UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM OLHAR PARA A APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DA MEDIÇÃO NO CONTEXTO DO ENSINO REMOTO

Vania Sara Doneda de Oliveira
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM OLHAR PARA A APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DA MEDIÇÃO NO CONTEXTO DO ENSINO REMOTO

Vania Sara Doneda de Oliveira

Orientadora:
Maria Ivete Basniak

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, Diversidade e Cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Junho de 2021

Ficha de identificação da obra elaborada pela Biblioteca
UNESPAR/Campus de Campo Mourão
Bibliotecária responsável: Liane Cordeiro da Silva – CRB 1153/9

Oliveira, Vania Sara Doneda de
O48c Ensino exploratório de matemática e tecnologias digitais: um olhar para a aprendizagem de frações na perspectiva da medição no contexto do ensino remoto. / Vania Sara Doneda de Oliveira. -- Campo Mourão, PR : UNESPAR, 2021.
241 f. : il.

Orientadora: Maria Ivete Basniak.
Dissertação (Mestrado) – Programa Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), da Universidade Estadual do Paraná –UNESPAR, 2021.
Área de Concentração: Tecnologia, Diversidade e Cultura em Educação Matemática.

1. Matemática-Ensino. 2. Tecnologia-Educação. 3.Ensino a Distância. I. Basniak, Maria Ivete (orient). II. Universidade Estadual do Paraná–Campus Campo Mourão, PR. III. UNESPAR. IV. Título.

CDD 21.ed. 510.7
371.33
371.35

Vania Sara Doneda de Oliveira

ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM OLHAR PARA A APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DA MEDIÇÃO NO CONTEXTO DO ENSINO REMOTO

Comissão Examinadora:

Dra. Maria Ivete Basniak – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná

Dr. Arthur Belford Powell - Membro da Banca
Rutgers University

Dr. Everton Jose Goldoni Estevam - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: Aprovada

Campo Mourão
Junho de 2021

Dedico este trabalho aos meus alunos (antigos, atuais e futuros), razão da minha paixão pela profissão; e à minha mãe (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Steve Jobs disse que a única forma de fazer um grande trabalho é amar o que você faz. Não sei se meu trabalho é grande, mas sei que foi e é feito com muito amor. Esta dissertação não é resultado de um empreendimento individual, mas do apoio e desprendimento de diversas pessoas em uma das fases mais difíceis da minha vida. Se fossem necessárias palavras-chave para estes agradecimentos, seriam gratidão e pessoas inspiradoras. A elas, toda a minha gratidão.

A Deus, pela vida.

Ao meu amor, Andrei, que acreditou em mim quando nem eu mesma fui capaz de acreditar, com atitudes sinceras de carinho e generosidade, empatia e desprendimento. Você deixou suas coisas de lado várias vezes em função das minhas necessidades e das necessidades da nossa família. Você é um exemplo de integridade e solidariedade, um ser humano incrível. Te amo e admiro cada vez mais.

Aos meus filhos, Alan, pelo auxílio nas traduções, paciência em discutir textos e palestras em língua estrangeira, pela sinceridade, por sua pureza e pelas infinitas demonstrações de carinho; e Lara, pelo apoio, colaboração e incentivo. Sua determinação e garra me motivam. Vocês me inspiram e o amor de vocês me faz uma pessoa melhor. Obrigada por me ensinarem tanto. Amo vocês!

À minha nora, Sâmara, por cuidar com todo amor e carinho do Alan.

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Ivete Basniak, pela confiança, orientação, apoio, incentivo, amizade e muita paciência. Pelas inúmeras leituras, discussões, apontamentos, sem hora ou dia de trabalho. Sua humildade, seus exemplos e sua paixão pelo que faz me inspiram a ser uma professora e uma pessoa melhor. Sei que nossa amizade irá além da conclusão do curso de mestrado.

Ao Prof. Dr. Everton José Goldoni Estevam pelo olhar atento, o criticar cuidadoso, o apoio desde as disciplinas obrigatórias, passando pelo grupo de estudo, qualificação e defesa. Você é exemplo. Seus por quês fizeram muita diferença na minha trajetória enquanto professora e pesquisadora.

Ao Prof. Dr. Arthur Belford Powell pela disponibilidade, contribuições, sensibilidade e seriedade ao analisar esta pesquisa, no momento da qualificação e defesa. Seus estudos me motivam a querer mudar a forma como ensinamos.

A meus irmãos do coração, meus parceiros de vida, Patricia e Délio, pelo apoio, dedicação e amizade.

A Bethinha, por sua alegria e entusiasmo contagiante, pelo apoio, solidariedade e incentivo; pelas inúmeras vezes que gravou aulas, preparou atividades e materiais para que eu tivesse mais tempo para o mestrado. Você foi e é sensacional. Obrigada por estar sempre ao meu lado.

A Cris, Mari, Shirlei, Sueli e Vivi pelo apoio, incentivo, momentos felizes de descontração e por me ouvirem. Vocês estão presentes na alegria e na tristeza, como a mais sincera das amizades deve ser. Obrigada por fazerem parte da minha trajetória.

A Dalva, Dayane, Hedy, Ingrid e Margarete pela cumplicidade, partilha, reflexões e aprendizagens.

Às meninas do tênis pela amizade, por compreenderem minha indisponibilidade e pelo incentivo.

Aos estudantes que participaram das aulas e realizaram as tarefas com alegria e entusiasmo; e a seus pais, por permitirem tal participação.

A todos os amigos e colegas do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE, que me acolheram e contribuíram efetivamente para a minha formação *como professora e pesquisadora, e que também colaboraram com esta pesquisa por meio de leitura e discussão dos planejamentos, das tarefas e dos artigos. Especialmente a Camila, pelas transcrições. Adrieli, Camila, Jaqueline e Luan, admiro vocês profundamente... sei que farão muita diferença naquilo que se propuserem a fazer.*

Aos professores, colegas e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná, que contribuíram com a minha formação e participação no curso de mestrado.

Aos meus familiares, pai, tios e primos pelo apoio.

À chefe do Núcleo Regional de Educação de Campo Mourão, à direção e à coordenação da escola na qual a pesquisa foi realizada, por possibilitarem a realização do estudo.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este estudo está alicerçado no Ensino Exploratório de Matemática (EEM), nas frações como medida, e medida, e nas Tecnologias Digitais (TD), norteado pela questão de pesquisa: *Que possibilidades e dilemas emergem para o/no ensino e para a/na aprendizagem de frações na perspectiva da medição ao planejar e desenvolver aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental no contexto do Ensino Remoto de Emergência?* Para respondê-la, foi assumida a perspectiva qualitativa de pesquisa de cunho interpretativo. A pesquisa foi realizada em uma escola pública estadual do interior do Paraná, com 22 alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental, que preencheram os termos de assentimento e consentimento Compõem os dados desta pesquisa: o estudo de literatura para a estruturação de quadros teóricos que fundamentam a pesquisa; e as transcrições das gravações das aulas desenvolvidas, as quais foram complementadas pelos registros dos alunos – fotos do caderno das resoluções das tarefas e da sistematização das aprendizagens matemáticas e arquivos de texto do *Google Documentos* – enviados via plataforma *Google Classroom*. Também, os estudos revelaram que, para compreensão de números racionais, é necessário compreender suas diversas interpretações, entre eles medida, parte-todo, quociente, razão e operador, que devem ser ensinados aos alunos ao longo do Ensino Fundamental e Médio, e sugerem o início do ensino de frações como medida. Esta interpretação coincide com a gênese histórica das frações, que emerge da necessidade de medir quantidades contínuas, sendo imprescindível estabelecer uma unidade de medida para realizar comparações multiplicativas, e a equivalência de frações é fundamentada na magnitude numérica. Para nortear o desenvolvimento das aulas, foram adaptados e ampliados quadros referentes ao EEM com as ações do professor quanto à organização para aula no contexto do ERE; à promoção da aprendizagem matemática; e à gestão da aula, e com o papel esperado dos alunos. As tarefas de natureza exploratória contemplaram as diferenças das propriedades dos números naturais e fracionários, destacando a sinalização de magnitude numérica, representação simbólica, densidade, produto e quociente. Para isso foram utilizados *applets* que pudessem contribuir para os objetivos elencados das tarefas, e a Gênese Instrumental foi a lente teórico-metodológica escolhida para analisar a ação intencional do sujeito (aluno), que utilizando esquemas mentais de uso, transforma o artefato (*applet*) em instrumento (para resolver a tarefa). As análises dos dados mostraram que o desenvolvimento das aulas assentes no EEM favoreceu para que os alunos compreendessem a diferença da propriedade de sinalização de magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, quando conseguiram comparar frações, e compreenderam que frações equivalentes têm a mesma magnitude, mas podem ser escritas por representações simbólicas diferentes. Quanto ao produto, os alunos concluíram que, quando se multiplicam frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos fatores, o que não ocorre nos números naturais. No que se refere à prática investigada sinaliza-se a insuficiência de horas-atividade para professores planejarem e elaborarem aulas inovadoras, a importância do planejamento coletivo, e que o ERE fez emergir desigualdades sociais, excluindo estudantes que não têm acesso a equipamentos e/ou *internet* de qualidade.

Palavras-chave: Educação Matemática. Prática de Ensino. Tarefas Exploratórias. Números Racionais. *Applets*.

ABSTRACT

This work is grounded on three pillars: Exploratory Mathematics Teaching (EET), fractions as measure, and Digital Technologies (DT), guided by the research questions: *What possibilities and dilemmas emerge for/in the teaching and for/in learning fractions under the measurement perspective when planning and developing classes based on the Exploratory Mathematics Teaching with 6th grade students at Elementary School in the Emergency Remote Teaching context?* To answer the question, qualitative research perspective with interpretative base was taken. The research data are composed by the study of literature to structure theoretical frames which ground this research; and recordings transcripts of classes carried out, which were complemented by students reports – pictures of task resolution notebooks and of systematization of mathematics learning, also text files of *Google Documents* – sent through the *Google Classroom* platform. The option by study and developing classes based on EET reflects the search for overcome the mathematics teaching based on reproduction of procedures and algorithms. Also, studies revealed that, to understand rational numbers, understanding their diverse interpretations, the subconstructs is necessary, and among them the measure, part-whole, quotient, reason, and operator, which should be taught to the students over the Elementary and the High School, and they suggest the start of teaching fractions as measure. This interpretation meets the fraction historical genesis, which emerges from the need for measure continuous quantities, what makes Paramount establish a measurement unit to perform multiplicative comparisons, and the fractions equivalence is based on the numerical magnitude. To guide the development of classes, some frames were adapted and enlarged, containing professors' actions regarding the class organization in the Emergency Remote Teaching (ERT); to promote mathematics learning; and to the class management, also with the expected role played by the students. Exploratory nature tasks contemplate differences of natural and fraction numbers' properties, highlighting numerical magnitude signaling, symbolic representation, density, product, and quotient. Thereunto, applets which could contribute for the objectives enlisted in tasks were used, and the Instrumental Genesis was the theoretical-methodological lens chosen to analyze the subject (student)'s intentional action, who using mindsets transforms the artefact (applet) into instrument (to solve the task). Data analysis showed development of classes based on EET favoring for students understanding the difference of the property numerical magnitude signaling of natural numbers and fraction ones, when they compared fractions and understanding that equivalent fractions have the same magnitude, but they may be written by different symbolic representations. Regarding the product, students concluded that when fractions different from zero and one are multiplied, the result might be lower than one of the factors, what does not occur with natural numbers. The study indicates insufficient activity hours for teachers planning and elaborate innovative classes, the importance of collective planning, and that ERT made social inequalities more evident, excluding students who do not have access to good quality devices and internet.

