabia disso não.

Estudante 7: quando fizeram com placa, vocês pegaram esse mais esse né? Mais esse aqui?

Estudante 5: não.

Estudante 7: porque eu acho que esse aqui tem que ser a mais.

Estudante 5: é, não, não, não, esse é a taxa mínima que ele tem que pagar, sobrando ou tipo... ou consumindo certinho.

Estudante 7: mas esse aqui tem que ter certeza desses valores para criar a função.

Estudante 5: sim, sim, isso a gente fez, a gente pegou o preço de cada kWh, multiplicou por 100 e somou a taxa fixa, foi feito.

Estudante 7: ah então tá certo.

Estudante 5: é eu acho que está certo, só o tempo dirá. Quando você publica o mestrado mesmo?

Pesquisador: uns 6 meses para defesa, depois mais uns pra publicar.

Estudante 5: só isso?

Estudante 7: eles são muito rápidos, eu sei fazer cálculos, só que no meu tempo, ele é muito rápido.

Estudante 5: relaxa Estudante 7, o que adianta fazer rápido e dar errado?

(pausa)

Estudante 5: vamos ler a vaquinha. É, mesma coisa que a do sorvete.

Estudante 7: espera só eu terminar de ler.

Estudante 5: pode terminar de ler, fique à vontade.

Estudante 7: senão eu perco o raciocínio.

Estudante 5: qual vai ser a variável.

Estudante 6: eu vou anotar os custos.

Estudante 5: eu pensei...

Estudante 7: tirar os dados informados ali, todos os custos, igual a primeira.

Estudante 5: única coisa que a gente tem que ter atenção é que, para produzir 1 kg de queijo, são 11 litros, só que cada peça é 720 gramas.

Estudante 6: é a mesma história do sorvete.

Estudante 5: isso.

Estudante 7: vamos pegar os dados e colocar tudo certinho aí e tirar o que é referente a unidade.

Estudante 6: olha, de custo, de custos médicos...

Estudante 5: 175.

Estudante 6: R\$ 175.

Estudante 5: mais 520, de alimentação e suplementação. É de cada animal, então tá certo então. Mais 55.

Estudante 7: mais 55.

Estudante 5: isso mais 55.

Estudante 7: todos esses estão por cada animal.

Estudante 5: isso, todos esses preços estão por cada animal... isso.

Estudante 7: os custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00... isso é separado não é não? Porque não fala dos animais.

Estudante 5: não, depende como a gente vai fazer a função.

Estudante 7: não porque se esse aqui de cima é por cada animal, tem que ser calculado e colocar na função dele x, se refere ao x.

Estudante 5: isso, exatamente.

Estudante 6: o x é a quantidade de animais, isso?

Estudante 7: aí o outro vai ser 900, o arrendamento da propriedade é 3000, a mão-de-obra é 5200 e outros custos 2500. Então esse vai ser nosso primeiro x.

Estudante 5: esse vai ser nosso termo independente da função

Estudante 7: custo fixo... então tá, então a gente vai ter a função

Estudante 5: nem precisa fazer por queijo mesmo, dá pra fazer por vaca.

Estudante 7: 750 x, mais aí a gente faz mais ou menos o custo fixo? Menos né?

Estudante 5: como assim? Não esse aqui é tudo... a primeira função desse parágrafo aqui de cima é só soma, para a gente ter uma ideia de quanto gasta por bicho.

Estudante 7: então vai ser menos o custo fixo, porque daí é por bicho.

Estudante 5: então, mas é que daí não tem lucro né? É diferente.

Estudante 7: é o gasto total.

Estudante 5: é gasto, é só soma, só positivo... depende do jeito, se você fosse fazer com menos, depende do jeito que você trata a informação, a função.... deixa eu ir conferindo.

Estudante 7: deu 750, por animal.

Estudante 5: isso aí.

Estudante 7: e deu 11600 o custo fixo.

Estudante 6: isso mesmo. *Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros.*

Estudante 5: 11600 o custo fixo né? Tá? Então nessa outra parte aqui, o que eu tive de ideia, vamos converter quantos queijos cada vaca fabrica, por dia, então se ela vai produzir 2 quilos de leite, 2 quilos, 2000 dividido por 720... isso que é o problema.

Estudante 6: *com relação a produção e venda: em média cada vaca...*

Estudante 7: produz 2 queijos.

Estudante 5: não, produz 2 kg.

Estudante 6: é 2 kg.

Estudante 5: cada queijo tem 720 gramas.

Estudante 6: é 2 kg de queijo.

Estudante 7: 22 litros de leite, então são... 11 litros para cada...

Estudante 5: para quilo de queijo, cada peça de queijo tem 720 gramas, cada peça.

Estudante 7: então vai dar 2 queijos, quilos.

Estudante 5: não, claro que não Estudante 7. Ela produz 2 quilos de queijo, só que cada queijo...

Estudante 6: cada queijo pesa 720.

Estudante 5: uma peça de queijo não tem 1 quilo.

Estudante 7: eu pensei assim, porque minha tia faz queijo, ela faz 1 kg de queijo, eu não vi.

Estudante 6: agora a gente resolve aqui por regra de 3.

Estudante 5: já fiz, eu vi quanto... aqui 2000 gramas, que é 2 quilos, divido por 720, ela produz em média 2,78, se a gente aproximasse, entendeu? Queijos por dia. Dá pra gente fazer assim, tem problema não, depois aproxima. Então vamos lá... então... deixa eu pensar.

Estudante 6: acho que esse a gente não precisa aproximar por que a outra vaca pode dar...

Estudante 7: cada vaca vai produzir ali.

Estudante 5: ela produz isso aqui por dia, não é? Olha, presta atenção, qual é o preço do queijo? R\$ 36,00, então por dia ela dá isso aqui de lucro. Lembra do sorvete que a gente pegou o preço que era vendido e subtraiu da produção? $750 \times \dots$ só que teria que mudar as variáveis, aqui seria menos 750, opa... isso mesmo, menos 11000, aí a nossa função estaria certinha para lucro, sacou a ideia? Então cada vaca dá 100 reais de dinheiro, não é lucro, aí a gente tem que ver por dia, só que esse custo aqui é dado em que? Ah... então por mês elas dão R\$ 3000,00. R\$ 3000,00 cada vaca, então vai ser 3000 menos 750, menos 11 e 60, vai ser assim a função. Pode fazer aí...

Estudante 6: *considerando o potencial de lucro ou prejuízo.* Vamos lá...

Estudante 5: coloca parênteses aqui, porque esse aqui é mês, tá ligado.

Estudante 7: pera aí, deixa eu ver como vocês pensaram.

Estudante 5: olha Estudante 7...

Estudante 7: a função vai ser 22 vezes x né? Porque 22 é referente a quantidade de leite que cada vaca dá, produz.

Estudante 5: não...

Estudante 7: cada vaca produz 22 litros diariamente.

Estudante 5: não, olha, ela produz 2 quilos de leite, quantas gramas pesa cada peça de leite que ela vende?

Estudante 7: 720.

Estudante 5: então 2 quilos não é 2000 gramas? dividido por 720 gramas, por dia ela produz isso aqui de leite, só que quanto custa cada peça de leite? De queijo... ela produz isso aqui de queijo.

Estudante 7: 36.

Estudante 5: então se a gente multiplica por 36 reais, que é o preço de cada peça... por dia, cada vaca gera R\$ 100,00 de receita. No mês, que é o mês comercial, ela geraria R\$ 3000,00 cada uma de receita. Aquela primeira função que a gente fez é o custo das vacas mensalmente, entendeu? Daí o que a gente faz, a gente pega o custo mensal e subtrai e subtrai do tanto que ela gera de receita. É a mesma coisa do sorvete, o sorvete não custava 8 pila e ele tinha lá 2 reais e pouquinho de custo de produção?

Estudante 6: cada vaca produz diariamente 22 litros de leite.

Estudante 5: 2 quilos de queijo, gerando... é muito relevante a parte escrita pesquisador?

Pesquisador: é uma composição, o áudio e a parte escrita.

Estudante 5: escreve. É até bom para organizar.

Estudante 6: 720 gramas de queijo é vendida por 36 reais, então vou colocar aqui, que o gramas que é o... então...

Estudante 5: então, 200... dá para trabalhar em fração até se quiser, mas aí acho que é demais... 2.77777.

Estudante 6: então $720 \times$ é igual a isso aqui... para a gente saber.

Estudante 5: não, mas eu já falei.

Estudante 6: mas tem que montar a fórmula.

Estudante 5: ah na fórmula... 100 reais.

Estudante 6: se não fica igual na outra, cobrando...

Estudante 5: 50 centavos para todas as casquinhas... tem razão Estudante 6. Essa é a produção diária, mensalmente R\$ 3000,00. Coloca dia, só colocar aqui na frente.

Estudante 6: vou colocar aqui, olha, g... eu vou colocar essa aqui sendo g de x também, você vai entender. Então aqui vai ser 3000 vezes x, que x é o número de vacas.

Estudante 5: não daí você está viajando, não precisa fazer isso. A função que a gente vai usar, que vai estabelecer o lucro ou prejuízo, vai ser, 3000, não é 300 é 3000.

Estudante 6: mas Estudante 5, é isso.

Estudante 5: é 3000, mas você precisa tirar o custo, é 3000 menos 750, por vaca, menos 11600.

Estudante 6: mas quando a gente for montar sistema...

Estudante 5: não precisa montar sistema.

Estudante 6: montar sistema é modo de falar.

Estudante 5: não precisa, se você já monta assim, onde você achar a raiz é o que vai mudar as coisas... não, não faz sistema.

Estudante 6: eu não estou montando sistema.

Estudante 5: você está igualando as funções.

Estudante 7: você está muito autoritário, deixa ele fazer.

Estudante 6: mas Estudante 5, para e pensa, a gente monta uma, isso aqui é o gasto para cada vaca...

Estudante 5: mensalmente.

Estudante 6: e aqui é o lucro que ele vai receber mensalmente por cada vaca.

Estudante 5: Estudante 6, presta atenção, para cada vaca dá quantos reais por mês, dá quantos?

Estudante 6: eu preciso saber...

Estudante 5: quantos reais por mês cada vaca dá? 3000, qual que é o custo por mês de cada vaca? 750, então você faz 3000 menos 750, você vai ter o tanto de lucro que ela vai dar, menos o 11600 que é fixo, independente das vacas.

