UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

UMA INVESTIGAÇÃO DE OBJETOS GEOMÉTRICOS NA CONSTRUÇÃO DO FRACTAL TETRA-CÍRCULO

Raíne Cristina de Oliveira Martins

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PRPGEM

PRPGEM

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR

Universidade Estadual do Paraná

Campo Mourão,

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

UMA INVESTIGAÇÃO DE OBJETOS GEOMÉTRICOS NA CONSTRUÇÃO DO FRACTAL TETRA-CÍRCULO

Raíne Cristina de Oliveira Martins

Orientadora:
Profa. Dra. Mariana Moran
Apoio: Capes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Abril de 2024

Martins, Raíne

Uma investigação de objetos geométricos na construção do fractal Tetra-Círculo / Raíne Martins – Campo Mourão – PR.

108f.: il.

Orientador: Mariana Moran

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná, 2024.

Referências Bibliográficas: f. 99 - 106.

1. Educação Matemática. 2. Teoria Antropológica do Didático. 3. Geometria dos Fractais. 4. Software Scratch. I. Moran, Mariana. II. Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. III. Uma investigação de objetos geométricos na construção do fractal Tetra-Círculo.

Raíne Cristina de Oliveira Martins

UMA INVESTIGAÇÃO DE OBJETOS GEOMÉTRICOS NA CONSTRUÇÃO DO FRACTAL TETRA-CÍRCULO

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Mariana Moran
Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná/Universidade Estadual de Maringá

Veridiana Rezende – Examinadora Interna
Universidade Estadual do Paraná

Dulcyene Maria Ribeiro – Examinadora Externa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Resultado: Aprovada

Campo Mourão
Abril/2024

“Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui.”

Platão

Aos meus pais por serem luz nos meus dias mais sombrios.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Mariana Moran, pelo carinho e incentivo desde o primeiro dia da graduação, e desde o início desta pesquisa a qual me acolheu juntamente com as minhas ideias e não mediu esforços para me apoiar em todas as dificuldades do percurso, pelo entusiasmo em nossas descobertas e ideias, pelas conversas que acalentaram meu coração nos momentos de desespero. Sou muito grata por ter a sorte de ser sua orientanda, e pelo aprendizado adquirido ao longo dessa caminhada. Mariana é um dos melhores seres humanos o qual tive a honra de conviver, e a agradeço por acreditar em mim.

À minha família, especialmente minha mãe e meu pai, Jane e João, pela confiança e suporte que foi fundamental para que eu conseguisse pleitear e continuar no mestrado.

Aos membros da banca, Professora Doutora Veridiana Rezende e Professora Dulcyene Maria Ribeiro, pelo olhar criterioso, o auxílio e o cuidado que tiveram durante o processo de construção da pesquisa.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria - GPEG, pelas contribuições que colaboraram para a melhoria do projeto de pesquisa.

À Professora Doutora Talita Secorun, pela fé e incentivo desde o período da graduação.

Ao meu colega Vinicius Romano, pela amizade e parceria, essencial para o desenvolvimento e conclusão desta pesquisa, sempre disposto a ajudar no que fosse necessário.

Aos amigos e a todos que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da agência de fomento CAPES

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar objetos geométricos que podem ser mobilizados na construção do fractal Tetra-Círculo, no software Scratch. Tal objetivo foi elaborado com o intuito de responder ao seguinte problema de pesquisa: Quais possíveis objetos geométricos são mobilizados durante a construção do fractal Tetra-Círculo? O fractal Tetra-Círculo consiste na construção de uma circunferência com quatro pontos equidistantes, que a divide em quatro arcos congruentes, os quais contém o centro de novas circunferências, dispostos de forma que as novas circunferências possuem metade do raio da circunferência inicial. Por meio deste fractal, é possível de serem representados diferentes objetos geométricos, tais como circunferências, cordas da circunferência, ângulos, retas tangentes e secantes. Esta pesquisa tem uma abordagem qualitativa, com aporte teórico e metodológico fundamentados nos princípios da Teoria Antropológica do Didático (TAD), teoria que investiga o homem perante o saber matemático. A TAD, dentre outras coisas, considera todo trabalho matemático como resposta a um tipo de tarefa e possibilitou o estudo de possíveis objetos geométricos. Essa teoria permitiu a elaboração de uma Organização Praxeológica, de forma a modelar um Modelo Praxeológico de Referência. A idealização deste modelo possibilitou a identificação de objetos geométricos durante a exploração do objeto fractal Tetra-Círculo e a identificação de habilidades e objetos de conhecimento, que compõe as unidades temáticas de “Geometria” e “Grandezas e Medidas”, estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para o Ensino Fundamental II.

Palavras-chave: Educação Matemática; Teoria Antropológica do Didático; Geometria dos Fractais; Software Scratch.

ABSTRACT

This research aims to investigate geometric objects that can be mobilized in the construction of the Tetra-Circle fractal using the Scratch software. This objective was formulated to address the following research problem: What possible geometric objects are mobilized during the construction of the Tetra-Circle fractal? The Tetra-Circle fractal involves constructing a circle with four equidistant points, dividing it into four congruent arcs, each containing the center of new circles. These new circles are arranged such that they have half the radius of the initial circle. Through this fractal, different geometric objects can be represented, such as circles, circle chords, angles, tangent and secant lines. This research adopts a qualitative approach, with theoretical and methodological support grounded in the principles of the Anthropological Theory of Didactics (ATD), which investigates the relationship between humans and mathematical knowledge. Among other things, ATD considers all mathematical work as a response to a type of task and enabled the study of possible geometric objects. This theory allowed for the development of a Praxeological Organization to model a Reference Praxeological Model. The conceptualization of this model facilitated the identification of geometric objects during the exploration of the Tetra-Circle fractal and the identification of skills and knowledge objects, which are part of the thematic units of "Geometry" and "Quantities and Measures," as established in the National Common Curricular Base (BNCC) for Middle School.

Keywords: Mathematics Education; Anthropological Theory of Didactics; Fractal Geometry; Scratch Software.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas;

PRPGEM Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática;

BNCC – Base Nacional Comum Curricular;

CREP – Currículo da Rede Estadual Paranaense;

DCE – Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná;

OD – Organização Didática;

OM – Organização Matemática;

OP – Organização Praxeológica;

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático;

TAD – Teoria Antropológica do Didática;

MER – Modelo Epistemológico de Referência;

MPR – Modelo Praxeológico de Referência;

t – Tarefa;

T – Tipo de Tarefa;

τ – Técnica;

θ – Tecnologia;

Θ – Teoria.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante o cenário causado pela pandemia do Coronavírus (COVID-19) e as restrições estabelecidas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), alteraram abruptamente a realidade da educação em todos os níveis no Brasil. Professores e estudantes foram compelidos a utilizar tecnologias, exigindo mudanças nas rotinas diárias de trabalho e estudo, mesmo diante da falta de condições básicas para sua execução. Ao me [1] deparar com essa situação, tornou-se necessário adaptar os trabalhos em andamento neste período. Uma das adaptações foi a alteração de metodologias de pesquisas previamente planejadas com materiais manipuláveis em sala de aula, de forma presencial, as quais, considerando o panorama, se tornaram inviáveis. Pesquisas anteriormente planejadas para serem desenvolvidas presencialmente, foram adaptadas para o ambiente *online*. Nesse momento, estabeleci contato com o *software* Scratch, o que despertou meu interesse em explorar esse programa e suas possibilidades no ensino de Geometria, em especial a dos fractais.

Ao considerarmos o ensino de Geometria, Lorenzato (2008) defende a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitador para aprendizagem, destacando a utilização e manipulação de objetos para fazer associações. Passos (2009) salienta a importância de abordar esses recursos no processo de formação inicial do professor, uma vez que os instrumentos de desenho contêm, empiricamente, os conceitos matemáticos que os estudantes devem compreender. Portanto, é essencial que o professor tenha um bom conhecimento do material que utiliza, assumindo, assim, um papel de mediador, na construção do conhecimento do estudante.

No contexto do ensino, o uso da tecnologia, para construções geométricas, se estabelece como um possível aliado ao desenvolvimento do pensamento matemático. Especificamente, ao tratarmos de Geometria, Tashima e Silva (2008) apontam que o fraco desempenho dos estudantes nessa área, muitas vezes, resulta da utilização de práticas que não atendem às suas expectativas. Carneiro e Déchen (2006, p. 2) afirmam que "o desenvolvimento de conceitos geométricos é fundamental para a capacidade de aprendizagem e representa um avanço no desenvolvimento conceitual do aluno".

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica o estudo das Geometrias Euclidianas durante o Ensino Fundamental, prevendo competências gerais e específicas (Brasil,

---

[1] A fim de descrever percursos pessoais e profissionais da pesquisadora, utilizamos os verbos conjugados na primeira pessoa do singular. Posteriormente a essa descrição, passamos a utilizar a primeira pessoa do plural considerando a pesquisadora e sua orientadora como autores do presente trabalho

2018). Ao considerarmos as geometrias não euclidianas, estas não estão presentes na BNCC, mas se fazem presentes nos livros didáticos, conforme apontado por Pescini (2021) e Rodrigues (2023) ambas realizam uma análise de coleções aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), Rodrigues (2023) observa que a geometria dos fractais está presente em livros didáticos analisados, sendo utilizada como mediadora para o ensino de diferentes objetos de conhecimento da matemática.

Uma das motivações desta pesquisa é possibilitar uma aproximação de estudantes e futuros professores com a Geometria Fractal, por meio de uma proposta de sequência didática com o Scratch. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE):

> Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da "regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades (PARANÁ, 2008, p. 57).

Considerando o Referencial Curricular, para o Ensino Médio do Estado do Paraná, há indicação de ensino deste assunto, haja visto que, neste documento, argumenta-se que o estudo dos fractais "permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades" (PARANÁ, 2021, p. 541).

A geometria dos fractais está relacionada à beleza e aos padrões da natureza, tendo suas primeiras menções atribuídas a Benoit Mandelbrot, matemático polonês, que a relacionou ao estudo de formas irregulares, salientes e fragmentadas presentes na natureza. As características fundamentais de um objeto fractal são a autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita (BARBOSA, 2005).

Este trabalho realiza um estudo acerca da geometria dos fractais, com foco no fractal Tetra-Círculo, visando diversificar os fractais habitualmente estudados. Utilizando a Teoria Antropológica do Didático (TAD) como aporte teórico e metodológico, foi desenvolvida uma Organização Praxeológica (OP), composta por uma Organização Matemática (OM) e uma Organização Didática (OD), formando um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) voltado à exploração de objetos geométricos presentes nas indicações da BNCC (2018) para o componente curricular Matemática, em particular as unidades temáticas de "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Durante a construção do fractal Tetra-Círculo, esses objetos geométricos serão explorados por meio do *software* Scratch.

De acordo com Chevallard (1999), uma OD está relacionada ao modo como devemos estudar a construção de uma realidade matemática, enquanto uma OM consiste na exploração de um quarteto praxeológico, composto por um tipo de tarefa que, quando resolvida, exige a mobilização de uma técnica, que tem sua eficácia justificada por uma tecnologia que, por sua vez, deve ter uma teoria que apoie o uso dessa tecnologia. Por meio dos quartetos praxeológicos, podemos explorar objetos geométricos representados nas construções e, neste caso, o faremos durante a construção do Tetra-Círculo.

Portanto, esta pesquisa investiga, por meio do aporte teórico e metodológico da Teoria Antropológica do Didático, uma OP que possibilita explorar objetos geométricos com a construção do fractal Tetra-Círculo. Para essa construção, foi desenvolvido um tutorial da construção e estabelecidas as OPs, visando identificar a mobilização de técnicas relacionadas à construção e, posteriormente, à estruturação de um MPR, que permitiu a identificação de objetos geométricos relacionados.

A presente pesquisa se caracteriza como qualitativa, pois conta com um envolvimento direto da pesquisadora, no processo de produção e interpretação dos dados, com o intuito de responder ao seguinte problema de pesquisa: Quais possíveis objetos geométricos são mobilizados durante a construção do fractal Tetra-Circulo? E o objetivo de investigar objetos geométricos que podem ser mobilizados, durante a construção do fractal Tetra-Círculo no *software* Scratch. Consideramos como objetos geométricos reta, arco, ângulo, raio de uma circunferência, entre outros. Os dados foram produzidos por meio de uma análise *a priori*, de tarefas construídas pela pesquisadora e, posteriormente, desenvolvidas e analisadas em uma estrutura praxeológica.

Este estudo está estruturado em quatro momentos: Encaminhamentos teóricos; Encaminhamentos metodológicos e Desenvolvimento da pesquisa; Análise dos dados; e Considerações Finais.

No capítulo de Encaminhamentos teóricos, discutiremos conceitos sobre a Geometria, seguido pela geometria dos fractais, seguidos pela explanação do objeto fractal Tetra-Círculo, sobre o *software* Scratch e seu uso, que evidenciam as ferramentas que compõem o software e suas funcionalidades. Em continuidade, destacaremos alguns constructos teóricos da Teoria Antropológica do Didático, dentre eles as noções de Organização Matemática, Organização Didática e Organização Praxeológica. Após, apresentaremos uma revisão de literatura a respeito da TAD, no contexto do ensino de Geometria. Por fim, abordaremos elementos da BNCC, sua finalidade e sua estrutura.

No capítulo de Encaminhamentos metodológicos e Desenvolvimento da pesquisa, descreveremos, em um primeiro momento, a caracterização da pesquisa, seguido pelo problema de pesquisa e seus objetivos, e uma relação com o Modelo Praxeológico de Referência, que possibilitou a modelização da presente proposta. Além disso, descreveremos o contexto, os procedimentos e os instrumentos utilizados para a análise dos dados.

No que diz respeito ao capítulo de Análise dos dados, apresentamos uma análise que envolve uma análise didática e uma análise matemática das praxeologias desenvolvidas, resultantes da construção do objeto fractal no *software* Scratch.

1. ENCAMINHAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, discutiremos alguns elementos da Geometria em um âmbito histórico e os postulados estabelecidos por Euclides, seguido da geometria dos fractais juntamente com o objeto fractal de estudo o fractal Tetra-Círculo e suas possibilidades. Em seguida, discutiremos a utilização do *software* Scratch, sua estrutura e possibilidades, quando relacionado ao ensino. Abordaremos, posteriormente, os constructos teóricos da Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard (1998), teoria que possui contribuições para o estudo da Didática das Ciências e Matemática e constitui o aporte teórico que norteou esta pesquisa. Seguiremos com uma revisão de literatura a respeito da TAD, no contexto do ensino de Geometria. Por último, apresentaremos a BNCC e suas características.

1.1. Sobre a Geometria e o seu início

A Geometria é um campo da Matemática que estuda as formas, estruturas e propriedades do espaço. Sua origem remonta a milhares de anos, com as primeiras ideias geométricas manifestando-se na necessidade do homem de resolver problemas, como construções de casas e monumentos, delimitação de terrenos e plantações, entre outros. A palavra Geometria vem do grego *Geometrein. Geo* corresponde a terra, e *metreon*, corresponde a medir, então sua tradução literal é: "medir a Terra".

> [...] os registros mais antigos de atividades humanas no campo da geometria de que dispomos remontam à época dos babilônios há talvez cerca de cinco mil anos e foram aparentemente motivadas por problemas práticos de agrimensura (GORODSKI, 2002, p.2).

Apesar das divergências, sobre o surgimento da Geometria, relatos posicionam seu surgimento a partir de problemas do cotidiano. Lorenzato (2008) aponta que:

> A cronologia da construção do conhecimento geométrico indica que o homem começou a geometrizar por conta da necessidade de reconstruir limites (fronteiras) em terras, de construir artefatos ou instrumentos, de construir moradias, de navegar, de se orientar, etc. e na realização dessas atividades a medição desempenhou uma função importante (LORENZATO, 2008, p.43).

Com isso, compreendemos que sua importância foi crescendo, juntamente com sua utilidade em diferentes âmbitos da sociedade.

Em meados do século VI A.E.C, matemáticos gregos, como Tales de Mileto e Pitágoras, iniciaram o processo de estabelecer os primeiros axiomas e postulados da Geometria como a base para o desenvolvimento da Geometria Euclidiana. Posteriormente, no século III A.E.C., Euclides publicou o livro *Os Elementos*, que se tornou a principal obra sobre Geometria da época e até da atualidade. Nesta obra, Euclides apresenta definições, postulados e teoremas que estabelecem as bases da geometria euclidiana clássica, que é todo o conhecimento geométrico da época, apresentado de uma maneira axiomática dedutiva, contendo as descobertas de vários pensadores gregos do período clássico. Os princípios geométricos, apresentados por Euclides foram, ao longo dos séculos, amplamente estudados e ensinados, exercendo influência no desenvolvimento da matemática. Um momento crucial na história da Geometria está ligado ao quinto postulado de Euclides, conhecido como o postulado das paralelas, que estabelece:

> E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos (EUCLIDES, 2009, p.98).

O quinto postulado causou inúmeras discussões. O próprio Euclides e muitos dos seus sucessores tentaram demonstrar essa proposição a partir de outros axiomas da Geometria, mas sempre em vão. Esta impossibilidade foi, durante séculos, um escândalo da Geometria e o desespero dos geômetras. Andrade (2013) relata que diversos matemáticos, como Gauss, Bolyai e Lobachevsky, realizaram um enorme esforço, na tentativa de demonstrar o quinto postulado, questão que estava em aberto.

Deste modo, percebeu-se que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser provado, poderia ser negado, sem que ocorressem contradições. Estes questionamentos motivaram os matemáticos János Bolyai (1802-1860), da Hungria, e o russo Nicokolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) a publicar, independentemente, a construção das geometrias não euclidianas, ou seja, uma geometria que negava o postulado das paralelas descrito por Euclides. Esses trabalhos demonstram uma série de teoremas que não chegaram a contradições. A Geometria criada por esses matemáticos recebeu o nome de Geometria Hiperbólica, introduzindo um novo postulado, conhecido como postulado das paralelas hiperbólicas.

A Geometria Hiperbólica possui propriedades diferentes da geometria euclidiana e foi um marco importante no desenvolvimento da matemática e, principalmente, das geometrias não euclidianas. Stillwell (1998) destaca que as geometrias não euclidianas têm aplicações em diversos campos, como a física moderna, teoria da relatividade e geometria diferencial. Elas desafiaram a visão tradicional na Geometria e trouxeram novas perspectivas para a compreensão do espaço e das relações geométricas. As geometrias não euclidianas demonstram que a Geometria não pode ser considerada um conhecimento único e imutável, mas sim um campo em constante evolução e investigação (GREENBERG,2008).

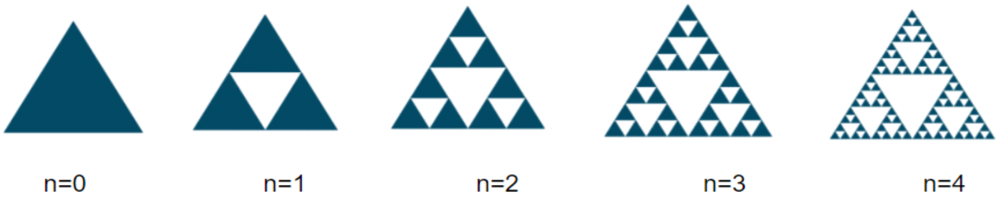
1.2. Sobre a geometria dos fractais

A geometria dos fractais é um campo considerado interessante devido à sua relação com a natureza, cujo objetivo é estudar estruturas geométricas mais complexas que exibem propriedades de autossimilaridade, em diferentes escalas, denominadas fractais. Essa área de estudo tem despertado um crescente interesse na Educação Matemática, em virtude das suas possibilidades de exploração de conceitos matemáticos de forma interativa e lúdica. Discutiremos a geometria dos fractais, suas propriedades e suas possibilidades no campo da Educação Matemática. Ainda neste subcapítulo, apresentaremos o objeto geométrico em estudo desta pesquisa, o fractal Tetra-Círculo.

A Geometria Fractal foi instituída por Benoit Mandelbrot. Nascido em Varsóvia (1924), de origem judaica, proveniente da Lituânia, cresceu envolto em encontros matemáticos e teve sua atenção voltada à Geometria. Mandelbrot faleceu em Cambridge, em 2010, aos 85 anos. Para ele, a geometria dos fractais pode ser vista como uma nova Geometria, que se iniciou como uma maneira de compreender as formas da natureza e que reflete uma natureza de irregularidades, reentrâncias, saliências e fragmentações (BARBOSA, 2005).

O termo "fractal" tem origem no latim *fractus*, que corresponde a quebrar e fragmentar, e suas três características principais são autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita. A autossimilaridade trata das partes do objeto fractal que se assemelham ao seu todo, ou seja, é possível tomarmos uma parte do fractal e observarmos que esta parte se assemelha ao todo, em sua forma e características de construção (BARBOSA, 2005). Esta autossimilaridade pode ocorrer de forma aproximada ou exata. O exemplo, a seguir, demonstra uma autossimilaridade exata, pois foi desenvolvido em software, o que possibilita infinitas iterações, conforme a Figura 1:

Figura 1 - Triangulo de Sierpinski em diversas iterações



Fonte: Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/wp-content/uploads/sites/229/2021/05/I2P15.png Acesso em: 25 set. 2022.

A complexidade infinita refere-se a um número infinito de iterações possíveis de um objeto fractal, que pode ocorrer de forma recursiva ou iterativa. Portanto, devido a essa infinitude, não há possibilidade de representar um fractal de forma completa, pois sempre haverá uma nova iteração a ser realizada (CARVALHO, 2005).

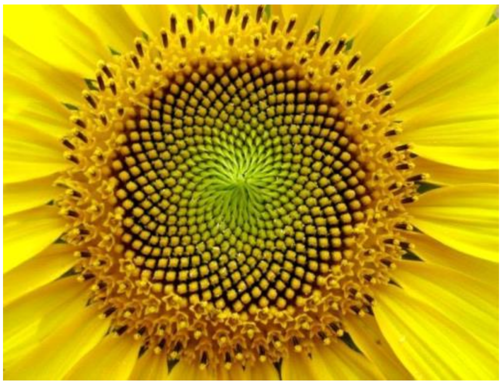
Quanto à dimensão de um objeto fractal, não nos deparamos, necessariamente, com um número inteiro, uma vez que a dimensão desse objeto está relacionada com o nível de irregularidade ou fragmentação do fractal, bem como o seu grau de ocupação no espaço (CARVALHO, 2005). As dimensões fractais refletem a complexidade e a autossimilaridade inerentes aos fractais. Peitgen *et al.* (2004, p. 201) afirmam que "A dimensão fractal é uma medida da rugosidade, fragmentação ou complexidade de uma figura", ao contrário das dimensões euclidianas tradicionais. Além disso, os fractais são sensíveis às condições iniciais. Mandelbrot (1982) afirma que o comportamento fracional indica que o menor passo inicial pode conduzir a um resultado muito diferente.

Um fractal é uma estrutura geométrica que exibe autossimilaridade em diversas escalas. Essas estruturas tão irregulares podem ser representadas em padrões da natureza, o que nos estimula a estudá-las, como, por exemplo, as nuvens, as flores, as árvores, o brócolis, entre outros. Veja as Figuras 2 e 3 a seguir:

Figura 2 - Romanesco

Fonte: Romanesco e os fractais (2012)

Figura 3 - Girassol



Fonte: Plantas matemáticas: Os fractais na natureza (2015)

Essas estruturas desafiam a definição tradicional de dimensão e fornecem uma nova perspectiva sobre a complexidade dos objetos matemáticos naturais e artificiais.

Existem inúmeras técnicas para a criação de objetos fractais, que têm aplicações em diversas áreas, como na matemática, na física e na computação gráfica. Segundo Falconer (2003, p. 22) "qualquer fractal digno desse nome têm uma estrutura fina, ou seja, detalhes em todas as escalas", o qual pode ser desenvolvido por meio de transformações iteradas. Essas iterações permitem a geração de padrões fractais intrincados e detalhados. Barnsley (2012) destaca que a geração ocorre por meio desses processos, nos quais cada iteração acrescenta detalhes finos ao padrão em desenvolvimento.

Esses padrões nos possibilitam explorações por meio de *softwares* especializados, que permitem uma manipulação precisa na construção desses objetos fractais. Esses *softwares* desempenham um papel importante na exploração e visualização da geometria dos fractais e proporcionam uma oportunidade de explorar propriedades e transformações dos objetos fractais. Eles fornecem ferramentas iterativas, que permitem a criação, manipulação e exploração de fractais de maneira eficiente. Esses *softwares* viabilizam uma compreensão intuitiva e detalhada das propriedades fractais, proporcionando uma visão estimulante para os estudantes.

Entre os diversos *softwares* educacionais disponíveis que facilitam a exploração de fractais, destacamos o GeoGebra, que possui recursos para a criação de objetos fractais. O *software* Scratch é voltado para a criação de projetos iterativos, incluindo jogos e animações. Embora seja conhecido pela sua aplicação na programação de computadores, o Scratch também pode ser utilizado para a exploração de objetos fractais e será o foco da presente pesquisa.