Keywords: Mathematic Education. Teaching Practice. Exploratory Tasks. Rational Numbers. *Applets*.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO E CONTEXTO METODOLÓGICO

Apresentação

A motivação inicial do presente estudo foram as inquietações da pesquisadora em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, enquanto professora dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Por meio dessas experiências, percebemos que as tarefas e atividades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos têm como objetivo o uso de algoritmos, regras e procedimentos, que se tornam enfadonhos e desestimulantes para os alunos.

A não aceitação dessas condições levaram esta professora, e agora pesquisadora, até a universidade novamente, mais especificamente ao mestrado acadêmico em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM).

No mestrado houve oportunidades de refletir sobre algumas das inúmeras problemáticas relacionadas tanto ao ensino quanto à aprendizagem matemática, bem como de buscar metodologias de ensino que favoreçam o papel do aluno como protagonista do seu aprendizado.

A pesquisadora também foi convidada pela orientadora a participar do Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática – GETIEM, nomenclatura atualmente alterada para o Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. A participação no grupo foi fundamental para o delineamento do objeto de estudo da presente pesquisa.

Neste contexto, a pesquisadora conheceu o Ensino Exploratório de Matemática (EEM) articulado com as Tecnologias Digitais (TD). A literatura (PONTE, 2005; 2014; CANAVARRO, 2011; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013) mostra que práticas de EEM desafiam os alunos, possibilitando a elaboração e a discussão de diferentes estratégias para resolução de tarefas, permitindo que eles comuniquem suas ideias e ouçam as ideias dos outros. Isto favorece a reflexão e análise de informações, além de construir aprendizagens matemáticas a partir das discussões e análises de erros e acertos. Assim, as dimensões do *inquiry*, reflexão, comunicação e colaboração articulam-se no EEM, e podem ser potencializadas pelas TD.

Compreendemos a tecnologia como produção humana (VIEIRA PINTO, 2005) que está inserida no cotidiano das pessoas, seja para atividades vinculadas ao uso pessoal e/ou situações de trabalho, e admitimos TD como “um conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1)”

(CEALE, 2014, n.p.). Assim, neste trabalho, adotamos o termo TD para nos referirmos aos artefatos que utilizam tecnologia digital em seu processo de desenvolvimento, como computador, *tablet*, celular, *internet*, *software*s, objetos de aprendizagem, *applets*[1], entre outros.

No Brasil, ao examinar a plataforma da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Catálogo de Teses e Dissertações, em abril de 2019, inúmeras pesquisas na Educação Matemática sobre o uso de TD no ensino e na aprendizagem de matemática foram encontradas. No entanto, nessa mesma plataforma não foram encontradas pesquisas desenvolvidas sobre a aprendizagem utilizando a metodologia do EEM aliada às TD. Duas teses (RODRIGUES, 2017; MARINS, 2019) sobre a formação profissional do professor no contexto da perspectiva do EEM foram localizadas. Isto nos levou a acreditar que se trata de um tema relevante, que pode trazer contribuições para o campo da Educação Matemática, favorecendo reflexões sobre o uso de tarefas exploratórias, compreendidas por nós como aquelas que possibilitam a elaboração e a discussão de diferentes estratégias para sua resolução no ensino e na aprendizagem de matemática aliado às TD.

Para Ponte (2005), uma tarefa pode ser definida de acordo com seu grau de dificuldade matemática e de acordo com sua estrutura, aberta ou fechada. Uma tarefa aberta apresenta algum tipo de indeterminação, ou naquilo que é dado ou naquilo que é pedido, ou ainda nas duas coisas. Uma tarefa fechada apresenta explicitamente aquilo que é pedido e aquilo que é dado. Já uma tarefa exploratória pode oferecer desafio reduzido tendo característica mais aberta, sendo definida pela alta demanda cognitiva necessária para resolvê-la.

Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura

Fonte: Ponte (2005, p. 8).

Nesta fase da pesquisa, já havíamos delineado que investigaríamos questões relacionadas ao EEM conjuntamente com o uso de TD, com foco no conteúdo de frações, com

[1] Consideramos um *applet* uma aplicação que é executada dentro de um site ou programa maior. Podem ser animações, simuladores, jogos, entre outros, que não necessitam de instalação no artefato utilizado

alunos entre dez e onze anos do sexto ano do Ensino Fundamental, quando tivemos a oportunidade de cursar a disciplina *Investigando a representação e o ensino de números fracionários: o atual e uma alternativa*, ministrada pelo professor Arthur Powell. Na disciplina, realizamos tarefas com as barras *Cuisenaire,* discutindo a perspectiva da medição para o ensino e para a aprendizagem de frações. A compreensão de frações como medida vai ao encontro da história do surgimento das frações, sendo uma alternativa ao ensino de frações como parte-todo. Além disso, no ensino de frações na perspectiva da partição, não há a necessidade de um novo campo numérico, dos números racionais. Geralmente o ensino é alicerçado em figuras divididas em partes iguais, em que os alunos são ensinados a contar o total de partes que a figura foi dividia e o total de partes a serem consideradas (sombreadas/pintadas), utilizando números naturais, o que gera obstáculos didáticos.

A partir do exposto, delineamos, num primeiro momento, como questão norteadora da pesquisa: *quais as implicações do uso das tecnologias digitais em tarefas exploratórias na aprendizagem de números racionais utilizando a perspectiva da medição para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental?*

Desta forma, o objetivo geral da pesquisa seria analisar como recursos tecnológicos podem interferir no desenvolvimento de tarefas exploratórias, e analisar como tarefas exploratórias podem implicar na aprendizagem dos conceitos relacionados aos números racionais na perspectiva da medição.

No entanto, no ano de desenvolvimento da pesquisa, 2020, a doença COVID-19, ocasionada pelo vírus SARS-CoV-2, causou pânico, com milhares de doentes e mortes em todo o mundo. Essa pandemia mudou o planejamento da pesquisa quanto ao desenvolvimento das tarefas exploratórias. Muitas foram as incertezas até o momento de coletar os dados empíricos: até quando as aulas ficariam suspensas; se a aplicação deveria ser deixada para o ano seguinte, com solicitação da prorrogação de conclusão do mestrado; e se seria possível desenvolver as tarefas de natureza exploratória no Ensino Remoto de Emergência (ERE)[1].

Com o passar do tempo, prevendo que as aulas não retornariam tão logo, o objetivo geral foi revisto e, consequentemente, todo o trabalho, desde o planejamento das aulas até as tarefas exploratórias a serem desenvolvidas no ERE. Assim, optamos por elaborar o trabalho a partir de uma coletânea de vários artigos científicos cuja articulação entre eles nos permitirá

[1] O ERE é um ajuste temporário do currículo escolar (de todos os níveis de ensino) para que as aulas não sejam suspensas enquanto alunos e professores não podem frequentar o ambiente escolar para não disseminar o vírus causador da COVID-19. Dessa forma, o ensino ocorre via internet/televisão/envio de atividades (VALENTE *et al.*, 2020).

responder à questão norteadora, que foi alterada para: *Que possibilidades e dilemas emergem para o/no ensino e para a/na aprendizagem de frações na perspectiva da medição ao planejar e desenvolver aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental no contexto do Ensino Remoto de Emergência?*

A escolha do Tema e a Trajetória da Professora Pesquisadora

Para entender a escolha do tema é preciso conhecer a trajetória da professora de Matemática do Ensino Fundamental Anos Finais e do Ensino Médio até o momento em que se torna pesquisadora. Esta apresentação se faz necessária para que o leitor conheça um pouco do percurso vivenciado e possa entender o delineamento e opções da pesquisa.

O caminho trilhado entre as minhas[1] inquietações como professora, até me tornar pesquisadora em Educação Matemática, bem como a elaboração final de uma questão de pesquisa não foi fácil. Sempre soube que queria ser professora. Enquanto estudante do Ensino Fundamental, Ensino Médio e na graduação de Matemática, ajudava meus colegas com os conteúdos de Matemática e Física. Também, sempre gostei muito de jogos, videogames e esporte coletivo. Desde muito jovem, tive acesso a brinquedos eletrônicos, máquina de escrever e, depois, o computador.

Graduei-me na Unespar Campo Mourão, primeiro em Bacharel em Contabilidade (não havia, na região em que morava, o curso de Licenciatura em Matemática quando terminei o Ensino Médio) e depois em Matemática. Trabalhei como professora particular de matemática a partir dos meus dezessete (17) anos. Durante a faculdade de Matemática, sempre participei dos projetos de monitorias (reforço de conteúdo) para os colegas de turma e nas escolas estaduais da cidade. Durante a graduação, eu e meus colegas de curso idealizamos e realizamos gincanas para os estudantes do Ensino Fundamental e Médio, Semanas da Matemática com autores de livros didáticos e estudiosos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, entre outros. No primeiro ano em que iniciei a graduação de Licenciatura em Matemática, pude fazer a especialização em Educação Matemática. No ano em que me formei, prestei concurso para magistério do Estado do Paraná e, no ano seguinte, fui chamada para assumir a vaga do concurso. Depois de alguns meses em sala de aula, fui convidada para ser integrante da Coordenação Regional de Tecnologias na Educação – CRTE do Núcleo Regional de Campo Mourão - onde atuei por sete anos, instrumentalizando professores para o uso dos laboratórios

[1] Como nesta parte do trabalho o texto se refere exclusivamente à trajetória da pesquisadora, optou-se pela conjugação dos verbos na primeira pessoa do singular.

Four Head – Linux Computacional, e para os recursos de tecnologias disponibilizados na escola: TV, *Pendrive*, *tablets*, entre outros. Ao trabalhar com professores, a equipe da CRTE escolheu não apenas instrumentalizar os professores para o uso do laboratório de informática, mas instrumentalizar de forma contextualizada, com ideias de como o professor poderia trabalhar seus conteúdos disciplinares com os alunos, utilizando *softwares* disponíveis nos laboratórios de informática das escolas, sites, editor de texto, apresentações e planilhas, além de leituras de estudiosos da área para que as tecnologias realmente pudessem auxiliar no aprendizado do aluno.

Em 2015 voltei para a sala de aula, e desde o meu retorno ao Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, por mais tecnologia e material concreto que usasse com meus alunos, como vídeos, *GeoGebra*[1], jogos digitais, jogos de tabuleiro, gincanas, resoluções de problemas do cotidiano, apenas para citar alguns exemplos, ainda sentia muito desconforto e frustração como professora, porque não conseguia fazer com que a maioria dos meus alunos fosse protagonista do seu próprio aprendizado e se engajasse no estudo de Matemática.

Além disso, no final do trimestre de 2018 e no ano de 2019, experimentei a metodologia da sala de aula invertida (ensino híbrido), com apoio da direção da escola, utilizando a plataforma *Google Sala de Aula*, disponibilizada gratuitamente para professores e alunos pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná – SEED/PR, e a plataforma adaptativa *Khan Academy*[2]. No entanto, não houve mudanças quanto ao compromisso e o gosto pelo aprendizado de Matemática por parte dos alunos. Portanto, concluí que apenas o uso das tecnologias como meio para o ensino e a aprendizagem não é suficiente para mudar a atitude dos alunos em relação ao estudo de Matemática.

Para muitos desses alunos, Matemática é repetição de procedimentos, algo a ser *decorado*, distante e não vivenciado.

O projeto que apresentei para ingresso no PRPGEM tinha como problemática investigar de que maneiras a implementação das tecnologias digitais e o ambiente virtual *Google Sala de aula* poderiam ser incluídos em ações pedagógicas pelos docentes de Matemática, de forma que contribuíssem para a aprendizagem dos alunos nos conteúdos abordados nessa disciplina, na metodologia do ensino híbrido. No entanto, no decorrer de 2019, essas ideias foram mudando.