Estudante 6: (inteligível)

Estudante 5: cara não vai dar a mesma coisa, porque a hora que você passar para cá vai somar.

Estudante 5: aqui eu vou encontrar, aqui eu quero achar o número de vacas que seria necessário para que tipo...

Estudante 5: não precisa, porque na hora que você arrumar a função do jeito que eu estou falando, você achando a raiz dela você já vai saber a quantidade de vaca, a partir de quantas vacas dá lucro ou não.

Estudante 7: eu acho que eu entendi o que o Estudante 6 quis dizer.

Estudante 5: 3000 o lucro que elas dão, cada vaca, menos R\$ 750,00, que é o custo médio de cada vaca, então cada vaca, vai dar de receita R\$ 2250,00 ao mês, menos o custo dos outros aparelhos que não tem nada a ver com as vacas, que tá dando 11600. Essa é a função do... que representa o lucro ou não, se você pega 2250 x, menos 11600, iguala a zero e isola isso aqui, você acha o número de vacas que eles precisam ter para ter lucro mensalmente.

Estudante 6: é o que eu ia achar aqui.

Estudante 5: não é.

Estudante 6: é porque aqui...

Estudante 5: porque na hora que você passar os 750 vai passar somando.

Estudante 6: ah verdade, mas eu ia achar um número equivalente.

Estudante 5: mas você precisa representar algebricamente, essa é a melhor função que representa isso.

Estudante 6: aqui ficaria 2250 x, igual a...

Estudante 5: mesma coisa.

Estudante 6: mesma coisa.

Estudante 5: desse jeito que eu fiz por menos, dava certo do jeito que eu estava fazendo, só muda a interpretação.

Estudante 6: mas fica a mesma coisa.

Estudante 5: não do jeito que você estava fazendo você tinha pegado a minha interpretação de lucro e subtraído do outro jeito, enfim, tá certo. Então eles precisam de mais de 5 vacas, 6 vacas para ter lucro mensalmente.

Estudante 6: a gente precisa saber um ponto que ele pelo menos tenha lucro e quem dá lucro é a vaca, por isso eu queria determinar o número de vacas, era isso que eu tava falando.

Estudante 7: equilíbrio.

Estudante 7: vai fazer o gráfico?

Estudante 5: sim, é um gráfico normal.

Estudante 7: novamente começa do negativo essa função?

Estudante 5: é porque ela tem o custo fixo né? Se não tiver nenhuma vaca produzindo eles têm os custos desse maquinário, dessas coisas aqui.

Estudante 7: vai começar negativo por causa do maquinário, 11600.

Estudante 5: é só que de novo ela vai ser uma função discreta, não tem como ter meia vaca.

Estudante 7: sim.

Estudante 5: daí o número de vacas, a partir de 6.

Estudante 7: uhum.

Estudante 5: dá até para a gente fazer aqui, 1, 2, 3, 4, 5...

Estudante 7: deixa eu colocar os nomes.

APÊNDICE H – TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS REALIZADAS

Transcrição da entrevista com o Grupo 1:

Pesquisador: apenas para iniciarmos, essa conversa não visa confrontar o que foi realizado, ou questionar. Trata-se de um momento para conversarmos um pouco mais sobre as situações. Também, fiquem à vontade para pararem e relembrem tipo, o que foi feito, sem problema ok?

Estudante 1: tá.

Pesquisador: então sobre a situação 1, vocês já resolveram situações ou problemas semelhantes a esse?

Estudante 1: acho que não, não lembro.

Estudante 2: você fala na vida? Na vida mesmo?

Pesquisador: não... pode ser durante o curso, durante te a escola, na vida...

Estudante 2: ah não, sim, durante a escola sim, resolvendo lista de exercícios, principalmente função.

Pesquisador: ata, e se fosse para julgar essa situação em relação ao nível de dificuldade dela?

Estudante 1: essa eu achei fácil.

Estudante 2: é, não sei se a gente acertou né?

Estudante 1: é.

Estudante 2: mas assim, ela não parece nenhum bicho de sete cabeças sabe? Com um pouquinho mais de atenção é bacana, não é tão complicado.

Pesquisador: aproveitar então para comentar, eu não vou ficar procurando tipo, 3 alunos acertaram, 3 erraram, não é isso que estou procurando. Então é minha ideia ficar apontando erros, e pelo que vi o caminho de resolução que vocês apresentaram estava direcionado para uma resolução adequada. Bom, voltando, vocês podem me indicar a resposta final que vocês encontraram para o problema? Ou respostas.

Estudante 2: a gente encontrou... é... deixa eu lembrar se era uma ou duas funções.

Estudante 1: foram duas, né? Uma para o lucro e outra para o custo.

Estudante 2: a primeira né, que é lucro e custo, acho que é sim... É uma para o lucro e outra para o custo, são duas funções. Depois a gente calculou, o que pedia lá.

Estudante 1: a de custo era 2,12 vezes x mais 12110, 2,12 acho que era o valor que ele gastava por sorvete e o 12110 era o fixo, que ele ia gastar todo mês. E a segunda, era 5,88 vezes x, menos 12110, 5,88 era o lucro que ele tinha por sorvete, aí era o lucro menos o custo que ele tinha todo mês né? Então a gente fez assim, aí no caso, acho que eu até anotei em algum lugar... ah que ele tinha que vender 2060 sorvetes para não ter prejuízo, ele não ia ter lucro, mas também não ia ter prejuízo, daí. A única coisa que acho que a gente errou foi o gráfico, que a gente fez contínuo e não era contínuo, que é por valor né? Falamos sobre isso com o pessoal.

Pesquisador: certo, certo, já a gente chega no gráfico. Certo, você começou a comentar sobre a resolução de vocês, vocês poderiam me explicar como vocês fizeram essa resolução?

Estudante 2: ah, tipo de cara lendo o enunciado a gente já consegue perceber que é um exercício de função, que a gente... a gente percebe que tem valores que são constantes e a gente percebe que tem um valorzinho ali que ele vai ser variável, a variável da nossa função. Ai de cara, a gente na hora de elaboração a função a gente percebe que ela é uma função de primeiro grau, uma função afim. A gente tenta ficar pensando em uma relação que vai funcionar, para calcular isso de maneira generalizada.

Estudante 1: aí a gente pegou a quantidade que ele fazia por... por esses valores que ele gastava, 30 reais de leite, dava para fazer 12 litros de sorvete, aí dividimos pela quantidade de

sorvetes que daí era... 30... 300 ml, aí a gente dividiu esses 12 litros por 300 ml, para saber quantos sorvetes dava, se não me engano dava 40... não lembro agora. Ai assim a gente conseguiu encontrar o custo fixo de cada sorvete, para saber... porque ele vendia a 8 reais, descontado o valor do custo fixo, para saber quanto de lucro cada sorvete renderia de lucro para ele daí.

Estudante 2: isso, ele fazia 40 sorvetes de 300 ml.

Estudante 1: isso, achei aqui no de baixo. Então era 1,62 por sorvete, mais 50 centavos da casquinha que dava os 2,12. Daí subtraindo de 8, sobrava 5,88 daí, de lucro por sorvete.

Pesquisador: entendi, e sobre as funções, as soluções que vocês encontraram, o que os elementos que compõem essas funções representam?

Estudante 1: você fala tipo, o que o x é?

Pesquisador: isso, aqueles valores, 12110, 2,12, o que eles representam, cada um deles.

Estudante 1: os 2,12 é o valor do custo por sorvete, o x é a quantidade de sorvete... então, se ele faz 10 sorvetes, vai ser 2,12 vezes 10, e o 12110 era um valor fixo que ele gastava por mês, que são os outros custos da sorveteria daí. E é a mesma coisa no de baixo, 5,88 era o lucro e x era a quantidade de sorvetes.

Pesquisador: entendi, agora passando para o gráfico, o que o encontro dessas duas retas representa?

Estudante 1: Estudante 2 você que fez...

Estudante 2: nesse caso... acho que seria a receita esperada? Trabalhando com lucro e custo?

Estudante 1: na verdade eu acho que é quando der os 2060 sorvetes, né? Que elas vão se encontrar.

Estudante 2: é, que é quando ele alcança essa receita né? Só que não ficou certinho ali né? O desenho.

Pesquisador: certo, vocês comentaram agora a pouco, mas quanto aos valores de x , quais valores ele poderia assumir?

Estudante 1: é que é por sorvete, então não vou ter um sorvete e meio...

Estudante 2: só os inteiros né?

Estudante 1: isso que a gente fez errado, são valores inteiros, 1 sorvete, 2 sorvetes...

Pesquisador: entendi, os inteiros então?

Estudante 1: isso.

Pesquisador: e por que vocês escolheram um gráfico para representar essa parte visual?

Estudante 1: ah, sempre que fala de parte visual, vem gráfico, na nossa cabeça... não pensei em nenhuma outra forma de representar.

Pesquisador: então quando vocês estavam tratando de função, falaram de visual veio o gráfico...

Estudante 1: é, gráfico... poderia ter sido uma tabela também né?

Pesquisador: hum, já voltamos aí então. E vocês escolheram uma grandeza para ser a variável, teve algum motivo para escolher essa grandeza em específico?

Estudante 1: acho que era o mais fácil de representar ali.

Estudante 2: no caso a quantidade? Ou a letrinha que a gente escolheu?

Pesquisador: a... a grandeza na verdade, vocês comentaram que utilizaram a quantidade de sorvetes...

Estudante 1: por que era o que variava né? O meu custo e o meu lucro iam variar de acordo com a quantidade de sorvetes que eu vendesse.

Pesquisador: e vocês chegaram a considerar a possibilidade de adotar alguma outra grandeza como variável?

Estudante 1: não.

Estudante 2: não.

Pesquisador: Certo, e vocês mudariam algo na resolução de vocês?

Estudante 1: ah... não sei... o gráfico eu acho.

Estudante 2: acho que a gente faria uma tabelinha né?

Estudante 1: para ficar mais visível.

Pesquisador: eu ia voltar nisso mesmo, vocês fariam uma tabela? De que forma?

Estudante 1: acho que a quantidade, valor de sorvete, com a quantidade de lucro e gasto que ele ia ter, custos... talvez para alguém que... ele falava que era para facilitar a compreensão, talvez alguém que não entendesse tão bem, talvez com a tabela ficaria mais visível para ver, do que olhando o gráfico.