O uso desses *softwares* pode contribuir para a compreensão dos estudantes, a partir dos conceitos matemáticos apresentados de maneira visualmente envolvente. O estudo da geometria dos fractais surge como uma oportunidade de explorar conceitos com uma visualização e exploração iterativa. Esses softwares permitem que os estudantes criem e manipulem fractais em diferentes escalas, o que pode ocasionar o interesse e motivá-los a explorar conceitos matemáticos, de forma criativa (KAPADIA, 2019).

Na sala de aula, é possível explorar a utilização de softwares por meio de práticas criativas, nas quais os estudantes são desafiados a criar seus próprios fractais. Eles têm a oportunidade de utilizar instrumentos geométricos para construir fractais clássicos, como o triângulo de Sierpinski ou a curva de Koch. Além disso, podem explorar *softwares* para recriar fractais mais complexos. Ao participarem dessa experiência de construção e iteração, os estudantes têm a oportunidade de compreender a relação entre o todo e as partes, destacando a importância dessas práticas na Geometria. Para essa exploração no ensino de Geometrias, Fonseca *et al*. (2002) apontam que professores em exercício no Ensino Fundamental, encontram-se distantes das questões essenciais da prática de ensino da Geometria. Como trazem Miguel e Miorim (1986, p. 66) a Geometria é tão importante para a humanidade que é inconcebível não a estudar na escola, pois "o mundo em que vivemos é quase espontaneamente geométrico" e seu uso cotidiano pode ser pensado como uma necessidade humana.

Embora a geometria dos fractais seja pouco abordada na sala de aula de Matemática, é mencionada no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (CREP), que sugere seu estudo, pois "permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades" (PARANÁ, 2021, p. 54).

A Geometria Fractal na educação, pode possibilitar que os estudantes observem os ambientes de formas diferentes e, com isso, vejam padrões, desenvolvam hipóteses e percebam que a Matemática não é algo desvinculado dos movimentos do mundo. Entendemos que a Geometria Fractal nos permite explorar diferentes conceitos matemáticos e estabelecer conexões com outras ciências, utilizando instrumentos geométricos e a programação em *softwares* como método didático. Segundo Brasil (2018), o estudo da Geometria, além de outros objetivos, deve permitir, aos estudantes, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos reais e representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas.

Ao considerarmos os professores, o ensino a partir de instrumentos geométricos e *softwares* pode auxiliar o processo de aprendizagem, uma vez que traz relações de conceitos matemáticos e suas aplicações. Como justificativa para a abordagem da geometria dos fractais em sala de aula, Barbosa (2005, p. 19) aponta que:

> conexões com outras ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para estudo de formas da natureza [...]; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; sensação de surpresa diante da ordem na desordem (BARBOSA, 2005).

O uso do Scratch, na exploração da Geometria Fractal, nos oferece uma oportunidade de combinar a criatividade da programação visual com princípios matemáticos. Isso permite, aos estudantes, uma compreensão mais profunda da Geometria Fractal, ao mesmo tempo, em que aprendem outros conceitos geométricos e desenvolvem habilidades de programação e resolução de problemas.

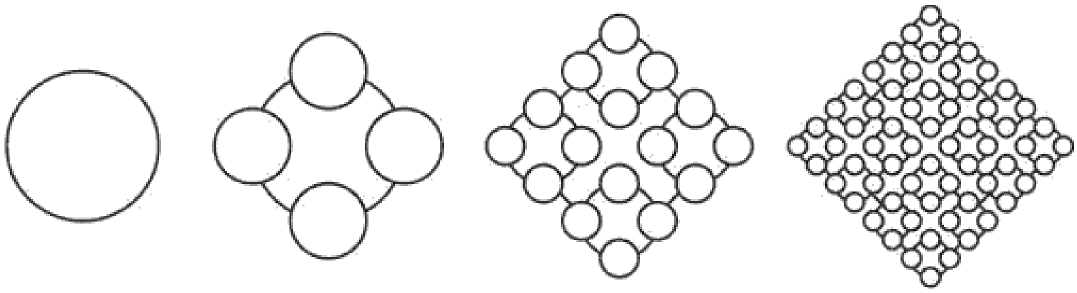
1.3. O fractal Tetra-Círculo

É possível estudarmos a geometria dos fractais por meio de *softwares*, explorando diversos conceitos matemáticos. Dessa forma, conduzimos uma investigação da construção do objeto fractal Tetra-Círculo, no *software* Scratch, explorando tanto seus aspectos geométricos euclidianos quanto não euclidianos.

Criado em 1995, pelo Laboratório de Ensino da Matemática (LEM), do Instituto de Matemática e Estatística (IME-USP), o fractal Tetra-Círculo foi concebido com o propósito específico de explorar sistemas de geometria interativa.

O Tetra-Círculo é um fractal geométrico, constituído a partir de uma circunferência com quatro pontos equidistantes, que a divide em quatro arcos congruentes. Cada ponto contém o centro de novas circunferências, dispostas de maneira que essas novas circunferências possuem metade do raio da circunferência inicial (MELO; LEIVAS, 2015, p. 3). Ao repetir esse processo, as novas circunferências geram o próximo nível do fractal, conforme ilustrado a seguir na Figura 4:

Figura 4 - Fractal Tetra-Círculo no nível 3



Fonte: DUARTE. M. J.; DA SILVA NETO. V.; D'ASSUNÇÃO. A. G, 2020, p.229

A escolha deste objeto foi impulsionada por uma pesquisa conduzida simultaneamente a esta, no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG)[2]. Essa pesquisa proporcionou o contato com o fractal Tetra-Círculo, inspirando a intenção de sua construção no *software* Scratch. Essa abordagem visa diversificar os fractais já estudados, complementando pesquisas anteriores sobre a Curva de Koch (FRATUCCI; MORAN, 2022), o Triângulo de Sierpinski (RUDEK; TARTARE; GAVANSKI, 2014), o Hexágono de Dürer (PAIXÃO; BARROSO, 2017; ZANATTA *et al*., 2019), dentre outros.

Assim, este trabalho consiste em investigar objetos geométricos emergentes da construção do fractal Tetra-Círculo, utilizando o *software* Scratch e considerando conceitos relacionados à Geometria.

1.4. O software Scratch e seu uso

As tecnologias podem constituir novas possibilidades para a construção de conhecimentos. No entanto, como destacado por Moran *et al* (2006) o sistema de ensino exige mudanças por parte dos professores, sem fornecer as condições adequadas para que elas sejam implementadas. Por exemplo, fornecer um computador e internet não é suficiente para melhorar o processo educativo, é necessária uma capacitação adequada para que os professores possam utilizar esses recursos de forma eficaz. Apesar do protagonismo voltado aos recursos digitais, suas vantagens e oportunidades de exploração estão diretamente atreladas aos professores, que devem utilizar esses recursos de forma didática. Assim, o problema não está na utilização desses materiais, mas sim na maneira como são utilizados.

[2] O Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, tem como foco desenvolver atividades de pesquisa e extensão voltadas para o ensino de Geometria com base nas teorias da Didática da Matemática, cadastrado no Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq.

Em uma era de cultura computacional, Javaroni e Zampieri (2015) destacam que as discussões não se concentram mais no uso ou não de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), mas sim em como essas tecnologias devem ser aplicadas, considerando sua relevância na sociedade contemporânea. Segundo Lévy (2005, p. 171), a atividade do professor "está centrada no acompanhamento e na gestão das aprendizagens: o incitamento a percursos de aprendizagem". A difusão do conhecimento, por sua vez, é realizada por outros meios, como páginas na *web*, bancos de dados e *softwares*. Entre os *softwares* que podem ser utilizados no contexto do ensino de Matemática, está o Scratch que foi utilizado nesta pesquisa.

O *software* Scratch[3] foi desenvolvido pelo grupo Lifelong Kindergarden, do Media Lad da Universidade Estadunidense – MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), lançado em 2007 e disponibilizado gratuitamente para fins educacionais. O *software* é disponibilizado para plataforma IOS, Windows, entre outros, e também possui uma versão de aplicativo para a utilização *offline*.

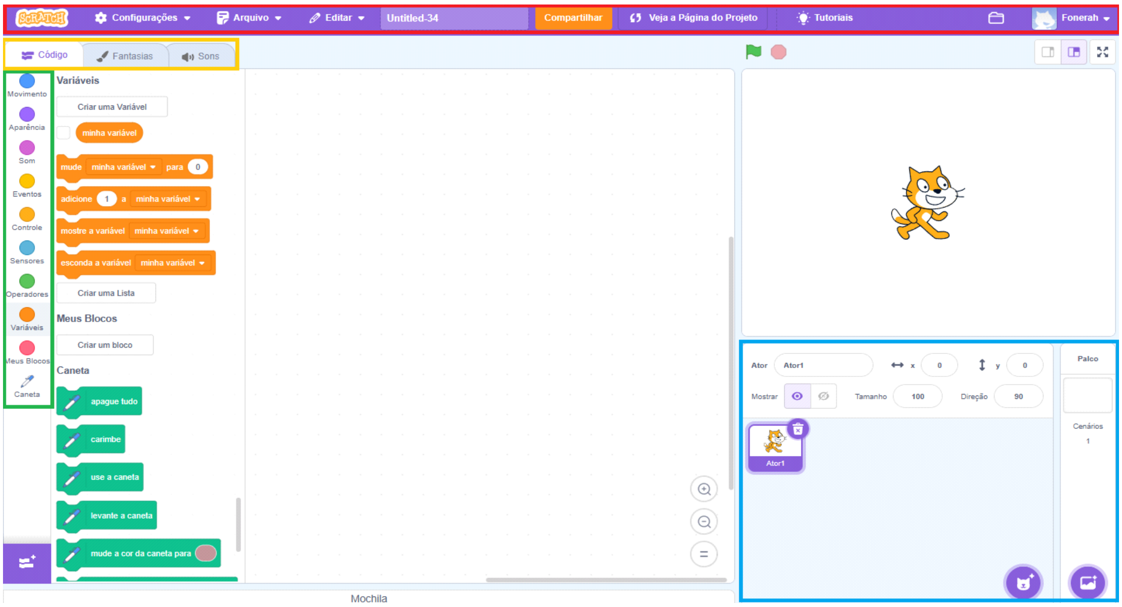
Conforme os criadores do *software*, a definição, mais adequada do programa é:

> O Scratch é uma linguagem de programação e uma comunidade online onde você pode criar suas próprias histórias, jogos e animações interativas, e compartilhar suas criações com pessoas do mundo todo. Durante o processo de criação e programação dos projetos do Scratch, os jovens aprendem a pensar de forma criativa, a raciocinar de forma sistemática e a trabalhar de forma colaborativa (2009, s.p. apud RIBEIRO; RODRIGUES; PEREIRA, 2014).

A seguir, na Figura 5, apresentaremos o layout do Scratch e seus componentes:

[3] Disponível em: https://scratch.mit.edu/about

Figura 5 - Layout do software Scratch com áreas destacadas



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na Figura 5, é possível observar quatro regiões em destaque, com cores distintas. A barra superior, destacada em vermelho, está amplificada a seguir, na Figura 6:

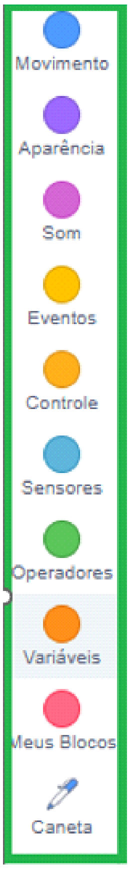
Figura 6 - Barra superior do Scratch

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

A barra superior do *software* disponibiliza as configurações do aplicativo para alterações de idioma e cor. Na parte de arquivo, possibilita o *download* do projeto desenvolvido, tanto no computador, quanto no próprio aplicativo vinculado à conta, juntamente com a possibilidade de importar projetos prontos ou inacabados do computador. Conta também com a janela "tutoriais", que apresenta uma página contendo o passo a passo para conhecer o *software* e desenvolver programações iniciais como: desenvolver jogos simples, criar histórias, programar animações, entre outros.

No Scratch, também encontramos os blocos de programação:

Figura 7 - Blocos de Programação



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na Figura 7, destacada em verde, encontram-se as variações dos blocos de programação. Iniciando pelo bloco "movimento", que possibilita a movimentação do ator[4] da programação, como também a rotação, posicionamento e direção. Logo em seguida, apresenta os blocos relacionados à "aparência" do ator, que disponibilizam falas, mudanças de fantasia e de cenário. Em continuidade, apresenta os blocos relacionados ao "som", que disponibilizam sons para determinados comandos da programação. O bloco seguinte se trata dos "eventos", que estabelecem comandos para que a programação seja iniciada e a transmissão de mensagens. Os blocos que envolvem o "controle" podem ser caracterizados como os mais próximos das programações em geral. Eles fornecem comandos de controle que envolvem conceitos como: "repita", "repita até que", "se e se não", "espere até que". São comandos considerados necessários para as programações mais básicas. Seguindo com os blocos, denominado "sensores" estabelece comandos envolvendo toque com o mouse no palco ou toque em cor específica; posicionamento do mouse nos eixos (x, y); modo arrasto; cronômetro; ano, mês, dia da semana, hora e minuto.

[4] O software Scratch nomeia como “ator” o objeto que recebe a programação

No conjunto de blocos denominados "operadores", realizam-se operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, comparação envolvendo inequações, operadores lógicos como "e/ou", junção de objetos e correção entre objetos. O bloco denominado "variáveis" permite ao usuário criar variáveis, mudá-las para um valor específico, adicionar valor à variável, mostrá-la e escondê-la do palco. O comando "meus blocos" permite a criação de um bloco com programações internas que auxiliam nas repetições, que se tornam recorrentes em alguns tipos de programação, e o comando "bloco" fornece uma peça, que repetirá as programações inseridas no bloco.

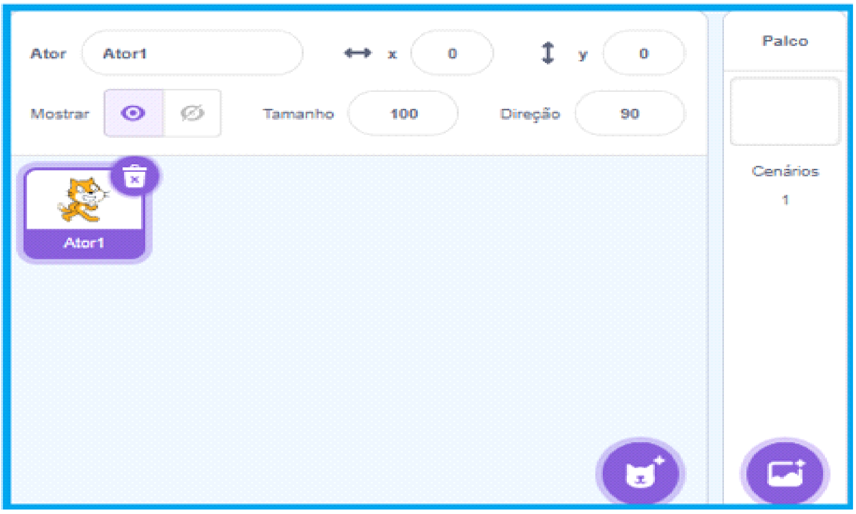
Figura 8 - Abas do Scratch

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na Figura 8, estão destacadas as abas "código", "fantasias" e "sons". Na aba "código" apresentam-se os blocos apontados no último parágrafo. A aba "fantasias" exibe o ator e as possibilidades de troca de fantasia e cor entre outras opções. Em "sons", disponibiliza e fornece opções de acelerar áudios, aumentá-los ou diminuí-los de volume, dentre outras opções.

Temos também a Área do ator:

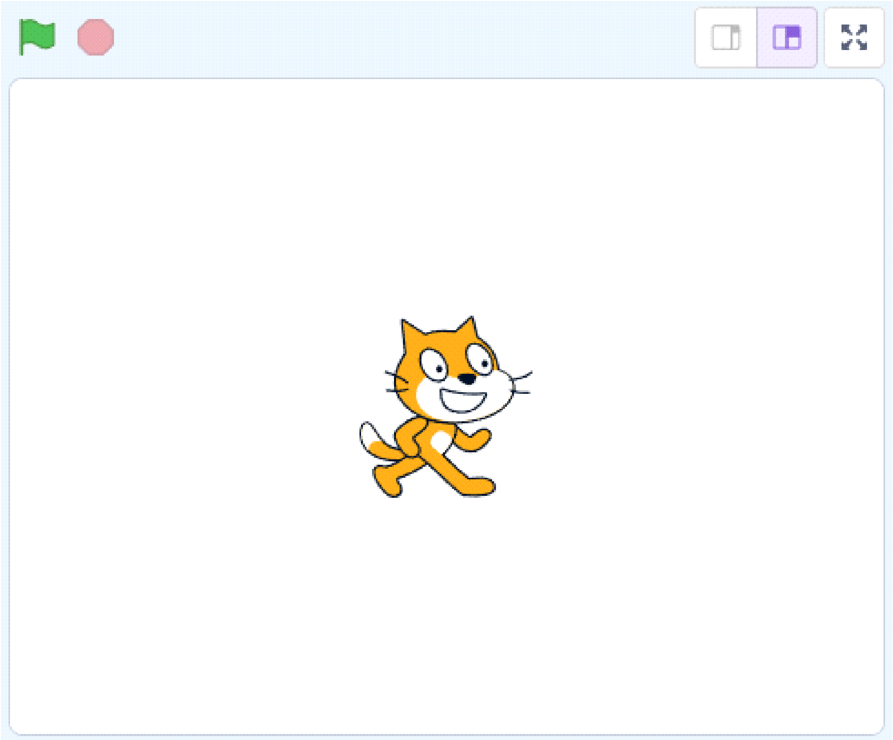
Figura 9 - Área do ator.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na área destacada em azul, são exibidos os atores, caso haja mais de um. Tem-se também o nome do ator, sua posição em (x, y), seu tamanho e a direção que este ator está apontando.

Figura 10 - O palco do Scratch

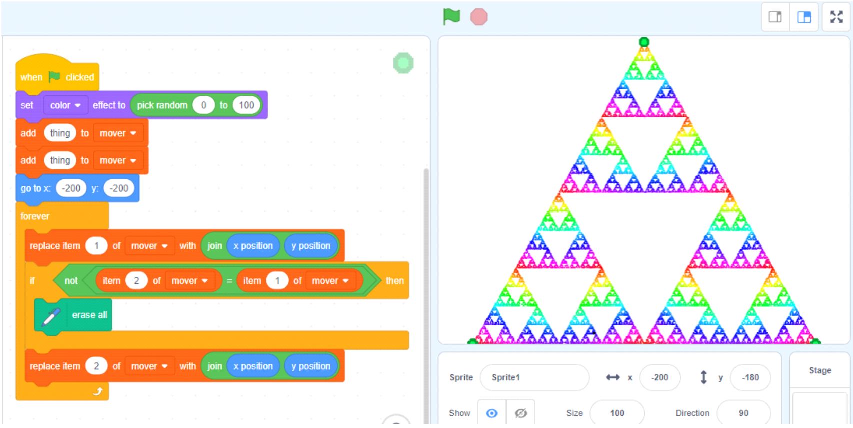


Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

O palco é o lugar da tela em que a programação dos blocos "toma vida". Tudo o que for programado, com os blocos na área de programação, se desenvolverá no palco, que apresenta, no canto superior esquerdo, comandos de "ir" e "pare", indicados por uma bandeira verde e por um octógono vermelho. Esses comandos dão início à programação e a encerram. No canto superior direito, ele fornece a opção de diminuir o palco para uma melhor visualização da programação e a opção de tela cheia para aumentar a visualização.

Enfim, com este *software*, é possível montar um *script* utilizando uma linguagem de programação considerada intuitiva, pois não é necessário dominar uma linguagem de programação computacional para criar projetos e objetos educacionais, como mostra a figura a seguir:

Figura 11 - Programação Triângulo de Sierpinski no software Scratch

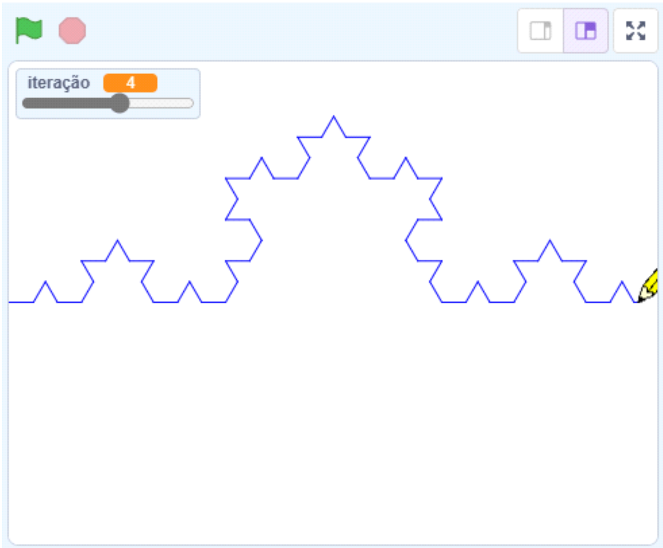


Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Com o Scratch, é possível criar animações, inclusive, construir fractais - objeto de nossa pesquisa -, de forma iterativa, compreendendo e utilizando os princípios da Geometria Fractal, por meio dos blocos, para criar repetições iterativas e gerar padrões auto similares.

Outra possibilidade é a criação de animações, com base na Curva de Koch. É possível explorar diferentes iterações da curva, observando como ela se ramifica e se torna mais complexa a cada iteração. A Figura 12 apresenta a representação da Curva de Koch feita no Scratch:

Figura 12 - Curva de Koch no software Scratch



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

1.5. Noções sobre a Teoria Antropológica do Didático

Como aporte teórico para esta pesquisa, nos embasamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Desenvolvida por Yves Chevallard (1992), essa teoria busca estudar o homem, perante o saber matemático, e, sob uma perspectiva antropológica compreender o processo de ensino e aprendizagem.

Essa teoria propõe uma análise educativa, como um fenômeno cultural, influenciado por aspectos sociais e culturais, que nos permite modelar uma Organização Matemática e uma Organização Didática, de modo a identificar os objetos de conhecimento que podem ser explorados, durante as construções geométricas. Consideramos uma OD as escolhas metodológicas feitas pelos professores, diante da apresentação de um conteúdo matemático (BITTAR; FREITAS; PAIS, 2014). Não se estuda uma OD sem investigar a OM. A seguir, trataremos sobre as duas ideias de Organização da TAD.

1.6. Organização Matemática e Organização Didática

No que diz respeito à Organização Matemática, Chevallard (1999) considera que qualquer ação humana pode ser analisada, utilizando uma estrutura praxeológica que diz respeito às práticas e estratégias utilizadas pelos professores para ensinar e pelos estudantes para aprender. Essa estrutura engloba estratégias formais e informais, que ocorrem no contexto educativo, sendo utilizada como uma maneira de modelar as relações institucionais e pessoais, oriundas dos termos gregos *"práxis"* e *"logos"* que correspondem às dimensões práticas e teóricas. Esta organização é composta por quatro componentes, sendo eles: tipos de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). Conforme Chevallard (1998), a noção de tarefa (t) pode ser entendida como a raiz da noção de praxeologia, o que caracteriza um tipo de tarefa é a delimitação do que fazer a partir da tarefa proposta. Chevallard enfatiza:

> Especificamente, um gênero de tarefa existe apenas na forma de diferentes tipos de tarefas, cujo conteúdo é estritamente especificado. Calcular... é um gênero de tarefa; calcular o valor (exato) de uma expressão numérica contendo um radical é um tipo de tarefa, assim como calcular o valor de uma expressão contendo a letra x quando x recebe um valor especificado. Ao longo dos anos de faculdade, o tipo Calcular... é enriquecido com novos tipos de tarefas; será o mesmo no ensino médio, onde o aluno primeiro aprenderá a calcular com vetores e, depois, calcular uma integral ou um primitivo, etc (CHEVALLARD, 1998, p. 2).

A técnica (τ) corresponde à maneira de fazer a tarefa, enquanto a tecnologia (θ) significa explicar, descrever e justificar a técnica. E todo o processo é amparado por uma teoria (Θ), que irá justificar a tecnologia.

Para Chevallard, toda atividade humana pode ser descrita por meio de uma praxeologia. Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 8) afirmam que "toda atividade matemática institucional pode analisar-se em termos de praxeologias matemáticas de complexidade crescente". Ao considerarmos tipos de tarefas, temos um conjunto de afazeres similares, como, por exemplo, passar uma calça, que é considerada uma tarefa e passar uma blusa é outra tarefa semelhante à anterior. Com isso podemos considerar que essas tarefas têm um mesmo tipo: passar roupa. O tipo de tarefa é definido por um verbo de ação e um complemento (BITTAR, 2017). As tarefas do tipo "T" serão respondidas ou executadas por meio de procedimentos, chamados de técnicas "τ", constituindo assim o bloco prático-técnico $\Pi = [T/\tau]$, considerado como o bloco do saber-fazer (CHEVALLARD, 1999). Uma técnica (τ) que tenha êxito na resolução do tipo de tarefa será justificada e produzida por uma tecnologia (θ) que se esclarece e se apoia em uma teoria (Θ), que, juntas, formam o bloco tecnológico-teórico ou logos que podemos indicar como o bloco do saber $\Lambda = [\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 1999). Esses quatro elementos compõem uma praxeologia matemática pontual, que pode se organizar em torno de um único tipo de tarefa.