---

[1] O *GeoGebra* é um programa de geometria dinâmica que agrupa geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos. Mais informações podem ser acessadas em https://www.geogebra.org.

[2] A *Khan Academy* é uma plataforma on-line e gratuita que oferece vídeos educativos, exercícios e um painel de aprendizado que se adapta ao usuário conforme seu desempenho dentro da própria plataforma. Disponível em http://pt.khanacademy.org/.

Como eu já estava utilizava o desenvolvimento dessa prática, com as ferramentas *Google Classroom* e inclusive a plataforma adaptativa *Khan Academy* com a metodologia de sala de aula invertida (ensino híbrido), percebi que ainda faltava algo para que os alunos se interessassem pela matemática. Acreditava que os alunos seriam motivados e teriam interesse em estudar matemática dessa forma, mas a realidade é que alguns se motivaram; mas a maioria, não. Mesmo com reunião de pais, incentivos, avaliações diferenciadas, além de outras tentativas, nada fez com que os alunos mudassem de atitude em relação ao estudo de matemática. Em outras palavras, apenas a inserção e a integração da tecnologia em sala de aula não estavam favorecendo a aprendizagem. Apesar de alguns alunos terem gostado muito, achado prazeroso e útil trabalhar com as TD, para mim, enquanto professora, não foi o resultado esperado, pois os alunos que aprovaram o uso das TD eram aqueles considerados *bons alunos*.

Ao ingressar no PRPGEM como estudante, passei a refletir e compartilhar as inquietações que também eram dos meus professores e colegas mestrandos, além de estudar contribuições e reflexões de outros autores sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. No grupo de pesquisa GEPTEMatE, entre tantos assuntos, discutimos as tecnologias digitais e a abordagem do EEM. Fiquei encantada e curiosa, pois no EEM as tarefas são desenvolvidas dentro da sala de aula e com uma perspectiva muito diferente do ensino tradicional.

Deste modo, quanto mais eu lia e participava do GEPTEMatE, mais eu queria entender e vivenciar o EEM, apesar de toda a complexidade desse tipo de ensino. O projeto foi avançando e sendo delineado durante as aulas das disciplinas do PRPGEM, grupo de pesquisa, orientações e contexto das aulas em 2020, descritos brevemente a seguir.

O Contexto Escolar em 2020

O mundo foi surpreendido, em 2020, pelo surgimento e disseminação do Sars-Cov-2 – Covid-19, que modificou a vida das pessoas do mundo inteiro. No Brasil, assim como em inúmeros outros países do mundo, houve a paralisação de várias atividades, ou a mudança de dinâmicas, que passaram a ser realizadas de forma remota. O mesmo ocorreu na Educação, em que foi necessário alterar a rotina escolar de milhões de alunos, bem como os calendários escolares, quando o Congresso Nacional reconheceu, em 20 de março, estado de calamidade pública. Neste cenário, a Lei Federal nº 14.040, de 18 de agosto de 2020, estabeleceu "normas educacionais a serem adotadas, em caráter excepcional, durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020" (BRASIL, 2020, p. 4).

Ainda em seu parágrafo único, o referido Decreto determinou que "o Conselho Nacional de Educação (CNE) editará diretrizes nacionais com vistas à implementação do disposto nesta Lei" (BRASIL, 2020, p. 4). Consequentemente, o parecer emitido pelo CNE estabeleceu que cada estado da federação deveria encontrar a melhor solução para adequação das aulas no contexto da pandemia, bem como para reorganização do calendário escolar.

Com base nisso, em 2020, as aulas presenciais das Escolas Estaduais do Paraná, iniciadas em 02 de fevereiro, foram suspensas. O Decreto Estadual nº 4.320, de 16 de março de 2020 (PARANÁ, 2020a), suspendeu as aulas em todas as escolas e universidades públicas estaduais e particulares a partir do dia 20 de março, como medida de enfrentamento à pandemia mundial decorrente do coronavírus – COVID-19. Posteriormente, o Decreto Estadual nº 4.258, de 17 de março de 2020, alterou a redação do artigo 8º do Decreto nº4.320 que, em seu parágrafo único, afirma que "o período de suspensão poderá ser compreendido como antecipação do recesso escolar de julho de 2020" (PARANÁ, 2020b, p. 14). A Resolução nº 1.016 – GS/SEED, de 03 de abril de 2020, por sua vez, estabeleceu, em regime especial, as atividades escolares na forma de aulas não presenciais, caracterizando essas atividades escolares nos seguintes termos:

> Art. 3.º As atividades escolares não presenciais são aquelas utilizadas pelo professor da turma ou pelo componente curricular destinadas à interação com o estudante por meio de orientações impressas, estudos dirigidos, quizzes, plataformas virtuais, correio eletrônico, redes sociais, chats, fóruns, diário eletrônico, videoaulas, audiochamadas, videochamadas e outras assemelhadas (PARANÁ, 2020c, p. 39).

No artigo 6º da referida Resolução, ainda são definidas como atividades escolares não presenciais:

> I – as ofertadas pela mantenedora e/ou pela instituição de ensino, sob responsabilidade do professor da turma ou do componente curricular, de maneira remota e sem a presença do professor e do estudante no mesmo espaço físico;
> II – metodologias desenvolvidas por meio de recursos tecnológicos, inclusive softwares e hardwares, adotadas pelo professor ou pela instituição de ensino e utilizadas pelos estudantes com material ou equipamento particular, cedido pela instituição de ensino, ou mesmo público;
> III – as incluídas no planejamento do professor e contempladas na proposta pedagógica curricular da instituição de ensino;
> IV – as submetidas ao controle de frequência e participação do estudante;
> V – as que integram o processo de avaliação do estudante (PARANÁ, 2020c, p. 39).

Nesta mesma Resolução, ficou disposto que seriam disponibilizadas videoaulas ministradas por professores da rede estadual de ensino em três canais de televisão abertos aos estudantes: um canal para oferta das aulas do 8º e 6º anos (8º ano no período da manhã e 6º ano no período da tarde); um canal para as aulas do 9º e 7º anos (9º ano no período da manhã e 7º ano no período da tarde); e um canal para o Ensino Médio, além dos serviços *Google Classroom* ou *Google Sala de Aula*[1] vinculados ao e-mail institucional (@escola), já disponibilizado em anos anteriores para alunos e professores (PARANÁ, 2020c). Entretanto, em uma das primeiras *lives*[2] realizadas pela Secretaria de Educação na época, foi dada autonomia aos professores para produzirem seus materiais ou utilizarem as videoaulas disponibilizadas pela secretaria. Assim, alguns professores optaram por não utilizar a organização dos conteúdos disponibilizados na televisão ou canal do *Youtube* denominado *Aula Paraná* e no *Google Sala de Aula*, porque os conteúdos eram abordados de forma muito aligeirada e superficial, não correspondente com o planejamento do professor, além de serem incoerentes com a sua realidade escolar local. Logo, muitos professores organizaram os conteúdos no *Google Sala de Aula* em atividades obrigatórias (que deviam ser realizadas pelos alunos) e não obrigatórias (atividades facultativas). Para as atividades impressas, que explicaremos na sequência como ocorreram, os professores procuram indicar páginas do livro de Matemática do aluno para que ele tivesse alguma referência para sua realização. A professora pesquisadora insere-se entre esses professores, e optou por produzir seu material (videoaulas, atividades e avaliações) e disponibilizar no *Google Sala de Aula* para todas as turmas que assumiu como professora regente de Matemática no ano de 2020. Para a produção das aulas, a professora investiu em mesa digitalizadora.

Também, a Resolução nº 1.249/2020 – GS/SEED, de 20 de abril de 2020 (PARANÁ, 2020d), tratou da adequação do Calendário Escolar 2020 para a Rede Pública Estadual de Educação Básica, antecipando o recesso escolar de julho para o período de 20 de março a 05 de abril de 2020, oficializando o início ERE nas escolas estaduais do Paraná, a partir do dia 06 de abril.

Esse novo contexto de mudança repentina e não esperada na forma de organização escolar, somado a outras dificuldades associadas às tensões que a pandemia gerou, relacionadas à insegurança econômica/financeira, de saúde e de isolamento social, acarretou inúmeros desafios e obstáculos, tanto para alunos quanto para professores. Entre os desafios e obstáculos,

[1] O *Google Classroom* ou *Google Sala de Aula* pode ser acessado pelo navegador de internet ou por aplicativo de celular. Trata-se de um serviço gratuito que conecta professores e alunos em uma sala de aula on-line. Permite que seus administradores ou professor crie(m) diferentes turmas, distribua(m) conteúdos, tarefas e avaliações, além de enviar e receber notas e *feedbacks*. Ainda pode ser integrado com o *G Suite for Education*, um conjunto de ferramentas e serviços gratuitos do *Google* adaptados para escolas.

[2] Utilizamos o termo *live* para reuniões síncronas (ao vivo) transmitidas via internet por meio de redes sociais, como Facebook, Instagram, ou ainda via *Google Meet* (em que a interação entre os participantes pode ocorrer por meio de áudio e/ou vídeo e/ou mensagens escritas – *chat*) ou *Youtube* (em que a interação ocorre apenas por mensagens escritas – *chat*).

ressaltamos: não disponibilidade de internet e/ou artefato tecnológico; falta de intimidade em manipular esses artefatos, seja sintonizar os canais da TV, baixar, instalar e utilizar os aplicativos *Aula Paraná* e *Google Sala de Aula* pelo e-mail institucional da secretaria (@escola.pr.gov.br); grade horária das aulas na TV, que não seguiam semanalmente o mesmo horário, variando a ordem e dia das disciplinas de uma semana para outra; e inexistência de um canal de comunicação estabelecido previamente entre a escola e alunos/pais. Alguns desses problemas, mesmo depois de oito meses do início da suspensão das atividades presenciais, continuavam sem solução, devido a desigualdade das condições econômica e estrutural dos alunos e dos professores. Muitos alunos sem acesso à internet ou aos canais de TV e, por isso, recebiam as atividades impressas. Isto demandava que a compreensão do conteúdo e das tarefas a serem realizadas fosse exclusivamente dele, ou de alguém que tivesse conhecimento e condições para ajudá-lo nas tarefas escolares em casa (algum familiar ou alguém com quem estivesse em contato, mesmo durante o período de isolamento social). No entanto, nem sempre houve esse apoio familiar para realização dessas atividades impressas. A maioria desses alunos é de família em condições de vulnerabilidade social, culturalmente desfavorecidas (os pais têm escolaridade muitas vezes menor do que a que o filho se encontra atualmente) e com sérias dificuldades financeiras (inclusive a SEED-PR organizou para que tais famílias retirassem no colégio, a cada quinze dias, um *kit* de alimentos).

Mesmo antes de as aulas presenciais serem suspensas, a professora pesquisadora já havia criado grupo de mensagens instantâneas (*WhatsApp*) para cada turma, e para os 6º anos foram incluídos, além dos alunos da turma, também seus pais ou responsáveis. Quando esses grupos foram criados, o objetivo era informar e esclarecer dúvidas sobre tarefas, avaliações, além de enviar *links* de jogos matemáticos e curiosidades que a professora costumava postar. No entanto, com a implantação do ERE, esses grupos tornaram-se fundamentais para que os alunos tivessem informações e orientações de como seria todo o processo, desde a ativação do e-mail institucional até o acesso aos canais de TV e ao *Google Sala de Aula*.