Pesquisador: quanto aos valores dessa tabela, que valores seriam apresentados?

Estudante 1: acho que não poderia faltar, é o 2060 né? Que é a quantidade que iria zerar e valores acima e abaixo também, eu acho.

Pesquisador: ok, então vamos passar para a situação 2.

Estudante 1: essa eu achei difícil...

Estudante 2: a 2...

Estudante 1: eu demorei a entender ela...

Pesquisador: então já falando do nível de dificuldade dessa questão, como vocês classificariam ela?

Estudante 1: é... até naquela hora eu te chamei e perguntei em quanto tempo ele iria pagar, mas é que eu não tinha entendido que eu poderia estipular um tempo, que daí minha variável seria o tempo. Daí acho que foi isso que a gente fez, usou o tempo como variável, mas demorou a entrar na minha cabeça, que esse 14500 eu ia definir em quanto tempo ele iria pagar, independente se ele ia pagar em 2 anos, 1 ano, de qualquer forma ia entrar no custo... eu demorei a entender por causa disso.

Pesquisador: entendi.

Estudante 1: eu também não entendi... assim eu não consegui usar a parte ele guardava, que ele não usava de kWh.

Pesquisador: só para eu não me perder... Estudante 2 concorda com a questão da dificuldade?

Estudante 2: sim, apesar que o enunciado ali explica a situação... eu também não entendi essa questão de o que guardava, como guardava e tudo mais... mas o enunciado estava explicando. A gente se apegou mesmo aos valores para responder, o enunciado era uma grande... uma situação, uma história de uma situação, aí a gente acaba se apegando aos valores e vendo que contexto esses valores estão empregados para poder tentar resolver o exercício. Então o nível de dificuldade, sim eu achei difícil também.

Pesquisador: e vocês já encontraram situações semelhante a essa?

Estudante 1: eu acho que não. Assim, a gente fez bastante resolução de problemas, coisas assim, mas iguais ou parecidas com essa aqui eu não lembro não.

Estudante 2: igual essa também não.

Pesquisador: e vocês poderiam apresentar a resposta final para o problema? Ou respostas.

Estudante 1: tá a primeira coisa que eu fiz foi somar quanto que ele pagava na que ele já tinha, que era na... não é privada, que é pública, normal. Ai a gente encontrou que ele pagava 292,81 se ele usasse os 350 que era a média lá que tava falando no exercício. Ai ele... se ele fosse pegar a placa solar ele ter que pagar R\$ 104,31, fora a parte do 14500, que aí se ele ia pagar avista ou parcelado, independente. Ai nós usamos isso, nossa variável foi o tempo, então primeiro a gente fez o que ele já tinha, que era R\$ 292,81 vezes a quantidade de tempo, para gente calcular, se fosse em um ano, em dois anos, em seis meses... e a segunda, que seria com a placa, a gente usou o 104,31 vezes o tempo, ai se ele fosse fazer em um ano, seis meses, dois anos, mais o valor da placa dividido pelo tempo... se fosse em um mês, ai seria 104,31 vezes 1, mais 14500, ele ia pagar naquele mês. Mas na verdade o que eu acho que a gente deveria ter feito era tipo, depois de quanto tempo ele ia começar a lucrar para ele, mas a gente não pensou nisso na hora, foi uma discussão com a turma depois. Ai, se ele vai pagar

em um ano, seria 104,31 vezes o tempo, vezes 12 meses, mais o 14500 dividido por 12, que seriam as parcelas, para a gente saber quanto ele ia pagar por mês. Eu lembro que a gente tinha testado aqui, a gente fez em 12 meses e não ia ficar... daí a gente multiplicou por 12, ia compensar a placa, a princípio parecia que ia demorar muito para compensar, mas a placa já estava compensando, a partir dos 12 meses... foi assim que a gente fez.

Pesquisador: já que você comentou desses 12 meses, por que vocês escolheram indicar essa f de 12 especificamente?

Estudante 2: de 12 meses? Por causa do enunciado ali, com base na análise do consumo dos últimos 12 meses, constatou-se... daí a gente fez com a empresa privada e com a placa, qual compensava mais. Mas poderia ser com qualquer tempo. Além dos 12 meses ainda tinha ali o consumo de 350 kWh.

Estudante 1: em média.

Estudante 2: em média, aí já...

Estudante 1: daí a gente usou essa média de 350... claro que vai ter mês que ele vai gastar mais, ou mês que ele vai gastar menos... mas se ele gastar menos em um mês com a placa e no outro mês ele gastar um pouquinho a mais ele não vai pagar esse a mais, porque ele tem em crédito... foi o que eu entendi pelo menos.

Pesquisador: e sobre as duas funções que vocês apresentaram, vocês poderiam me explicar o que os elementos que compõem elas significam?

Estudante 1: o 292,81 é o que ele gasta por mês, na empresa normal, em média, usando esses 350 e o t é o tempo. A gente adotou o tempo como meses, então a gente usou meses, seria meses e porque ele paga mensal. E o segundo, 104,31 é porque ele precisa pagar no mínimo... acho que não é no mínimo, é 100 fixo, né? Então lá ele dá os custos por kWh, então é o 104,31 por 100 kWh, vezes o tempo, o 14500 é o que ele vai pagar na placa, dividido pelo tempo, que daí é o tempo ele vai demorar pagar essa placa.

Estudante 2: a gente só esmiuçou esses valores, assim, deixou todos os valores separadinhos, mas a gente poderia simplesmente ter somado todos os valores que são fixos e deixado uma constante só, também dava certo. A gente deixou tudo separado.

Estudante 1: é também dava.

Pesquisador: e sobre a variável t, quais valores ela poderia assumir?

Estudante 2: valores positivos, é o tempo né?

Pesquisador: sobre o gráfico que vocês construíram, vocês poderiam me explicar como que foi realizada a construção dele?

Estudante 2: perdão?

Pesquisador: vocês apresentaram um gráfico, com duas retas, vocês poderiam me explicar como vocês construíram essas retas? Esse gráfico?

Estudante 2: ah sim, é que ambas as funções... eu não lembro, você lembra se a função com placa ela tinha raiz zero?

Estudante 1: eu não lembro.

Estudante 2: eu lembro que uma tem valor da raiz zero, que tem o valor constante, vezes o t, só ia zerar ali... mas na hora fazia todo sentido.

Pesquisador: certo, e vocês conseguem me falar o que o encontro dessas duas retas representa?

Estudante 1: essa é uma ótima pergunta... na verdade as duas estão saindo de zero, então elas saem as duas de zero, porque pode ser tempo nenhum, nenhum mês... na hora foi o que a gente pensou.

Pesquisador: vocês acham que existe um valor específico que ele economizaria com a instalação do sistema de energia? De geração de energia...

Estudante 1: a gente não calculou, mas provavelmente sim.

Pesquisador: e vocês conseguiria me indicar ou calcular esse valor?

Estudante 1: teria que ser a partir de quanto tempo ele começaria a economizar, porque a gente estava olhando aqui e até um período ele vai pagar um pouco mais caro, dependendo da quantidade de vezes que ele vai dividir esse valor da placa, ele vai pagar um pouco mais caro, mas a gente não calculou a partir de quanto tempo ele começaria a economizar, mas aí daria, se a gente calculasse, daria para calcular. Mas aí acho que precisaria da quantidade de tempo né? Em quanto tempo...

Estudante 2: mas no período de doze meses já compensou a placa.

Estudante 1: sim, já compensou.

Estudante 2: então em um ano já compensou.

Pesquisador: por quê?

Estudante 2: porque o valor ali das funções em um ano já era menor.

Pesquisador: certo, certo, entendi e teve algum motivo para trabalhar com essa grandeza em específico?

Estudante 1: na verdade a gente bateu cabeça para encontrar qual que era a grandeza... aí fez sentido o tempo, por causa do que eu falei mesmo, por causa das parcelas da placa, se ele ia fazer em uma, duas, três, dez vezes... foi por causa da placa.

Pesquisador: e vocês consideraram nesse processo, outras grandezas como variável?

Estudante 1: eu lembro que a gente estava tentando fazer de outra forma, mas não deu certo

Estudante 2: a gente até pensou em fazer a quantidade de kWh, mas não... não ia ficar legal

Estudante 1: é a gente tentou pela quantidade, mas deu errado. A gente tentou fazer funções por partes também.

Pesquisador: e vocês mudariam alguma coisa na resolução que vocês apresentaram?

Estudante 1: acho que não... não sei.

Brian: acho que não... não sei também.

Pesquisador: beleza, então passamos para a situação 3.

Estudante 1: a 3 eu achei muito simplesinha, eu acho que está errado.

Pesquisador: vocês já resolveram situações semelhantes a essa?

Estudante 1: ah essa acho que sim... essa é semelhante à do sorvete né? E o Estudante 2 diz que a gente viu na faculdade, eu não lembro...

Pesquisador: e quanto ao nível de dificuldade dela, como vocês classificariam essa situação?

Estudante 1: se a gente acertou eu achei fácil.

Pesquisador: pelo que vi, vocês seguiram por um caminho adequado, à primeira vista.

Estudante 1: então estava fácil.

Pesquisador: vocês podem me indicar a resposta final para essa situação? Ou respostas.

Estudante 1: tem a função... ele colocou v aqui, mas é a função de custo e a função de lucro...

Estudante 2: é v...

Estudante 1: é v de vaca, né?

Estudante 2: é quantidade a grandeza né? Mas daí a gente colocou v de vaca.

Estudante 1: não a nossa grandeza é a vaca né? A quantidade.

Estudante 2: é a vaca né, mas é a quantidade de vaca né?

Estudante 1: a de custo é 750 vezes a quantidade de vaca, por que 750? Porque a gente calculou lá que ela vai custar 750 reais cada vaca, de acordo com as informações que ele deu no enunciado. Mais 11600 que é os outros custos que ele tem na fazenda, então se ele tiver uma vaca ele não vai ter lucro, ele vai ter prejuízo. Ai a segunda função, é a função de lucro, 2250 vezes a quantidade de vaca, esse 2250 foi calculado de acordo com o queijo, por que cada vaca produz 2 queijos...

Estudante 2: o lucro que cada vaca dava.