Uma Organização Didática (OD) surge na intenção de colocar em prática uma OM e consiste nas escolhas didáticas feitas pelo professor, ao ensinar um determinado saber. Uma OD eficaz deve criar um ambiente propício para a aquisição de um saber. Andrade e Guerra (2014) apontam que uma OD é:

> Uma organização para o ensino, que pode então ser traduzida por meio de articulações e integrações de praxeologias que permitam facilitar a compreensão dos temas estudados no currículo de matemática de modo a dar razão a atividade matemática, e isto quer dizer, é claro, do que é do por que se faz o estudo de uma dada praxeologia matemática (ANDRADE; GUERRA, 2014, p. 1203).

Neste sentido, a OD irá conduzir a (re)construção de uma determinada OM, que envolve a seleção e sequenciamento de conteúdos e exige uma definição clara dos objetos de aprendizagem. Segundo Chevallard (1999), independente do caminho traçado, durante o estudo, certos tipos de situações estarão presentes, mesmo que de maneira variável. Chevallard (1999) aponta essas situações como "momentos de estudo" ou "momentos didáticos" desenvolvidos em seis etapas, não necessariamente cronológicas.

A seguir, dissertaremos sobre esses momentos e situaremos de que forma a construção do objeto fractal pode se encaixar nos momentos citados. Vale ressaltar que o momento de institucionalização não será tratado, devido ao fato de que a presente pesquisa foi desenvolvida em uma análise *a priori* e não contou com a participação de estudantes.

O momento inicial de estudo é aquele em que, por meio de tarefas, ocorre o primeiro contato do estudante com as organizações praxeológicas, momento que deve orientar as relações institucionais e pessoais com o objeto (ALMOULOUD, 2007, p. 124). Ao abordar nosso objeto de referência, o primeiro momento envolverá o contato com o *software*, utilizando visualizações simples e, preferencialmente, prontas para facilitar a visualização do objeto.

O segundo momento envolve a exploração dos tipos de tarefa e a elaboração das técnicas associadas a este tipo de tarefa. Chevallard (1999) aponta que estudar um problema é uma maneira de criar e usar uma técnica relacionada a problemas do mesmo tipo, apontando, ainda, que a resolução de problemas isolados, juntamente com a elaboração de técnicas, é o coração da atividade matemática. Durante o segundo momento, abordaremos a construção do objeto geométrico, utilizando da exploração das tarefas para desenvolver as técnicas geométricas necessárias para este momento.

O terceiro momento é a constituição do bloco tecnológico-teórico, que se refere à técnica e ao tipo de tarefa proposto. Este momento se estabelece a partir do primeiro contato com o tipo de tarefa, considerando que, ao elegermos uma determinada técnica, ela está, diretamente, ligada ao bloco tecnológico-teórico, para que, então, possa ser explicada e justificada. No caso da exploração geométrica realizada, durante a construção do Tetra-Círculo, este será o momento em que o estudante identificará as justificativas das técnicas implementadas, com base na fundamentação teórica geométrica.

O quarto momento envolve o trabalho da técnica em tarefas diferentes. Neste momento, propõe-se pôr em prática a técnica utilizada, visando aprimorá-la, a fim de a tornar mais eficaz e confiável, de maneira quantitativa e/ou qualitativa (CHEVALLARD, 1999)

O quinto momento é o de institucionalização, ou seja, o momento de oficializar os elementos da OM, no cenário didático. Chevallard (1999) e Almouloud (2007) apontam que o momento de institucionalização tem o objetivo de definir de forma precisa à OM criada. Esse é o momento em que se define o que pertence à OM. Chevallard (1999) estabelece que o momento de institucionalização deve renovar o estudo e, assim, esgotar as possibilidades que envolvem a OM utilizada. Chevallard (1999) entende que este momento deve separar o que é "matematicamente necessário" do que é "matematicamente contingente", ou seja, o que permanecerá e o que será esquecido na instituição:

> O momento da institucionalização é, de início, aquele que, na construção 'bruta' que pouco a pouco, emergido do estudo, vão separar, por um movimento que compromete o porvir, o 'matematicamente necessário', que será conservado, e o 'matematicamente contingente', que logo será esquecido (CHEVALLARD, 1999, p 244).

O sexto momento consiste na avaliação e tem como finalidade avaliar o que foi aprendido com a OM proposta, com isso se houve domínio das técnicas, tecnologias e teorias apresentadas. Chevallard (1999) aponta como um:

> [...] momento de reflexibilidade, onde qualquer que seja o critério e o juiz se examina o que vale, o que se já aprendeu, este momento de reflexão que, apesar das recordações de infância, não é em absoluto invenção da Escola, participa de fato da 'respiração' mesma de toda atividade humana (CHEVALLARD, 1999, p 245).

Para o professor, este é um momento de análise dos processos didáticos instituídos no desenvolvimento da OM, e também um momento para identificar anomalias que ocorreram durante os momentos de estudo. A presente pesquisa se baseia em uma análise *a priori* das tarefas propostas. Sendo assim, o sexto momento poderá ocorrer em pesquisas futuras.

1.7. Organização Praxeológica

Ao considerarmos uma OP, conforme apontado por Chevallard (1999), essa organização pode descrever qualquer atividade humana, e possibilita modelar práticas sociais, incluindo atividades matemáticas. Conforme a TAD, uma OP é uma maneira de explicar a abordagem de um determinado assunto matemático, utilizando quatro elementos: um tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (Θ) e teoria (Θ). Estes elementos compõem um quarteto praxeológico, denotado da seguinte forma $[T, \tau, \theta, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999):

> Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas e, de outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que podemos chamar de "prática", ou, em grego, a práxis. A segunda é composta por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de logos (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 251).

Conforme destacado por Maduro (2015), qualquer praxeologia, formada pelos elementos "tarefa", "técnica", "tecnologia" e "teoria", destinada ao estudo de uma atividade matemática, é chamada de "praxeologia matemática" ou "organização matemática" (OM).

No entanto, para elaborar uma praxeologia matemática, é necessária uma Praxeologia Didática ou uma OD, uma vez que toda atividade matemática está ligada a uma forma de organização. Neste contexto, entendemos que uma OD e uma OM compõem a OP. E estas organizações se estabelecem ao desenvolver de um Modelo Praxeológico de Referência.

Como um instrumento didático de investigação, que possibilita a construção de praxeologias existentes em uma instituição, dispomos do MPR, que fornece um conjunto de elementos e categorias, a fim de compreender como os conhecimentos são estruturados, organizados e transmitidos no contexto educacional. Um modelo composto por uma OM, seguido de uma OD, se apresenta como uma alternativa em conjunto com as orientações e sugestões de documentos norteadores do ensino de Matemática.

1.8. Pesquisas sobre a Teoria Antropológica do Didático e a Geometria

Para o desenvolvimento desse capítulo, foi realizado um levantamento bibliográfico de pesquisas no catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), com o intuito de investigar como a TAD tem sido apresentada e discutida, no contexto do campo da Geometria.

A princípio, para a coleta destas informações, utilizaríamos os seguintes termos: “Teoria Antropológica do Didático” e “Geometria dos Fractais”. No entanto, não obtivemos nenhum registro de pesquisas com estes filtros. Com isso, os assuntos a serem abordados se restringiram aos seguintes termos “Teoria Antropológica do Didático” e “Geometria”. A data de acesso foi 16 de novembro de 2022. Foram encontrados 35 estudos, sendo 12 dissertações e 14 teses. Todos os trabalhos, resultantes a esta busca, foram considerados na elaboração do quadro apresentado a seguir. No entanto, as pesquisas que compõem as categorias se restringem a pesquisas relacionadas à Educação Matemática. Cabe destacar que não conseguimos acesso, direto pelas plataformas, às seis pesquisas publicadas anteriormente à Plataforma Sucupira e que foram, então, posteriormente, coletadas com buscas nos repositórios das universidades em que foram realizadas.

O quadro, a seguir, foi elaborado para apresentar o panorama das produções encontradas, estruturado por título da pesquisa, tipo do documento, ano da publicação, programa de pós-graduação e instituição. Este quadro foi organizado em ordem crescente, a partir do ano de publicação de cada trabalho:

Quadro 1 - Dissertações e teses

(continua)

Título	Tipo de documento	Programa de Pós-Graduação/sigla	Ano da defesa	Autores	Orientador(a)	Instituição
Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2006	ROSSINI, R.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: da reforma da matemática moderna aos dias atuais	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2007	LUZ, V. A.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGECM	2007	ANDRADE. R. C. D.	GUERRA, R. B.	Universidade Federal do Pará
A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEduMat	2008	FARIAS, K. S. C. S.	PAIS, L. C.	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Análise das práticas docentes de professores dos cursos de licenciatura em matemática referentes ao estudo de retas paralelas e de ângulos	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEduMat	2009	ALMEIDA, V. F. C.	PAIS, L. C.	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de licenciatura em matemática	Tese	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEduMat	2010	SALES, A.	PAIS, L. C.	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prova de demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos.	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2010	VARELLA, M.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2010	ORDEM, J.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: “construção do plano de Poincaré” com o uso do software GeoGebra	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática - PCM	2011	FERREIRA, L.	BARROS, R. M. O.	Universidade Estadual de Maringá
Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC	2011	SILVA, J. V. G.	BELLEMAIN, P. M. B.	Universidade Federal de Pernambuco

(continua)

Título	Tipo de documento	Programa de Pós-Graduação/sigla	Ano da defesa	Autores	Orientador(a)	Instituição
Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no ensino médio	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PGSS	2011	JAMMAL, E. F.	DIAS. M. A	Universidade Anhanguera de São Paulo
Uma Análise da Abordagem da Área de Figuras Planas no Guia de Estudo do Projovem Urbano sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático.	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC	2012	CARVALHO, D. G.	BELLEMAIN, P. M. B.,	Universidade Federal de Pernambuco
A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da geometria analítica	Tese	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGECM	2012	ANDRADE, R. C. D.	GUERRA, R. B.	Universidade Federal do Pará
Progressões aritméticas e geométricas: praxeologias em livros didáticos de matemática	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educaç ão - PPGE	2012	ALMEIDA, E. A. M	WIELEWSKI, G. D.	Universidade Federal de Mato Grosso
Polígonos regulares inscritos no círculo: uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental.	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEduMat	2012a	ALMEIDA, G. A.	WIELEWSKI, S. A.	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
As construções geométricas e a gênese instrumental: o caso da mediatriz	Tese	Doutorado em Educação Matemática	2012	JESUS, G. B.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Geometria Analítica no espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos	Tese	Doutorado em Educação Matemática	2015	COSTA, A. C.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Origami Euclidiano	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC	2016	FRANÇA, E. M.	BELLEMAIN, F. G. R.	Universidade Federal de Pernambuco
A integração das tecnologias digitais ao ensino e aprendizagem de geometria no ensino fundamental – anos finais: uma proposta com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas planas	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PPGEM	2016	FERREIRA, E. F. P.	SCORTEGAGNA, L.	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

(continua)

Título	Tipo de documento	Programa de Pós-Graduação/sigla	Ano da defesa	Autores	Orientador(a)	Instituição
Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2016a	FERREIRA, M. B. C.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE	2016	CIABOTTI, V.	OLIVEIRA JÚNIOR, A. P.	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Análises dos conteúdos de sistemas de representação no curso de licenciatura em expressão gráfica da UFPE à luz da teoria antropológica do didático	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC	2018	NEVES JUNIOR, C. A.	BELLEMAIN, F. G. R.	Universidade Federal de Pernambuco
Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro	Tese	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC	2018	FERREIRA, L. F. D.	BELLEMAIN, P. M. B.	Universidade Federal de Pernambuco
Os momentos didáticos e a avaliação formativa	Tese	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGECM	2019	BRITTO, V. H. C	GUERRA, R. B.	Universidade Federal do Pará
Possibilidades e limitações de micropercursos de estudo e pesquisa em geometria: uma experiência de formação continuada com professores da rede pública	Tese	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEduMat	2019	SANTOS, C. M.	FREITAS, J. L. M.	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2019	FREITAS, R. L.	ALMOULOUD, S. A	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Estudo das três dimensões do problema didático de inequações	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2019	MINEIRO, R. M.	SILVA, M. J. F.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2019	BENITO, R. N.	SILVA, M. J. F.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Geometria esférica: o elo entre matemática e astronomia	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2020	KOVACEVIC, M. S. B.	SILVA, B. A.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

(conclusão)

Título	Tipo de documento	Programa de Pós-Graduação/sigla	Ano da defesa	Autores	Orientador(a)	Instituição
Análise praxeológica das técnicas utilizadas por licenciandos em matemática ao resolverem tarefas visuais	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática - PCM	2020	MATOS, N. A.	FRANCO, V. S.	Universidade Estadual de Maringá
Uma análise praxeológica da geometria dos fractais em livros didáticos do ensino médio	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PRPGEM	2021	PESCINI, A. E	MORAN, M.	Universidade Estadual do Paraná
Um modelo didático de referência baseado em atividades de estudo e investigação para o ensino de cônicas na escola básica	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2021	SIQUEIRA, C. A. F.	SILVA, M. J. F	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Um percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores em cursos de ciências e engenharia: introdução ao estudo de vetores	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	2021	VALENZUELA, M. L.	SILVA, M. J. F	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Praxeologia para ensinar sólidos geométricos: o caso de uma bolsista residente do curso Licenciatura em Matemática da UFS	Dissertação	Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - NPGECIMA	2021	SANTOS, N. M. S.	SOUZA, D. S.	Universidade Federal de Sergipe
Análise praxeológica do conteúdo de números complexos em coleções de livros didáticos do ensino médio	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEduMat	2022	TERÊNCIO NETO, J.	BITTAR, M.	Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Fonte: Acervo da pesquisa, 2022

Depois da busca, foi realizada a leitura e análise dos resumos, introduções, objetivos e conclusões de cada uma das pesquisas encontradas. Com isso, estabelecemos uma divisão das pesquisas encontradas em categorias. Vale ressaltar que o uso do termo categoria é no seu sentido simples, sem vínculo à teoria alguma, sendo elas: Categoria A – Estudos envolvendo o Ensino Fundamental e Médio; Categoria B – Estudos envolvendo futuros professores; Categoria C - Estudos envolvendo a formação continuada de professores; Categoria D – Estudos apoiados em Livros Didáticos.

A seguir discorreremos sobre cada uma das pesquisas, de forma crescente. Devido à quantidade de trabalhos encontrados, trataremos os trabalhos e seus conteúdos de forma breve.

1.8.1. Categoria A – Estudos envolvendo o ensino Fundamental e Médio

Esta categoria é composta por cinco pesquisas, dentre elas quatro teses e uma dissertações. Iniciamos pela tese de Ferreira (2018) visa investigar a relação entre as dificuldades conceituais de aprendizagem, envolvendo alunos do sexto ano. Sobre área e perímetro, Ferreira (2018) foca na transição do 5º ano para o 6º ano, do Ensino Fundamental. Para tal, realizou intervenções em uma escola privada de Recife, em Pernambuco. Considerou 22 estudantes, desde o 5º ano até o início do 7º ano. Ao analisar os alunos selecionados para a sondagem, Ferreira (2018) identificou algumas dificuldades conceituais que se formam a partir dos invariantes operatórios. O autor evidencia uma fragilidade conceitual, por parte dos alunos, ao mobilizarem o conceito de perímetro em situações de comparação de áreas e perímetros, com figuras não poligonais e sem unidade de medida. Considera este fato um reflexo da ausência desse tipo de situação nos Livros Didáticos (LD). Em segundo momento, Ferreira (2018) desenvolveu uma análise nos LD de matemática, adotados na escola e das observações do 5º e 6º anos, sobre o estudo de área e perímetro. Com isso, é constatada uma predominância de tarefas associadas às medidas, tanto nos LD quanto nas observações feitas, e mostra que a técnica de decomposição e composição de figuras não é suficientemente explorada.

Em uma tese que estuda as três dimensões do problema didático de inequações, Mineiro (2019) realiza uma análise documental, fundamentada na TAD, e utiliza das praxeologias para desenvolver o estudo de inequações na Educação Básica, na busca de estabelecer de que modo esse saber, associado as inequações, são descritos e interpretados nos livros, manuais e diretrizes, os quais amparam a Educação Básica do Brasil, e de que modo esta interpretação solidificada, em um Modelo Didático Dominante (MDD), reflete no ensino. As análises desta pesquisa se desenvolvem no confronto entre um modelo epistemológico de referência e o Modelo epistemológico dominante, que explicitou que o ensino de inequações na Educação Básica consiste na aprendizagem de técnicas de resolução, sem considerar as possibilidades relacionadas a grandezas, demonstrações de teoremas e figuras geométricas. Ao concluir sua investigação, Mineiro (2019) considera que sua proposta de um MDR serviu de base à elaboração de percursos de estudo e pesquisa para o ensino de inequações. Ao finalizar, pontua que há várias questões que merecem aprofundamentos e que não foram contemplados em sua pesquisa.

Visando identificar quais contribuições podem emergir do estudo das três dimensões, a tese de Siqueira (2021) desenvolve um MDR baseado em atividades de estudo e investigação para ensino de cônicas na educação básica. Embasado na TAD, adota uma metodologia de pesquisa documental e, com este aporte teórico, construiu um Modelo Epistemológico de Referência para a geometria sintética, analítica, linear, projetiva e do táxi, e explica as praxeologias envolvidas em cada uma delas

Com o objetivo de construir e aplicar uma OD e praxeológica da Geometria Analítica Plana, partindo do estudo de vetores no 3º ano do Ensino Médio, com aporte teórico da TAD e da Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausebel, Andrade (2007) desenvolveu sua pesquisa, com um grupo de alunos em preparação para o vestibular, e utilizou, da manipulação de objetos ostensivos, para a compreensão de não ostensivos, que compôs sua análise praxeológica. Ele concluiu que os alunos, ao manipular as representações de objetos ostensivos, resgatam conhecimentos matemáticos, de forma articulada para a ancoragem de novos conhecimentos matemáticos, aponta que a OD permite uma “economia de tempo” - no estudo destes conteúdos, nesta etapa da vida escolar -, e destaca a importância e relevância da TAD para o desenvolvimento do processo de estudos e na formação de futuros professores de Matemática.

Com a proposta de uma integração de Tecnologias Digitais (TD) ao ensino e aprendizagem da Geometria, com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas, Ferreira (2016) explora o ensino e aprendizagem, nos anos finais do Ensino Fundamental, motivado por dificuldades apresentadas por docentes e resultados de avaliação de larga escala, que apontam a Geometria como um assunto defasado. Com as análises alicerçadas na TAD, Ferreira (2016) conclui que há muitos desafios a serem vencidos a respeito da integração da TD ao ensino, contudo aponta a eficácia do *software* GeoGebra na potencialização do estudo de perímetro e área de figuras planas. Nesse sentido, oferece um produto educacional, para professores do Ensino Fundamental, relacionado às atividades desenvolvidas ao longo do estudo.

1.8.2. Categoria B - Estudos envolvendo formação inicial de professores

Esta categoria é composta por 12 pesquisas, entre elas oito dissertações e quatro teses. Iniciamos abordando a pesquisa de Almeida (2009), que investiga as práticas docentes relativas ao ensino de retas paralelas e ângulos, implementadas por professores que atuam em cursos de Licenciatura em Matemática, em três instituições superiores de Dourados (MS). Suas análises foram baseadas em compreender como o conteúdo estava sendo apresentado a partir das análises das ODs e OMs destes professores. A pesquisa aborda a formação de professores e expõe o quanto as praxeologias dos formadores reflete, diretamente, na formação de futuros professores de Matemática, que acabam por aderir a um ensino mais tecnicista e sem muitas justificativas, para as suas escolhas matemáticas e didáticas. Almeida (2009) propicia uma discussão para que formadores e coordenadores, dos cursos de licenciatura em Matemática, possam refletir as práticas docentes utilizadas, no momento de formar professores para atuar no Ensino Fundamental.

Em sua tese, Sales (2010) desenvolve um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática, especificamente na disciplina de geometria euclidiana, e teve como objetivo pesquisar o processo de desenvolvimento da argumentação, explicativa e justificatória, na resolução de tarefas dessa disciplina. Sales (2010) utiliza como referencial teórico a TAD para analisar o desenvolvimento da argumentação e as técnicas aplicadas, juntamente com o esquema de Stephen Toulin para análise do argumento justificatório. Sales (2010) conclui que o desenvolvimento da argumentação para a demonstração é possível, e também elaborar uma OD que contribua para que os acadêmicos entrem no campo da matemática. Dentre os resultados o pesquisador destaca a produção de um teorema em sala de aula com envolvimento dos acadêmicos

Motivado em pesquisar as geometrias não euclidianas, a dissertação de Ferreira (2011) teve como objetivo principal elaborar uma OD e identificar possíveis obstáculos que aparecem durante a construção do modelo do plano de Poincaré. Para tanto, Ferreira (2011) ministrou um minicurso de Geometria Hiperbólica e optou por utilizar o *software* GeoGebra, em uma proposta aplicada com alunos do 4°ano de licenciatura em Matemática, da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM), no Paraná, atual Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Ele apresenta um resgate da história da geometria euclidiana até o surgimento das geometrias não euclidianas. Ainda na parte teórica, são apresentados elementos da TAD, teoria que fundamentou a proposta. Com esta pesquisa, Ferreira (2011) conclui que é possível ensinar Geometria Hiperbólica usando um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, desde que se respeitem os conteúdos das séries escolares dos aprendizes e se tome cuidado na construção do conceito de métrica.

Com o objetivo de desenvolver um procedimento metodológico, na construção de situações para o ensino de geometria euclidiana, utilizando o Origami Euclidiano, França (2016) se baseia nos princípios teóricos e metodológicos da TAD e executa um estudo epistemológico das contribuições educacionais do Origami na Geometria, assim como as construções com instrumentos geométricos, como auxiliares à compreensão desses conceitos. A construção de uma sequência metodológica foi aplicada em um curso de graduação de Expressão Gráfica. França (2016) conclui que a utilização de origamis, no auxílio das aulas de

Geometria, contribui para a melhor compreensão de conteúdos, considerando um facilitador dos conteúdos simples aos mais complexos da geometria euclidiana.

Em sua tese, Ferreira (2016ª) tem o intento de aproximar acadêmicos de licenciatura das demonstrações geométricas, com o auxílio de uma OD, com o objetivo de elaborar, aplicar e analisar uma OD que permitisse minimizar as dificuldades dos alunos de licenciatura em matemática em compreender demonstrações em Geometria. Para tal, Ferreira (2016ª) executa uma análise preliminar sobre a concepção dos alunos com relação às provas e demonstrações que evidenciaram que as concepções dos alunos são influenciadas pelos livros didáticos. Ao analisar a experiência, o autor relata que os alunos tomaram consciência de suas limitações, o que provou uma evolução de provas pragmáticas para provas conceituais por parte dos participantes. Ferreira (2016a) conclui que tarefas que articulam provas e demonstrações se mostram mais férteis para que os alunos possam vivenciar as fases da teoria das situações didáticas, de Brousseau.

Em uma dissertação, desenvolvida juntamente com o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), no subprojeto de matemática, Ciabotti (2016) objetivou analisar o processo de elaboração do livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, e, com os princípios da TAD, desenvolveu uma Organização Praxeológica Matemática e Didática. A pesquisa foi orientada a investigar o processo de elaboração de um livro paradidático no Ensino de Probabilidade para os anos finais do Ensino Fundamental. As ações do livro foram elaboradas tomando como base jogos que a autora considera importantes para a motivação, as atividades e também nas relações estabelecidas entre os conteúdos probabilísticos que seriam abordados. Ciabotti (2016) salienta que a intenção com o material paradidático não é desenvolver um substitutivo do livro didático, mas um complemento, e ressalta a importância do contato do aluno com a leitura e a interpretação de texto na educação básica que, segundo a autora, pode ser auxiliada pelo livro paradidático.

Com uma tese que objetivou investigar, na Licenciatura em Matemática, quais conhecimentos, em Geometria Analítica Plana, podem ser adquiridos por professores estagiários, com o auxílio de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP). Freitas (2019) desenvolveu um dispositivo-metodológico-teórico PEP-FP/TAD e o realizou em 13 sessões de estudo, com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade da Bahia. A TAD foi utilizada como referencial teórico, tendo como aporte os estudos sobre conhecimentos docentes. Como principais resultados, Freitas (2019) aponta que os estudantes submetidos ao processo de formação, com o aporte do PEP-FP/TAD, mobilizaram e (re)construíram certos saberes didáticos, pedagógicos e tecnológicos de Geometria Analítica Plana, em específico sobre ponto e reta.