Além disso, a professora pesquisadora tinha afinidade com o uso de recursos tecnológicos, incluindo o *Google Sala de Aula* e o pacote *G-Suite for Education*[1], que foram os recursos institucionalizados pela SEED para uso no período de ERE. Assim, uma vez que já utilizava esses recursos antes da suspensão das atividades escolares presenciais, pôde auxiliar professores e alunos, criando tutoriais simples de cadastro, acesso e utilização. Apesar de a

[1] *G-Suite for Education* é um pacote de produtos da Google para escolas, como editor de texto (Google Documentos), apresentação de slides (Google Apresentações), planilhas de texto (Google Planilhas), armazenamento de arquivos na nuvem (Google Drive) e Jamboard.

professora não ter afinidade com tutoriais e vídeos, produzir esses materiais foi uma necessidade, pois não dava conta de tantas solicitações de auxílio. Também realizou inúmeras *lives* via *Google Meet*[1] com professores e alunos para orientar o acesso e uso do *Google Sala de Aula* e do pacote *G-Suite for Education*, seja em grupos ou individualmente. Por outro lado, a SEED realizou *lives* via *Youtube* para tentar esclarecer esse novo cenário para os professores da rede, inclusive fez uma consulta aos professores para estabelecer o nível de utilização de tecnologias de cada professor, que orientou a realização de formações específicas. Entretanto, poucas foram efetivadas.

Porém, em maio, quando os professores e alunos estavam se acostumando com a dinâmica do ensino remoto de emergência proposto, a Resolução 1.016/2020 foi inteiramente revogada, sendo substituída pela de nº 1.522, de 07 de maio de 2020, e alterada pela Resolução nº 3.817, de 24 de setembro de 2020, incluindo, no seu artigo 3º, os seguintes parágrafos:

> Art. 3.º As atividades escolares não presenciais são destinadas à interação do professor com o estudante por meio de orientações impressas, estudos dirigidos, quizzes, plataformas virtuais, correio eletrônico, redes sociais, chats, fóruns, diário eletrônico, videoaulas, aula on-line em tempo real e materiais impressos e outras assemelhadas.
> § 1.º As videoaulas e aulas on-line em tempo real de que trata o caput deste artigo são classificadas em três formas:
> I – videoaulas gravadas: são as aulas gravadas, disponibilizadas pela mantenedora;
> II – aula on-line em tempo real: são as aulas realizadas, ao vivo, pelos professores, no horário de aulas, conforme convocação da direção e cronograma da instituição de ensino, com a presença de, no mínimo, 1 (um) estudante, por meio do aplicativo Aula Paraná – com isenção de dados para professores e estudantes;
> III – aula on-line em tempo real no formato de aulão, realizada por dois ou mais professores da instituição de ensino, organizadas e convocadas pela direção.
> § 2.º As aulas on-line de que trata o caput deste artigo devem ser realizadas por meio do aplicativo Aula Paraná para obtenção de isenção de dados para professores e estudantes.
> § 3.º A aula on-line em tempo real de que trata o inciso III deste artigo, realizada por mais de um professor, contabilizará como aula dada para todos os docentes participantes daquela aula (PARANÁ, 2020e, p. 33).

Assim, as reuniões síncronas via *Google Meet* passaram a ser obrigatórias para todos os professores, pelo menos uma vez por semana em cada turma em que o professor era regente, e se nenhum aluno participasse, o professor deveria justificar para a direção essa ausência, pois o sistema indicaria falta para o professor, conforme o artigo 21º da Resolução mencionada.

[1] *Google Meet* é uma solução desenvolvida pela *Google,* que oferece serviço de comunicação por videoconferência gratuito para 100 pessoas ou de até 250 pessoas (versão institucional paga). Pode ser utilizado no navegador de internet ou instalando o aplicativo *Google Meet* para dispositivos móveis. Os participantes podem compartilhar a tela do seu dispositivo apresentando documentos, imagens e qualquer outro tipo de arquivo. Essas reuniões podem ser facilmente compartilhadas por *link* para que os participantes acessem, e podem ser gravadas e posteriormente compartilhadas para que sejam revistas ou visualizadas por quem não participou.

> Art. 21. A frequência dos professores será registrada mediante interação com os estudantes, por meio de aula on-line em tempo real e quando convocado pela direção da instituição de ensino. (NR)
> I – para configurar sua presença, o professor deverá realizar uma aula on-line de, no mínimo, 15 minutos em tempo real por turma, por disciplina, por semana;
> II – a aula on-line em tempo real deve ser realizada em um dos dias em que o docente tenha aula programada, conforme convocação da direção da instituição de ensino;
> a) para as aulas on-line em tempo real, no formato de aulões, deverá ser obedecido o cronograma estabelecido pela direção da instituição de ensino.
> III – não serão computadas as aulas on-line em tempo real realizadas sem a presença de estudante ou com duração inferior a quinze minutos (PARANÁ, 2020e, p. 33).

No entanto, a presença do aluno não estava vinculada a essa participação nas aulas on-line, via *Google Meet*, mas à interação no *Google Sala de Aula*.

> Art. 19. A frequência do estudante será registrada mediante interação no *Google Classroom*, conforme orientação a ser emitida pela SEED.
> Art. 20. Os estudantes que tiverem acesso apenas pela TV, canal aberto, deverão realizar as atividades e entregá-las na sua respectiva instituição de ensino, no prazo de quinze dias, no momento da entrega da merenda, e sua frequência será registrada conforme atividades entregues (PARANÁ, 2020e, p. 64).

Embora a obrigatoriedade de realizar as reuniões via *Google Meet* tenha ocorrido no final de setembro, a professora pesquisadora já realizava aulas síncronas com todas as suas turmas desde o início do ERE (abril/2020).

Estes acontecimentos decorrentes da pandemia mudaram o rumo da investigação. E, por isso, percebendo que as aulas presenciais não teriam uma data para retornar, passou-se a planejar tarefas de natureza exploratória, abordando as frações como medida para compreensão dos números racionais e no contexto do ERE a serem desenvolvidas com os 6º anos, utilizando os recursos disponíveis: *Google Sala de Aula*, *Google Meet*, grupos de mensagens instantâneas (*WhatsApp)* e *applets* para dar suporte ao ensino e à aprendizagem.

Planejar tarefas de natureza exploratória não é algo simples, e no contexto do ERE, foi mais desafiante e complexo, especialmente por envolver os números racionais. Isto porque a transposição do campo dos números naturais para os números racionais está entre as ideias matemáticas mais importantes e complexas que os alunos do Ensino Fundamental precisam compreender, além de se tratar de conteúdo elementar para a compreensão de outros conteúdos, como Álgebra, por exemplo (BEHR *et al.*, 1983). Na seção que segue, abordamos brevemente esses elementos relacionados aos números racionais, salientando sua relação com os documentos orientadores curriculares nacional e estadual.

O Ensino de Números Racionais nas Escolas Públicas do Paraná

Fundamentada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), a Secretaria de Estado de Educação do Paraná (SEED-PR) elaborou o *Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações* (PARANÁ, 2018). Esse é o documento norteador para todas as instituições de ensino públicas e particulares, de Educação Infantil e de Ensino Fundamental do referido Estado, para revisão de seus documentos relativos ao currículo. Apresenta a contextualização legal para a implantação da BNCC, um breve histórico da educação paranaense, os princípios orientadores que norteiam a elaboração dos currículos escolares e a definição dos direitos e objetivos de aprendizagem por etapas e anos de escolaridade, segundo suas especificidades.

Outro instrumento elaborado pela SEED-PR foi o *Currículo da Rede Estadual Paranaense* (CREP) (PARANÁ, 2019), que complementa o *Referencial Curricular do Paraná* e é voltado apenas para a rede estadual de ensino. Apesar de ter sido elaborado em 2019, só foi apresentado aos professores da rede estadual na semana anterior ao início das aulas em 2020. Trata-se de um quadro contendo unidade temática, objeto(s) de conhecimento, código (que tem como referência a BNCC, mas que pode ou não sofrer algum tipo de modificação, ou ainda elemento novo), objetivo(s) de aprendizagem, conteúdo e trimestre. Apesar de a BNCC destacar a importância de propiciar aos alunos tarefas que envolvam medições para mostrar a necessidade de um novo campo numérico, não encontramos, no *Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações* (PARANÁ, 2018) e no CREP (PARANÁ, 2019), explicitamente nos objetivos de aprendizagem ou conteúdos, a medição como caminho para construção do campo numérico dos racionais. Encontramos apenas a associação de frações como parte-todo e como resultado de divisão.

Quanto a isso, Escolano e Gairín (2005), Lamon (2012) e Powell (2018a; 2018b) advertem que o ensino do conceito de fração exclusivamente como parte-todo, trabalhado na maioria das escolas e livros didáticos, limita a compreensão dos alunos sobre as diferentes interpretações do conceito de frações. Essa abordagem de divisão de um inteiro em partes iguais não é suficiente para a construção de uma base sólida sobre o conceito de frações, pois não há a necessidade de um novo conjunto numérico, já que os números naturais são suficientes para contar o todo e a parte a ser considerada. A abordagem do conceito de frações como medida vai ao encontro do surgimento histórico das frações e é uma alternativa para os obstáculos didáticos causados pela introdução do ensino de frações como parte-todo. Ao medir, a magnitude da fração é considerada, e é necessário escolher uma unidade de medida, realizando uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, e os números naturais nem sempre são suficientes para isso.

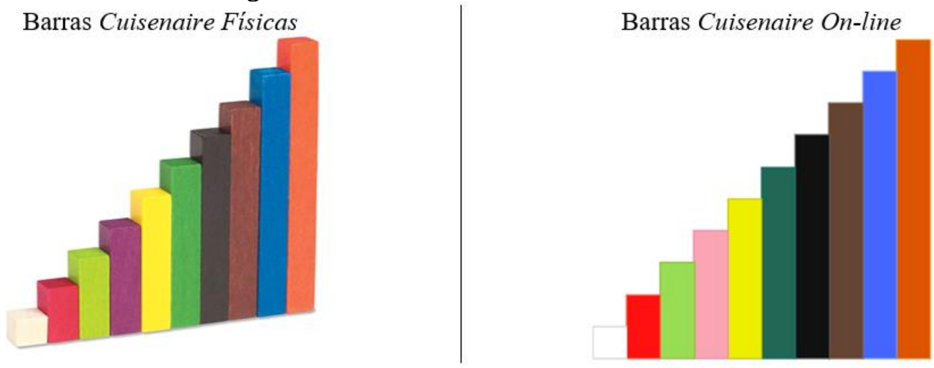
A Elaboração de Tarefas de Natureza Exploratória para Desenvolvimento no Ensino Remoto Emergencial sobre Frações na Perspectiva da Medição

Apesar de a tarefa ser elemento fundamental para a prática do EEM, sem a ação intencional do professor, as dimensões do *inquiry*, reflexão, comunicação e colaboração não se efetivam (BASNIAK; ESTEVAM, 2018). Assim, o professor precisa ter claro qual(is) o(s) objetivo(s) da tarefa, pois ela é a partida para a interação comunicativa entre alunos e alunos e professor para desencadear as demais dimensões do EEM. Nessas ações intencionais, o professor solicita as justificativas e esclarece ideias, promovendo a reflexão e colaboração entre os pares na negociação de significados, estratégias de Resolução da tarefa e conceitos matemáticos.