Estudante 1: isso, porque o lucro dela era por queijo. Ai cada vaca por dia produzia então R\$ 100,00. Em um mês, a gente jogou um mês de 30 dias, porque no sítio não tem feriado, sábado e domingo, né? Dá para tirar leite do mesmo jeito. Ele vai lucrar então... cada vaca

produz então R\$ 3000,00, descontando o 750, vai dar 2250, menos a quantidade de custo que ele tem que é 11600 fixo. Ai no lucro, eu acho que até coloquei aqui, ele precisa de no mínimo 6 vacas, para zerar, não ter lucro, mas também não ter lucro... ele zeraria daí se ele tivesse 6 vacas. Foi isso, aí a nossa variável é a vaca.

Pesquisador: bom, você acabou de me explicar a resolução, e o que representa cada elemento da solução que vocês apresentaram. Então quanto aos valores de v ... acho que vocês colocaram f de l , mas acho que foi só uma confusão né?

Estudante 2: ah é, que eu tava pensando no lucro.

Estudante 1: ah sim, é v .

Pesquisador: mas os valores de v , quais valores ele poderia assumir?

Estudante 1: valores inteiros, positivos.

Estudante 2: não dá pra ser meia vaca né?

Pesquisador: e vocês apresentaram um gráfico né? O que o encontro dessas duas retas representa?

Estudante 2: que a partir daquele pontinho a gente começa a lucrar, com cada vaca.

Pesquisador: e teve algum motivo de escolher o gráfico como representação visual.

Estudante 1: não, foi só o que veio primeiro mesmo. Ai a nossa variável foi a quantidade de vacas porque dependia da quantidade de vaca para saber quanto que ele ia lucrar ou ter de custo.

Pesquisador: e teve algum motivo para a escolha dessa grandeza como variável?

Estudante 1: é porque era o que variava, para gente encontrar o custo precisava saber a quantidade de vacas e principalmente o lucro, porque não daria para saber quanto ele teria de lucro se não soubesse a quantidade de vaca, então ia depender da quantidade de vaca que ele tinha.

Pesquisador: e vocês consideraram a possibilidade de outra variável, que não vacas?

Estudante 1: esse não.

Pesquisador: e vocês mudariam algo na resolução apresentada?

Estudante 1: o gráfico eu acho.

Pesquisador: o gráfico?

Estudante 1: é.

Pesquisador: como vocês mudariam?

Estudante 1: a gente fez ele contínuo.

Pesquisador: ah sim. E agora uma pergunta mais geral, que engloba as três situações. Nas situações vocês procuraram por um valor que não haveria nem lucro nem prejuízo, por que que vocês buscaram por esse valor?

Estudante 1: ah é que lá falava para entender melhor, quem estivesse vendo entendesse melhor, então acho que tendo um valor para a pessoa saber, tipo, olha eu preciso... no caso do sorvete, eu preciso produzir, no mínimo... e vender no mínimo tantos sorvetes, para eu não ter... pelo menos não ter o prejuízo. E o da vaca também, se eu vou investir nas minhas vaquinhas, eu preciso pelo menos saber quantas eu tenho de comprar para não ter prejuízo com elas. Foi o que eu pensei na hora.

Pesquisador: entendi. Então muito obrigado pela participação de vocês.

Transcrição da entrevista com o Grupo 2:

Pesquisador: Bom, vamos começar. Aqui estão as resoluções, para lembrar o que vocês fizeram. Certo, então primeiro sobre a situação 1, então a primeira pergunta que eu queria fazer, vocês já resolveram situações como essa?

Estudante 4: em didática.

Pesquisador: em didática?

Estudante 4: da água, da conta de água.

Estudante 3: que era aberto né?

Estudante 4: acho que a ideia era bem parecida na verdade, que dava para usar funções... a gente não usou, mas dava... era o intuito da atividade.

Pesquisador: e quanto ao nível de dificuldade para vocês resolverem ela?

Estudante 3: como era a primeira...

Estudante 4: a gente se enrolou um pouco...

Estudante 3: é a gente se enrolou, porque a gente pensou em uma coisa, aí a gente fez isso, aí a gente pensou, ah não, mas isso tem um problema, tem um furo aqui, vamos fazer de outro jeito, aí a gente fazia de outro jeito, mas aí pensávamos, dá errado para gente fazer outra coisa, então a gente se complicou. Daí quando a gente estabeleceu, tá vamos fazer isso...

Estudante 4: a gente teve muita dificuldade também em entender o que era representação... como era a pergunta? Represente... visualmente, isso aí que complicou a gente, porque inicialmente a gente tinha pensado em gráfico, mas depois, poxa, trabalhador comum... acho que a linguagem mais fácil dele entender não seria um gráfico. Então acho que a gente meio que se distanciou de funções aí.

Pesquisador: entendi, então foi a questão da representação visual que tirou vocês de funções?

Estudante 4: sim.

Pesquisador: entendi, vocês podem me indicar a resposta final para essa situação? Ou respostas.

Estudante 4: é o que a gente escreveu na outra folha... acho que é o explica para sua vó.

Pesquisador: certo, e vocês podem me explicar como vocês resolveram a situação? Tomem seu tempo para lembrar.

Estudante 3: tá primeiro a gente viu quanto gastava para fazer doze litros... a gente já faria totalmente diferente hoje, mas é o que a gente fez no dia... a gente viu que gastava 65, por 12 litros... converteu ali...

Estudante 4: que é 40 sorvetes... casquinhas.

Estudante 3: aí queria saber é... a gente queria saber... quanto sorvetes... deu 40 sorvetes. Ai pra que a gente precisava saber quantos sorvetes que ia dar? Pra saber... para fazer o rendimento do mês? Algo assim...

Estudante 4: é... para ver se conseguiria pagar ou se sairia no prejuízo.

Adriane: de que forma, quanto ele precisaria vender... então a gente precisava saber quantos sorvetes era possível fazer com aquele gasto. Daí a gente ficou pensando, mas daí ele vai ser obrigado a fazer sempre 40 sorvetes, por causa daquele valor de 12 litros, ou será que ele pode comprar, por exemplo, menos leite... entendeu? A gente ficou com essa dúvida, porque não tinha né?

Estudante 4: mas a forma que a gente fez, a gente... acho que é o mais carreto, porque a gente considerou o preço por casquinha e não dos 12 fechado, a gente usou o preço final de uma casquinha. Que daí a gente até falou, que é R\$ 8,00 vendido, mas ele tem 50 centavos de prejuízo da casquinha, então é R\$ 7,50 de cada casquinha.

Estudante 3: é.

Estudante 4: aí as 40 casquinhas, R\$ 300,00.

Estudante 3: aí a gente fechou sempre 40, a gente fechou em bloco, então a gente não podia fazer a produção de metade, tinha que ser das 12, dos 12 litros... só que chegou depois e a gente pensou, não vamos deixar assim... a gente se enrolou toda.

Estudante 4: tá, daí a gente chegou à conclusão que ele ganha R\$ 235,00 pelas 40 casquinhas, cada casquinha vai custar daí...

Estudante 3: a gente dividiu...

Estudante 4: 47 sobre 8, em torno de 5,88 que ele vai lucrar em cada casquinha.

Estudante 3: aí a gente fez a funçãozinha.

Estudante 4: é até aqui a gente estava pensando em função.

Pesquisador: então até esse ponto vocês ainda estavam construindo uma função, até esse f de x igual a 47 sobre 8.

Estudante 4: é o valor da casquinha e x é a quantidade de casquinha. Daí a gente encontrou que ele precisaria vender...

Estudante 3: aproximadamente 2061.

Estudante 4: é aí como não tem como vender... 2062 casquinhas ele teria que vender...

Estudante 3: para pagar os gastos variáveis.

Estudante 4: isso.

Estudante 3: só que isso ele não teria lucro nenhum...

Estudante 4: é, só para pagar as contas.

Estudante 3: aí a gente só fez o cálculo, para saber quantos reais ele precisaria ter, para investir na quantidade que ele precisaria vender.

Estudante 4: 3350,75 só para produzir aquelas 2061 casquinhas. E os R\$ 65,00 que é pela produção dos 12 litros, daí a gente achou ali o valor...

Estudante 3: aí a gente falou, quer saber, descarta essa teoria porque a gente teria que refazer tudo para usar ela.

Estudante 4: uhum.

Estudante 3: aí a gente falou, não, deixa quieto, vamos usar a teoria anterior.

Estudante 4: então o ganho vendendo a meta mínima seria de 12114,25, daí a gente fez o explique para sua vó, então o mínimo que os funcionários precisariam vender, que é 2062 casquinhas, o valor que ele gastaria para comprar os ingredientes para produzir essas 2062 casquinhas e a gente deixou uma observação que dessa forma não teria lucro, seria apenas para cobrir as despesas. Colocamos o gasto fixo ali de R\$12000,00 e o ganho que seria com as 2062 casquinhas que é de R\$ 12114,00 que seria um lucro de R\$ 4,00. O custo de produção já descontado do ganho, então como a gente calculou o valor livre da casquinha, então a gente não precisou colocar o custo dos ingredientes junto ali. Aí acho que o primeiro é isso. Na forma de representar a gente distanciou, a gente explicou.

Estudante 3: foi por causa do representante visualmente, porque a gente pensou, como é que a gente vai representar essas coisas que a gente colocou de forma visual... o que que foi a resposta que fez a gente...

Estudante 4: de forma que os funcionários entendem.

Estudante 3: foi isso que fez a gente se distanciar, de forma que os funcionários entendem... daí a gente, gráfico eles não iriam entender, então a gente vai ter que escrever, porque é uma forma que pessoas tipo... uma pessoa leiga que não conhece muito, ela não vai entender um gráfico muitas vezes, ela vai achar bem mais fácil escrito da forma que a gente fez, aí pensamos, ah vamos fazer assim, foi onde a gente se desprende totalmente de função...

Estudante 4: é tanto que nas primeiras a gente ainda escreveu uma função, nas outras a gente nem escreveu mais.

Pesquisador: então pensando nessa função que vocês escreveram, quais valores x poderia ter assumido nessa função?

Estudante 4: seria um domínio discreto né? Não seria os reais, seria os naturais.

Estudante 3: sim.

Pesquisador: e voltando para a questão da representação visual.

Pesquisador: durante a resolução vocês me perguntaram se podiam usar o Excel, como um meio para...

Estudante 4: construir o gráfico, a gente estava querendo construir o gráfico.

Pesquisador: ah, o gráfico?