A tese de Benito (2019) manteve o enfoque no ensino do conteúdo de cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Para tanto, utilizou, como quadro teórico, a TAD, que teve como sujeitos de pesquisa estudantes de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS), e objetivou investigar de que maneira o PEP-FP pode auxiliar este grupo de futuros professores no modo de questionar, analisar e experimentar métodos de ensino a respeito de cônicas, com os princípios da Engenharia Didática. Realizou uma análise praxeológica, um estudo sobre as condições e restrições das instituições de ensino, análise *a priori* da intervenção, um planejamento didático da proposta e, no momento final, desenvolveu uma análise *a posteriori*, a fim de validar as hipóteses estabelecidas nas fases anteriores. Benito (2019) desenvolveu um MER a respeito das geometrias cônicas e um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), ambos aplicados em turmas do Ensino Médio e Superior. Como resultado, Benito (2019) explicita que o PEP-FP contribuiu positivamente para a formação do grupo de professores participantes, além de identificar restrições para a implementação do PEP no modelo de ensino atual brasileiro e, consequentemente, a necessidade da criação de sugestões que minimizem o impacto das restrições, que envolvem atribuições individuais aos estudantes inseridos em um grupo, além de um processo para a gestão, classificação e validação das questões elaboradas durante a aula.

Com o intento de investigar os conhecimentos a serem mobilizados para o estudo de Astronomia Posicional nos anos finais da Educação Básica, a dissertação de Kovacevic (2020) emprega a interdisciplinaridade da Geometria Esférica. Evidenciando elementos que suportem que o ensino de Astronomia Posicional é possível no Ensino Médio brasileiro, buscando incorporar a Geometria Esférica com Astronomia Posicional e considerando a Geometria como uma ferramenta da Astronomia, em que a Astronomia é uma aplicação da Geometria Esférica, utiliza de um método que compreende trigonometria sobreposta na superfície esférica. A fim de averiguar se há condições para o ensino de Astronomia Posicional, do ponto de vista curricular, Kovacevic (2020) realizou uma análise nos currículos do ensino nacional – Base Nacional Comum Curricular (BNCC) -, e utilizou, como alicerce teórico, a TAD, considerando a complexidade da Astronomia e as suas aparições em diversas áreas do ensino. Kovacevic (2020) conclui que a Astronomia Posicional comporta, a grosso modo, a Geometria Analítica, e propõe um trabalho acerca da base de conhecimento dos professores para o ensino de Astronomia posicional do Ensino Médio.

Acredita que a pesquisa, criada principalmente como uma tentativa de reivindicar o ensino da Astronomia em forma integral, pode auxiliar professores de matemática, geografia e ciências, a introduzir os conceitos interdisciplinares, abordados neste trabalho, em sala de aula, e propõe um trabalho que envolva a base de conhecimento dos professores para o ensino de Astronomia Posicional do Ensino Médio.

Em sua dissertação, Matos (2020) caracteriza sua pesquisa como qualitativa, e tem como objetivo analisar, por meio da TAD, as técnicas mobilizadas por 18 estudantes, do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade do Estado do Paraná, na resolução de tarefas visuais. Os dados foram coletados por meio do registro escrito das resoluções dos estudantes, para cinco tarefas matemáticas que lhes foram propostas. Em sua análise, Matos (2020) utilizou o conceito de praxeologia da TAD. Com base nessa teoria, para cada uma das tarefas matemáticas aplicadas aos participantes, foi construído um MPR. Após a coleta de dados, esse modelo foi confrontado com o Modelo Praxeológico Dominante (MPD), elaborado com base nas técnicas que mais ocorreram nas resoluções dos participantes. Em termos da TAD, Matos (2020) investigou, a nível institucional, as relações enquadradas no contexto em que se situam os participantes da investigação e sua influência, no que se refere a abordagem no currículo no curso de matemática e ao desenvolvimento dos estudantes.

Com uma tese inserida no campo da formação de professores de Matemática para o ensino de Geometria Vetoriais, Valenzuela (2021) adota, como quadro teórico, a TAD e, como participantes da pesquisa, estudantes de mestrado de Ensino de Matemática no Peru. A pesquisa pretende investigar como um dispositivo de PEP-FP pode contribuir, em particular para o grupo de professores em formação, terem uma visão crítica, poderem questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino com respeito ao objeto matemático vetor, para, assim, poderem introduzir a Geometria Vetorial. Usa como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. Como resultado, informa que o PEP-FP contribuiu na formação deste grupo de estudantes de mestrado que, ao final, propuseram novas questões geratrizes para introduzir o estudo da Geometria Vetorial, além da metodologia para o estudo do objeto matemático.

A dissertação de Santos (2021) tem como objetivo analisar as praxeologias adotadas por uma licenciada em Matemática vinculada ao Programa Residência Pedagógica (RP), vinculada à Universidade Federal de Sergipe, para ensinar sólidos geométricos em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, fundamentada na TAD. A coleta de dados foi realizada no período em que a residente atuou em sala, por isso a pesquisa foi classificada como uma pesquisa de campo. Para realizar a análise das praxeologias da residente, se embasou no estudo das três dimensões fundamentais do problema didático, sob moldes da TAD. Ao analisar as praxeologias, Santos

(2021) aponta uma prática regida, principalmente pelas recomendações da BNCC, e evidência que a residente pôs em prática as discussões teóricas promovidas no RP. E conclui que o programa contribuiu para a formação inicial, possibilitando incluir discussões sobre o ensino de Geometria e, consequentemente, o ensino dos sólidos geométricos, além da implementação da BNCC. Além disso, destaca que tais discussões não são contempladas nas disciplinas do curso de licenciatura e justifica com a limitação de carga horária e a demanda de temáticas ser vasta.

1.8.3. Categoria C – Estudos envolvendo formação continuada de professores

Esta categoria é composta por três pesquisas, entre elas uma dissertação e três teses. Iniciamos abordando a tese de Jesus (2012), que se trata de uma gênese instrumental, que consiste no processo de elaboração do instrumento pelo sujeito. teve como objetivo analisar as ações de dois professores, como o artefato mediatriz se transforma em instrumento na resolução de problemas geométricos e investigar como esse processo pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos geométricos por parte desses professores. Optou pela metodologia de estudo de caso, com aporte teórico da TAD, com o qual Jesus (2012) conclui que a OD forneceu aos professores, os desenvolvimentos de técnicas diferentes, e que este estudo abre um leque para pesquisas baseadas na Teoria da Instrumentação.

Em sua dissertação, Neves Junior (2018) objetiva caracterizar a Relação Institucional e a Relação Institucional na posição do professor com o objeto, Sistemas de Representação no nível do Ensino Superior do curso Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE. Utilizando como lentes teóricas a Teoria Antropológica do Didático, Neves Junior (2018) apresenta, em seu trabalho, uma caraterização da Relação Institucional da Licenciatura em Expressão Gráfica, baseando-se na análise documental do Projeto Pedagógico do Curso (2014). Sua análise foi composta por três etapas, se iniciou com a análise do perfil curricular de 17 professores, reunindo informações como formação profissional e disciplinas ministradas na Licenciatura. Posteriormente, foram selecionados seis participantes que comporão a pesquisa. Na etapa seguinte, os professores analisaram um conjunto de atividades envolvendo Sistemas de Representação. A última etapa consistiu na realização de entrevistas. Segundo Neves Junior (2018), os dados levantados na pesquisa apontam que todos os professores consideram importante o estudo de Sistemas de Representação na Licenciatura, mesmo aqueles que se consideram despreparados em alguma área desse conteúdo. O pesquisador afirma que foi possível perceber que há diferença em relação à preferência dos professores entre os diferentes conteúdos e disciplinas relacionadas aos Sistemas de Representação. Além disso, aponta que as particularidades, nas trajetórias acadêmica e profissional de cada professor, influenciam em sua prática pedagógica.

Explorando as possibilidades e limitações de micro percursos de estudo e pesquisa em Geometria, Santos (2019) desenvolve um estudo praxeológico na formação continuada de professores de Matemática da rede pública de ensino. A formação contou com 12 professores atuantes da Educação Básica. Na formação, o autor, amparado pela metodologia do PEP, abordou sistemas didáticos específicos aos estudos geométricos e utilizou da TAD, de modo a identificar as condições e restrições que permeiam as práticas pedagógicas dos professores participantes da pesquisa. Com a análise do sistema didático, Santos (2019) aponta que os professores se mostram dependente dos livros didáticos e que este instrumento vem direcionando as práticas pedagógicas dos professores. Enfatiza também que as condições estabelecidas, durante as formações acadêmicas dos professores, refletem no modo como conduzem o ensino de Geometria. Por fim, Santos (2019) declara que a utilização do PEP provocou uma desestabilização praxeológica dos conhecimentos geométricos, o que possibilitou uma reflexão sobre suas práticas, mas salienta que o percurso depende, diretamente, dos sujeitos e ressalta que a realidade do ensino no Brasil não incentiva ou propicia condições viáveis para que os professores permaneçam em formação continuada.

1.8.4. Categoria D – Estudos apoiados em Livros Didáticos

Esta categoria é composta por 10 pesquisas, entre elas oito dissertações e duas teses. Iniciamos com a dissertação de Almeida (2012), que objetivou investigar as praxeologias que modelam as resoluções das tarefas aplicadas no estudo do conteúdo polígonos regulares inscritos na circunferência, contido em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental. Como aporte teórico, utilizou-se a Teoria Antropológica do Didático, uma pesquisa qualitativa, que contou com uma abordagem fenomenológica. A coleta de dados foi realizada em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental. Almeida (2012) conclui que os livros analisados exploram o objeto de pesquisa e a análise mostra que há uma articulação entre as ODs e as OMs, na constituição de diferentes tipos de praxeologias pontuais, aplicadas no estudo. Com isso, Almeida (2012) entende que o estudo dos polígonos regulares, inscritos na circunferência, presente em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, pode ser abordado por diferentes tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, constituindo diferentes tipos de praxeologias pontuais.

A dissertação de Farias (2008), cujo o objetivo foi descrever e analisar representações do espaço geométrico, a partir de dados de livros didáticos, dentro das diretrizes estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e no Guia de Livros Didáticos (2007), nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa foi fundamentada pela TAD. Em seus resultados, Farias (2008) exibe uma ênfase crescente nos estudos da Geometria na contextualização dos saberes escolares, na diversidade de linguagens apresentada no ensino de representações espaciais e na sistematização dos saberes geométricos, além de ressaltar a importância do desenvolvimento de diferentes conexões no estudo das Geometrias.

Já a dissertação de Varella (2010) teve como objetivo analisar como os autores de livros didáticos do Ensino Médio organizam as tarefas propostas, por meio de testes e demonstrações de conteúdos de Geometria Analítica e aplicá-las ao terceiro ano do Ensino Médio. Varella (2010), em sua construção de dados, fez a análise de sete livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM/2009) e dois cadernos bimestrais adotados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEESP/2009). Os materiais analisados foram tarefas sobre o conteúdo de Geometria Analítica, com enfoque no estudo da equação da reta. A análise foi fundamentada na TAD, com o olhar da OM e OD, pensadas para o ensino e aprendizagem da Matemática, e o trabalho de Nicolas Balacheff, que visa ao estudo da tipologia de provas produzidas pelos alunos. Para tanto, o pesquisador estabeleceu uma OM e uma OD baseadas em quatro questões consideradas relevantes. Em relação às OMs e ODs, construídas a partir das tarefas executadas pelos autores, Varella (2010) observou que houve coerência com as tarefas propostas, visto que elas proporcionaram a mobilização de técnicas já desenvolvidas nas atividades resolvidas, como também, solicitaram a busca de conhecimentos adquiridos, não explícitos naquele capítulo específico.

A dissertação de Ordem (2010), que objetivou compreender a abordagem da prova e da demonstração de propriedades de triângulos presentes em livros didáticos da sexta a oitava série de Moçambique, teve a intenção de esclarecer/estabelecer como os livros didáticos em uso nas escolas apresentam a OM e a OD do objeto triângulo, com enfoque na prova e demonstração. Utilizou de uma OP para uma análise de dados bibliográficos, que indicou que não há uma exploração devida do estudo de triângulos nos livros analisados que predominam provas pragmáticas.

Em sua dissertação, Silva (2011) analisa, por meio da TAD, a abordagem do conteúdo de comprimento, perímetro e área em livros didáticos do sexto ano. A pesquisa foi subdividida em três etapas: a primeira envolve a construção de uma visão geral do trabalho desses conteúdos em todos os livros didáticos; a segunda identificou os tipos de tarefa contemplados e os predominantes nos capítulos que abordavam o conteúdo de comprimento, perímetro e área; e na terceira, o autor realizou a análise da OMP com um olhar para as atividades predominantes no estudo de comprimento perímetro e área, em dois livros didáticos de sexto ano. Silva (2011) conclui, com esta pesquisa, que, a maioria das obras analisadas, enfatizam as grandezas geométricas e considera insuficiente, quando o foco é na medida e não na grandeza. Utiliza de tipos de tarefa de conversão de unidades de medida e cálculo de figuras planas. Nos momentos da conversão, explora o sistema métrico decimal e as técnicas privilegiadas se apoiam na multiplicação e divisão de números decimais por potências de dez. O bloco tecnológico-teórico se apoia, essencialmente, nas operações fundamentais com números racionais escritos na forma decimal, nas propriedades das figuras geométricas e no campo das grandezas e medidas.

A dissertação de Jammal (2011) trata da pouca atenção dada ao estudo da Geometria Analítica e coloca em evidência a falta de articulação entre a proposta no plano do Ensino Médio e a do Ensino Superior. O que induz a autora a considerar a necessidade de uma melhor articulação de conhecimentos do Ensino Médio ao Ensino Superior, quando se inicia a Geometria Analítica no espaço, sem associar ao que já foi desenvolvido para o plano. Jammal (2011) ressalta que como professores se queremos que os estudantes sejam capazes de enfrentar novas situações, é importante considerar a proposta de identificação de conhecimentos prévios para um grupo de alunos iniciando em um Ensino Superior, e, com base nesses conhecimentos, elaborar um curso de Geometria Analítica que permita que utilizem as semelhanças e diferenças existentes entre estes espaços e, posteriormente, utilizar, de forma consciente, as diferentes representações externas de ponto, reta e plano, distinguindo os diferentes espaços de trabalho, sendo capazes de escolher o melhor método a utilizar. Jammal (2011) ainda aponta ser necessário que os estudantes possam planejar, executar, justificar e controlar o trabalho matemático. Os resultados obtidos permitem concluir que, para as relações institucionais esperadas e existentes as articulações de quadros, manipulação de ostensivos e evocação de não ostensivos dependem dos conhecimentos prévios de que os estudantes dispõem e/ou são capazes de mobilizar. Verifica-se ainda que, as noções de ponto e reta no plano são desenvolvidas considerando os quadros das funções, geometria euclidiana plana e cálculo algébrico. Em geral, o nível de conhecimento esperado dos estudantes difere em função do documento analisado, exigindo assim uma atenção em relação aos diferentes grupos de estudantes quando se introduz a Geometria Analítica no Ensino Superior.

Em sua dissertação, Carvalho (2012) realiza uma análise da abordagem de figuras geométricas planas, sob a ótica da TAD. Como objeto de estudo, utilizou o guia de estudo do aluno do Programa Projovem Urbano, programa cuja finalidade é elevar a escolaridade de jovens com idades entre 18 e 29 anos. Para tal análise, desenvolveu um mapeamento do habitat e do nicho do vocábulo, área no guia de estudo, ancorados na TAD para a organização das praxeologias matemática e didática relacionadas ao objeto área, a fim de identificar condições e restrições na difusão do conhecimento relativo a esse objeto na instituição Projovem Urbano. Com relação às organizações Praxeológicas e os níveis de codeterminação, pode haver um estudo comparativo da abordagem área de figuras planas do Guia de Estudo do Aluno e do Manual do Educador.

Almeida (2012) investiga, em sua dissertação, como livros didáticos abordam o estudo das progressões aritméticas e geométricas, no primeiro ano do Ensino Médio. A análise foi realizada em livros utilizados por escolas estaduais do município de Cuiabá (MT). Fundamentada na TAD, com enfoque nas praxeologias propostas por Chevallard (1999), que, em sua investigação, evidencia que as OPs de dois livros didáticos não explicitam a relação entre progressão e função, a qual é contemplada em outros livros, porém sem a clareza necessária para tal conteúdo. Almeida (2012) aponta que os livros selecionados na investigação não propõem, com frequência, tarefas que estimulam a generalização de padrões, com um domínio de tarefas que envolvem calcular e determinar tarefas consideradas de imitação. Entre os livros selecionados para os estudos, o autor constata que nenhum deles é "completo" para contribuir, efetivamente, para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudos das progressões. E considera que mesmo que fossem contempladas todas as recomendações dos documentos oficiais, não seria completo. Com isso, cabe ao professor selecionar o livro que considerar mais adequado, segundo a sua opinião e conforme a realidade de seus estudantes.

Em sua tese, Costa (2015) desenvolveu sua pesquisa com quatro livros didáticos de Geometria Analítica no espaço, voltado para o Ensino Superior e publicados no período da reforma da Matemática Moderna. O objetivo principal foi analisar como autores de livros didáticos organizaram as atividades propostas, em relação ao estudo de retas e planos para ensino de Geometria Analítica no espaço. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, do tipo documental. O referencial teórico adotado foi a TAD, com foco nas praxeologias e nas variáveis didáticas de Lebeau (2009), para o ensino de Geometria Analítica. Costa (2015) apresentou uma OP, destacando os tipos de tarefas encontrados nos materiais analisados. O pesquisador conclui que os autores dos livros analisados privilegiam o uso algébrico nos estudos de elementos geométricos e as técnicas.

Em uma tese que estuda as três dimensões do problema didático de inequações, Mineiro (2019) realiza uma análise documental, fundamentada na TAD. Utiliza, das praxeologias, para desenvolver o estudo de inequações, na Educação Básica, na busca de estabelecer de que modo esse saber associado às inequações são descritos e interpretados nos livros, manuais e diretrizes que amparam a Educação Básica do Brasil, e como esta interpretação solidifica um Modelo Didático Dominante (MDD) e reflete no ensino. As análises desta pesquisa se desenvolvem no confronto entre um modelo epistemológico de referência e o Modelo Epistemológico Dominante (MED), que explicitou que o ensino de inequações na Educação Básica consiste na aprendizagem de técnicas de resolução, sem considerar as possibilidades relacionadas a grandezas, demonstrações de teoremas e figuras geometrias. Ao concluir sua investigação, Mineiro (2019) considera que sua proposta de um MDR serviu de base à elaboração de percursos de estudo e pesquisa para o ensino de inequações. Ao finalizar, pontua que há várias questões que merecem aprofundamentos, mas que não foram contemplados em sua pesquisa.

1.8.5. Uma análise do levantamento de pesquisas sobre “Teoria Antropológica do Didático” e a “Geometria”

De modo geral, nossos resultados indicam um quantitativo pouco significativo de trabalhos no campo das Geometrias, com predominância notável de estudos voltados à Geometria Euclidiana. Embora a TAD seja, amplamente, aplicada na Educação Matemática, podemos observar que a utilização da TAD para a investigação de livros didáticos e outros materiais didáticos, é vasta, mas ainda é tímida, na investigação da prática docente.

Observa-se uma maior intensidade desta teoria na pesquisa em Educação Matemática, no Brasil, nos últimos anos. Desta maneira, ainda há olhares sobre a TAD que ainda não foram ou foram minimamente explorados, como, por exemplo, “Geometria dos Fractais”. Vale salientar que, apesar da busca com os termos “Teoria Antropológica do Didático” e “Geometria dos Fractais” não apresentarem nenhum resultado nas plataformas de busca, entre os trabalhos encontrados, houveram intervenções e estudos envolvendo a geometria dos fractais. Os trabalhos, em sua maioria, são vinculados ao Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG), grupo que a autora, desta dissertação, faz parte. Isso ressalta tanto uma dedicação regional ao tema quanto a escassez de pesquisas relacionadas a um assunto que apresenta grande potencial de implementação.

A geometria dos fractais oferece um vasto campo de estudo e pesquisa para a construção do conhecimento matemático. Ao aplica-la os princípios da TAD, é possível investigar como os estudantes constroem seu entendimento sobre fractais e como os professores podem mediá-lo, bem como investigar a construção desses conhecimentos e quais estratégias pedagógicas serão eficazes e como os contextos culturais e sociais influenciam a compreensão dos estudantes.

Pesquisas nessa área tem o potencial de avançar nosso entendimento sobre como os estudantes constroem o conhecimento matemático e como os professores podem apoiar esse processo. Ao explorar a interação entre a TAD e a geometria dos fractais, abre-se espaço para abordagens pedagógicas inovadoras nesse campo, que se mostram uteis devido a sua escassez, contribuindo não apenas para o ensino da geometria dos fractais, mas também para o desenvolvimento da prática docente, de forma mais ampla. Apesar de ser um campo considerado novo no cenário educacional nacional (PEREIRA; BIRGES, 2017), é um conteúdo que está presente no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (CREP) (PARANA, 2021), além de contribuir para o conhecimento relacionado à TAD e como ela pode ser aplicada em diversos momentos de ensino.

Em resumo, as pesquisas que exploram a interação entre a TAD e a geometria dos fractais têm o potencial de avançar nosso entendimento sobre como os estudantes constroem conhecimento matemático complexo e como os professores podem apoiar esse processo. Essa combinação promissora permite uma visão mais abrangente e aprofundada do ensino e aprendizagem na área da geometria dos fractais, abrindo caminho para abordagens pedagógicas inovadoras e eficazes nesse campo.

Portanto, esta pesquisa visa investigar as possibilidades que os objetos geométricos podem oferecer, em sala de aula. A fim de nortear a presente pesquisa, nos apoiamos nas habilidades e competências estabelecidas na BNCC, documento que norteia a educação básica nacional.

1.9. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC desempenha um papel fundamental no cenário educacional contemporâneo. a fim de orientar a construção dos currículos escolares do Brasil. A BNCC é um documento, de caráter normativo, de âmbito federal, que estabelece um conjunto de aprendizagens consideradas essenciais para os estudantes desenvolverem, ao longo da Educação Básica. Ela atua como um guia para a elaboração dos currículos das escolas, visando garantir uma formação de qualidade, uma sociedade justa, inclusiva e democrática, com uma educação igualitária para todos (BRASIL, 2018, p. 09).

Homologado de forma definitiva, em 2018, o documento se apresenta visando servir como referência para a reformulação obrigatória dos currículos de todas as redes de ensino, e, com isso, garantir que as esferas públicas e particulares caminhem no mesmo sentido, viabilizando a permanência do educando na escola (BRASIL, 2018, p. 8). Sua estruturação é baseada em conhecimentos, competências e habilidades.

No Ensino Fundamental, a BNCC divide o aprendizado em áreas de conhecimento. No que se refere ao componente curricular Matemática, propõe cinco unidades temáticas, sendo elas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística.

A BNCC conta com uma estrutura que destaca competências gerais, as quais devem ser desenvolvidas, ao longo da Educação Básica. Cada ano letivo e área de conhecimento conta com um quadro que lista objetos de conhecimento e habilidades, que compõem as unidades temáticas deste respectivo ano letivo. Cada habilidade contém um código e, para melhor compreensão desse código, tomemos o exemplo, a seguir, conforme consta na BNCC.

Figura 13 – Exemplo do código de aprendizagem

Fonte: Brasil, 2018, p.30

O código é composto por oito caracteres, onde o primeiro par de letras indica a etapa de Ensino - Ensino Infantil (EI), Ensino Fundamental (EF) ou Ensino Médio (EM). O exemplo apresentado refere-se ao Ensino Fundamental. Em seguida, o par de números indica o ano que se refere tais habilidades. Em continuidade, o segundo par de letras indica a área de conhecimento (EF – Educação física) ou o componente curricular (MAT – Matemática e suas Tecnologias). Por fim, o último par de números indica a posição sequencial da habilidade no ano escolar (ou do bloco de anos).

Nesse sentido, a BNCC visa direcionar a Educação Básica para desenvolver as competências e habilidades, nela descritas. Com isso, a presente pesquisa se ampara, nesse documento, para o desenvolver das tarefas, considerando que é de suma importância nos basearmos em um alicerce formativo, para que a sua elaboração seja compatível com as necessidades de aprendizagem dos estudantes.

Na presente pesquisa, utilizaremos um objeto geométrico não euclidiano – o fractal Tetra-Círculo – para estudar conceitos da Geometria, com base nos objetos de conhecimento das unidades temáticas de "Geometria" e "Grandezas e Medidas", do 6º ao 9º ano.

Desta forma, exploraremos, por exemplo, objetos de conhecimento, como a circunferência como lugar geométrico e as relações entre arcos e ângulos na circunferência, durante a exploração do fractal Tetra-Círculo, ao discutirmos que suas iterações se comportam de forma que as próximas circunferências possuem metade do raio da circunferência inicial e se posicionam de forma equidistante. Com isso, podemos posicionar as próximas circunferências utilizando distância entre pontos no plano cartesiano, a fim de identificarmos as próximas iterações do fractal. Com isso, esta pesquisa almeja possibilitar uma conexão entre as competências e habilidades da área de conhecimento de Matemática, e viabilizar o desenvolvimento de trabalhos e tarefas, por meio dessa Geometria.