Desta forma, ao planejar e elaborar as tarefas de natureza exploratória, procuramos introduzir o subconstruto da fração como medida. Em seus estudos, Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) utiliza as barras *Cuisenaire* físicas para que os alunos possam progredir das frações não-simbólicas para as simbólicas. Tais barras permitem a comparação de quantidades contínuas, e as sequências de cores e comprimentos das barras físicas são: branca (1 cm), vermelha (2 cm), verde-clara (3 cm), roxa (4 cm), amarela (5 cm), verde-escura (6 cm), preta (7 cm), marrom (8 cm), azul (9 cm) e laranja (10 cm). Para a realização das tarefas propostas neste estudo, utilizamos o *applet* das *Barras Cuisenaire*[1] que, apesar de não possuírem uma unidade de medida padronizada como as barras físicas (centímetro), tomam como referência a barra branca. Desta forma, a barra vermelha mede duas barras brancas, a barra verde-clara 3 barras brancas, e assim sucessivamente. É importante ressaltar que a barra não tem valor pré-estabelecido, podendo a mesma barra ter valores diferentes, dependendo do objetivo proposto.

[1] *Applet* com *Barras Cuisenaire* disponível em: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html.

Figura 2 – *Barras Cuisenaire* físicas e *on-line*



Fonte: As autoras (2020).

Nosso intuito foi propiciar a compreensão dos números racionais partindo de uma nova ontologia para melhorar a epistemologia de números fracionários (POWELL, 2018a). Além disso, os números racionais são outro campo numérico, e por isso consideramos necessário discutir suas propriedades, quando comparadas com os números naturais.

Assim, tomando como pressupostos teóricos a compreensão dos alunos das frações na perspectiva da medição, a partir de tarefas de natureza exploratória, planejamos e estruturamos quatro tarefas[1] (sendo a segunda dividida em duas partes) com objetivos específicos distintos, mas imbricados, conforme explicitamos no Quadro 0.1. Desde 2019, a professora pesquisadora participa do Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática – GETIEM, que no segundo semestre de 2020 se tornou o Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Além das leituras e acesso a diferentes estudos e pesquisas concluídas e/ou em andamento, as discussões do grupo, com diferentes opiniões sobre as questões estudadas, contribuíram para a (re)construção de opiniões, ideias e experiências.

O grupo foi essencial para a validação do planejamento das quatro tarefas (Apêndices B, D, F, H, J e L) e da estruturação dos planos de ensino (Apêndices A, C, E, G, I e K), contendo quadros de antecipação/orientação para cada tarefa, que contemplam as ações dos alunos e do professor. Esses quadros de antecipação/orientação são necessários para que o professor saiba como agir, e não valide ou refute ideias durante a realização das tarefas pelos alunos. Nesses quadros, procuramos registrar e antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos e, por isso, eles foram atualizados conforme as ideias matemáticas foram surgindo no decorrer do desenvolvimento das tarefas.

As tarefas (Apêndices B, D, F, H, J e L) de natureza exploratória foram estruturadas

[1] As tarefas com os quadros de antecipação das ações dos alunos e as ações intencionais do professor, bem como os planos de aula de cada tarefa encontram-se nos apêndices deste trabalho.

objetivando que os alunos compreendessem fração como medida, e consequentemente diferenciassem propriedades dos números naturais e números fracionários (OBERSTEINER *et al*., 2019 *apud* POWELL, 2019b), que são:

- *Sinalização de magnitude numérica*: a fração é determinada por sua magnitude e não pela quantidade de algarismos, ou por ter algarismos maiores no numerador ou denominador. Exemplo: $\frac{1}{2} > \frac{234}{685}$;
- *Representação simbólica*: a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas. Exemplo: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{10}{20} = \cdots$
- *Densidade*: os números fracionários não possuem nenhum antecessor ou sucessor imediato, pois entre quaisquer frações existem infinitas outras frações. Exemplo: Entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ existe, por exemplo, este conjunto de frações: $\left\{\frac{2}{3}, \ldots, \frac{63}{10}, \ldots, \frac{16}{25}, \ldots, \frac{13}{20}, \ldots, \frac{131}{200}, \ldots, \frac{5}{8}\right\}$; e
- *Produto e Quociente*: A fração como adição repetida não é uma definição suficiente. Também, o produto da multiplicação de frações (diferentes de 1 ou 0) pode ser menor que um dos fatores. Além disso, ao dividir duas frações diferentes de 1, o quociente pode ser maior que o dividendo.

Para auxiliar na resolução de cada tarefa, foi proposto o uso de *applets*, conforme especificamos no Quadro 1, em que também explicitamos o(s) objetivo(s) de cada tarefa e a categoria de propriedades.

Quadro 1 – As tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos

Tarefa	Objetivo(s)	Categoria de Propriedades	*Applets* utilizados
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	- Representação simbólica.	Barras *Cuisenaire*
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1)	- Compreender fração como medida; - Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; e - Compreender a representação fracionária.	- Sinalização de magnitude numérica; e - Representação simbólica.	Barras *Cuisenaire*
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 2)	- Comparar frações; e - Compreender a adição e subtração de frações de mesma unidade de medida.	- Sinalização de magnitude numérica; - Representação simbólica; e - Densidade.	Barras *Cuisenaire*
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; e - Compreender adição e subtração de frações de unidades de medidas diferentes.	- Sinalização de magnitude numérica; e - Representação simbólica.	Barras *Cuisenaire*

Tarefa	Objetivo(s)	Categoria de Propriedades	*Applets* utilizados
Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros (Parte 1 e 2)	- Compreender multiplicação de frações de unidades de medidas iguais e diferentes; - Associar a representação decimal à representação fracionária; e - Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros.	- Representação simbólica; e - Produto e Quociente.	Barras *Cuisenaire; GeoGebra 1; GeoGebra 2; e Fraction Model.*

Fonte: As autoras (2020).

Discorremos, na sessão a seguir, sobre a escolha e seleção dos *applets*, pois têm papel fundamental em nossa pesquisa.

A Escolha e Seleção dos *Applets*

Optamos por utilizar os *applets*: *Barras Cuisenaire*[1] − disponível na plataforma NRICH; *Fraction Models*[2] − disponível na plataforma NCTM; *Quadriláteros*[3], o qual foi adaptado; e *Prova sem palavras*[4] − os dois últimos *applets* estão disponíveis na plataforma do *GeoGebra*. Procuramos por vários *sites*, plataformas, aplicativos, *applets*, até encontrar o que julgamos ser viável para qualquer meio de acesso: celular, *tablet*, computador.

Como artefato, material ou abstrato, pode ser considerado qualquer ferramenta, máquina ou sistema; em nossa pesquisa, consideramos computador, celular, *WhatsApp* e *Google Meet* como artefatos de comunicação; e como artefatos de ensino e de aprendizagem de Matemática o computador, celular, *softwares*, *applets*. O instrumento é construído por meio da elaboração de esquemas mentais do sujeito que são empregados nos artefatos, tornando-os úteis, de maneira que "Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa" (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 108). Rabardel (1995) denominou esse processo de transição do artefato em instrumento de *Gênese Instrumental*. Assim, os alunos sujeitos da pesquisa, ao manipular os artefatos (seja de comunicação ou de ensino e de aprendizagem) para a resolução das tarefas, podem elaborar e reelaborar o instrumento, sendo algo individual para cada indivíduo (BITTAR, 2011).

Discutimos o uso dos *applets* e demais TD de forma mais aprofundada no capítulo 4

[1] Disponível em https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html.
[2] Disponível em https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models.
[3] Disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq.
[4] Disponível em https://www.geogebra.org/m/b4mdnfbs.

desta dissertação, sob a perspectiva da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), que se fundamenta na ação do sujeito mediado por um instrumento.

Caracterização dos Sujeitos e Contexto da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Paraná. Esse ano foi escolhido para realização da pesquisa porque, além de a professora pesquisadora trabalhar com esse nível escolar há alguns anos, é o ano em que o conteúdo de frações é trabalhado de maneira mais aprofundada, desde seu conceito, operações, e resolução de problemas envolvendo esse conteúdo.

A escola dispõe de internet, dez (10) notebooks com sistema Linux Educacional e, das vinte e quatro (24) salas de aula, apenas cinco (05) não dispõem de projetor multimídia. O laboratório de informática foi desativado pela precariedade dos equipamentos e falta de uso. Em 2019 havia quarenta e oito (48) turmas entre Ensino Fundamental Anos Finais, Ensino Médio Regular e Técnico, totalizando um mil, quinhentos e setenta e cinco (1575) alunos, distribuídos em três turnos: manhã, tarde e noite. A escola também oferece Sala de Recursos Multifuncionais; e atividades complementares, como música, xadrez, inglês e treinamentos esportivos.

A investigação foi realizada no ano de 2020, ano de início da pandemia da COVID-19, e assim, o planejamento que havíamos feito para o ensino presencial foi modificado para o ERE. A professora pesquisadora é regente da disciplina de Matemática de duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental da escola pública estadual que foi campo de pesquisa.

Todos os alunos dessas turmas foram convidados para participar da pesquisa, e o convite foi realizado por vídeo e texto, postado na plataforma *Google Sala de Aula* e por mensagens instantâneas (*WhatsApp*) para pais e alunos. Antes de as aulas presenciais serem suspensas, a professora já havia criado grupo de mensagens instantâneas (*WhatsApp*) para cada turma, conforme já explicitado. Esses grupos foram formados com os pais e alunos para informar e esclarecer dúvidas sobre tarefas, avaliações, além de enviar *links* de jogos matemáticos. Do total de sessenta e um (61) alunos, trinta (30) retornaram preenchendo os termos de assentimento e consentimento da pesquisa, e durante seu desenvolvimento, houve frequência de vinte (20) a vinte e cinco (25) alunos participantes por semana.

Em princípio, dividimos os participantes em seis (06) grupos, de acordo com a disponibilidade de todos. Para isso, elaboramos um formulário no *Google Formulários* questionando a disponibilidade dos alunos sobre dias e horários, bem como o tipo de internet (3G, *wi-fi*) e artefato disponível (celular, *tablet*, computador com caixa de som e microfone, *notebook*). Isto porque sabíamos que alguns dos alunos tinham dificuldade quanto ao acesso à internet e/ou, ainda, o dispositivo tecnológico, seja celular, *tablet*, *notebook* ou computador é compartilhado com outros membros familiares. Depois de receber as respostas do formulário, elaboramos uma planilha organizando os grupos, que seriam seis (06).

No entanto, dos seis (06) grupos iniciais (G1, G2, G3, G4, G5 e G6), devido às dificuldades de acesso à internet, participaram ativamente da pesquisa apenas quatro (04) grupos: G1, G3, G4 e G5. Os grupos G1 e G3 foram formados por alunos da mesma turma; e os grupos G4 e G5, por alunos de turmas diferentes. A dinâmica da pesquisa envolveu dois encontros síncronos por semana, os quais chamamos de *live* (reunião por vídeo via *Google Meet*). Cada grupo (G1, G3, G4 e G5) participou de uma *live* semanal com os participantes do seu grupo (exclusivamente os participantes da pesquisa); e de uma *live* semanal com todos os alunos (participantes e não participantes da pesquisa[1]), realizadas uma vez por semana, depois da realização das tarefas pelos grupos. Esses encontros síncronos (*live)* dos grupos foram organizados e realizados nos seguintes dias e horários:

- Grupo 1 (G1) - Terças-feiras às oito horas;
- Grupo 3 (G3) - Terças-feiras às dezoito horas e trinta minutos;
- Grupo 4 (G4) - Quartas-feiras às dez horas; e
- Grupo 5 (G5) - Quartas-feiras às quatorze horas e quarenta minutos.

Discussão e sistematização com todos os grupos e alunos não participantes[2] da pesquisa – Sextas-feiras, às quatorze horas e quarenta minutos.