Estudante 4: é a gente ia usar cores, até tal ponto seria lucro... aí colocar de cores diferentes para colocar os números.

Estudante 3: é não sei, a gente ia fazer uma tabela, puxar para gráfico, porque a gente não estava conseguindo muito entender a ideia de como fazer isso na folha, de uma forma que ficasse clara, aí o Excel ia ajudar nisso.

Pesquisador: aí o uso do Excel era para fazer...

Estudante 3: tabela e gráfico.

Estudante 4: provavelmente a gente ia fazer os dois. A gente ia colocar aquelas informações na tabela que estariam representadas em um gráfico.

Pesquisador: entendi. GeoGebra chegaram a considerar?

Estudante 3: não, pensamos no Excel.

Pesquisador: entendi. Bom minha próxima pergunta era se haviam considerado a construção de um gráfico, mas acho que isso já ficou claro.

Estudante 4: com certeza.

Pesquisador: ok, vocês escolheram como grandeza ali foi o lote?

Estudante 4: a gente discutiu a questão do lote inteiro, eu não lembro muito dessa discussão, mas foi a hora que a gente anulou aquela parte ali, por que a gente anulou?

Estudante 3: porque a gente teria que refazer todas as outras contas...

Estudante 4: se a gente fosse considerar o lote fechado né?

Estudante 3: é.

Estudante 4: a gente ia ter que começar de novo, se fosse considerar que eles teriam que sempre comprar a mesma quantidade do enunciado. Porque dessa forma ele não precisaria.

Pesquisador: e vocês mudariam algo na resolução?

Estudante 4: tudo né?

(risos)

Estudante 4: acho que a gente fugiu um pouco da proposta.

Pesquisador: não.. a proposta era que vocês resolvessem, vocês resolveram...

Estudante 4: só não relacionamos muito com função... basicamente a gente usou o que? Regra de 3 para resolver.

Estudante 3: é...

Pesquisador: certo, então passamos para a situação 2.

Estudante 4: a 2 não tinha uma pergunta, a hora que eu li eu pensei, tá, o que quer aqui?

Pesquisador: bom e vocês já resolveram situações semelhante a essa?

Estudante 4: eu acho que a 1 e a 2 a gente assimilou muito, como sendo parecidas... na verdade isso aqui é uma função né? Porque a quantidade de kWh, esse é constante e esse seria variável que era a quantidade... ah não sei... eu cheguei até a escrever, não sei se foi nessa foi, aqui em cima a função... é basicamente essa função de quanto ele pagaria, de acordo com quanto kWh, aí basicamente isso, a gente substituiu os dados na função, calculamos o preço que ele gastaria, em um mês com a energia da concessionária, depois a gente multiplicou esse valor por 12 e obteve o de quanto ele gastaria em 12 meses, que era média, com energia da concessionária e se ele tivesse o sistema solar, a gente fez a mesma coisa, para saber quanto que ele ganharia só que daí, não tem a taxa fixa, a mesma coisa... não, tem a taxa fixa... o que que não tem? Ah não lembro... enfim eu sei que aqui eu coloquei 100 e aqui eu coloquei 350, eu devo ter tido um motivo para isso... ah ele tem que pagar por no mínimo 100 e aqui ele paga por 350... isso, então ele tem que pagar no mínimo 104 no mês, 1251 em um ano. A economia que ele teria com o sistema por mês é 188, no ano seria 2262, aí... a gente dividiu... a quantidade que ele gastaria para instalar as placas, pela quantidade que ele economiza e obteve que ele levaria 6 anos e 5 meses para pagar a placa... a instalação da placa, com a economia que ele teria na conta.

Estudante 3: só com a economia.

Estudante 4: é só para economia.

Pesquisador: Então a resposta final para o problema seria...

Estudante 4: não tem uma pergunta, qual seria a resposta? Era só para escrever os dados de uma forma entendível.

Estudante 3: é, eu não sei... eu não sei...

Pesquisador: certo...

Estudante 4: basicamente a gente deixou só o explique para sua avó.

Pesquisador: e quanto ao nível de dificuldade dessa questão?

Estudante 4: acho que a parte mais difícil é não ter uma pergunta. A gente tem vários dados, e não tem o que precisa fazer com isso.

Estudante 3: e ela era meio confusa, eu demorei para entender.

Estudante 4: é que a gente tinha muitas informações e no final, tá, mas o que eu faço com tudo isso? Acho que o problema era a falta da pergunta mesmo.

Pesquisador: entendi, e vocês apresentaram aqui a economia mensal, aqui anual, se vocês tivessem que generalizar esses valores, como vocês fariam?

Estudante 4: descrever como uma função?

(pausa)

Estudante 4: qual seria a variável?

Estudante 3: o que varia é o mês?

Estudante 4: porque varia a quantidade que ele gasta... é, no mês que varia a quantidade que ele gasta... com o lucro, como é que eu faria, com o lucro não, com o que ele economiza, como é que a gente faria?

(pausa)

Estudante 4: eu entendi a pergunta, mas eu não sei. Eu sei quanto ele economiza por mês... ah, vezes o tempo, o tempo seria a variável, f de x , 288,50 vezes x , aí o valor que ele economizaria...

Estudante 3: é que em todos a gente acabou excluindo o fixo... a gente considerou só o variável.

Estudante 4: mas seria... não...

Adrien: sim, a gente meio que excluiu o fixo, não tem fixo.

Estudante 4: o que que não tem fixo?

Estudante 3: a gente meio que descontava o fixo já.

Estudante 4: esse não tem fixo, esse não tem, você está falando do sorvete ainda, seria f de x , igual 288,50 vezes x , e x seria o tempo, que dava para considerar construir função também. Domínio... não sei, poderia não ser o discreto... por que pode ser 1 dia, 2 dias, 3 dias... não porque é ao mês... seria discreto também, a gente descobriria a mês.

Estudante 3: como nossa variável é o mês.

Estudante 4: ou a gente faria proporcional por dia, mas ainda seria...

Estudante 3: é que depende, se ele quer saber de gasto, o que está gastando, ai beleza, não é discreto, mas se ele quer saber a conta que ele vai pagar é mês fechado.

Estudante 4: mas não tem como construir uma função para conta, é um valor fixo.

Estudante 3: então.

Estudante 4: só se construir a quantidade que ele vai pagar, assim, em 1 mês, 2 meses, 3 meses, 4 meses... porque é fixo. Na verdade, daria para construir das duas formas, uma função pro tanto que ele vai pagar em 1 ano, 2 anos e o quanto que ele vai... não é lucrar...

(pausa)

Pesquisador: economizar, deixar de gastar.

Estudante 4: isso.

Pesquisador: ok e tem algo que vocês mudariam nessa situação? Nessa resolução.

Estudante 4: talvez escrever as duas funções... depois que a gente conversou com o resto e viu que todo mundo tinha feito função.

Pesquisador: então vamos para a 3.

Estudante 4: essa a gente fez igual à do sorvete.

Estudante 3: extremamente igual à do sorvete.

Estudante 4: cadê a pergunta?

Estudante 3: a gente pegou os custos que ela teria, tipo... e desconsiderou...

Estudante 4: da mesma forma, a gente descontou o custo bruto e deixou só o líquido, de quanto elas produziram e de quanto elas lucrariam, porque a gente descontou os gastos e depois a gente tirou... viu quantas vacas seriam necessárias para cobrir todos os gastos com cada uma. Então basicamente foi a mesma coisa, custo por animal e custo da fazenda, o custo por animal a gente descontou da produção individual, a gente viu que produzia 660 litros de leite cada vaca no mês, e isso daria 60 quilos de queijo por mês, cada vaca, e daí a gente fez a regrinha de 3, que gasta 720... o que a gente fez ali?

Estudante 3: 720 gramas era 36 reais...

Estudante 4: ah isso, 720 gramas, 36 reais, que é do enunciado, 1000 gramas que é 1 quilo, então o quilo que queijo é vendido a 50 reais, 100 reais por 2 quilos, que é a porção diária que cada vaca produz, 2 quilos. Então cada vaca gera 100 reais por dia, aí a gente fez os 60 quilos que cada um produz mensalmente, vezes 50 reais e encontrou que cada vaca produz... rende R\$ 3000,00 por mês, aí a gente descontou o custo, para manter cada uma. Então ela rende 3000, mas gasta 750, então o rendimento líquido é de 2250, por vaca. Para uma função seria...

Estudante 3: considerar diretamente, descontado os 750, igual a gente fez do sorvete. A gente está considerando sempre o lucro só, o líquido.

Estudante 4: não é o lucro...

Estudante 3: é... o que ele vai receber sem descontar nada, mas ainda assim tem a conta da fazenda a ser suprida.

Estudante 4: aqui acho que é para descobrir quantas vacas seriam necessárias para pagar as contas, sem sair no prejuízo. Precisaria de 5 virgula alguma coisa, então 6 vacas.

Estudante 3: então nesse caso, como precisa de 6 vacas, já teria lucro, embutido no mínimo de vacas.

Estudante 4: R\$ 1900,00 de lucro com 6 vacas, pagaria as contas e teria esse lucro. Daí essas 6 vacas, geraria R\$ 2250,00 de lucro por cada vaca, além dessas 6.

Pesquisador: beleza, é...

Estudante 4: agora onde a gente enfiaria função? Deixa eu pensar... a mesma ideia, da quantidade de vacas e o valor que elas rendem, só que essa... talvez dê para fazer por partes, porque até determinado momento não daria lucro... não, mas é mais fácil o valor vezes a quantidade de vacas menos a...

Estudante 3: é que depende o que você quer descobrir, se você quer descobrir o que ele está tendo de lucro, era só fazer x sendo a quantidade de vacas vezes o valor que ela rende, menos a despesa da fazenda, que teria o lucro.

Estudante 4: ou direto o 2250, vezes x , que é o que ganha ali o líquido e daí até um determinado ponto seria para pagar a conta da fazenda, depois disso, só... lucro... mas acho que daria por partes.

Pesquisador: por partes? Você consegue elaborar?

Estudante 3: agora é você, eu não falei por partes não.

Estudante 4: não, só pensei na parte gráfica...

Pesquisador: tudo bem. Vocês já resolveram situações semelhantes a essa?

Estudante 4: a da conta de água.

Pesquisador: pedia para calcular o valor de uma conta de água?

Estudante 4: passava várias taxas e os cúbicos gastos...