Considerando o exposto, utilizamos das habilidades e competências estabelecidas, no documento citado, para a estruturação das tarefas. A produção dos dados será desenvolvida com o apoio do *software* Scratch, utilizado, atualmente, na rede estadual de ensino na disciplina de pensamento computacional, do Estado do Paraná. Portanto, a presente pesquisa conecta as competências e habilidades da área de matemática, conforme estabelecido na BNCC, com a exploração de um objeto geométrico não convencional. Ao fazê-lo, visa-se não apenas promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, mas também desenvolver habilidades de pensamento computacional e raciocínio critico nos estudantes.

Recentemente (2022), no estado do Paraná, foi instituída a disciplina de Pensamento Computacional, com base no Referencial Curricular do Estado do Paraná (PARANÁ, 2021) e no documento denominado como complemento à BNCC (BRASIL, 2022), que estabelece normas sobre a computação no Ensino Fundamental. O termo "pensamento" simboliza as habilidades cognitivas que estão associadas à programação e à expressão "pensamento computacional". Brasil (2022) indica um conjunto de habilidades para compreender, definir, modelar, comparar, solucionar, automatizar e analisar problemas e possíveis soluções, de forma metódica, por meio de algoritmos, considerando uma descrição precisa de um raciocínio que envolva a compreensão das etapas, recursos e informações em um dado processo. A intenção destes documentos é fazer o desenvolvimento do pensamento computacional envolva mais do que a capacidade de construir objetos abstratos ou sistematizar problemas. A intenção inicial desta exploração é fornecer habilidades de argumentação e análise crítica, tornando estudantes capazes de desenvolver habilidades para realizar suas próprias programações, desenvolvendo o pensamento computacional, o que o documento entende como habilidade necessária no século XXI.

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral sobre a Geometria e seu desenvolvimento histórico, a geometria dos fractais e o objeto fractal de estudo desta pesquisa, o fractal Tetra-Círculo. Discutimos a utilização do software Scratch como ferramenta para explorar conceitos geométricos e algorítmicos, e apresentamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) como o aporte teórico que norteia esta pesquisa. Realizamos uma revisão de literatura sobre a TAD no contexto do ensino de Geometria e destacamos a importância da BNCC para a Educação Matemática no Brasil. Nos próximos capítulos, aprofundaremos a análise das praxeologias geométricas envolvidas na construção e exploração do fractal Tetra-Círculo, utilizando o Scratch como ferramenta de ensino e aprendizagem.

2. ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo, descreveremos os encaminhamentos utilizados no delineamento e na execução desta pesquisa, e apresentaremos a caracterização, a problemática e os objetivos que norteiam a pesquisa, bem como os critérios utilizados para a análise dos dados.

2.1. Caracterização da pesquisa

O caráter do problema de pesquisa tende a delinear o método a ser utilizado. Assim, considerando o problema de pesquisa, a estratégia de investigação e os procedimentos utilizados, este trabalho se caracteriza por uma abordagem qualitativa. Alves-Mazzotti (2002) indica que a pesquisa, de caráter qualitativo apresenta características flexíveis, pois considera vários aspectos do tema estudado e parte do pressuposto de que sempre há algo a ser desvendado, uma vez que estuda o que não pode ser quantificado. Esse tipo de pesquisa se preocupa em compreender fenômenos, uma vez que, segundo Minayo (2010, p. 21), a pesquisa qualitativa "trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes". Dessa forma, a pesquisa qualitativa considera o pesquisador como a principal ferramenta para a obtenção das informações com um foco maior no processo, o levando a utilizar inúmeros métodos para a compreensão destas informações, no momento de análise dos dados.

A presente pesquisa é considerada uma pesquisa qualitativa, pois haverá um envolvimento direto da pesquisadora no processo de produção e interpretação dos dados, que serão produzidos por meio de uma análise *a priori* de tarefas construídas pela pesquisadora, desenvolvidas e analisadas em estruturas praxeológicas. "Os métodos qualitativos envolvem o processo de coleta, análise, interpretação e redação dos resultados de um estudo" (CRESWELL, 2007, p.21), o que condiz com o desenvolvimento da presente pesquisa, que objetiva compreender as possibilidades existentes na abordagem de conceitos geométricos, considerando a pesquisadora como a principal ferramenta para a obtenção desses dados.

Acerca de uma análise *a priori*, consoante com Almouloud (2007), estabelecemos uma análise matemática e uma análise didática das organizações estabelecidas no processo de construção do objeto fractal. Realizamos uma análise matemática, identificando métodos e estratégias para cada situação, a fim de evidenciar os conhecimentos matemáticos envolvidos na construção do objeto fractal, apresentando possíveis praxeologias que podem emergir durante uma implementação em sala de aula. A análise didática deve considerar aspectos como: a pertinência das tarefas propostas, as dificuldades que os estudantes podem enfrentar na resolução de cada tarefa, a identificação de diferentes técnicas possíveis de serem evocadas em cada implementação e, por fim, estabelecer os saberes a serem institucionalizados ou não, delimitando o tema a ser estudado.

Com base nessa perspectiva, foi elaborada uma OP da construção do fractal Tetra-Círculo, utilizando o *software* Scratch e explorando conceitos de Geometria estabelecidos pela BNCC. Esse processo permitiu uma compreensão mais profunda das possibilidades de abordagem de conceitos geométricos, levando em consideração tanto os aspectos matemáticos quanto os didáticos envolvidos.

2.2. O problema de pesquisa

Na tentativa de contribuir para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental, entendemos a importância de seu estudo durante os cursos de formação de professores de Matemática. Lorenzato (1993) apresenta que a formação dos professores, em relação ao estudo de conceitos geométricos é falha e que o professor não dispõe dos conhecimentos necessários para compor sua prática pedagógica. Um dos maiores impedimentos relacionados ao ensino da Geometria é a escassez de materiais manipuláveis e/ou livros didáticos com encaminhamentos ou indicações de recursos que podem auxiliar a prática do professor durante o ensino, uma vez que a Geometria muitas vezes parte de aspectos visuais para extrair conclusões matemáticas (LOBATO, 2019).

Assim, quando não há variedade de metodologias ou de materiais, o ensino da Geometria se torna limitado, pautado em conjuntos de definições, nomes e propriedades, fornecendo uma relação restrita entre os estudantes e os conceitos de Geometria.

Partindo dessas reflexões, emerge nossa inquietação referente ao ensino da unidade temática Geometria durante o Ensino Fundamental. Por esse motivo, o presente estudo consistiu em estabelecer um MPR que poderá ser proposto a estudantes a partir do 6º ano do Ensino Fundamental. De modo a investigar as potencialidades deste MPR, a pesquisa caracterizou-se por uma análise *a priori*, com foco na mobilização de objetos geométricos relacionados às unidades temáticas de “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. A implementação de tal modelo está prevista para pesquisas futuras. Para tanto, nos alicerçamos no seguinte problema de pesquisa: Quais possíveis objetos geométricos são mobilizados durante a construção do fractal Tetra-Círculo?

Para responder a essa pergunta, utilizamos, como aporte teórico e metodológico a TAD, em consonância com as práticas de ensino, conforme explicitado por Chevallard (1999), que possibilitou modelar a exploração do Tetra-Círculo em termos de praxeologias, durante a resolução de tarefas exploratórias que envolvem sua construção no *software* Scratch.

Com relação ao entendimento das práticas de ensino, Chevallard (2002) explicita que:

> Quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se em primeiro lugar observar o objeto, depois descrevê-lo, analisá-lo e avaliá-lo, para, finalmente, desenvolver atividades que tem o objetivo de ensino e a aprendizagem desse objeto (CHEVALLARD, 2002, apud ALMOULOUD 2007, p.123).

Para a elaboração deste MPR, foram realizadas análises das praxeologias matemáticas e didáticas, considerando o quarteto praxeológico e os momentos didáticos. O intuito foi elaborar uma OP que integre os aspectos do ensino da Geometria, proporcionando uma abordagem mais eficaz e significativa para os estudantes.

Dessa forma, este MPR visa contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental, fornecendo um modelo que possa auxiliar professores na condução das aulas e os estudantes na compreensão dos conceitos geométricos, por meio da exploração do fractal Tetra-Círculo.

2.3. Objetivo

2.3.1. *Objetivo geral*

Investigar objetos geométricos que podem ser mobilizados durante a construção do fractal Tetra-Círculo, no *software* Scratch.

2.3.2. *Objetivos específicos*

a) Identificar os objetos geométricos, euclidianos e não euclidianos, decorrentes da construção e da exploração do fractal Tetra-círculo;
b) Construir uma OP, com tarefas que envolvam a exploração do fractal Tetra-Círculo, por meio de uma proposta de MPR.

2.4. O Modelo Praxeológico de Referência (MPR)

O desenvolvimento da TAD, desde o aperfeiçoamento da Teoria da Transposição Didática (1990), apresenta-se em constante modificação com a inclusão de novos conceitos e abordagens, visando expandir sua teorização. Um dos avanços significativos foi a incorporação dos modelos epistemológicos, construídos no âmbito da didática da matemática. Dentre esses modelos, consideraremos o MER, que nos servirá como fundamentação para a elaboração do MPR. Gascón (2018) aponta que, com os desenvolvimentos recentes, a noção de MER se apresenta como uma espécie de MPR ao proporcionar uma estrutura praxeológica coerente, desenvolvida com o intuito de ampliar o objeto de estudo das ciências didáticas, permitindo a análise de praxeologias predominantes em uma determinada instituição (GASCÓN, 2018).

Sendo assim, ao considerarmos o MPR, este foi estruturado para o estudo qualitativo da Geometria, englobando o bloco tecnológico-teórico, composto por técnicas a serem utilizadas em um conjunto de tarefas de maneira que estas técnicas sejam pertinentes ao discurso tecnológico estabelecido pelo MPR. Utilizando como parâmetro de análise as orientações de documentos norteadores do ensino de Matemática, como as competências e habilidades indicadas na BNCC (2018), este modelo é composto por 13 tarefas, estruturadas em Organizações Praxeológicas, com uma análise a *priori* das tarefas que as compõem. Uma das funções essenciais da utilização desses modelos, conforme apontado por Gascón e Bosch (2010), é fornecer à pesquisa, em didática, um instrumento de emancipação em relação às diferentes instituições que compõem parte de um objeto de estudo. Em particular, deve servir para questionar, analisar e avaliar os modelos dominantes nessas instituições (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 61).

Nesse processo, é crucial analisar não apenas os aspectos cognitivos, mas também as noções matemáticas que devem ser ensinadas, o que demanda um Modelo Praxeológico para descrever o saber matemático. É nessa perspectiva e com base na TAD que se constituiu um MPR, o qual permitiu a obtenção de distintas praxeologias sobre o mesmo conteúdo matemático. O conteúdo matemático, em foco neste trabalho, foi a Geometria e o modelo se apoia nas habilidades impostas pelo documento normativo do país, que estabelece esses conteúdos como cruciais para o desenvolvimento dos estudantes.

Para o estabelecimento deste modelo, foi estruturada uma OP centrada na construção do fractal Tetra- Círculo no *software* Scratch. Essa organização consiste em tarefas que evocam objetos geométricos e conhecimentos estabelecidos na BNCC, seguida da análise de seus momentos didáticos. Essa abordagem visa proporcionar uma compreensão mais aprofundada da Geometria e promover uma aprendizagem significativa para os estudantes.

2.5. Critérios de análise

Nesta pesquisa, utilizamos uma análise *a priori* para investigar os dados produzidos durante a Organização Praxeológica, com base na construção do objeto fractal composta por 13 tarefas. Assim, a análise *a priori*, neste estudo, possibilitou a investigação das OPs, que versaram sobre os objetos de conhecimento geométricos e algumas habilidades, conforme proposto na BNCC, para as unidades temáticas de “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Essas habilidades são possíveis de serem abordadas a partir da geometria dos fractais, mais especificamente do fractal Tetra-Círculo.

Retomando o que foi descrito anteriormente: uma OP consiste em uma OD e OM, e essas organizações compõem um MPR. Assim, realizamos, a análise *a priori* das 13 tarefas que compõem a sequência didática, apresentando possíveis praxeologias que podem emergir durante uma implementação em sala de aula, realizando a análise da OM elaborada pela pesquisadora. Dessa maneira, delimitamos o tema a ser estudado apresentando algumas variáveis acerca da noção de Geometria. Esta analise teve como base os quartetos praxeológicos elaborados a partir das tarefas que compõem a construção do objeto fractal, formados pelos tipos de tarefas (T), pelas técnicas (τ), pelas tecnologias (θ) e suas respectivas teorias (Θ), que constituirão as OMs. No que diz respeito à OD, esta permeará a proposta da sequência didática, que consistirá na construção do fractal Tetra-Círculo, de modo a explorar seus elementos geométricos. Assim, o MPR é derivado de uma sequência didática composta pelas OM e OD. Este modelo será investigado por meio de uma análise *a priori* das tarefas que estruturam a OP, com o objetivo de conferir confiabilidade ao modelo construído.

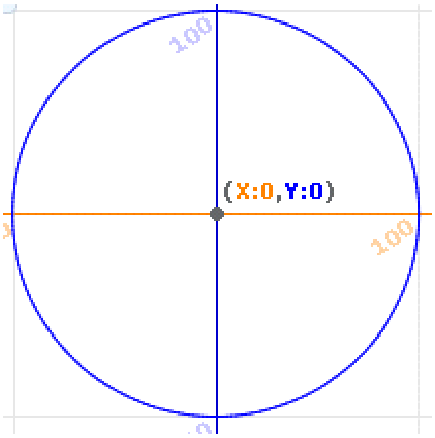
3. ANÁLISE DOS DADOS

Diante desse cenário, a estruturação da proposta do MPR e a identificação e entendimento dos problemas que dificultam a compreensão dos estudantes e sua aplicação do campo das Geometrias, por parte dos professores, são essenciais para a criação de novos modelos de ensino. Para desenvolver este modelo, utilizamos a TAD como aporte teórico. Realizamos uma análise *a priori* modelada em termos de praxeologias, com enfoque nas possibilidades relacionadas aos objetos geométricos durante a construção do objeto fractal Tetra-Círculo, com o *software* Scratch.

O MPR foi composto por 13 tarefas alinhadas às unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas” da BNCC. Realizamos a análise da OM elaborada pela pesquisadora, desenvolvida concomitantemente com a construção do objeto fractal no *software* Scratch. Em seguida, estabelecemos uma sequência didática, composta pelos quartetos praxeológicos mobilizados durante a resolução das tarefas. Com base nesse quarteto praxeológico, identificamos seus momentos didáticos e, por fim, os objetos geométricos decorrentes da OM elaborada. Como parte da execução da OM, discutimos uma OD para compor o MPR. A OD elaborada é destinada a estudantes do Ensino Médio, porém, contemplará conceitos do Ensino Fundamental, de modo a complementar a formação desses estudantes.

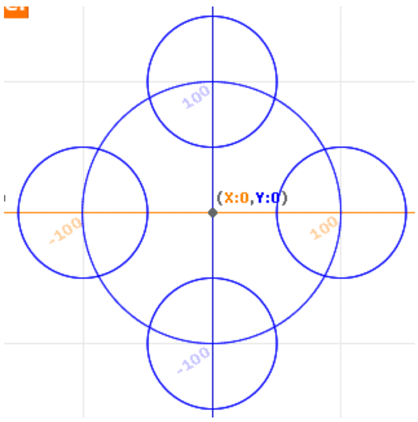
A construção do fractal Tetra-Círculo, no Scratch, foi realizada em quatro etapas, correspondentes às quatro primeiras iterações do objeto. Em seguida, essas iterações foram executadas, levando em consideração sua estrutura e, em alguns momentos, suas próprias iterações. Esse processo permitiu uma compreensão mais aprofundada dos conceitos geométricos envolvidos no fractal e suas aplicações práticas.

Figura 14 – Primeira iteração



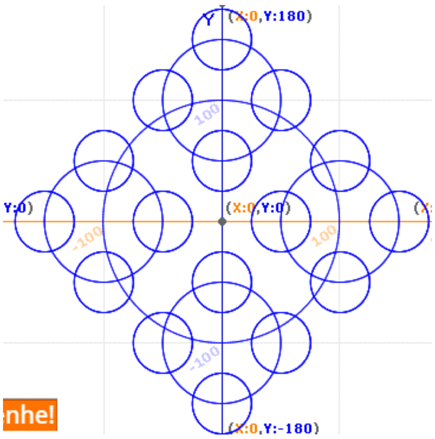
Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Figura 15 – Segunda iteração



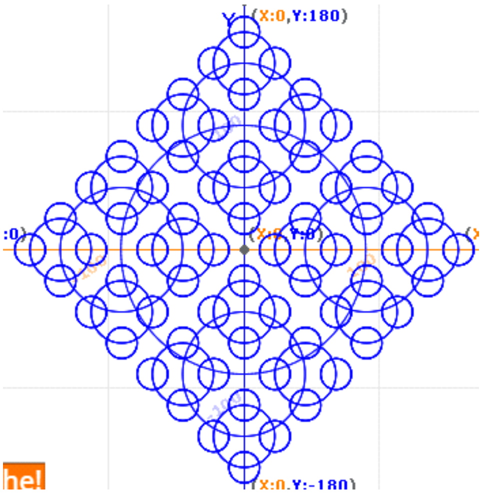
Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Figura 16 – Terceira iteração



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Figura 17 – Quarta iteração



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

3.1. Apresentação da sequência didática e Análise *a priori*

Nesta seção, realizamos a análise *a priori* caracterizando o conteúdo geométrico incluído na sequência didática. Entendemos por sequência didática, uma série de situações estruturadas ao longo de aulas, que viabilizam a aquisição de um saber. O conteúdo explorado em cada Tipo de Tarefa é evidenciado no campo das "tecnologias", que se encontra no quarteto praxeológico, descrito em cada análise.

Conforme Zabala (1998), uma sequência didática é um conjunto de tarefas elaboradas para desenvolver certas competências e habilidades, indo além de uma forma de organizar as aulas. Trata-se de propor uma sequência de tarefas semelhantes, que permita aos estudantes identificar e tecer relações proporcionando, assim a construção do conhecimento pelos estudantes. Este trabalho concentra-se nas unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas", norteando, assim, os conceitos e conteúdos abordados por meio da sequência didática estruturada na exploração do fractal Tetra-Círculo. Esta sequência será composta por OM estruturada em praxeologias e OD elaborada considerando as possibilidades de momentos didáticos emergentes da construção. Ambas as organizações compõem o MPR estabelecido na exploração do fractal Tetra-Circulo, no *software* Scratch, e, a partir dessas organizações, fornecem recursos para seu estudo e orientações a professores. Considerando que os conteúdos previstos no documento (BNCC) devem ser de conhecimento dos professores de Matemática, posteriormente evidenciamos possibilidades a serem trabalhadas com a sequência didática proposta.

Para a organização da análise *a priori*, identificamos as tarefas enumerando-as conforme o tipo de tarefa à qual pertencem, utilizando o primeiro número para indicar o tipo e o segundo para identificar a tarefa, da seguinte maneira: $t_{1.2}$, $t_{2.1}$. Foram elaboradas 13 tarefas que nos permitiram investigar objetos geométricos emergentes da exploração do Tetra-Círculo. Seguindo com a exploração da técnica enumerada e, utilizando a mesma lógica de identificação, o primeiro número identifica o tipo de tarefa, n o segundo, a tarefa e o terceiro, a técnica à qual se refere. Reconhecermos que algumas tarefas possuem ilimitadas técnicas de execução, apresentadas da seguinte maneira: $\tau_{1.1.1}, \tau_{1.1.2}, \tau_{1.2.3}, \ldots$, amparadas pelo bloco tecnológico-teórico, as tecnologias foram enumeradas de forma análoga às tarefas, considerando suas várias possibilidades de uso, estas se apresentaram da seguinte maneira: $\theta_{1.1.1}, \theta_{1.1.2}, \theta_{1.1.3}, \ldots$. Por fim, a teoria que fundamenta esses procedimentos foi representada da seguinte maneira: $\Theta_{1.1}, \Theta_{2.1}, \Theta_{3.1}$.

Algumas tarefas tratam, especificamente, das etapas correspondentes às iterações do objeto fractal, enumeradas da seguinte forma e_1, e_2, e_3, e_4, que correspondem às quatro primeiras iterações do objeto fractal.

Para cada construção praxeológica, evidenciaremos suas respectivas OD e OM, compostas pelos momentos didáticos e pelas praxeologias desenvolvidas formadas por um tipo de tarefa, uma técnica, uma tecnologia e uma teoria, previstas durante o desenvolvimento da sequência didática. Isso permitiu a exploração de conceitos geométricos relacionados à construção do fractal Tetra-Círculo.

3.2. Proposta de sequência didática

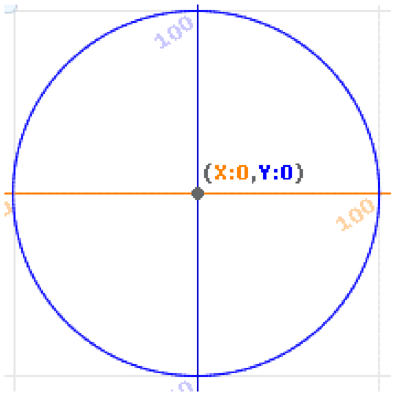
Neste momento, deve-se utilizar das tarefas para executar a construção do objeto fractal, juntamente com a exploração do *software* Scratch, utilizando os conceitos geométricos envoltos da construção, iniciando pelos tipos de tarefas que utilizam diretamente: o *software* e as tarefas geométricas emergentes da construção.

Portanto, a proposta desta sequência consiste em trabalhar a construção de objetos geométricos euclidianos, por meio da construção de um objeto não euclidiano, o Tetra-Círculo, de modo a propor tarefas que orientem os estudantes no trabalho com o *software* Scratch e sua exploração.

3.2.1. *Tipo de Tarefa 1: Construir a circunferência como lugar geométrico*

$t_{1.1}$: Construir uma circunferência utilizando o software Scratch

Figura 18 - Construção da circunferência no Scratch



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\tau_{1.1.1}$: A técnica que permite desenvolver esta tarefa consiste em: **i**) Abrir o *software* Scratch no grupamento de "eventos" e estabelecer quando o que for programado será iniciado, utilizando o bloco "quando for iniciar [5]clicado", para iniciar a programação; **ii**) Utilizar o bloco "caneta" e definir que sempre que o projeto for iniciado, o que foi produzido com a "caneta", anteriormente, será apagado, utilizando a peça "apagar tudo"; **iii**) Utilizar a peça "vá para x: e y:" e posicionar o objeto em "x:0 e y:0" para centralizá-lo. Bloco posicionado no grupamento de "movimentos"; **iv**) Usar a peça "levante a caneta"; **v**) "Apontar para a direção de 90º"; mover 20 passos; **vi**) "aponte para a direção de 0º"; **vii**) "Usar a caneta"; **viii**) Ir ao grupamento "controle", selecionar o bloco "repita n vezes"[6] e substituir o número de vezes por 36; **ix**) Adicionar os blocos "mova x passos e gire x graus", localizado no grupamento de "movimentos"; **x**) adicionar ao bloco mova, utilizando de blocos de multiplicação e divisão disposto no grupamento de "operadores" e estabelecer o movimento em $(2 \cdot 20)/36/\pi)$; **xi)** Utilizar o bloco e gire em 10 graus.

[5] Utilizaremos a palavra "iniciar" para representar a bandeira verde desenhada no bloco.
[6] Utilizaremos *n* em alguns momentos para representar espaços em branco no bloco.

Figura 19 - Construção da circunferência no software Scratch $t_{1.1.1}$

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos relacionados a esta tarefa temos: $\theta_{1.1.1}$: Noção do elemento figural “circunferência”; $\theta_{1.1.2}$: Noção de ângulo; $\theta_{1.1.3}$: Noção de cálculo do comprimento de uma circunferência.; $\theta_{1.1.4}$: Noção de par ordenado; $\theta_{1.1.5}$: Noção de variável.

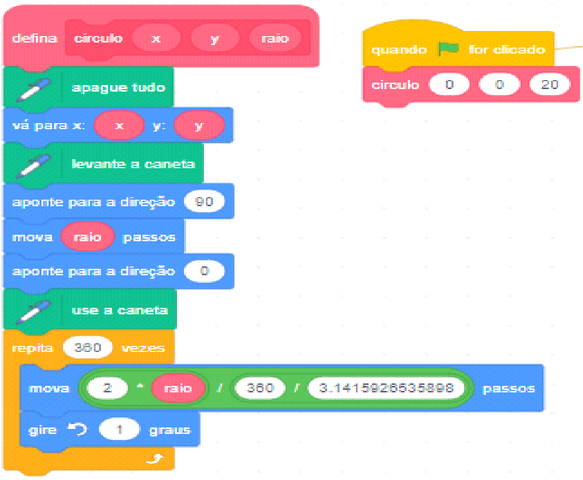
Em vista ao que foi apresentado, na técnica descrita em $\tau_{1.1.1}$, a estratégia de resolução envolve: identificação de pares ordenados para determinar as coordenadas dos pontos que compõem a circunferência; identificação do posicionamento angular do objeto, necessário para estabelecer o ângulo de rotação a ser utilizado em uma circunferência; utilização do operador lógico “repita”, esse operador é utilizado para iterar a construção da circunferência repetindo o processo de desenho para a criação da circunferência; identificação do cálculo da área da circunferência; transcrição algébrica do cálculo da área da circunferência, expressa com valores pré-estabelecidos; identificação do número utilizado, considerando o maior número de casas decimais possíveis para maior precisão; identificação da angulação, em graus, para formação de uma circunferência.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar habilidades relacionadas às unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas o reconhecimento da circunferência, como lugar geométrico (EF07MA22), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), o estabelecimento do número, como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro

(EF07MA33) e utilizar expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19).