Fundamentos Metodológicos

Para que nosso trabalho seja compreendido, é necessário esclarecer os pressupostos teóricos e metodológicos, além do paradigma adotado. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, e se ampara nas várias características da pesquisa qualitativa apresentada por Creswell (2010):

[1] Apesar de a segunda *live* ser aberta para todos os alunos das duas turmas, participam, em média, vinte e cinco (25) alunos.

[2] Os alunos não participantes da pesquisa realizaram as mesmas tarefas propostas, mas individualmente. Para os alunos com acesso à internet, a professora pesquisadora gravou vídeos explicando a tarefa, objetivos e a forma de registro e, para os alunos sem acesso à internet, a professora adaptou as tarefas e explicações para a forma impressa.

- *Ambiente natural*: as pesquisas são realizadas no local em que os participantes vivenciam. A escolha dos alunos sujeitos da pesquisa deveu-se pelo fato de ser o local onde a professora pesquisadora está lotada e atua em sala de aula nos últimos seis anos. Cabe ressaltar que a professora pesquisadora conheceu o perfil dos estudantes no ano de desenvolvimento da pesquisa, pois eles são oriundos de escolas municipais diversas. A professora pesquisadora manteve contato presencial com os alunos apenas do início do mês de fevereiro até o dia 18 de março de 2020. Mesmo a pesquisa sendo realizada no ERE, trata-se de ambiente natural.
- *O pesquisador como instrumento fundamental*: a própria pesquisadora coletou os dados. Todas as reuniões foram gravadas via *Google Meet;*
- *Múltiplas fontes de dados*: os dados da pesquisa são provenientes de "múltiplas formas de dados" (CRESWELL, 2010, p. 208). Os dados foram coletados por meio do envio de fotos e/ou arquivos das resoluções das tarefas e registros das sistematizações das aprendizagens via plataforma *Google Sala de Aula*, videogravações das *lives* via *Google Meet* do desenvolvimento das tarefas pelos estudantes, e também das socializações dos resultados dos grupos na fase de discussão coletiva da tarefa;
- *Análise de dados indutiva*: o pesquisador constituiu uma organização própria dos dados. O objetivo da nossa investigação não visa a confirmar ou refutar hipóteses estabelecidas previamente; pelo contrário: ocorreu a partir do desenvolvimento prático da pesquisa, por meio do qual estabelecemos os resultados e conclusões explicitados em cada capítulo;
- *Significados dos participantes*: o pesquisador deve manter "um foco na aprendizagem do significado que os participantes dão ao problema ou questão, e não ao significado que os pesquisadores trazem para pesquisa[...]" (CRESWELL, 2010, p. 209). Nosso objetivo foi investigar como o uso das tecnologias digitais em tarefas de natureza exploratória interferem na aprendizagem de frações na perspectiva da medição, com estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental no ERE. Essa interferência pode ser a favor ou não da aprendizagem, mas isso é algo que foi respondido pelo próprio desenvolvimento da pesquisa. Assim, nosso interesse está centrado no aluno que já tem suas concepções, crenças, (des)conhecimentos;
- *Projeto emergente*: Creswell (2010, p. 209) afirma que "o processo de pesquisa dos pesquisadores qualitativos é emergente". Para ele, após a coleta de dados pelo pesquisador, é possível que as questões norteadoras mudem, bem como a forma de coleta de dados ou dos próprios indivíduos estudados. A proposição inicial desta pesquisa seria o desenvolvimento de tarefas exploratórias sobre conteúdos matemáticos condizentes com o

nível de 6º ano do Ensino Fundamental em sala de aula. No entanto, com a pandemia da COVID-19, precisamos nos adaptar à nova realidade e as tarefas, que seriam planejadas objetivando que os alunos utilizassem as TD disponíveis na escola, foram adequadas ao ERE e cada aluno participante utilizou seu próprio dispositivo;

- *Lente teórica*: é o alicerce da investigação. Nesta pesquisa, constituímos uma lente teórica consistente, no sentido de esclarecer nossas compreensões sobre Frações, sobre o EEM no ERE, e sobre a Gênese Instrumental (GI) como implicadores das aprendizagens dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos do objeto da pesquisa, ao articular o EEM e TD no ERE; e
- *Interpretativo*: "os pesquisadores fazem uma interpretação do que enxergam, ouvem e entendem" (CRESWELL, 2010, p. 209). Ao interpretar os dados coletados, carregam suas perspectivas e experiências.

Opção pela Dissertação Multipaper e Apresentação da Estrutura do Trabalho

Duke e Beck (1999) e Boote e Beile (2005) denominam o modelo alternativo de organização de dissertações e teses *multipaper* como um documento organizado na forma de vários artigos científicos. Por tanto, esta introdução estendida faz parte do modelo de dissertação adotado.

Segundo Duke e Beck (1999), os autores de teses e dissertações escritas no modelo tradicional precisam reescrevê-las na forma de livros e/ou artigos para que um número maior de leitores tenha acesso ao resultado dos seus estudos. Relatam, também, que esse problema é agravado quando o público é formado por profissionais que têm pouco tempo para pesquisar ou estudar sobre sua prática. É neste sentido que nossa opção pelo modelo *multipaper* se fundamenta, pois nosso público são os professores que têm pouco tempo para estudo.

O desafio de organizar o estudo no formato *multipaper* está em "delinear objetivos ou questões específicas que sustentem artigos consistentes, que guardem relação com o objetivo geral e evidenciem claramente suas contribuições para o objetivo geral do estudo [...]" (ESTEVAM, 2015, p. 173). Apesar de cada artigo ter suas particularidades e objetivos, todos se relacionam ao objeto de estudo com vistas a responder à questão norteadora da pesquisa. Dessa forma, é possível que alguns elementos apareçam em um ou mais artigos, pois partimos do princípio de que o leitor não necessariamente lerá toda a coleção desenvolvida.

Assim, a dissertação está organizada em quatro capítulos/artigos, como explicitamos a seguir.

Quadro 2 – Artigos, objetivos, métodos e contexto

ARTIGO	OBJETIVO	MÉTODO	CONTEXTO
Capítulo 1- *O planejamento de aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática desenvolvidas no contexto do Ensino Remoto de Emergência*[1]	Discutir o planejamento de aulas assentes no EEM no contexto do ERE.	Qualitativo e interpretativo, parte da adaptação e ampliação do quadro de *ações intencionais do professor na prática* de EEM estruturado por Oliveira, Menezes, Canavarro (2013), subsidiadas pela prática docente das autoras no ensino presencial e no ERE.	Planejamento de aulas assentes no EEM a serem realizadas no contexto do ERE, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que têm entre 10 e 11 anos de idade, precisam de orientação quanto aos estudos, e auxílio, até mesmo com os artefatos tecnológicos.
Capítulo 2 - *Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem*[2]	Refletir sobre o ensino e a aprendizagem de frações a partir da problematização das múltiplas interpretações que envolvem esse objeto matemático,em uma perspectiva histórica e epistemológica.	Ensaio teórico que problematiza o ensino de frações subsidiado apenas na perspectiva parte-todo, e discute as diferentes interpretações, emaranhados de ideias e diferentes significados e interpretações que as frações podem assumir.	Ensaio teórico fundamentado em pesquisadores como Kieren (1976, 1980), Behr *et al.* (1983), Escolano (2007), Lamon (2012) e Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c; 2019d; 2020).
Capítulo 3 - *Frações: compreensões de alunos de 6º ano em práticas de ensino exploratório orientadas pela perspectiva da medição*	Investigar a compreensão, por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, sobre os números racionais como campo numérico diverso dos naturais, a partir de práticas pedagógicas remotas orientadas pelo Ensino Exploratório de Matemática (EEM), abordando as frações na perspectiva da medição.	Qualitativo de cunho interpretativo, pautado nos registros escritos dos alunos, gravações das reuniões e transcrições, em que se busca identificar elementos que revelem e evidenciem se e como os alunos compreendem as frações como medida.	Aulas remotas desenvolvidas com alunos de duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino do interior do Paraná, totalizando vinte e oito (28) reuniões realizadas via *Google Meet*, totalizando cerca de quarenta e uma (41) horas de gravação.
Capítulo 4 - *Applets na aprendizagem de frações: um olhar a partir da Gênese eInstrumental para o Ensino Remoto Emergencial*	Investigar as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática desenvolvidas no Ensino Remoto de Emergência.	Qualitativo de cunho interpretativo, subsidiado teórico-metodologicamente pela Gênese Instrumental que analisa o uso de *applets* pelos alunos em tarefas exploratórias, no contexto do ERE, no ensino e na aprendizagem de frações na perspectiva da medição.	Aulas remotas desenvolvidas com alunos de duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino do interior do Paraná, totalizando vinte e oito (28) reuniões realizadas via *Google Meet*, totalizando cerca de quarenta e uma (41) horas de gravação.

[1] Artigo publicado em 16/03/2021 na Revista Educação Matemática Debate, disponível em https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/3774.

[2] Artigo publicado em 07/07/2021 na Revista de História da Educação Matemática, disponível em http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/388.

Fonte: As autoras (2020).

Desta forma, os dilemas e possibilidades emergentes deste trabalho serão debatidos ao longo dos artigos em que buscamos articular o planejamento das aulas assentes no EEM (artigo 1) ao estudo das múltiplas interpretações das frações (artigo 2) com as questões relacionadas a compreensão por alunos do 6ºAno do Ensino Fundamental sobre frações como medida, a partir das aulas e tarefas desenvolvidas (artigo 3) e a influência papel dos *applets* nessa compreensão (artigo 4).

Finalizamos nossa dissertação com a conclusão geral do trabalho, de forma que a questão norteadora da pesquisa seja respondida.

REFERÊNCIAS

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais do VII Sipem**. SBEM, v. VII. p. 1-12, 2018.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A., **Rational Numbers Concepts** in Acquisition of Mathematics Concepts and Process, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Editora UFPR, Curitiba, n. especial 1/2011, p. 157-171, 2011.

BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars Before Researchers: on the centrality of the dissertation literature review in research preparation. **Educational Researcher**, v. 34, n. 6, p. 3-15, aug./sep., 2005.

BRASIL. Lei n. 14.040, de 18 de agosto de 2020. Estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020; e altera a Lei nº 11.947, de 16 de junho de 2009. **Diário Oficial da União**, Brasília, v. 158, n. 159, 19 ago. 2020 (a), p. 4. Seção 1. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2019-2022/2020/lei/L14040.htm. Acesso em: 19 out. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de fevereiro de 2020.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

CEALE. Glossário Ceale: **Termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores**. Belo Horizonte, 2014. ISBN 978-85-8007-079-8. Disponível em http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale; acesso em 8 set. 2020.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DRIJVERS. P.; KIERAN, C.; MARIOTTI, M.-A.; AINLEY, J.; ANDRESEN, M.; CHAN, Y. C.; DANA-PICARD, T.; GUEUDET, G.; KIDRON, I.; LEUNG, A.; MEAGHERET, M. Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, LAGRANGE, J.B.C. Internacional Comission on Mathematical Instruction. Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain - **The 17th ICMI Study**. Springer: New York, 89-133, 2010.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza del Número Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESTEVAM, E. J. G. **Práticas de uma Comunidade de Professores que ensinam Matemática e o Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística**. 192f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

MARINS, A. S. **Conhecimentos Profissionais mobilizados/ desenvolvidos por participantes do PIBID em práticas de Ensino Exploratório de Matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

NRICH. University of Cambridge. **Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning**. Disponível em: https://nrich.maths.org/. Acesso em: 12 mar 2020.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013.