Estudante 3: aí gastando de tanto as tanto...

Estudante 4: era uma função por partes, domínio discreto...

Pesquisador: entendi, e quanto ao nível de dificuldade?

Estudante 3: como essa a gente assemelhou muito a primeira, ela foi mais fácil.

Estudante 4: não tinha pergunta, então a gente colocou.... a gente respondeu a mesma pergunta que a gente mesmo criou na cabeça, que é quanto ele precisaria para não sair no prejuízo, ou o mais próximo disso, quanto tempo ele pagaria o investimento... enfim as perguntas que a gente criou.

Pesquisador: e se vocês fossem indicar uma resposta final para esse problema, qual seria?

Estudante 4: no mínimo 6 vacas para não ter prejuízo e a partir disso, R\$ 2250,00 de lucro por cada vaca.

Pesquisador: certo, essa última parte aqui né?

Estudante 3: é... a forma visível a gente não conseguiu elaborar alguma coisa que explique mais que isso.

Estudante 4: é acho que a gente se quebrou muito nisso, porque a gente pensou em explicar isso para os outros.

Pesquisador: e vocês alterariam algo na resolução apresentada?

Estudante 3: mesma coisa que das outras.

Pesquisador: mesma coisa das outras? Depois de conversar com a turma...

Estudante 4: é porque depende, está errado o que a gente fez? Essa é a questão... tipo...

Estudante 3: teria como deixar ela melhor.

Estudante 4: depende do seu ponto de vista, se você quer algo matemático, sim, mas tipo... tipo teria como deixar mais formal matematicamente, que a gente fugiu totalmente quando pensamos em explicar para os trabalhadores.

Estudante 3: fazer um gráfico...

Estudante 4: então depende, se for para explicar para alguém, é só ler que está ali... se as pessoas forem alfabetizadas elas vão entender. Agora gráfico acho que já exige um conhecimento maior para ser interpretado.

Estudante 3: é que a gente vê o quanto um gráfico é fácil de manipular, em jornal, eles manipulam muitos os gráficos, escalas... então muita gente acaba não entendendo, eles olham o gráfico e pensam, ah é isso, com certeza.

Estudante 4: isso que ferrou a gente.

Pesquisador: agora uma última pergunta, nas três situações vocês buscaram ou um valor que ele não teria lucro nem prejuízo ou o valor que ele economizaria, por que vocês procuraram por esse ponto específico?

Estudante 4: é uma boa pergunta, porque na primeira pergunta tinha algo relacionado se teria lucro ou prejuízo e a gente levou essa linha de raciocínio para as outras, que tipo, não tinha qualquer indício do que era para ser feito. Acho que foi isso.

Estudante 3: a gente se baseou na primeira para resolver as outras.

Estudante 4: é que a primeira estava mais fechada, do lucro, do prejuízo, então a gente fez igual para os outros, que na verdade não pedia nada... talvez eu tenha lido errado.

(risos)

Pesquisador: então beleza, muito obrigado pela participação de vocês.

Transcrição da entrevista com o Grupo 3:

Pesquisador: Bom, agora nova vamos fazer uma conversa, para falarmos um pouco mais sobre as resoluções. Qualquer coisa vocês podem olhar, aqui estão as resoluções, tomem o tempo que for necessário.

Estudante 5: tá.

Pesquisador: Então eu vou fazer algumas perguntas para vocês. Primeiro sobre a situação 1, a do sorvete, vocês já resolveram situações semelhantes a essa?

Estudante 5: ah em vestibular... mas assim...

Estudante 7: mas não igual.

Estudante 5: algumas coisas parecidas, mas não a mesma ideia.

Pesquisador: e quanto ao nível de dificuldade, como vocês julgam essa situação?

Estudante 5: eu não achei difícil, mas tinha a questão da pegadinha das casquinhas, que daí o **Estudante 6** viu, por sorte. Mas ela não era difícil, foi questão de atenção mesmo.

Estudante 6: mas vocês tinham errado.

Pesquisador: vocês podem me indicar uma resposta final para essa situação? Ou respostas.

Estudante 6: seria a própria função.

Estudante 5: a forma matemática seria a própria função e a forma geométrica, de representação visual, é o gráfico dela. Eu acho que é a forma mais fácil.

Pesquisador: certo então a resposta final é a função e o gráfico.

Estudante 5: é.

Pesquisador: certo, agora vocês podem me explicar como vocês resolveram?

Estudante 5: vish vamos lembrar...

Estudante 7: analisando os dados do enunciado a gente percebeu que se tratava de algo de função e a gente tentou entender o que seria essa função, é isso né?

Estudante 5: é, a gente viu o custo... é que estava lá, 30 reais de leite, açúcar e tals e produzia... e quantos sorvetes que isso produzia?

Estudante 6: 40.

Estudante 5: 40 sorvetes, aí a gente pegou o preço da casquinha, multiplicou por 40. Ai a gente pegou o valor fechado que daria nessas 40 unidades, dividindo o valor pelas 40, a gente viu o custo de produção de cada um, pegou o preço de venda, subtraiu do custo aí a gente viu o lucro de cada um, de cada unidade vendida. Ai na função a gente atrelou isso com a variável x , que seria a quantidade de sorvetes vendidos, daí subtraiu o preço o custo fixo de maquinário, que não estava relacionado. Foi isso né?

Estudante 7: uhum.

Estudante 6: então o inicial é basicamente isso. Inicialmente pensamos em obter os dados fornecidos na questão, após observar os dados fizemos a soma deles né? Para ver qual era o gasto que ele tinha e quanto... eram 12 litros né? De sorvete... daí a gente descobriu quantos sorvetes dava para fazer, levando em consideração que eram 300 ml né? Descobrimos que dava 40 sorvetes, ali tinha o preço de 8 reais se não me engano, que era vendido cada sorvete... só que daí tinha o preço também dá... de 50 centavos da casquinha de cada sorvete. Daí a gente subtraiu do valor que a gente obteve, a gente pegou 40, multiplicou por 8, deu 320, a gente pegou o 320, descontamos o valor dos gastos e o valor que deu a gente utilizou ele como uma constante da nossa função para multiplicar pelo valor de cada sorvete produzido. E subtraímos dele também o valor fixo que ele teria, que era de 12110. A gente montou uma função para que a gente conseguisse identificar quantos sorvetes eram necessários ele vender, para que fosse possível é... estabilizar, não ficar nem no lucro, nem no prejuízo, no caso seria a raiz da função.

Pesquisador: vocês encontraram a função...

Estudante 5: é...

Estudante 6: para saber quantos sorvetes no mínimo ele teria que vender para que não ficasse no vermelho.

Estudante 5: é que eu acho que até a gente... como era uma função de venda... relacionando venda com lucro, o domínio ele tinha que ser natural, porque não tinha como ele vender menos 2 sorvetes, e não tinha como ele vender meio sorvete... eu não lembro, é que aqui não tá o cálculo, não vai aparecer a raiz, eu não lembro se nesse a gente... acho que ele deu quebrado e a gente teve que aproximar pra frente. A gente achou que era 2060 sorvetes, acho que deu 2059 virgula alguma coisa, aí a gente arredondou para cima para garantir o lucro,

porque se fosse 2059 ele teria prejuízo, então arredondou para cima. Acho que dessa questão era isso...

Estudante 7: 58 virgula alguma coisa.

Estudante 5: não, 59, se não a gente não teria arredondado para 60, era 2059, se não a gente não teria arredondado tanto.

Pesquisador: as demais páginas da resolução estão aqui se precisarem consultar.

Estudante 5: vamos ver, cadê a raiz, vamos ver... é... mais enfim, a gente não ia arredondar tanto.

Estudante 6: é porque a gente sempre arredonda para o primeiro inteiro mais próximo.

Estudante 7: é.

Pesquisador: e quanto a solução que vocês apresentaram e os elementos que compõem ela, o que cada elemento representa?

Estudante 5: 5,88 é o lucro unitário por sorvete e o 12110 é o custo de gasto mensal fixo que não está atrelado a produção, daí por isso que ele fica negativo né?

Estudante 7: dependendo da quantidade de sorvete...

Estudante 6: cada sorvete é vendido por R\$ 8,00 só que na verdade de lucro mesmo ele só obtém 5,88.

Estudante 5: até daria para fazer considerando o preço de venda, depois subtraindo... mas assim ficou mais bonito, mais sintetizado.

Pesquisador: e quanto ao valor de x , quais valores ele poderia assumir?

Estudante 5: é o que a gente falou, são valores naturais, o domínio ele só pode assumir valores naturais, é.. inteiros positivos, naturais.

Pesquisador: por quê?

Estudante 5: porque é x está relacionado as unidades vendidas de sorvete.

Estudante 7: isso e não dá para vender meio sorvete.

Estudante 6: meio sorvete ou menos 1 sorvete.

Pesquisador: e vocês falaram que como resposta para a representação visual vocês apresentaram um gráfico, por que vocês escolheram o gráfico para representar visualmente?

Estudante 5: o gráfico é a melhor forma de representar a função, é a forma que a gente mais aprende, ele dita... ele consegue ditar tendência. Como é uma função linear, é muito tranquilo para gente representar no gráfico, basta a gente traçar dois pontos, no caso a intersecção de y , quando o x é zero, que é o coeficiente linear da função e a gente pegou a raiz, dados dois pontos, na função basta a gente prolongar uma reta ligando eles, no caso a gente só prolongou para a direita, porque o domínio é só natural e a gente não ligou os pontos dela também, porque... por conta da questão do domínio, da restrição do domínio. Mas para a imagem, não tem restrição para a imagem, por exemplo, ela está nos reais.

Pesquisador: tá e vocês escolheram como grandeza os sorvetes, teve algum motivo para a escolha dessa grandeza em específico?

Estudante 5: ah sorveteria né? (risos) aí é mais tranquilo a gente... não... é...

Estudante 7: fazer por unidade de sorvete...

Estudante 5: é por unidade, é mais fácil. E como é lucro, está atrelado com isso né?

Estudante 7: é.

Pesquisador: e vocês chegaram a considerar outra grandeza como variável?

Estudante 5: não, mas daria para fazer ml, você considerar a quantidade de sorvete em ml produzido, mas acho que... ah sei lá... assim fica bom.