$\tau_{1.1.2}$: Outra técnica que permite a realização desta tarefa envolve: **i**) Abrir o *software* Scratch; **ii**) Ir ao grupamento denominado meus "blocos", criar um bloco e denominá-lo "circunferência"; utilizar do recurso "bloco" para automatizar a criação das circunferências; **iii**) Estabelecer, internamente, ao "bloco circunferência" as variáveis "x", "y" e "raio"; **iv**) Utilizar o bloco "caneta", para definir que sempre que o "bloco" for utilizado, o que foi produzido com a caneta, anteriormente, será apagado, utilizando o bloco "apagar tudo"; posicioná-lo, internamente, ao bloco "circunferência". **v**) Acionar no grupamento de "movimentos" o bloco "vá para x: e y:" e posicionar o objeto em "x:x" e "y:y", utilizando as peças estabelecidas no momento de criação do "bloco circunferência"; **vi**) Utilizar do grupamento "movimento" selecionar o bloco "aponte para a direção 90º", **vii**) Acionar o bloco "mover raio passos", utilizando a peça "raio" do bloco "circunferência"; **viii)** Utilizar o bloco "repita", que repetirá 360 vezes; interno ao comando "repita" definir o movimento, em que a caneta irá girar 1º e mover $(2 \cdot raio)/360/\pi$ em passos; **ix**) Utilizar, no grupamento de eventos, o bloco "quando iniciar for clicado", e adicionar a peça do bloco criado, e suas variáveis em "x", "y" e "raio".

Figura 20 - Construção da circunferência no software Scratch $t_{1.1.2}$



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos, temos os seguintes: $\theta_{1.1.1}$: Noção do elemento figural "circunferência"; $\theta_{1.1.2}$: Noção de ângulo $\theta_{1.1.3}$: Noção de cálculo do comprimento de uma circunferência; $\theta_{1.1.4}$: Noção de par ordenado. $\theta_{1.1.5}$: Noção de variável.

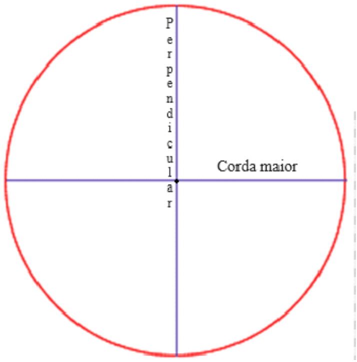
$\Theta_{1.1}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

Ao considerarmos a técnica descrita em Noção de ângulo, uma abordagem é ligeiramente diferente da utilizada anteriormente, uma vez que, ao escolhermos esta estratégia de resolução, é possível identificarmos: definição dos pares ordenados como variáveis, permitindo uma maior flexibilidade na manipulação dos pontos que compõem a circunferência; identificação do posicionamento angular do objeto, assim como a técnica anterior, é necessário para estabelecer o ângulo de rotação a ser utilizado em uma circunferência; definição do raio como variável, possibilitando ajustes dinâmicos durante a construção do fractal; movimentação angular do raio, garantindo a correta posição da circunferência; a relação entre a área da circunferência e a sua construção no software, é estabelecida uma relação entre a fórmula da área da circunferência e sua construção no *software*, permitindo uma compreensão mais concreta e prática do conceito matemático; expressão algebricamente escrita para o cálculo da área da circunferência; a fórmula para o cálculo da área da circunferência é expressa, de forma algébrica, através do *software*, possibilitando sua visualização e compreensão; identificação do número, utilizado considerando o maior número de casas decimais possíveis para maior precisão; identificação da angulação, em graus, para formação de uma circunferência determinada para posicionar corretamente a circunferência; e identificação de valores compatíveis para as variáveis estabelecidas, garantindo a correta construção do fractal.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), o estabelecimento do número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33), utilizar expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19).

$t_{1.2}$: Identificar o ponto central da circunferência utilizando o software.

Figura 21 - Circunferência com retas



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\tau_{1.2}$: A técnica que permite desenvolver esta tarefa consiste em; **i**) Utilizar o bloco "quando a tecla for pressionada", bloco encontrado no grupamento de eventos; **ii**) Utilizar do bloco "caneta" e a posiciona nos extremos da circunferência, definido anteriormente; **iii**) apontar a "caneta" na direção de 90º; **iv**) Utilizar o bloco "use a caneta" e adicionar o diâmetro da circunferência a ser movimentado no eixo "x", traçando a corda maior da circunferência; **v**) Utilizar o bloco "use a caneta" e adicionar o diâmetro da circunferência a ser movimentado no eixo "y", análogo ao procedimento descrito anteriormente para o traço do arco no eixo "y". **vi**) Estabelecer a corda maior em "x" e sua perpendicular em "y" que traçam a circunferência por completo e se interseccionam no ponto central da circunferência.

Com relação às tecnologias, temos: $\theta_{1.2.1}$: Noção do elemento figural "circunferência"; $\theta_{1.2.2}$: Noção de corda; $\theta_{1.2.3}$: Noção de reta ; $\theta_{1.2.4}$: Noção de par ordenado; $\theta_{1.2.5}$: Noção de ponto; $\theta_{1.2.6}$: Noção de intersecção.

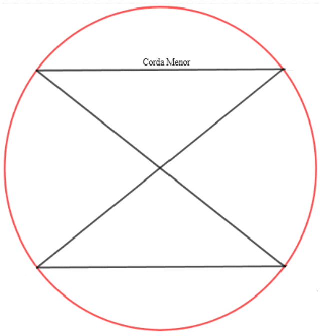
$\Theta_{1.2.2}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

Em vista ao que foi apresentado, na técnica descrita em $\tau_{1.2,}$ a estratégia relacionada a esta resolução envolve: a identificação do posicionamento angular do objeto, necessário para estabelecer o ângulo de rotação a ser utilizado em uma circunferência; relação numérica ao diâmetro da circunferência; utilização da unidade atribuída ao diâmetro para a translação no eixo ordenado, utilizada para realizar a disposição da corda; identificação da execução análoga para o eixo das abscissas do procedimento de translação realizado para o eixo das abscissas, garantindo a simetria e alinhamento adequados das circunferências.

Ao considerarmos o ambiente de sala de aula, é possível abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas, a construção de retas paralelas e perpendiculares fazendo o uso de *softwares* (EF06MA22), reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), reconhecimento da mediatriz e mediana como lugares geométricos (EF08MA17) e a relação entre arcos e ângulos de uma circunferência (EF09MA11).

$t_{1.3}$*: *Identificar o ponto central da circunferência.

Figura 22 - Circunferência com diagonais



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\tau_{1.3}$: A forma para identificar o centro da circunferência envolve técnicas diferentes da anterior. Considerando o objeto geométrico, seguimos os procedimentos: **i**) Traçar uma corda menor na extremidade da circunferência; **ii**) Traçar uma corda paralela à corda traçada no passo anterior; **iii**) Traçar um seguimento diagonal, que liga os pontos extremos das cordas; **iv**) Identificar a intersecção entre as diagonais como o ponto central da circunferência.

No que diz respeito as tecnologias relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{1.3.1}$: Noção do elemento figural "circunferência"; $\theta_{1.3.2}$: Noção de corda; $\theta_{1.3.3}$: Noção de segmento; $\theta_{1.3.4}$:. Noção de ponto; $\theta_{1.3.5}$: Noção de intersecção.

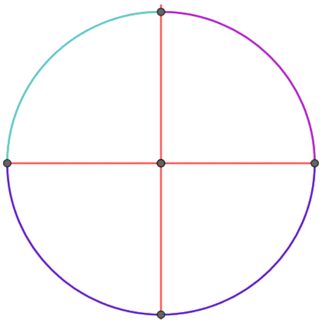
$\Theta_{1.6}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

Ao considerarmos a técnica descrita em $\tau_{1.3}$, a estratégia de resolução envolve: Identificação da corda menor da circunferência; Identificação da paralela a corda menor estabelecida; identificação dos pontos externos das cordas menores; utilização destes pontos extremos para o traço de segmentos diagonais; identificação do ponto central da circunferência.

Em vista ao apresentado, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, é possível abordar alguns objetos de conhecimento e habilidades relacionadas as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de retas paralelas e perpendiculares fazendo o uso de *softwares* (EF06MA22), reconhecimento da mediatriz e mediana como lugares geométricos (EF08MA17) e a relação entre arcos e ângulos de uma circunferência (EF09MA11).

$t_{1.4}$: Identificar arcos equidistantes na circunferência.

Figura 23 - Circunferência com arcos



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\boldsymbol{\tau_{1.4}}$: Utilizar da técnica $\tau_{1.2.1}$, desenvolvido anteriormente: **i**) identificar a corda maior da circunferência e estabelecer uma perpendicular a está corda; **ii**) identificar as intersecções das cordas na circunferência; **iii**) identificar o conjunto de pontos entre as intersecções da circunferência; **iv**) identificar o conjunto de pontos entre as intersecções da circunferência, estabelecer arcos da circunferência; **v**) identificar os arcos como equidistantes, considerando os pontos que a estabelecem como equidistantes e a angulação entre eles.

Com relação aos elementos tecnológicos relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{1.4.1}$: Conhecimento do elemento figural " Circunferência"; $\theta_{1.4.2}$: Noção de corda; $\theta_{1.4.3}$: Noção de arco; $\theta_{1.4.4}$: Noção de equidistância. $\theta_{1.4.5}$: Noção de angulo;

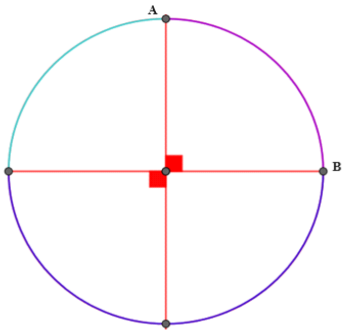
$\Theta_{1.4}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

Em vista ao apresentado, na técnica descrita em $\tau_{1.4}$, esta estratégia de resolução envolve: utilização do estabelecido em $t_{1.2}$, que inclui a identificação da corda maior da circunferência; a partir das cordas identificadas, estabelecimento dos arcos, identificação do conjunto de pontos formado pelas intersecções das cordas a circunferência; identificação dos arcos equidistantes da circunferência.

Com base no apresentado, ao considerarmos o ambiente de sala de aula é possível abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas, o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de retas paralelas e perpendiculares fazendo o uso de *softwares* (EF06MA22), reconhecimento da mediatriz e mediana como lugares geométricos (EF08MA17), e relação entre arcos e ângulos de uma circunferência (EF09MA11).

$t_{1.5}$: Identificar a medida de um arco da circunferência.

Figura 24 - Circunferência com ângulos



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\tau_{1.5}$: A técnica, que permite resolver esta tarefa, envolve: **i**) identificar dois pontos que pertençam à circunferência e que são extremos da circunferência; **ii**) utilizar do programado em $t_{1.4}$; **iii**) identificar os pontos "A" e "B" como pontos que estabelecem o arco; **iv**) utilizar os pontos "A" e "B" para estabelecer a medida do ângulo central; **v**) identificar a medida angular do arco "AB"; **vi**) identificar a relação entre a medida do ângulo central como $m(AB) = m(A\hat{O}B)$; **vii**) considerar o comprimento do arco (c) estabelecido e o raio (r) da circunferência **viii**) determinar a razão entre o arco e o raio da circunferência para determinar a medida do ângulo central em radianos $\beta = \frac{c}{r}$.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{1.5.1}$: Noção de divisão em partes iguais; $\theta_{1.5.2}$: Noção de ângulo; $\theta_{1.5.3}$: Noção de arco; $\theta_{1.5.4}$: Noção de medida de ângulo.

$\Theta_{1.5}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

Ao considerarmos o apresentado na técnica descrita em $\tau_{1.5}$, resolução que envolve: utilização do estabelecido em $t_{1.4}$, que inclui a identificação de arcos equidistantes da circunferência; identificação dos pontos de interseção a circunferência; identificação dos pontos de interseção das cordas, circunferência e o ponto central da circunferência; identificação da relação entre os pontos estabelecidos e a medida angular de um arco; identificação da relação entre a medida do ângulo central e o comprimento do arco; identificação da relação entre a medida do ângulo central e o comprimento do arco e o raio da circunferência; escrita algebricamente, da expressão para o cálculo da medida do ângulo central em radianos, considerado as relações estabelecidas anteriormente.

Com base no apresentado, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar habilidades relacionadas às unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas, o reconhecimento da circunferência, como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de retas paralelas e perpendiculares fazendo o uso de *softwares* (EF06MA22), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), reconhecimento da mediatriz e mediana como lugares geométricos (EF08MA17) e a relação entre arcos e ângulos de uma circunferência (EF09MA11).

Ao estabelecermos uma organização didática, relacionada às praxeologias apresentadas no Tipo de Tarefa 1, esta pode ser estruturada em quatro momentos: Apresentação dos Blocos e Funcionalidades do *Software*: neste primeiro momento o professor apresenta os blocos que compõem o *software*, explicando suas utilidades e funcionamento. É interessante mostrar exemplos de obras prontas, que foram desenvolvidas no *software*, para ilustrar as possibilidades. Em seguida, o foco é direcionado para as ferramentas relacionadas à construção da circunferência; A abordagem de elementos geométricos da circunferência ocorre no segundo momento, que é dedicado à exploração dos elementos que compõem a circunferência em sua existência geométrica. Isso inclui conceitos como corda, corda maior, pontos na circunferência, ângulos internos, equidistância entre pontos e a relação entre π e o comprimento da circunferência. Após essa explanação teórica, os estudantes iniciam a exploração do *software*, executando as tarefas de construção do objeto; Exploração do bloco tecnológico-teórico ocorre no terceiro momento, o qual o professor explora as técnicas a serem mobilizadas durante a construção da circunferência. São discutidos os conceitos geométricos relacionados às técnicas utilizadas, como a fórmula do comprimento da circunferência, a determinação do raio, do ponto central e dos arcos equidistantes.

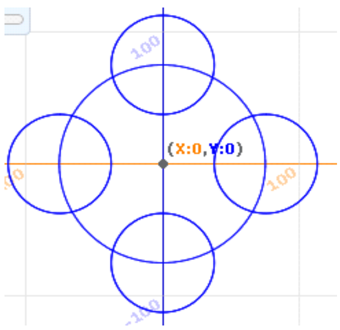
Os estudantes têm a oportunidade de experimentar as possibilidades do *software*, enquanto aplicam os conhecimentos geométricos adquiridos. A oficialização dos conceitos utilizados na construção ocorre no último momento, o qual busca oficializar os conceitos utilizados na construção da circunferência. Isso inclui a discussão sobre os conceitos de circunferência como lugar geométrico, a relação entre π, perímetro e diâmetro, a definição de cordas e a diferenciação entre corda menor e corda maior. Os estudantes também podem explorar os ângulos formados pelas cordas e suas definições, além de discutir as técnicas utilizadas e relacioná-las às teorias geométricas correspondentes. Essa organização didática permite uma abordagem abrangente dos conceitos geométricos envolvidos na construção da circunferência no *software*, ao mesmo tempo em que integra a exploração prática do *software* com a compreensão teórica dos conceitos matemáticos.

Os Tipos de Tarefas 1 podem ser utilizadas no Ensino Fundamental II, abordando habilidades, destinadas do 6º ao 9º ano, como a construção de retas paralelas e perpendiculares fazendo o uso de *softwares* (EF06MA22), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), estabelecer a circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), o estabelecimento do número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33), reconhecimento da mediatriz e mediana como lugares geométricos (08MA17), a translação do objeto geométrico (EF08MA18), utilizar expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19) e suas relações internas como arcos e ângulos (EF09MA11), juntamente com a distância entre os pontos no momento de posicionamento das novas iterações da circunferência (EF09MA16).

3.2.2. *Tipo de Tarefa 2: Estabelecer nas iterações do objeto fractal*

$t_{2.1}$: Estabelecer a segunda iteração do fractal Tetra-Círculo.

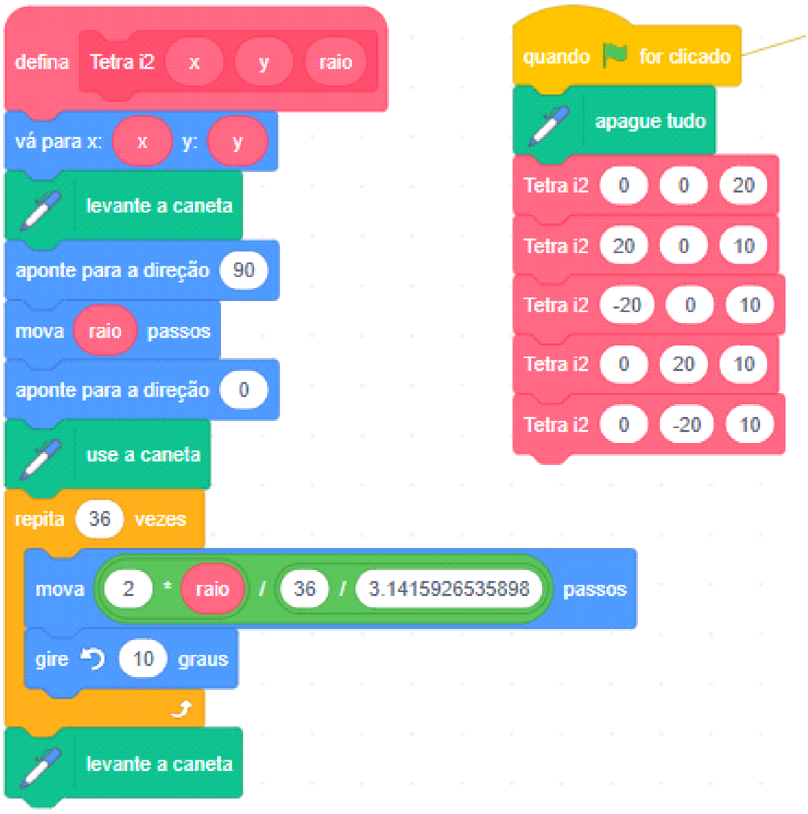
Figura 25 - Segunda interação $t_{2.1}$



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\tau_{2.1}$ A técnica que permite resolver a tarefa envolve; **i**) utilizar o grupamento “meus blocos” para criar um bloco denominado “Tetra i2”, correspondente à segunda iteração; **ii**) inserir as variáveis “x”, “y” e “raio” ao bloco “Tetra i2”; **iii**) utilizar no grupamento de “movimento” o bloco “va para x: y:”, e posicioná-lo no bloco “defina Tetra i2”; **iv**) Usar o bloco “levante a caneta”; **v**) “Apontar para a direção 90º”, localizado no grupamento de movimento **vi**) Utilizar o bloco de “movimento” para “mover b passos” e definir o movimento com a variável raio estabelecida no bloco “Tetra i2”, ou seja, “mova raio passos”; **vii**) “Apontar para a direção 0º”; **viii**) “Usar a caneta”; **ix**) utilizar o bloco “repita n vezes” e definir a repetição em 36 vezes; **x**) utilizar os blocos do grupamento “movimentos” e adicionar internamente ao bloco “repita” os blocos “mova n passos e gire n graus”; **xi**) incluir ao bloco “mova” operadores de multiplicação e divisão; **xii**) e Estabelecer o movimento em $(2 \cdot raio)/36/\pi)$, utilizando a variável “raio” do bloco “Tetra i2” **xiii**) estabelecer que o bloco “gire 10 graus”; **xiv**) usar o bloco “levante a caneta“; **xv**) utilizar no grupamento de “eventos” o bloco “quando iniciar for clicado”; **xvi**) utilizar no grupamento “caneta” o bloco “apagar tudo”; **xvii**) adicionar cinco peças “Tetra i2”, indicando as cinco circunferências; **xviii**) estabelecer o posicionamento e o raio da primeira circunferência como “Tetra i2 x:0 y:20 raio:20”; **xix**) estabelecer o centro das novas circunferências, considerando o raio estipulado na circunferência anterior como: “Tetra i2 x:0 y:20 raio:10”, Tetra i2 x:20 y:0 raio:10”, Tetra i2 x:-20 y:0 raio:10” e “Tetra i2 x:0 y:20 raio”.

Figura 26 - Construção da segunda iteração do fractal no Scratch $t_{2.1}$



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Em relação aos elementos tecnológicos relacionadas a tarefa temos: $\theta_{2.1.1}$: Noção de divisão em partes iguais; $\theta_{2.1.2}$: Noção de ângulo; $\theta_{2.1.3}$: Noção de arco; $\theta_{2.1.4}$: Noção de medida de ângulo; $\theta_{2.1.5}$: Noção de razão.

$\Theta_{2.1}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

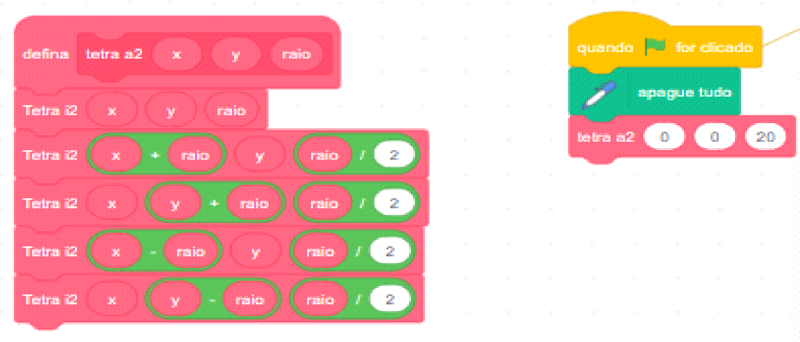
Em vista a técnica descrita em $\tau_{2.1}$, a estratégia envolve: utilização do estabelecido em $\tau_{1.1.2}$, que incluem a utilização de variáveis; identificação dos pares ordenado e raio da circunferência como variáveis, permitindo certa flexibilidade na manipulação do objeto; posicionamento dos pares ordenados, levando em consideração a variação dos valores das variáveis; identificação da angulação do objeto; identificação de movimento para a variável relacionada ao raio da circunferência; utilização do operador lógico "repita", esse operador é utilizado para iterar a construção da circunferência repetindo o processo de desenho para a criação da circunferência; identificação do cálculo da área da circunferência e transcrição algébrica dessa fórmula, utilizando as variáveis estabelecidas; identificação do posicionamento dos pares ordenados relacionados as circunferências que emergem na segunda iteração do objeto considerando a variação do raio relacionado a essa iteração.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação) utilizando *software* (EF08MA18), o estabelecimento do número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33), a utilização de expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19) e estabelecimento de relação entre arcos ângulos na circunferência (EF09MA11).

$t_{2.2}$: Estabelecer uma automação da segunda iteração do fractal Tetra-Círculo.

$\tau_{2.2}$: A técnica que permite resolver a tarefa envolve; **i**) utilizar o grupamento “meus blocos” para criar um bloco denominado “Tetra i2”; **ii**) inserir o bloco desenvolvido em peça “Tetra i2”e as variáveis “x”, “y” e “raio” ao bloco “Tetra i2”; **iii**) adicionar quatro peças “Tetra i2”, correspondentes as quatro novas circunferências; **iv**) estabelecer o posicionamento e o raio das circunferências, utilizando as variáveis do bloco “Tetra i2”, como: “Tetra i2 x: x+raio y:y raio:raio/2”, “Tetra i2 x: x y:y+raio raio:raio/2”, “Tetra i2 x: x-raio y:y raio:raio/2” e “Tetra i2 x: x y:y-raio raio: raio/2”; **v**) selecionar, no grupamento de “eventos”, o bloco “quando iniciar for clicado”; **vi**) utilizar, no grupamento “caneta”, o bloco “apagar tudo”; **vii**) adicionar a peça “Tetra i2” com a posição do ponto central da primeira circunferência e seu raio, “Tetra i2 x:0 y:0 raio:20”.

Figura 27 - Construção da automação da segunda iteração do fractal no Scratch $t_{2.2}$



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos relacionadas a está tarefa temos: $\theta_{2.2.1}$: Noção de translação; $\theta_{2.2.2}$: Noção de ângulo; $\theta_{2.2.3}$: Noção de par ordenado; $\theta_{2.2.4}$: Noção de razão.

$\Theta_{2.2}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria.