PARANÁ. Decreto nº 4.320, de 23 de março de 2020. Altera dispositivos do Decreto nº 4.312, de 20 de março de 2020 e do Decreto nº 4.230, de 16 de março de 2020a. **Diário Oficial do Estado**, Curitiba, v. 107, n. 10.653, 23 mar. 2020b. Disponível em:

s://www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=233069&indice=1&totalRegistros=1&dt=26.2.2020.15.45.8.639. Acesso em: 24 mar. 2020.

PARANÁ. Decreto nº 4.258, de 17 de março de 2020. Altera dispositivos do Decreto nº 4.230, de 16 de março de 2020b, que dispõe sobre as medidas para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional decorrente do SARS COV 2 - COVID-19. **Diário Oficial do Estado**, Curitiba, v. 107, n. 10.647, 17 mar. 2020, p. 14. Disponível em: www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=232889&indice=1&totalRegistros=1&dt=26.2.2020.15.12.57.794. Acesso em: 18 out. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Do Paraná**: Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669. Acesso em: 10 fev. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba, PR: SEED/PR, 2019. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669. Acesso em: 10 fev. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 1.016/2020** – GS/SEED de 03 de abril de 2020c. Disponível em: http://www.fiepr.org.br/assuntosLegislativos/uploadAddress/Resolucao-n-1.016.2020--GS.SEED%5B91882%5D.pdf

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 1.249/2020** – GS/SEED de 20 de abril de 2020d. Disponível em: www.fiepr.org.br/assuntosLegislativos/uploadAddress/Resolucao-n-1.249.2020--GS.SEED%5B92288%5D.pdf. Acesso em: 10 out. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 3.817/2020** – GS/SEED de 25 de setembro de 2020e, altera a Resolução nº 1.522 – GS/SEED, de 7 de maio de 2020, para regulamentar a abrangência do sistema de aulas não presenciais.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. (Ed.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: IEUL, 2014.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM**: **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM**, Cascavel, PR, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019c.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**: une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RODRIGUES, R. V. R. **O contexto de formação a partir da exploração de um caso multimídia: aprendizagens de futuros professores de matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

VALENTE, G. S. C.; MORAES, E. B. de; SANCHEZ, M. C. O.; SOUZA, D. F. de; PACHECO, M. C. M. D. O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: Reflexões sobre a prática docente. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 9, p. e843998153, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i9.8153. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/8153. Acesso em: 01 dez. 2020.

VIEIRA PINTO, A. **O conceito de tecnologia**. Rio de Janeiro: Contraponto, v. 1, 2005.

1 O PLANEJAMENTO DE AULAS ASSENTES NO ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS NO CONTEXTO DO ENSINO REMOTO DE EMERGÊNCIA[1]

Vania Sara Doneda de Oliveira[2]
Maria Ivete Basniak[3]

Resumo: Este estudo discute o planejamento de aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM) no contexto do ensino remoto emergencial (ERE) para comprovar sua viabilidade e orientar professores no desenvolvimento de aulas nesta perspectiva de ensino. Realizaram-se adaptações e ampliações do quadro de ações intencionais do professor na prática de EEM estruturado por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013). Destacam-se, como diferenças entre o planejamento de aulas assentes no EEM no ensino presencial e no ERE: necessidade de plano alternativo para atender alunos que não consigam participar das reuniões síncronas; adequação de horários e quantidade das reuniões síncronas de acordo com a disponibilidade de acesso dos alunos; introdução da tarefa ser realizada com cada grupo separadamente; e o tempo despendido pelo professor na fase de realização da tarefa ser multiplicado pela quantidade de grupos. Conclui-se que é possível planejar e desenvolver aulas assentes no EEM no ERE utilizando os quadros reelaborados.

Palavras-chave: Planejamento. Ensino Exploratório de Matemática. Ensino Remoto de Emergência.

LESSON PLANNING BASED ON EXPLORATORY TEACHING OF MATHEMATICS DEVELOPED IN EMERGENCY REMOTE TEACHING

Abstract: This study discusses lesson planning based on Exploratory Teaching of Mathematics (EEM) in the emergency remote teaching (ERE) context to prove its feasibility, and guiding teachers in class development under this teaching perspective. Thereunto, adaptations and expansions of the teacher's framework of intentional actions were carried out in the practice of EMS as structured by Oliveira, Menezes and Canavarro (2013). As differences highlighted between lesson planning based on EEM classroom teaching and ERE are: need for alternative plan for students who may not participate in synchronous meetings; adequacy of schedules and number of synchronous meetings according to the students' access availability; introduction of the task carried out with each group separately; and the time spent by the teacher in the carrying out the task stage which is multiplied by the number of groups. The conclusion shows the possible planning and develop classes based on EEM at ERE using reworked tables.

Keywords: Planning. Exploratory Teaching of Mathematics. Emergency Remote Teaching.

---

[1] Artigo publicado em 16/03/2021 na Revista Educação Matemática Debate, disponível em https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/3774.

[2] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br

[3] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

1.1 Introdução

Nas últimas décadas, observamos que a sociedade tem passado por mudanças nas áreas da Tecnologia, Comunicação, Economia e Finanças, fazendo emergir novos paradigmas, sistemas de pensamento, valores e modelos de comportamento (D'AMBROSIO, 2005). Isto foi intensificado em 2020, um ano totalmente atípico devido à pandemia da COVID-19 causada pelo novo coronavírus − Sars-Cov-2. Nesse ano, a Tecnologia, mais especificamente as Tecnologias Digitais (TD)[1] utilizadas para informação e comunicação, mostrou-se de extrema importância, na área da Saúde, Educação, Comércio, Comunicação e Informação, Entretenimento, entre outras. Bilhões de pessoas em isolamento precisaram se adaptar à quarentena imposta pelos governos no intuito de desacelerar a propagação do vírus, o que modificou o regime de trabalho para o teletrabalho, aulas presenciais para aulas remotas, encontros presenciais para videochamadas e comunicadores instantâneos. A consequência disso foi que o mundo está mais conectado à internet e ao uso de algum tipo de recurso tecnológico para as demandas de trabalho, educação, socialização e informação.

No âmbito educacional, a pandemia e a consequente necessidade de isolamento social fizeram com que estados e municípios brasileiros, sem grandes planejamentos e de maneira abrupta, precisassem implantar o *ensino remoto de emergência* (ERE). Cabe ressaltar que o ERE não se trata de ensino a distância, mas de um ajuste temporário do currículo escolar − de todos os níveis de ensino − para que as aulas não fossem suspensas e, consequentemente, o ano escolar não fosse perdido em termos de progressão escolar (VALENTE *et al*., 2020). Entretanto, isto "gerou a obrigatoriedade dos professores e estudantes migrarem para a realidade online, transferindo e transpondo metodologias e práticas pedagógicas típicas dos territórios físicos de aprendizagem, naquilo que tem sido designado por ensino remoto de emergência" (MOREIRA, HENRIQUES; BARROS, 2020, p. 352). Embora as TD sejam imprescindíveis neste momento e estejam sendo mais utilizadas, não significa que seu uso esteja modificando a metodologia de ensino, ou seja, superando a lógica do ensino tradicional ou direto, como salientam Moreira, Henriques e Barros (2020).

> E na realidade, essa foi uma fase importante de transição em que os professores se transformaram em *youtubers* gravando videoaulas e aprenderam a utilizar sistemas de videoconferência, como o *Skype*, o *Google Hangout* ou o *Zoom* e plataformas de

[1] Admitimos *Tecnologia Digital* − TD como "um conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1)" (CEALE, 2014, s.p.). Assim, neste trabalho, adotamos o termo TD para nos referirmos aos artefatos que utilizam tecnologia digital em seu processo de desenvolvimento, como computador, *tablet*, celular, internet, *software*s, objetos de aprendizagem e *Applets.*

> aprendizagem, como o *Moodle*, o *Microsoft Teams* ou o *Google Classroom*. No entanto, na maioria dos casos, estas tecnologias foram e estão sendo utilizadas numa perspectiva meramente instrumental, reduzindo as metodologias e as práticas a um ensino apenas transmissivo. É, pois, urgente e necessário transitar deste ensino remoto de emergência, importante numa primeira fase, para uma educação digital em rede de qualidade (MOREIRA; HENRIQUES; BARROS, 2020, p. 352).

Sabemos de nossa prática, que apesar das inúmeras mudanças ocorridas no âmbito social e nas formas de comunicação, nem todas as escolas dispõem de recursos tecnológicos, como projetor multimídia, internet e laboratórios de informática, por exemplo. Entretanto, mesmo naquelas escolas que dispõem desses recursos tecnológicos, o ensino tradicional que prevalecia há três décadas (D'AMBROSIO, 1989; BRASIL, 1998) ainda tem predominado atualmente (CEOLIM; CALDEIRA, 2017).

Ponte (2005) chama esse ensino tradicional de ensino direto, centrado no professor, em que o processo de comunicação consiste na transmissão de informações pelo professor aos alunos. Neste modelo de aula, o professor expõe o conteúdo oralmente, e depois apresenta exercícios de aprendizagem e fixação, pressupondo que os alunos aprendem por reprodução, sendo capazes de mobilizar conceitos e técnicas que já foram explicados (BRASIL, 1998; CEOLIM; CALDEIRA, 2017; D'AMBROSIO, 1989; PONTE, 2005). Em outras palavras, o professor fala, os alunos escutam (SIERPINSKA, 1998) e depois reproduzem.

Ponte (2005) sublinha que esse modelo, em que a comunicação é usada como transferência de conhecimento do professor para o aluno, é ineficiente em termos de resultados de aprendizagem. Powell e Bairral (2014, p. 61) afirmam que "aprendemos por meio de reflexões sobre nossa experiência" e que em aulas tradicionais "encontramos poucas situações que solicitam que os alunos reflitam sobre a matemática que vão aprender, sobre o que pensam dessa área ou sobre eles próprios em relação à disciplina". Nesse sentido, Ponte (2005, 2014), Canavarro (2011), Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), Oliveira e Cyrino (2013), Cyrino e Oliveira (2016), Cyrino e Teixeira (2016) e Estevam e Basniak (2019) apontam a perspectiva do *ensino exploratório de Matemática* (EEM) como uma abordagem inovadora de ensino e de aprendizagem que se contrapõe ao ensino tradicional. Isto porque o EEM possibilita que o professor conduza suas aulas em uma perspectiva diferente do ensino tradicional ou direto, oportunizando aos alunos conhecer e fazer Matemática com significado, além de desenvolver competências, como resolução de problemas, raciocínio e comunicação (CANAVARRO, 2011).

Por isso, acreditamos que o EEM é uma possibilidade de metodologia promissora também no ERE. Assim, desafiamo-nos e nos debruçamos a planejar e a desenvolver aulas assentes no EEM no contexto do ERE utilizando a TD como meio e como processo de ensino e de aprendizagem. Portanto, nosso objetivo neste trabalho é discutir o planejamento de aulas assentes no *ensino exploratório de Matemática* (EEM) no contexto do *ensino remoto emergencial* (ERE) para comprovar sua viabilidade e orientar professores no desenvolvimento de aulas nesta perspectiva de ensino. Para isso, adaptamos e consequentemente ampliamos o quadro de *ações intencionais do professor na prática* de EEM, conforme estruturado por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), incluindo a utilização das TD.

Essas adaptações e ampliações subsidiam o papel do professor para a organização da aula no contexto do ERE, promoção da aprendizagem matemática, e gestão da aula e daquilo que se espera dos alunos. Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 31) sublinham que “o ensino exploratório constitui uma prática complexa para a maioria dos professores de Matemática, em particular a dinamização e gestão das discussões matemáticas coletivas”. Dessa forma, o EEM é um modelo de ensino exigente para os professores, que demanda estudo, planejamento, organização, reflexão e capacidade de mudanças de atitudes, tanto de professores quanto de alunos. Na seção que segue, buscamos elucidar melhor alguns desses aspectos do EEM.