Estudante 6: acho que a quantidade de sorvete casou bem porque uma pessoa que as vezes não tivesse o conhecimento... matemático, as vezes trabalhar a função e explicar que aquele x estaria relacionado a quantidade de sorvetes, seria mais fácil de entender visualmente, porque como você pediu na questão... *considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente matemática e represente como ele pode ser apresentado visualmente de*

forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência. Então a gente quis montar uma função que ficasse assim, mais obvio né? Para qualquer pessoa que poderia visualizar aquilo, que poderia utilizar a função como uma ferramenta de cálculo, era só substituir a quantidade de sorvetes no lugar de x , aí ele obteria o lucro ou prejuízo dessa empresa.

Pesquisador: e vocês alterariam algo da resolução apresentada?

Estudante 5: não... assim né... que nem... para nós, função é muito tranquilo de entender né? A gente acredita que para outra pessoa, se explicasse, seria legal... mas assim, talvez se você fizesse uma tabela... você poderia representar em tabela também, só que como é 2000 e poucos sorvetes, acho que... a função é melhor, mais tranquilo.

Estudante 6: é também daria para usar o princípio da PA, progressão geométrica.

Estudante 7: aritmética.

Estudante 5: aritmética.

Estudante 6: aritmética, perdão.

Estudante 5: mas aí acho que seria muito mais difícil.

Estudante 6: sim, exatamente, por isso poderia casar com uma tabela né?

Estudante 5: a PA o problema dela é que você só iria somar o ponto nas unidades vendidas, né? Depois que somar o preço do sorvete você ia ter que... é... subtrair o custo fixo.

Estudante 6: é acho que a função é a melhor forma.

Pesquisador: ok, então vamos passar aqui para a situação 2. As perguntas são semelhantes.

Estudante 5: as questões também (risos).

Estudante 7: essa daí eu demorei a entender... eu já...

Pesquisador: então comêssemos pela segunda pergunta, como vocês julgam essa situação quanto a dificuldade?

Estudante 6: se eu fosse classificar em relação as outras, a primeira eu achei bem fácil, até fizemos com cuidado porque havia a possibilidade da facilidade nos enganar, só que essa questão foi a questão mais difícil entre as três. Eu achei que a do queijo, lá das vacas eu achei muito mais fácil.

Estudante 7: parecida com a primeira.

Estudante 6: é eu montaria, a mais fácil a primeira, a segunda mais fácil seria a do queijo e essa ficaria como a mais difícil.

Estudante 5: para mim... eu concordo com isso, mas para mim ela não apresentou tanta dificuldade porque no meu contexto, lá em casa a gente tem, painel, então eu entendi o que ele estava pedindo, como ia funcionar, questão da taxa fixa, que é a taxa mínima que a transmissora de energia cobra e tal, aí foi mais fazer o cálculo. Mas é uma questãozinha legal.

Pesquisador: e vocês já encontraram situações semelhantes a essa?

Estudante 5: de questão, não.

Estudante 7: no Enem acho que já vi alguma.

Estudante 5: é, é... mas...

Estudante 6: geralmente as questões são mais diretas, tipo, monte uma expressão que representa a produção de um agricultor nesse período de tempo, aí você calcularia utilizando a equação da reta, parábola, assim por diante. Essa eu achei mais... menos direta, ficou mais aberta.

Pesquisador: vocês podem me indicar a resposta ou as respostas que vocês encontraram para essa situação?

Estudante 5: primeiro a gente separou em duas situações, sem as placas e com as placas. Sem as placas a gente pega o consumo de kWh... no caso a gente optou por fazer, ao invés de fazer o custo mensalmente a gente analisou anualmente, porque o contexto... como tenho isso em casa, eu sei que o lucro só vem depois de anos, o retorno. Então a gente fez em ano para ficar melhor. Como um dos problemas que a gente teve da questão é que ele produzia a mais do que consumia, mas não teve indicativo que ele ia monetizar em cima disso, então a gente

desconsiderou isso... a gente entendeu que era só para sempre ia ter produção e ele não ia ter que usar a energia da empresa de eletricidade. Então a primeira parte foi fazer o cálculo de quanto ele ia gastar por ano, de kWh, a gente pegou os 350 kWh por mês que ele consumia, multiplicou por 12, aí multiplicou pelo preço que a gente viu que ele gastava por cada kWh, mais a taxa fixa de iluminação pública, a gente multiplicou por 12 também. A gente somou tudo quanto que ia dar por ano e colocou o x em anos ali. Essa foi a representação...

Estudante 6: era 378?

Estudante 5: era R\$ 21,00, R\$ 21,00 por mês se não me engano... iluminação pública.

Estudante 6: não, mas em relação aos kWh...

Estudante 6: não...

Estudante 6: no outro era 29,18.

Estudante 6: era alguns centavinhos, olha lá, 385 centavos e 36 e pouco aí a gente somou o 0,369 mais 0,385 por kWh, aí viu quanto daria no ano, viu quando de kWh ele ia gastar, multiplicou 350 por 12 e pegou o valor da iluminação pública, multiplicou por 12 também, somou tudo e colocou a variável ano, atrelada ali. Inicialmente a gente ia fazer por mês.

Estudante 6: é.

Estudante 5: daí por mês era uma ideia bem tranquila também, somava os valores do kWh e colocava um termo... coeficiente linear e iluminação pública.

Pesquisador: então como resposta final ficou...

Estudante 5: ficou a anual, você quer que a gente dite a função? A f de x ficou?

Estudante 6: igual a 3517,50 vezes x , onde x é o ano.

Estudante 5: isso, caso a gente estivesse sem a placa solar, com a placa solar foi mais chatinho, porque daí como ele não ia consumir kWh da operadora, não precisava somar o preço dele, entretanto, tinha um custo de 100 kWh, no mínimo, aí a gente pegou...

Estudante 6: e mais...

Estudante 5: e mais a iluminação pública também, que ele tem que pagar. Aí foi a mesma coisa, a gente pegou 100 kWh, que era a taxa mínima, multiplicou pelo valor do kWh e multiplicou por 12, aí a gente tem o custo anual dos kWh. Pegou a taxa mínima multiplicou por 12 tem o custo da taxa mínima.

Estudante 6: somou tudo.

Estudante 5: isso aí a gente associou com x , né? Ai a gente teve que colocar o custo das placas, que foi 14500, aí teve mais isso também.

Estudante 6: ficando como 14500 o coeficiente linear da função.

Estudante 5: é, da segunda função.

Pesquisador: certo, vocês acabaram de explicar como vocês resolveram, então dessas soluções que vocês apresentaram, o que os elementos dela representam?

Estudante 5: o x é o tempo de anos, decorrido, e a f de x vai ser o custo que o cara... que o... eu não lembro quem que é o personagem lá... mas que a pessoa vai ter ao decorrer desses anos, é o custo que ela vai ter, o tanto que ela vai gastar.

Estudante 6: então ali, utilizando aquele princípio da... postulado... não lembro qual postulado, qual axioma... se eu não estou enganado, o quinto axioma que diz que coisas iguais e as mesmas coisas também são iguais entre si. Então o quer dizer isso, se 3517,50 vezes x é igual a f de x , e 1252,80 vezes x , mais 14500 é igual a f de x , então essas duas coisas são iguais entre si. A gente igualou as duas e encontrou um tempo de 6 anos e... 6,4 anos. Daí a gente usou regra de três e transformou em meses e obtemos 76 meses e 24 dias para que ele obter... começasse a dar lucro.

Estudante 5: é, aí porque a gente iguala as funções, é um sistema, para a gente achar o ponto de intersecção entre elas. Daí a interpretação aqui, a gente só teve que tomar cuidado para não misturar as variáveis né? Porque se um a gente fizesse lucro e a outra custo, por exemplo se o f de x em uma fosse lucro e em outra f de x fosse custo, a hora que a gente colocasse no plano

cartesiano nesse sistema, na... representação geométrica... gráfica, ia dar problema, aí a gente só tomou esse cuidado. Ai se você observa, a função em vermelho que é das placas solares, depois desses 6,4 ela fica abaixo, ou seja, o custo dela é menor que sem as placas.

Estudante 6: aí em vermelho ficou o valor com a função que expressava com as placas.

Estudante 5: sem placas.

Estudante 6: o azul...

Estudante 5: o azul é com as placas.

Estudante 6: o azul é com as placas, o vermelho sem. Inicialmente a gente percebeu que sem as placas ficava mais barato até um determinado curto período de tempo. Daí a partir de 6 anos virgula 4 que a gente transformou para 76 meses e 24 dias a gente percebeu que compensava mais utilizar as placas.

Pesquisador: e vocês acham que existe um valor que ele economizaria com esse sistema de geração de energia?

Estudante 5: ah, não calculamos, daria pra calcular, mas o que a gente precisaria nesse caso, qual período? Se a questão perguntasse em 7 anos, era só substituir na função a gente ia ver o custo de cada um e fazer a diferença. Mas como não há a gente só analisa a partir de qual período ele começa a ter vantagem. Se não me engano não tinha perguntando...

Estudante 6: tinha assim... ele falava 5 anos, mas acho que esses 5 anos era algo... que é o prazo que ele tinha para terminar de pagar a placa eu acho, o investimento da placa.

Estudante 7: é a questão...

Estudante 5: dele ter parcelado. Não esses 5 anos é aquela questão que a gente falou, o que ele produzir a mais vai ser armazenado por 5 anos, mas o excesso só é utilizando quando não produz e a quantidade que ele produzia em média era maior que o consumo mínimo.

Estudante 6: acho que essa ficou visível, talvez se a gente reescrevesse... mas deu para perceber que... levando em consideração que aqui em cima a gente fez, f de x é igual a 3517,50 é quando ele não tinha as placas, em vermelho, daí no gráfico para seguir intuitivamente a gente utilizou também a representação das retas em vermelho também.

Pesquisador: e teve algum motivo para escolha dessa grandeza em específico ser adotada como variável?

Estudante 5: o ano? É por conta da experiência pessoal que eu sabia que ia ser muitos meses, porque geralmente a gente calcula em anos, o retorno, aí para facilitar ficou em anos. Ai depois a gente retorna para meses só para ficar bonitinho.

Estudante 6: aí como a gente pode perceber com as placas ele teria já um custo inicial de 14500, então inicialmente sairia mais caro ter as placas, mas ao longo do tempo, a gente vê que a placa era vantajosa, porque era um investimento.

Pesquisador: e vocês consideraram adotar outra grandeza como variável?