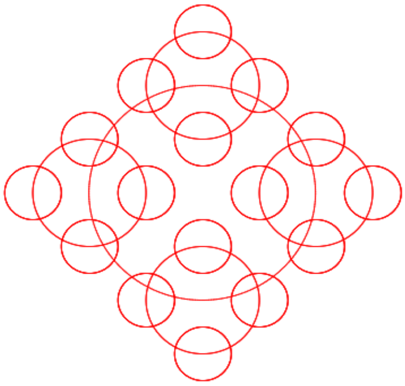
Em vista ao que foi apresentado, na técnica descrita em $\tau_{2.2}$, sua estratégia envolve: Utilização do estabelecido em $\tau_{2.1}$; identificação do par ordenado e raio da circunferência como variáveis; posicionamento das circunferências resultantes da segunda iteração do objeto, levando em consideração o raio da circunferência e o eixo onde elas se posicionam; identificação da relação de soma e subtração entre as variáveis, considerando o eixo e o raio da circunferência para determinar novos pontos e raios da circunferência na segunda iteração; utilizar das informações obtidas para construir o objeto fractal Tetra-Círculo até a segunda iteração, posicionando corretamente os pares ordenados e definindo os raios das circunferências.

Com base no apresentado, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, é possível abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação) utilizando software (EF08MA18), o estabelecimento do número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33) e a utilização expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19).

$t_{2.3}$: Estabelecer uma automação para todas as iterações do fractal Tetra-Círculo.

Esta tarefa deve ser resolvida a partir de subtarefas para uma melhor compreensão dos procedimentos. No primeiro momento, se estabelece a construção da circunferência e, no segundo momento, se define o crescimento do objeto fractal, utilizando a criação de um bloco para estipular potência relacionada ao crescimento do objeto, pois o *software* não conta com um operador relacionado de potência. Por fim, a estruturação do Fractal Tetra-Círculo e a criação do bloco, que dará o comando de construção.

Figura 28 - Terceirar iteração $t_{2.3}$



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

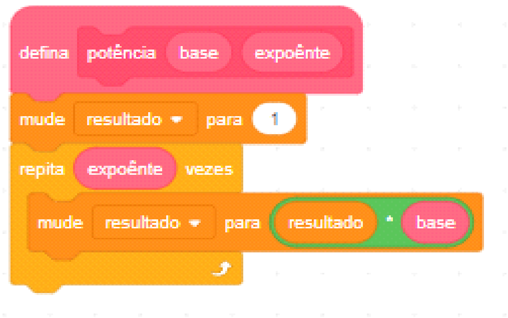
$\tau_{2.3.1}$**:** A técnica que permite resolver a primeira subtarefa da criação da circunferência envolve; **i)** utilizar o grupamento “meus blocos” para criar um bloco denominado “criar circunferência”, com as variáveis “raio”, “x” e “y”; **ii**) ir ao grupamento variáveis e “criar uma lista” para “xs” e “ys”; **iii**) adicionar, internamente ao bloco, “criar circunferência os comandos da lista”, adicionar oito novas peças de “adicione”, posicionadas da seguinte forma: “adicione x-raio a xs”, “adicione y a ys”, “adicione x a xs”, “adicione y+raio a ys”, “adicione x+raio a xs”, “adicione y a ys”, “adicione x a xs”, “adicione y-raio a ys”; **iv**) utilizar o bloco “levante a caneta”; **v**) “Aponte para a direção 90º”, localizado no grupamento de movimento **vi**) utilizar o bloco “vá para x: e y”, e o bloco de “operadores soma”, posicionar o objeto utilizando as variáveis do bloco “criar circunferência, vá para x:x e y: raio+y”; **vii**) “Use a caneta” no grupamento “controle”, selecionar o bloco “repita n vezes” e substituir o número de vezes por 360; **viii**) no bloco “movimentos”, selecionar os blocos “mova n passos e gire n graus”; **ix**) utilizar o bloco “mova”, localizado no grupamento de “operadores”, e estabelecer o movimento em $(2 \cdot raio)/360/\pi$; xi) utilizar a peça “gire 1graus”;

Figura 29 - Construção do bloco circunferência no Scratch

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

***τ*2.3.2:** A técnica que permite resolver a segunda subtarefa, para estabelecer a potência relacionada ao objeto, envolve: **i)** utilizar o grupamento "meus blocos" para criar um bloco denominado "potência", com as variáveis "base" e "expoente"; **ii)** utilizar o grupamento "variáveis", para criar uma variável denominada "resultado"; **iii)** adicionar a peça "mude n para", adicionar as variáveis "resultado" e "mude resultado para 1" à peça; **iv)** utilizar o bloco "repita n vezes" e definir a repetição com a peça "expoente", "repita expoente vezes"; **v)** adicionar, internamente, ao bloco "repita" a peça "mude n para", utilizar a peça de multiplicação localizada em "operadores"; **vi)** estabelecer a potência relacionada ao objeto, adicionando as variáveis à peça "mude resultado para resultado base".

Figura 30 - Construção do bloco potência no Scratch

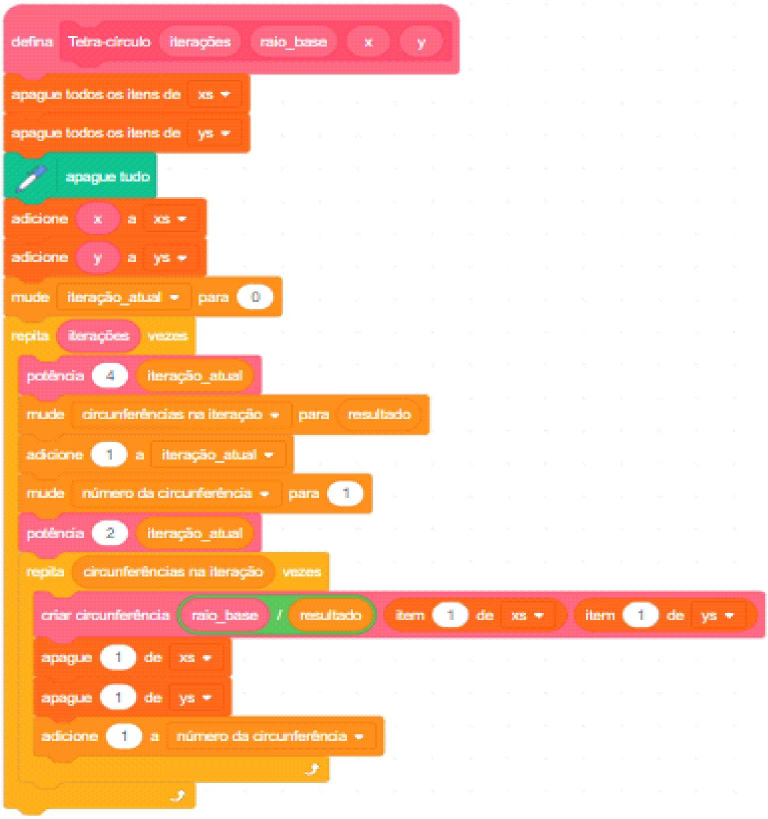


Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\tau_{2.3.3}$**:** A técnica que permite estabelecer a criação final do objeto envolve: **i)** utilizar o grupamento “meus blocos” para criar um bloco denominado “Tetra-Círculo”, com as variáveis “iterações”, “raio_base”, “x” e “y”; **ii**) ir ao grupamento “variáveis” e adicionar, internamente, ao bloco “Tetra-Círculo” as peças “apague todos os itens de xs e apague todos os itens de ys”; **iii**) utilizar o bloco “caneta”, para definir que sempre que o “bloco” for utilizado o que foi produzido com a caneta anteriormente será apagado utilizando a peça “apagar tudo”; **iv**) ir ao grupamento “variáveis” e adicionar a “Tetra-Círculo” as peças adicione x a xs” e “adicione y a ys”; **v**) utilizar a peça de “variáveis” para determinar a iteração, “mude iteração_atual para 0”; **vi**) utiliza o bloco “repita”, que repetirá o número de iterações, adicionar a peça “iterações” ao bloco “repita”, “repita iterações vezes”; **vii**) adicionar ao bloco “repita” a peça “potência”, estabelecida em $\tau_{2.3.2}$; e determinar a potência de crescimento do objeto como “potência 4 iteração atual”; **viii**) utilizar peças do grupamento de variáveis “mude circunferência na iteração para resultado”, que determina a iteração a partir do resultado da potência determinada, adicionar à peça de variáveis “adicione 1 a iteração atual”, adicionar peça “mude número da circunferência para 1”; **ix**) adicionar a peça “potência 2 iteração atual”; **x**) adicionar, internamente, ao bloco “repita”, estabelecendo outra peça “repita para a circunferência na iteração”, adicionar a peça “criar circunferência” estabelecida em $_{2.3.1}$; utilizar a peça de divisão do grupamento “operadores” e as “variáveis”; **xi**) estabelecer a criação da circunferência, com a peça “criar circunferência”, utilizar o operador de divisão para determinar “raio_base/resultado” e substituir as variáveis “x” e “y” pelos itens da lista, utilizando as peças “item 1 de xs” e “item 1 de ys”; **xii**) estabelecer a peça como “criar circunferência raio_base/resultado item 1 de xs” e “item 1 de ys”; **xiii**) utilizar, das peças dispostas em “variáveis”, para limpar a lista e determinar o número da circunferência;

xiv) utilizar as peças “apague 1 de xs; apague 1 de ys; adicione 1 a número da circunferência”; **xv**) adicionar a peça potência como “potência 2 iteração atual”; **xvi**) estabelecemos um bloco, à “circunferência na iteração vezes”, que irá conter o bloco criado anteriormente, denominado “criar circunferência”, que utilizará das variáveis “raio base/resultado” e os valores estabelecidos em “x” e “y”.

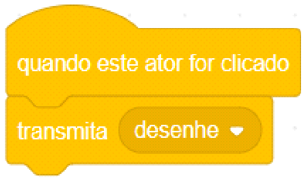
Figura 31 - Construção do bloco *Tetra-Círculo* no Scratch



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

***$\tau_{2.3.4}$*:** A técnica sobre o início da programação envolve: **i)** ir para a área do ator em “selecionar um ator” e criar um novo ator; **ii**) utilizar no grupamento de eventos à peça “quando este ator for clicado; transmita desenhe”, utilizaremos a palavra “desenhe” para que o ator desenhe o programado anteriormente; **iii**) retornar ao ator principal e adicionar a peça “quando eu receber n”, localizada no grupamento de “eventos”, e adicionar a mensagem “desenhe; quando eu receber desenhe”; **iv**) adicionar a peça “Tetra-Círculo” e substituir as peças pelas variáveis estabelecidas durante a construção: “iterações: número_iterações”, “raio da base: raio, x:0 e y:0”. O bloco se estabelece da seguinte forma: “Tetra-Círculo número da iteração raio e x:0 y:0”.

Figura 32 - Construção do ator *Tetra-Círculo* no Scratch



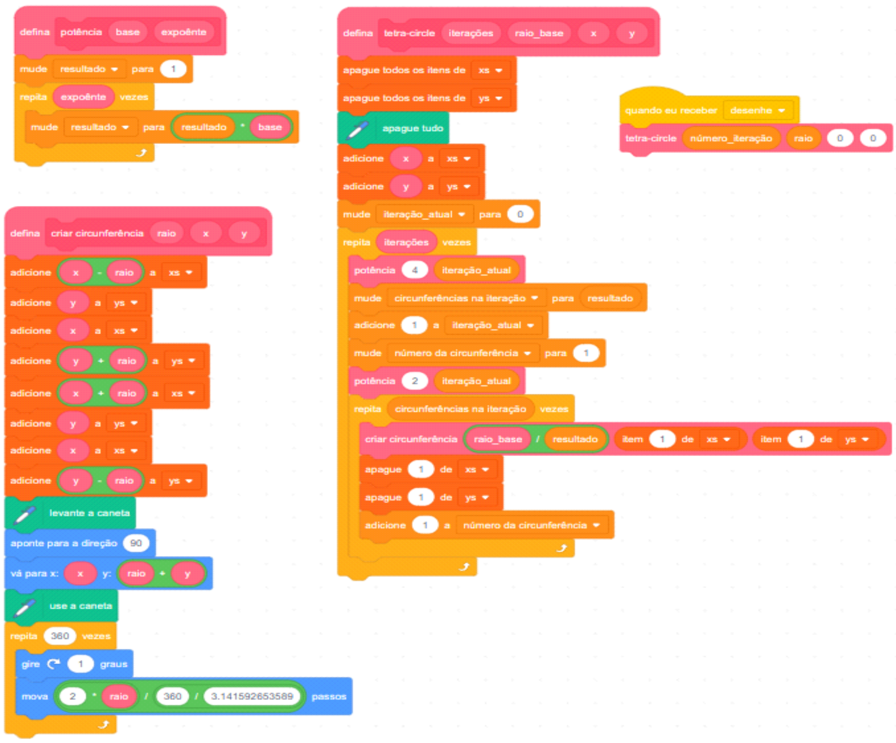
Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Figura 33 - Construção do bloco *Tetra-Círculo* no Scratch

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Por fim, a construção resultante das técnicas utilizadas na tarefa 2.3.

Figura 34 - Construção da automação do Tetra-Círculo no Scratch $t_{2.3}$



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{2.3.1}$: Noção de translação; $\theta_{2.3.2}$: Noção de ângulo; $\theta_{2.3.3}$: Noção de par ordenado; $\theta_{2.3.4}$: Noção dos elementos da circunferência; $\theta_{2.3.5}$: Noção de potenciação; $\theta_{2.3.6}$: Noção de razão; $\theta_{2.3.7}$: Noção da complexidade infinita do fractal.

$\Theta_{2.3}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria e a Aritmética.

Considerando a tarefa $t_{2.3}$, está se apresenta com três técnicas com o objetivo de seccionar seu desenvolvimento, a técnica descrita em $\tau_{2.3.1}$ apresenta uma possível técnica para iniciar a resolução desta tarefa, que envolve: criação de uma lista para a alocação das variáveis relacionadas as iterações do objeto nos eixos “x” e “y”, essa lista será utilizada para armazenar as coordenadas dos pontos que compõem as circunferências em cada iteração; identificação da relação de soma e subtração entre as variáveis, levando em consideração os pares ordenados e as iterações do objeto, essa relação determinará a posição dos pontos das circunferências em relação ao centro do objeto; identificação da angulação do objeto, levando em consideração a rotação e a disposição dos pontos em relação ao eixo “x” e ao eixo “y”; identificação de movimento para as variáveis relacionadas ao eixo “x” e o posicionamento em “y”, considerando sua soma ao raio; utilização do operador logico “repita”, para iterar sobre as variáveis relacionadas ao eixo “x”, movendo-as de acordo com a angulação do objeto fractal. Em seguida, posicione os pontos em “y”, considerando a soma ao raio da circunferência; identificação do cálculo da área da circunferência e transcrição da expressão algébrica correspondente, utilizando as variáveis definidas, anteriormente, para compor a expressão.

Em vista ao apresentado, a técnica descrita em $\tau_{2.3.2}$ envolve: definição da potência para o crescimento do fractal, estabelecendo o crescimento do objeto fractal em suas “n” iterações, que é responsável por determinar como o objeto crescera em cada iteração; estabelecer a base e o expoente, dessa potência, como variáveis; e a base representará a quantidade inicial de circunferência, enquanto o expoente representará o número de iterações do objeto fractal.

A técnica descrita em $\tau_{2.3.3}$ visa automatizar o processo de iterações do objeto fractal, permitindo que ele seja construído, de forma eficiente e precisa. Ela envolve: estabelecer variáveis para os eixos “x” e “y”, bem como para o raio da circunferência e suas iterações; identificação das variáveis “x” e “y” como variáveis relacionadas à lista estabelecida em $\tau_{2.3.1}$, que contém pares ordenados das circunferências em cada iteração; utilização do operador lógico “repita”, utilizado para iterar a construção da circunferência, repetindo o processo de desenho para a criação da circunferência; esse operador permite que você execute um bloco de código várias vezes, conforme necessário para construir todas as iterações do objeto fractal;

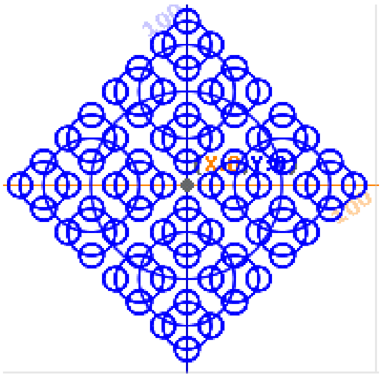
identificação da potência relacionada à iteração. Conforme estabelecido em $\tau_{2.3.2}$, esta potência determinará o crescimento de número de circunferência a cada iteração. Identificação da lógica de crescimento do objeto com relação as suas iterações, considerando que, cada iteração, resultará na criação de novas circunferência construídas com metade do raio da base original; e relacionar as circunferências criadas com a lista estabelecida em $\tau_{2.3.1}$, garantindo que todas as circunferências sejam devidamente registradas e utilizadas na construção do fractal.

Em vista ao que foi apresentado até o momento com relação a $t_{2.3}$ ao considerarmos $\tau_{2.3.4}$, a técnica para finalizar está tarefa envolve: relacionar o início do que foi programado com o objeto fractal; estabelecer o número de iterações e raio inicial como variáveis no programa, isso permite o ajuste desses parâmetros, o controle do número de iterações do objeto fractal e tamanho inicial da circunferência; identificar pares ordenados como centrais para que a circunferência gerada esteja centralizada ao palco, estes pares ordenados representam o centro da circunferência.

Com base no apresentado, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, é possível abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação) utilizando *software* (EF08MA18), estabelecimento do número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33), a utilização expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19) e a relação entre arcos e ângulos de uma circunferências (EF09MA11).

$t_{2.4}$: Estabelecer uma generalização para a quantidade de circunferências geradas em cada etapa do fractal Tetra-Círculo.

Figura 35 - Quarta iteração do fractal



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

$\boldsymbol{\tau}$ **2.4:** A princípio para estabelecer esta relação foi considerada a contagem das circunferências das iterações, utilização de contagem um a um, ao considerarmos $e_1 = 1, e_2 = 4, e_3 = 16$; estabelecer a enésima iteração do objeto como $e_n = 4^n$, considerando que cada circunferência da construção do objeto conta com quatro novas circunferências na sua interação seguinte.

Ao considerarmos as tecnologias relacionadas a tarefa temos: $\theta_{2.4.1}$: Noção do elemento figural "circunferência"; $\theta_{2.4.2}$: Noção de contagem; $\theta_{2.4.3}$: Noção de potenciação; $\theta_{2.4.4}$: Noção da complexidade infinita do fractal.

$\Theta_{2.4}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria e a Aritmética.

Em vista ao que foi apresentado, a técnica descrita em $t_{2.4}$, envolve: contagem, uma a uma, das circunferências apresentadas na iteração, contando o número de circunferências construídas em cada iteração; identificação da relação numérica, entre a quantidade de circunferências e o número de iterações; estabelecer como a quantidade de circunferências aumenta exponencialmente com o número de iterações; identificar o padrão de crescimentos, objeto e escrever uma expressão algébrica, para o calcular a quantidade de circunferências construídas em qualquer iteração do fractal, a expressão será na forma de 4^n, em que *n* corresponde a iteração do fractal. Essa técnica permite calcular, facilmente, a quantidade de circunferências construídas em qualquer etapa do objeto fractal, com base no número de iterações. Ela é útil para entender o padrão de crescimento exponencial do fractal e foi aplicada de forma eficaz para programar a automação das iterações no *software* Scratch.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar habilidades relacionadas às unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas podemos citar o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), e o reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação), utilizando *software* (EF08MA18).

$t_{2.5}$: Estabelecer o cálculo do raio da circunferência gerada nas quatro primeiras iterações do fractal Tetra-Círculo

$\boldsymbol{\tau_{2.5}}$: A técnica, que permite resolver esta tarefa, envolve; **i)** identificar o raio da primeira iteração; **ii)** utilizar a definição do objeto para determinar que as novas iterações se estabelecem com o raio da iteração anterior; utilizar, como padrão, o raio determinado na situação “e_1= 10un”, com isso, de forma análoga, as iterações seguintes seriam “e_2= 5un”, “e_3 = 2,5un” e “e_4=1,25un”; Estes indicam o raio das circunferências geradas, ao considerarmos a primeira iteração em “10un”.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos relacionadas a esta tarefa temos: $_{2.5.1}$: Noção do elemento figural “circunferência”; $\theta_{2.5.2}$: Noção de contagem.

$\Theta_{2.5}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria e Aritmética.

Considerando a técnica descrita em $t_{2.5}$, esta estratégia envolve: identificação do raio estabelecido para a primeira iteração (e_1); determinar o raio das iterações seguintes, considerando a definição do objeto fractal - conforme a estratégia utilizada, o raio das iterações seguintes será a metade do raio da iteração inicial -; essa técnica simplifica a determinação do raio das iterações subsequentes do objeto fractal, garantindo que o padrão de redução do raio seja consistente e previsível; e ela é útil para programar a automação das iterações no *software* Scratch, garantindo uma construção precisa e coerente do fractal Tetra-Círculo.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21) e reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação), utilizando *software* (EF08MA18).

$t_{2.6}$: Estabelecer uma generalização do cálculo do raio da circunferência gerada a cada etapa do fractal Tetra-Círculo

$\boldsymbol{\tau_{2.6}}$: A técnica, que permite resolver a tarefa, envolve utilizar do desenvolvido em $t_{2.5}$: **i)** utilizar da definição de construção do objeto, que determina que o raio da nova iteração se estabelece com $\frac{1}{2}$ raio da iteração anterior; **ii**) utilizar para nos referir ao raio gerado em cada iteração "n"; **iii**) identificar um padrão de decrescimento do raio ao determinar suas iterações $e_1 = r; e_2 = \frac{r}{2}; e_3 = \frac{r}{4}; e_4 = \frac{r}{8}$; **iv**) o padrão estabelecido referente ao raio em sua enesima iteração $r_n = \frac{r}{2^n}$; Determinamos $n \geq 0$ e inteiro ao entender que não podemos executar iterações negativas ou fracionarias.

Ao considerarmos os elementos tecnológicos relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{2.6.1}$: Noção da fórmula do cálculo do raio de uma circunferência; $\theta_{2.6.2}$: Noção dos elementos de uma circunferência; $\theta_{2.6.3}$: Noção de razão; $\theta_{2.6.4}$: Noção de variável; $\theta_{2.6.5}$: Noção de potenciação; $\theta_{2.6.6}$: Noção de raio; $\theta_{2.6.7}$: Noção da complexidade infinita do fractal.

$\Theta_{2.6}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria e a Aritmética.

Em vista ao que foi apresentado, na técnica descrita em $t_{2.6}$, esta estratégia envolve: identificação do raio estabelecido para a primeira iteração (e_1); determinar raio das iterações seguintes considerando a definição do objeto fractal - conforme a estratégia utilizada, o raio das iterações seguintes será reduzido à metade do raio da iteração inicial -; utilizar, da estratégia estabelecida em $t_{2.7}$, para escrever uma expressão algébrica do raio das circunferências geradas em qualquer etapa do fractal; identificar o padrão de redução do raio e escrever uma expressão algébrica para o cálculo do raio das circunferências construídas em uma etapa qualquer de iteração do fractal, a expressão será na forma de $\frac{r}{2^n}$, onde "r" é o raio da primeira iteração e "n" corresponde à iteração do fractal. Essa técnica proporciona uma maneira sistemática de determinar o raio das circunferências em cada etapa do fractal Tetra-Círculo.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, é possível abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas, o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21) e o reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação) utilizando *software* (EF08MA18).

$t_{2.7}$: Estabelecer o comprimento do círculo nas 4 etapas da iteração (unitário)

$\boldsymbol{\tau}_{2.7}$: A técnica, que permite resolver a tarefa, envolve; **i**) utilizar da definição de circunferência; **ii**) utilizar a fórmula do cálculo de uma circunferência; **iii**) desenvolver o cálculo do comprimento das iterações, uma a uma, e utilizar o desenvolvido na tarefa $t_{2.5}$ para estabelecer o raio das iterações; **iv**) Identificar o comprimento das circunferências; $e_1 = 2\pi r; e_2 = \frac{2\pi r}{2} = 2\pi r; e_3 = \frac{2\pi r}{2 \cdot 2} = \frac{\pi r}{2}$; $e_4 = \frac{2\pi r}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\pi r}{4}$; **v**) identificar o padrão estabelecido ao comprimento das circunferências e estabelecer sua generalização, identificar para a generalização do comprimento, considerar os procedimentos determinados pelas quatro primeiras interações: **vi**) Estabelecer $C_n = \frac{2\pi r}{2^n} = \frac{2\pi r}{2^{n-1}}$; Determinamos $n \geq 0$ e inteiro ao entender que não podemos executar iterações negativas ou fracionarias.

No que diz respeito aos elementos tecnológicos relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{2.7.1}$: Noção da formula do cálculo do comprimento de uma circunferência; $\theta_{2.7.2}$: Noção dos elementos de uma circunferência; $\theta_{2.7.3}$: Noção de razão; $\theta_{2.7.4}$: Noção de variável; $\theta_{2.7.5}$: Noção de potenciação; $\theta_{2.7.6}$: Noção de generalização; $\theta_{2.7.7}$: Noção da complexidade infinita do fractal.

$\Theta_{2.7}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria e a Aritmética.