Estudante 5: ah poderia fazer em consumo de kWh, mas como ia atrelar isso com a taxa fixa mensal, ficaria mais chato.

Estudante 7: ah, daria, mas daria mais trabalho, é um caminho mais longo.

Pesquisador: beleza, e vocês alterariam algo na resolução apresentada?

Estudante 6: não.

Estudante 5: não.

Pesquisador: não? Beleza, então passamos para a 3. Já resolveram situações semelhante a essa?

Estudante 5: na questão 1 (risos).

Pesquisador: justo.

Estudante 6: eu achei a questão 3 mais singular com relação a questões vistas em alguns vestibulares. Porque aqui... esse tipo de questão não busca atrelar algo a realidade dos alunos e aqui e eu vejo essa questão como uma questão que seria bem utilizada na minha sala de aula, na cidade na qual eu trabalho, pois (Mamborê) é uma cidade extremamente agrícola,

extremamente... agora vamos dizer assim, então eu acredito que seria uma questão bem interessante para eles... poderia casar com a realidade deles. Alguém quer ler o enunciado pra gente lembrar? O que foi feito.

Estudante 7: eu estou lendo pra mim lembrar.

Pesquisador: pode ler.

(pausa)

Pesquisador: e quanto ao nível de dificuldade dessa questão?

Estudante 5: fácil.

Estudante 6: fácil, foi a que a gente menos quebrou cabeça para resolver... quer dizer, menos a do sorvete... a do sorvete acho que foi menos ainda.

Estudante 5: não, mas a do sorvete teve a questão da casquinha... como era a primeira questão, no meu caso, a gente não estava com essa malícia de se atentar ao preço a cada unidade vendida, que antes tinha o preço do total. Aqui a gente já pegou a malandragem que é o que... que aqui a produção é de 1 quilo de queijo e cada peça de queijo era 720 gramas, então essa seria... dá pra gente pensar que seria a semelhança com a primeira, com a casquinha, que tinha que se atentar com esse detalhe.

Estudante 6: bom, então inicialmente a gente começou fazendo o que? Montando uma... uma coluna com a tabela dos custos... dos custos mensais que ele tem com cada animal. Então ali com produto médico ele tem R\$ 75,00, alimentação R\$ 520,00, outros custos... daí fixo ali a gente teria manutenção, que é R\$ 900,00, a propriedade de R\$ 3000,00, a mão-de-obra de R\$ 5200,00 e outros custos R\$ 2500,00. Então a gente precisava entender em média... quanto cada vaca custava.

Estudante 5: custava, então depois disso a gente viu quanto uma produzia, quanto leites... quantos queijos daria para fazer a cada produção diária, fez a venda, com o custo... é quanto eles receberiam diariamente com aquelas vacas e multiplicou por 30, aí a gente fez a diferença dos custos para obter o lucro que eles iam obter com o queijo, daí foi a mesma ideia do sorvete, achamos nosso coeficiente angular da função, junto com a variável, onde a variável seriam os meses, aliás, a quantidade de vacas e subtraímos... eu não lembro o que a gente montou aí, qual era a interpretação.

Estudante 7: eu nunca sei, é coeficiente angular ou angular?

Estudante 5: é subtraíu, que? O angular é que está com o x.

Estudante 6: que marca a inclinação da reta.

Estudante 7: eu sempre confundo.

Estudante 6: e o linear é onde a reta corta o eixo das ordenadas.

Estudante 5: daí a gente subtraíu os custos fixos dele, porque a gente estava fazendo o lucro né?

Estudante 6: é.

Estudante 5: aí, ali está 2250 porque... deixa eu ver... o que a gente fez ali?

Estudante 7: está bem bagunçado.

Estudante 6: está bem bagunçado, é que na verdade, assim que a gente listou, a gente pegou o custo mensal que ele teria com cada vaca, daí acho eu que isso, se não estou enganado, é...

Estudante 5: x é o número de vacas.

Estudante 6: é, mas e aqui? Será que não foi esse? Essa aqui é a função final, mas aqui a gente já tinha subtraído o custo das vacas, para a gente obter qual era o lucro, porque a gente tem que a vaca acho que conseguem render 3000, acho que era, as vacas produziam 3000 por mês, só que ele tinha um custo mensal de 750 para cada vaca, então a gente obteve que...

Estudante 5: 2250 de lucro.

Estudante 6: 2250, essa função mesma, daí mais o custo fixo, porque...

Estudante 5: menos né?

Estudante 6: é menos o custo fixo, porque é o lucro que ele teria.

Estudante 5: aí a função fica, o lucro com a quantidade de vacas né? No mês.

Estudante 6: é em um mês.

Estudante 5: aí a gente acha a raiz da função, deu 5,15, como não tem 5,15 vacas, a gente arredondou pra cima, porque se arredonda-se para baixo ele teria prejuízo no mês.

Estudante 6: aqui também marca a passagem que a gente fez a regra de três né, para encontrar... o que?

Estudante 5: ali foi a regra de três para encontrar a quantidade de peças de queijo produzidas por vaca.

Estudante 6: na verdade era o lucro de cada vaca, olha, aqui está quilos por reais, então é 720, que eu acho que era...

Estudante 5: é por peça.

Estudante 6: o peso do queijo, tudo isso é igual a 36 reais, a gente montou uma regra de 3 com as variáveis quilo e queijo e... se cada vaca desse 2000 litros.

Estudante 5: 2000 gramas.

Estudante 6: é, 2000 gramas... a gente fez a regra de 3, aí obtive que cada vaca dava em média R\$ 100,00 por dia, aí por isso que daí dava 3000 por mês.

Estudante 5: dava R\$ 100,00 por dia, em um mês, 3000.

Estudante 6: por isso que era 3000 lá. Então ela lucrava R\$ 3000,00 considerando que ele trabalha todo dia.

Estudante 5: ele tinha receita de R\$ 3000,00 e lucrava 2250.

Pesquisador: e a resposta final para esse problema?

Estudante 6: acho que seria a função como uma forma de estabilidade né? Para entender qual...

Estudante 5: a gente não fez função? A gente fez.

Estudante 6: fez, olha aqui a função...

Estudante 5: para fazer o gráfico... Ah a resposta final da parte matemática é 6 vacas, que vem da função.

Estudante 6: aqui a gente percebe o coeficiente linear, menos 11600 que é o custo fixo e se ele não produzir nada ele vai ter esses custos. E daí a gente percebe que ele tá pontilhado, a gente não ligou os pontos porque ela é discreta, porque igual o Estudante 5 faltou, a gente não tem 5,15 vacas.

Estudante 7: não tem meia vaca.

Estudante 5: olhando aqui agora, o único erro é que a bolinha do 6 está em cima do x, ela tinha que estar um pouquinho acima, ela não é a raiz. O ponto que está em x é o 5,15.

Pesquisador: compreendo. Vocês me explicaram como resolveram, e sobre a solução, o que que cada elemento dessa função representa?

Estudante 6: 2250 que é o coeficiente angular vai representar o lucro de cada vaca, por mês, x é o número de vacas e o coeficiente linear que é o menos 11600 seria o custo fixo. Então a gente montou uma função que relacionava lucro com as despesas.

Estudante 5: com o número de vacas.

Pesquisador: é quais valores x poderia assumir?

Estudante 5: reais, opa, naturais, perdão.

Pesquisador: por quê?

Estudante 5: porque não tem como ter 5,15 vacas produzindo leite, saudáveis.

Estudante 6: complicado né.

Pesquisador: e teve algum motivo para terem escolhido essa grandeza como variável?

Estudante 5: ah sim, porque ele não falou quantas vacas existiam né? Então ele só deu quanto cada uma produzia em média e o custo fixo...

Estudante 7: poderia ser feito por queijo também.

Estudante 5: é poderia ser por queijo também, mas... mas é...

Estudante 7: mais fácil a quantidade de vacas porque a gente já tinha visto a quantidade de litros que elas produziam.

Estudante 6: vamos lá, *considerando o potencial de lucro ou prejuízo com a venda dos queijos, represente-o matematicamente e apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.*

Estudante 5: é talvez...

Estudante 6: a gente volta na tecla, que a função talvez seja a melhor forma, que ela acaba servindo como um dispositivo, a gente joga o valor ali e a gente encontra se tá no... se deu negativo, então prejuízo, se deu positivo...

Estudante 5: olhando agora, se a gente fizesse por queijo, seria melhor na questão do lucro... mas por vaca dá pra converter.

Pesquisador: algo que alterariam na resolução?

Estudante 6: não.

Estudante 5: não.

Pesquisador: agora uma última questão para finalizarmos, nas três situações vocês buscaram por um valor em que não havia nem lucro, nem prejuízo, por que vocês buscaram por esses valores?

Estudante 5: nessa questão aqui?

Pesquisador: nas três.

Estudante 6: é que a gente precisa obter a raiz da função, ou seja, qual é aquele ponto que marca o crescimento ou decréscimo da função. Para saber quanto em média ele teria que vender de sorvete, para que ele se mantenha, quanto que ele teria que ter de vacas, produzindo, considerando o quanto uma vaca produz.

Estudante 7: a gente fez um orçamento praticamente né? O quanto teria que ser feito para que ele pudesse render.

Estudante 5: porque que a gente não fez desse jeito, porque que foi essas variáveis, porque na questão do sorvete, o lucro era condicionado a quantidade de sorvetes vendidas, o kWh, condicionado ao tempo, na verdade consumo, a gente fez no tempo, aqui o tanto de vaca que produziria... é o que estava...

Estudante 6: é que eu acho é que trabalhar com números inteiros positivos é mais... facilitaria de certo modo.

Estudante 7: ah o queijo você consegue vender metade de um queijo...

(risos)

Pesquisador: mas voltando para a questão das raízes, por que que vocês procuraram pela raiz?

Estudante 5: porque era onde tinha essa alternância de lucro e prejuízo. Como a nossa imagem, na maioria dos casos era o... no segundo caso era o custo, mas no primeiro e no terceiro era lucro, quanto a gente acha a raiz de uma função que o coeficiente angular dela é positivo, a partir daqueles valores é onde o nosso lucro seria positivo, que é no final das contas o que todo mundo está procurando... lucro positivo.

Estudante 7: é que você começa pagando aquilo que você está investindo, depois...

Estudante 5: é, faz mais sentido...

Pesquisador: entendi, então, muito obrigado pela participação de vocês.