Em vista ao apresentado, a técnica, descrita em $\tau_{2.7}$, apresenta a estratégia de resolução, que envolve: identificação da expressão para o cálculo do comprimento da circunferência na primeira iteração do objeto fractal do raio estabelecido para a primeira iteração (e_1); utilizar a relação numérica entre o comprimento das circunferências construídas e os níveis do fractal para determinar o comprimento das iterações seguintes, identificar a redução do comprimento das iterações seguintes e escrever uma expressão algébrica para o cálculo do comprimento da circunferência em uma etapa qualquer de iteração do fractal, a expressão será na forma de $\frac{2\pi r}{2^{n-1}}$, onde "r" é o raio da primeira iteração e "n" corresponde à iteração do fractal.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, podemos abordar alguns habilidades relacionadas as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas e Medidas". Entre elas, o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação) utilizando *software* (EF08MA18), o estabelecimento do número, como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33) e a utilização expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19).

$t_{2.8}$: Estabelecer o comprimento total das circunferências geradas a cada etapa do fractal Tetra-Círculo

$\tau_{2.8}$: A técnica, que permite resolver a tarefa envolve; **i**) utilizar da definição de circunferência; **ii**) utilizar a fórmula do cálculo de uma circunferência; **iii**) desenvolver o cálculo do comprimento das iterações uma a uma; **iv**) utilizar o desenvolvido na tarefa $t_{2.5}$ para estabelecer o raio das iterações; **v**) Identificar o comprimento das circunferentias; $e_1 = 1 \cdot 2\pi r = 2\pi r; e_2 = 2 \cdot 2\pi r = 4\pi r; e_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2\pi r = 4 \cdot 2\pi r = 8\pi r\ ; e_4 = 4 \cdot 2 \cdot 2\pi r = 16\pi r;$ **vi)** Identificar o padrão estabelecido ao comprimento das circunferências; $e_1 = 2^0 \cdot 2\pi r = 2^{0+1}\pi r; e_2 = 2^1 \cdot 2\pi r = 2^{1+1}\pi r;\ e_3 = 2^2 \cdot 2\pi r = 2^{2+1}\pi r; e_4 = 2^3 \cdot 2\pi r = 2^{3+1}\pi r$; **vii**) identificar C_n para a generalização do comprimento de todas as circunferências em suas n-esima etapa; $C_n = 2^{n+1}\pi r$: Determinamos $n \geq 0$ e inteiro ao entender que não podemos executar iterações negativas ou fracionarias.

Ao considerarmos as tecnologias relacionadas a esta tarefa temos: $\theta_{2.8.1}$: Noção da formula do calculo do comprimento de uma circunferência; $\theta_{2.8.2}$: Noção dos elementos de uma circunferência; $\theta_{2.8.3}$: Noção de razão; $\theta_{2.8.4}$: Noção de variável; $\theta_{2.8.5}$: Noção de potenciação; $\theta_{2.8.6}$: Noção de generalização; $\theta_{2.8.7}$: Noção da complexidade infinita do fractal.

$\Theta_{2.8}$: A teoria que ampara esta execução é a Geometria e a Aritmética.

Em vista ao que foi apresentado, na técnica descrita em $t_{2.8}$, a estratégia de resolução envolve: identificação da expressão para o cálculo do comprimento da circunferência na primeira iteração do objeto fractal do raio estabelecido para a primeira iteração (e_1); utilizar a relação numérica entre o comprimento das circunferências construídas e os níveis do fractal; Identificar a redução do comprimento das iterações seguintes e escrever uma expressão algébrica para o cálculo do comprimento da circunferência em uma etapa qualquer de iteração do fractal, a expressão será na forma de $2^{n+1}\pi r$ onde “r” é o raio da primeira iteração e “n” corresponde à iteração do fractal.

Com base nos itens apresentados, ao considerarmos o ambiente de sala de aula, é possível abordar habilidades relacionadas as unidades temáticas “Geometria” e “Grandezas e Medidas”. Entre elas o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras (EF06MA25), reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação) utilizando *software* (EF08MA18), o estabelecimento do número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (EF07MA33), e a utilização expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19).

A organização didática relacionada às praxeologias apresentadas, no Tipo de Tarefa 2, pode ser estruturada em quatro momentos: exploração dos conceitos e apresentação do objeto fractal, no primeiro momento; considerando que os estudantes já estão introduzidos aos conceitos fundamentais relacionados ao *software* e aos blocos de construção da circunferência, a apresentação do objeto fractal e sua definição de existência são discutidas no segundo momento, juntamente com uma breve introdução sobre diferentes objetos fractais, ilustrando exemplos de fractais desenvolvidos no software, demonstrando as possibilidades de programação das iterações e com isso instigar os estudantes para a atividade; o estabelecimento dos elementos de construção do objeto fractal, emerge no segundo momento, quando os estudantes exploram conceitos importantes para a construção do objeto fractal, como a relação da circunferência com retas tangentes e secantes, bem como o crescimento da circunferência em relação às iterações. A compreensão do crescimento do objeto fractal, tanto em termos de área, perímetro e comprimento da circunferência, é destacada, juntamente com a complexidade infinita do fractal; Bloco tecnológico teórico e a exploração dos conceitos são considerados no terceiro momento, quando o professor e os estudantes exploram as técnicas e conceitos necessários para a construção do objeto fractal no *software.* A ênfase é colocada na compreensão dos conceitos geométricos e na aplicação prática deles na programação do objeto fractal.

Oficialização dos conceitos e discussões sobre as técnicas utilizadas são abordados no último momento, quando os conceitos utilizados na construção do objeto fractal são oficializados e os estudantes discutem as técnicas utilizadas e as teorias subjacentes, reconhecem as retas como tangentes e secantes à circunferência, entendem o posicionamento das próximas iterações e, com isso, a relação entre o raio da circunferência e as variáveis relacionadas aos eixos das ordenadas e das abscissas. Definições e demonstrações são fornecidas para sustentar essas decisões e as tarefas são revisadas, em relação aos conceitos apresentados.

As tarefas do tipo 2 podem ser utilizadas no Ensino Fundamental II, abordando habilidades destinadas do 7º ao 9º ano, como a construção de figuras semelhantes em ampliação e redução (EF06MA21), o reconhecimento da noção de ângulo e sua associação com figuras

(EF06MA25), reconhecer e representar, figuras em relação aos eixos de origem (EF07MA20), estabelecer a circunferência como lugar geométrico (EF07MA22), estabelecer como a razão entre a medida de uma circunferências e seu diâmetro (EF07MA33), reconhecimento de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação), utilizando *software* (EF08MA18), a utilização expressões de cálculo de área e comprimento de uma circunferência (EF08MA19) e suas relações internas como arcos e ângulos (EF09MA11) juntamente com determinar um ponto médio, sem o uso de fórmulas (EF09MA16).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo investigou os objetos geométricos mobilizados durante a construção do fractal Tetra-Círculo, no software Scratch, estruturado em Modelo Praxeológico de Referência (MPR) e na Teoria Antropológica do Didático (TAD). A relevância dessa pesquisa reside na sua contribuição para o campo da Educação Matemática, ao introduzir a geometria fractal, no contexto da Educação Básica, um campo ainda pouco explorado, que oferece oportunidades para promover a compreensão de conceitos matemáticos e estimular o pensamento crítico dos estudantes. A presente pesquisa teve a seguinte problemática: quais possíveis objetos geométricos são mobilizados durante a construção do fractal Tetra-Círculo?

Destacamos a importância da TAD para o desenvolvimento desta pesquisa, uma vez que sua ótica teórica auxiliou na elaboração e identificação das praxeologias mobilizadas durante a exploração do fractal Tetra-Círculo, bem como na investigação dos objetos geométricos emergentes da construção no *software* Scratch. A TAD permitiu o estudo e a análise dos conhecimentos relacionados à Geometria, proporcionando um material de ensino e aprendizagem adequado aos padrões educacionais vigentes, apoiando-se nas habilidades estabelecidas estes padrões. Ressaltamos que a Organização Matemática (OM) retratada, pode ser implementada em salas de aula a partir da mobilização de Organizações Didáticas (OD), adaptando-se ao contexto e às situações apresentadas pelos estudantes. Dessa forma, a TAD possibilitou a análise das técnicas e suas justificativas – a tecnologia – e a teoria, culminando na análise da OD considerando os momentos didáticos correspondentes.

Por meio da análise *a priori* realizada, a modelização da Organização Praxeológica (OP), constituída na OD e OM, proporcionou uma análise dessas situações que caracterizaram o MPR. Este modelo permitiu a identificação de objetos geométricos relacionados à construção do fractal, fornecendo um material de ensino e aprendizagem alinhado aos padrões educacionais atuais, por meio dos quais os professores podem integrar a Geometria Fractal em suas aulas de matemática, utilizando o *software* Scratch como uma ferramenta pedagógica eficaz para explorar conceitos geométricos de maneira interativa e envolvente. Essas OPs foram estruturadas a partir de tarefas elaboradas pelas pesquisadoras, considerando a programação do fractal no *software* Scratch, desenvolvido pela pesquisadora. As OPs que possibilitaram a identificação de objetos geométricos durante a construção do fractal, destacando a relação entre as tecnologias utilizadas e os objetos geométricos destacados na construção.

As tarefas que compõem este MPR foram baseadas nos objetos de conhecimento que compõem as unidades temáticas de “Geometria” e a unidade de “Grandezas e Medidas”, fundamentando o presente modelo e abrangendo os conceitos considerados essenciais ao desenvolvimento dos estudantes ao longo de seu percurso acadêmico. Por meio deste modelo alcançamos os objetivos desta pesquisa, investigar os objetos geométricos mobilizados durante a construção do objeto fractal, juntamente com a identificação da relação entre esses objetos geométricos mobilizados e as tecnologias que apoiaram as técnicas utilizadas. É importante observar que, ao considerarmos os conceitos presentes no documento mencionado, esta pesquisa pode servir como recurso para professores de Matemática da Educação Básica, permitindo-lhes trabalhar os objetos de conhecimento e habilidades de Geometria e Grandezas e Medidas propostos na BNCC.

Ao analisarmos os dados, identificamos fatores importantes que contribuíram para o desenvolvimento da OP. Nesse momento, destacamos o potencial do *software* Scratch como um recurso auxiliar às explorações matemáticas, acerca do objeto fractal, permitindo a relação entre o objeto geométrico e o *software* para explorações de outros elementos da Geometria. Durante a análise *a priori*, consideramos as dificuldades relacionadas a assuntos matemáticos, juntamente com a falta de conhecimentos relacionados ao *software* Scratch por parte dos estudantes.

A elaboração de uma OD para o ensino e aprendizagem de uma OM, possibilita que identifiquemos aspectos acerca dos conhecimentos prévios dos estudantes estabelecidos na BNCC, além da relevância da introdução da Geometria Fractal na Educação Básica e a validade das OPs desenvolvidas. Ressaltamos que a geometria dos fractais oferece um campo rica para estudo e investigação na construção do conhecimento geométrico, integrando-se aos princípios da TAD, que viabilizou a investigação sobre como esses conhecimentos são construídos, como os professores podem mediar esse processo de construção de conhecimento e quais estratégias pedagógicas podem ser eficazes. Embora a BNCC não mencione explicitamente, o estudo da geometria dos fractais no contexto da Educação Básica, este conteúdo está presente no CREP (PARANÁ, 2021). Nossa pesquisa demonstrou que, por meio da Geometria Fractal, diversos objetos de conhecimentos e habilidades previstos na BNCC, podem ser desenvolvidos pelos estudantes. Proporcionando uma abordagem de complementar aos conceitos euclidianos, presentes no Ensino Fundamental II e nos Livros Didáticos.

Com esta pesquisa, destacamos também as possibilidades de estudos que exploram a interação entre a TAD e a geometria dos fractais, evidenciando o potencial para avançar o entendimento sobre como os estudantes constroem conhecimento matemático complexo e como os professores podem apoiar esse processo. Sugerimos a aplicação desta pesquisa, ampliando as diferentes perspectivas e lentes teóricas que podem ser investigadas e incorporadas à pesquisa em Educação Matemática.

Reconhecemos com tudo que este estudo apresenta algumas limitações, incluindo a falta de investigação sobre estratégias de ensino específicas para a Geometria Fractal e o impacto da tecnologia na aprendizagem matemática. Recomendamos que futuras pesquisas abordem essas lacunas, além de explorar as diferenças no aprendizado dos estudantes com diferentes níveis de familiaridade com o *software* Scratch. Destacamos a importância de trabalhar e realizar pesquisas com a Geometria Fractal em sala de aula, alinhadas às habilidades e competências estabelecidas na BNCC. Por meio deste modelo, foi possível explorar conceitos geométricos euclidianos, utilizando o fractal como ferramenta para a obtenção desses conceitos, diversificando a abordagem de conceitos em sala de aula, e considerando a utilização do *software*, devido ao seu dinamismo e à autonomia promovida pelos estudantes durante as produções. Esta abordagem contribui para a construção de conhecimento de maneira mais dinâmica e menos rígida, alinhando-se aos métodos de ensino indicados no documento normativo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, V. F. C. **Análise das práticas docentes de professores dos cursos de licenciatura em matemática referentes ao estudo de retas paralelas e de ângulos**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Instituto de Matemática, Campo Grande, 2009.

ALMEIDA, G. dos A. **Polígonos regulares inscritos no círculo**: uma abordagem histórico-praxeológica em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental. 2012. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, MT, 2012.

ALMEIDA. E. A. M. **Progressões aritméticas e geométricas:** praxeologias em livros didáticos de matemática. 2012. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso Brasil Instituto de Educação (IE), 2012

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. atualizada. ed. Curitiba: UFPR, 2007. p. 218. ISBN 857335190, 9788573351903

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. O planejamento da pesquisa cientifica. *In*: **O Método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo; Pioneira: LILACS, 2000. v. 2, p. 147-176. Disponível em: http://professor.ufop.br/sites/default/files/shei/files/alves_mazzotti_gewandsznajder_completo-1.pdf. Acesso em: 18 nov. 2022.

ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica**: O modelo de poincaré. 1ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN 9788583370123

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana:** praxeologias matemáticas no ensino médio. 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Belém, PA, 2007.

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores**: o caso da geometria, 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

ANDRADE, R. C. D.; GUERRA, R. B. Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, ano 2014, v. 16, n. 4, p. 1201-1226, 20 dez. 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22019/pdf. Acesso em: 18 nov. 2022.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal:** para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, 160p. ISBN 9788575260579

BARNLEY, M. F. **Fractals Everywhere**. San Diego: Courier Corporation, 2012. v. 2, p. 531. ISBN 9780486488707.

BENITO, R. N. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas.** 2019. 220 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. DE; PAIS, L. C. Reflexões sobre a Orientação de Pesquisas de Pós-Graduação em Educação Matemática com o Suporte da Teoria Antropológica do Didático. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 15, 20 dez. 2014.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364–387, 2017. DOI: 10.20396/zet.v25i3.8648640. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640. Acesso em: 18 nov. 2022.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. In: BRONNER, A.; LARGUIER, M.; ARTAUD, M.; BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE G.; LADAGE, C. (Eds.) **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action**. Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010. p. 49 – 85.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018

BRITTO, V. H. C. **Os momentos didáticos e a avaliação formativa**. 2019. 139 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Belém, PA.

CARNEIRO, R. F.; DÉCHEN, T. **Tendências no ensino de geometria**: Um Olhar para os Anais dos Encontros Paulista de Educação Matemática. 2006.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal**: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005

CARVALHO, D. G. **Uma análise da abordagem da grandeza da área no figuras planas no guia de estudo do Projovem Urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático**. Recife, 2012. 120f. Dissertação (mestrado) - UFPE, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2012.

CIABOTTI. V. **Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade:** o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2016.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos**. 2015. 113 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2015.

COSTA, S. R. S.; DUQUEVIZ, B. C.; PEDROZA, R. L. S. **Tecnologias Digitais como instrumentos mediadores da aprendizagem dos nativos digitais.** Psicologia Escolar e Educacional, v. 19, n. 3, p. 603–610, set. 2015.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço**: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos. 2015. 113 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. **IUFM d'Aix-Marseille**, 1998

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignants et didactique des mathématiques**: c'approche anthropologique. 1998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em : 18 nov. 2022

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. **Intervention au Séminaire de l'*Associazione Mathesis,*** Texte paru dans les *Actes* du Séminaire pour l'année Turin, 3 février 1993-1994, p. 190-200. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125. Acesso em: 18 nov. 2022.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Estudar Matemáticas: **O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. ISBN 9788573077698

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: Sauvage, v. 24, n. 2-3, p. 205-250, 4º trimestre. 2004.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.** Tradução: Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2007. p. 248. ISBN 978-85-363-0892-0 1

DUARTE, M J.; SILVA NETO, V. P. da; D'ASSUNÇÃO, A. G. Synthesis and Mechanical Reconfiguration of Ground Plane Tilted Microstrip Antennas Based on Tetra-Circle Fractals. **Journal Of Microwaves: Optoelectronics and Electromagnetic Applications.** Natal, p. 228-241. jun. 2020.

EUCLIDES. **Os elementos**. 1. ed. Unesp, 2009. p. 600. ISBN 8571399352, 978-8571399358.

FALCONER, K. **Fractal Geometry**: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, 2003. v. 2, p. 367. ISBN: 9780470848616

FARIAS, K. S. C. dos S. **A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2008. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2008.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica:** "Construção do plano de Poincaré" com o uso do software Geogebra. 2011. 290 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2011.

FERREIRA. E. F. P. **A integração das tecnologias digitais ao ensino e aprendizagem de geometria no ensino fundamental – anos finais:** uma proposta com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas planas. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), 2016.

FERREIRA. L. F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental:** o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnologia) - Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

FREITAS, R. L. **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD:** constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta. 2019. 408 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FONSECA, A. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M. DAYRELL, M. M. S. S. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002. ISBN **978-8586583933**

FRANÇA, E. M. de. **Origami Euclidiano**. 2016. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, CE, 2016.

FRATUCCI, V. M.; MORAN, M. Proposta de uma Organização Praxeológica para a construção das formulas da medida de perímetro e área do fractal ilha de Koch. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 25, p. 217–237, 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/5159. Acesso em: 18 nov. 2022.

GASCÓN, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática. In: ALMOULOUD, S. A; FARIAS, L. M. S; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático**: princípios e fundamentos. 1ª. ed. Curitiba: CRV, 2018. p. 51-76.

GORODSKI, C. **Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria.** Humboldtbrasil, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 61-77, 2002. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~Gorodski/ps/geom.doc. Acesso em: 18 nov. 2022.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries**: Development and history. 4. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 2008. p. 637. ISBN 0716799480, 978-0716799481

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NEVES JÚNIOR, C. A. **Análises dos conteúdos de sistemas de representação no curso de licenciatura em expressão gráfica da UFPE à luz da teoria antropológica do didático**. 2018. 129 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MADURO, V. P. S. **Um estudo da prática docente no tema função quadrática com base na teoria antropológica do didático**. 2015. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/handle/123456789/401 Acesso em: 18 nov. 2022.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1982. v.1, p.460. ISBN 0716711869

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **O ensino de Matemática no Primeiro Grau**. 10. ed. São Paulo: Atual, 1986. ISBN 978-8570562319

MINAYO, C.S. Pesquisa Social: teoria, método e criatividade. 29. ed. In: Petr Morin, Edgar. **Educação e Complexidade: os sete saberes e outros ensaios**. Trad. Edgard de Assis Carvalho. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2010. ISBN 978-8524920189

MINEIRO, R. M. **Estudo das três dimensões do problema didático de inequações.** 2019. 224 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

MELO, C. B. S; LEIVAS, J. C. P. **Explorando o fractal Tetra Círculo: possibilidade para a introdução de Progressões Geométricas.** Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, Mexico: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2015.

MORAN, J. M.; MASETTO, M.; BEHRENS, M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 12ª. ed. São Paulo: Papirus, **2006**. p. 176. ISBN 8530809963, 9788530809966

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria:** uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. O Uso das TIC nas Práticas dos Professores de Matemática da Rede Básica de Ensino: o projeto Mapeamento e seus desdobramentos. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, v. 29, n. 53, p. 998–1022, dez. 2015

JAMMAL, E. F. (2011). **Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no ensino médio**. 2011. 244 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, SP. 2011.

JESUS, G. B. de. **As construções geométricas e a gênese instrumental**: o caso da mediatriz. 2012. 162 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2012.

KAPADIA, R. **Teaching fractal geometry to high school students**: an exploratory study. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 38(1), 73-97. 2019

KOVACEVIC, M. S. B**. Geometria esférica: o elo entre matemática e astronomia.** 2020. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020.

LÉVY, P. **Cibercultura.** Tradução: Carlos Irineu da Costa. 3ª. ed. São Paulo: Editora 34, 2005. p. 246. ISBN 8573261269.

LOBATO, L. F. **Desafios do ensino de geometria no ensino médio.** 2019. p. 13. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em docência do ensino de Matemática) - Instituto Federal do Piauí - Campus Corrente, Corrente, 2019.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e percepção matemática**. 3ª. ed. Campinas: Autores Associados, 2008. p. 202. ISBN 8574961531, 978-8574961538.

LORENZATO, S.; VILA, M. C. Século XXI: qual matemática é recomendada? **Zetetike**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 41-49, 1993. Disponível em: http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2613/2355. Acesso em: 18 nov. 2022.

LUZ, V. de A. **Um estudo sobre o Ensino de Transformações Geométricas**: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

MATOS, N. A. **Análise praxeológica das técnicas utilizadas por licenciandos em matemática ao resolverem tarefas visuais.** 2020. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2011.

PAIXÃO, F. C.; BARROSO, M. M. O fractal Hexagonal tipo Dürer: possibilidades de exploração de conteúdos matemático conforme a opinião de professores da rede básica de ensino. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 14, 2017. **Anais [...].** Cascavel: EPREM, 2017. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/schedConf/presentations. Acesso em: 18 nov. 2022.

PARANÁ. Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: Sistema Estadual de Ensino do Paraná, 2021. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf. Acesso em: 18 nov. 2022.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008. 81 p.

PASSOS, M. B. A. **Professores do ensino superior: práticas e desafios**. 1. ed. Salvador: Mediação, 2009. p. 112. ISBN 9788577060412.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D. **Chaos and Fractals**: New Frontiers of Science. New York: Springer, 2004. v.1, p. 984. ISBN 9781468493962

PESCINI, A. E. **Uma análise praxeológica da geometria dos fractais em livros didáticos do ensino médio.** 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná. União da Vitória, 101 f. 2021.

RIBEIRO, A. S. M, RODRIGUES, F. B. V, PEREIRA, V. M. S. Conhecendo o Scratch e suas Potencialidades Pedagógicas. **I Seminário internacional de inclusão escolar:** práticas em diálogos. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – CAp – UERJ – 21 a 23 de outubro de 2014. Disponível em: http://www.cap.uerj.br/site/images/stories/noticias/3-ribeiro_et_al.pdf. Acesso em: 18 nov. 2022

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema Função:** uma investigação das praxeologias. 2006. 384 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

RUDEK, B.; TARTARE, P. L.; GAVANSKI, D. Geometria Fractal: uma abordagem diversificada para a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 12, 2014. **Anais [...].** Campo Mourão: EPREM, 2014. Disponível em: http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/index.htm. Acesso em: 18 nov. 2022.

SANTOS, C. M. **Possibilidades e limitações de micropercursos de estudo e pesquisa em geometria:** uma experiência de formação continuada com professores da rede pública. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2019.

SALES, A. **Práticas argumentativas no estudo da geometria de acadêmicos de Licenciatura em Matemática**. 2010. 242 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2010.

SILVA, J. V. G. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático** 2011. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

STILLWELL, J. The four pillars of geometry. *In*: Springer. San Francisco: S. Axler mathematics Department, 2005. p. 240. ISBN 1441920633, 978-1441920638.

TASHIMA, M. M.; SILVA, A. L. As Lacunas No Ensino-Aprendizagem Da Geometria. *In*: SEED, **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná**. Curitiba, 2008. Disponível em:

http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marina_massaco_tashima.pdf. Acesso em: 18 nov. 2022.

TERÊNCIO NETO, J. **Análise praxeológica do conteúdo de números complexos em coleções de livros didáticos do ensino médio.** 2022. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, MT, 2022.

VARELLA, M. **Prova e demonstração na geometria analítica**: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos. 2010. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2010.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** Como educar. Porto Alegre: Artmed, 1998. ISBN 9788573074260.

APÊNDICE A – Quadro de habilidades BNCC contempladas durante a construção

Componente	Ano/ Faixa	Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Matemática	6º	Geometria	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Matemática	6º	Geometria	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
Matemática	6º	Grandezas e medidas	Ângulos: noção, usos e medida	(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.
Matemática	7º	Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Matemática	7º	Geometria	A circunferência como lugar geométrico	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

Matemática	7º	Grandezas e medidas	Medida do comprimento da circunferência	(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
Matemática	8º	Geometria	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Matemática	8º	Geometria	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Matemática	8º	Grandezas e medidas	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Matemática	9º	Geometria	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
Matemática	9º	Geometria	Distância entre pontos no plano cartesiano	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.