1.2 A Perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática

A UNESCO (2016), por meio do grupo internacional de especialistas em políticas de ensino de Ciências e Matemática, considera que uma Educação Matemática de qualidade deve refletir a diversidade das múltiplas facetas da atividade humana, de modo que os alunos consigam resolver problemas; modelar; explorar; levantar conjecturas; experimentar, representar e formular; desenvolver linguagens específicas; argumentar e provar; elaborar conceitos e relacionar esses conceitos; e trocar e comunicar. Além disso, deve propiciar ao aluno uma vivência matemática de forma individual e coletiva, por meio do debate com o outro, progredindo na aprendizagem dos conteúdos matemáticos conforme avançam etapas do desenvolvimento cognitivo.

Os especialistas da UNESCO (2016) ainda sublinham que uma Educação Matemática de qualidade deve ser desafiante e cultivar o valor da solidariedade; estabelecem que a escola “deve estar sintonizada com as práticas matemáticas científicas e sociais fora da escola, bem como saber principalmente se apoiar de forma adequada nos meios tecnológicos que instrumentalizam essas práticas” (UNESCO, 2016, p. 5). Tais aportes vêm ao encontro da perspectiva do EEM e do uso das TD em sala de aula para o ensino de Matemática.

Ponte (2014, p. 14) destaca que “as tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende”. É necessário considerar o que o aluno já sabe para desafiá-lo, trazendo à tona criatividade e gosto pelo trabalho mental. Canavarro (2011, p. 11) ressalta que

> o Ensino Exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

É muito comum, no vocabulário dos professores de Matemática, o termo *atividade*. Entretanto, atividade e tarefa não têm o mesmo significado, apesar de interligadas. Ponte (2005) e Christiansen e Walther (1986) destacam que a definição de atividade é oriunda da *Teoria da Atividade,* concebida por educadores e psicólogos soviéticos, como Piotr Yakovlevich Galperin, Lev Vygotsky e Alexis Leont’ev. Assim, uma atividade

> diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele) (PONTE, 2014, p. 15).

Portanto, “quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade” (PONTE, 2005, p. 1). Christiansen e Walther (1986) destacam que Leont’ev denominou *operação* o processo pelo qual uma ação é realizada. Dessa forma, qualquer ação tem dois aspectos: o intencional (“O que deve ser obtido?”) e o operacional (“Como é que isto pode ser obtido?”). Para Leont’ev, *apud* Christiansen e Walther (1986, p. 18), “as ações são determinadas pelos objetivos, as operações pelas condições”. Assim, podemos afirmar que a atividade do aluno é voltada para a realização de tarefas que são intencionais e premeditadas pelo professor (PONTE; CHAPMAN, 2006). Ao pensar nas tarefas a serem desenvolvidas pelos alunos na perspectiva do EEM, o professor deve ter ciência dos conhecimentos prévios deles, e considerar que essas tarefas devem

> ser um desafio e basear-se em uma situação concreta; possibilitar aos alunos a confiança em sua experiência quando resolvê-las e, portanto, fazer uso de várias estratégias com diferentes níveis de sofisticação matemática. Elas devem ser ancoradas no currículo e ser destinadas a uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos que têm uma forte ligação com o conhecimento que os alunos constroem durante as aulas (OLIVEIRA; CYRINO, 2013, p. 218).

É importante destacar que a perspectiva do EEM "não advoga que os alunos descobrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes" (CANAVARRO, 2011, p. 11). Assim, a aprendizagem dos alunos na metodologia do EEM ocorre em um processo concomitantemente individual e coletivo, resultante da interação que ocorre entre alunos, alunos e professor, e com o conhecimento matemático por meio de situações de aprendizagens (BISHOP; GOFFREE, 1986; CANAVARRO, 2011; PONTE, 2005; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013).

Apesar de podermos afirmar que, no ensino e na aprendizagem da Matemática na perspectiva do EEM, "as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais" (PONTE, 2014, p. 16), apenas a elaboração ou escolha de boas tarefas não caracteriza o ensino e a aprendizagem na perspectiva do EEM (CYRINO; TEIXEIRA, 2016).

Segundo Menezes, Oliveira e Canavarro (2013, p. 5796), o EEM é um tema "insuficientemente compreendido pela investigação em Educação Matemática e, consequentemente, pouco conhecido pelos professores". Também salientamos que, para que essa perspectiva tenha sucesso, o professor precisa estar atento à condução e gestão da aula, com vistas à promoção da aprendizagem matemática, trazendo à tona as dimensões fundamentais[1] do EEM: o *inquiry*, que são as ações intencionais que provocam a interação entre o que é e o que não é conhecido; a reflexão, ato de pensar e repensar, validando ou não as conjecturas iniciais e formulando novas ideias; a comunicação, que se apoia na interação social para expressar ideias, compartilhar e produzir conhecimento matemático; e a colaboração, que articula as demais dimensões, permitindo o desenvolvimento individual e coletivo dos alunos (DEWEY, 1938; SIERPINSKA, 1998; BISHOP; GOFFREE, 1986; MENEZES; OLIVEIRA; CANAVARRO, 2013; BASNIAK; ESTEVAM, 2018; 2019). Isso significa que o papel do professor é ativo, mas de natureza diversa do ensino dito tradicional ou direto, pois cabem a ele as escolhas criteriosas das tarefas, as atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula (PONTE, 2005; MENEZES; OLIVEIRA; CANAVARRO, 2013).

Assim, no EEM, o professor precisa planejar e organizar situações de aprendizagem para os alunos com tarefas que sejam desafiantes e devidamente sequenciadas, que promovam a construção dos conceitos, o entendimento dos procedimentos matemáticos, o (re)conhecimento de formas de representações, a resolução de problemas e o raciocínio matemático, além da comunicação oral e escrita dos alunos (PONTE, 2014).

Neste contexto, observamos a complexidade do papel do professor no EEM, pois é

[1] As dimensões do EEM são discutidas no trabalho de Estevam e Basniak (2019).

preciso destacar que esse papel é fundamental, desde a elaboração ou escolha da tarefa, perpassando o planejamento do desenvolvimento da aula assente no EEM, norteando os conhecimentos matemáticos dos alunos. Pesquisadores relatam que essa abordagem de ensino é uma perspectiva mais ampla de um ensino que tem como base a inquirição, o *inquiry-based teaching* (OLIVEIRA; CYRINO, 2013; CYRINO; OLIVEIRA, 2016; ESTEVAM; BASNIAK, 2019). Os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases, as quais Cyrino e Teixeira (2016) admitem que são quatro, conforme apresentamos a seguir.

1.2.1 Organização de uma Aula na Perspectiva do EEM

Uma aula assente no EEM pode ser organizada em fases, que Cyrino e Teixeira (2016) admitem serem quatro, sendo elas:

i) *Introdução da tarefa*: é o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, e o que acontecerá em cada fase seguinte. Além disso, o professor estabelecerá o tempo de realização para cada uma das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro e como serão avaliados. Nesta fase, o professor faz a leitura da tarefa com os alunos, esclarecendo interpretações e/ou dúvidas, de forma que os alunos compreendam claramente aquilo que precisam fazer e se apropriem da tarefa, estabelecendo objetivos, e procurando engajar os alunos para a resolução da tarefa.

ii) *Realização da tarefa*: nesta fase, os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que esta fase seja bem-sucedida, de forma que o professor consiga explorar ao máximo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas e ela não perca seu nível cognitivo, é indispensável que o professor se prepare antes, o que envolve antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos e estratégias de resoluções dos alunos, para que ele não valide ou refute ideias.

Neste sentido, para auxiliar o professor, Cyrino e Teixeira (2016) e Canavarro (2011) sugerem a elaboração de um quadro de antecipação/orientação para cada item da tarefa, com ações esperadas dos alunos e reação do professor para subsidiar a resolução da tarefa. Em sala, o professor usará o quadro de antecipação/orientação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas. Isto porque em nenhum momento o professor pode validar ou refutar ideias, mas deve fomentar reflexões sobre as conjecturas elaboradas, entender como os alunos estão pensando, incentivar a experimentação, viabilizar o debate, encorajar a arguição e registros das conclusões, instigando os alunos a (re)elaborarem ou validarem suas estratégias por meio da troca entre os pares.

Além disso, o professor deve anotar dúvidas gerais dos alunos, observações que achar pertinentes para nortear tanto as próximas fases dessa aula quanto as próximas aulas. Afinal, o conhecimento profissional do professor é desenvolvido por um constante repensar − reflexão antes da ação, durante a ação e após a ação (SERRAZINA, 2012).

Ao término dessa fase, o professor precisa selecionar e sequenciar os grupos para apresentação e discussão coletiva das resoluções da tarefa com a turma toda. Esta é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa, além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecer conexões entre as apresentações, visando a discussões valiosas para o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Mesmo prevendo possíveis resoluções e ideias por meio do quadro de antecipação/orientação, não há garantias de que os alunos alcancem os objetivos da tarefa, bem como é possível que outras estratégias não previstas pelo professor sejam elaboradas. Eis onde está a importância de estabelecer uma ordem dessas resoluções e estratégias para que a próxima fase faça sentido, tendo em mente que não são apenas as ideias e resoluções corretas que devem ser elencadas, mas aquelas que contribuem para que as negociações de significados das relações matemáticas aconteçam. Para que o professor tenha mais tempo na organização, seleção e sequenciamento das apresentações, é possível que ele planeje a aula para que a apresentação e a *discussão coletiva da tarefa* aconteçam em outro dia.

iii) *Discussão coletiva da tarefa*: nesse momento o intuito é que toda a turma compreenda conjecturas, explicações, estratégias de resolução, sejam elas corretas ou não, para que, na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas. É importante ressaltar que a apresentação dos grupos não é para o professor, e sim para a turma, e o papel do professor é de mediar discussões, criar conexões entre os grupos que farão a explanação de suas estratégias, incentivar e valorizar as diferentes ideias e relações matemáticas estabelecidas, para que todos possam entender as diferentes formas de resolução. Assim, o professor percebe que “a matemática não é um corpo de conhecimentos rígidos, mas, ao contrário, é uma ciência viva em plena expansão”

(UNESCO, 2016, p. 10). Além disso, ele precisa assegurar o respeito e a colaboração entre os alunos. O papel do professor é o de mediador e facilitador dessas negociações de significados dos alunos, incentivando-os a refletir sobre as resoluções das tarefas propostas (WHEATLEY, 1992; MENEZES, OLIVEIRA, CANAVARRO, 2013).

iv) *Sistematização das aprendizagens matemáticas*: pode ocorrer paralelamente à fase anterior ou após a *discussão coletiva da tarefa*, para que sejam consideradas e até retomadas as apresentações, equívocos e acertos dos alunos. Nesta fase, o papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens para que os alunos consigam reconhecer os conhecimentos matemáticos envolvidos por meio de conceitos, definições, propriedades, generalizações, regras, conectando conhecimentos novos com os anteriores, verificando diferentes estratégias de resolução da tarefa e raciocínio matemático por meio da dimensão colaboração.

O professor pode retomar as resoluções, destacar definições, ideias, conceitos que surgiram durante as discussões da tarefa e, em conjunto com a turma, pode apresentar novas estratégias de resolução para que os objetivos da tarefa sejam alcançados, e a tarefa proposta faça sentido. Além disso, ainda, pode ser usada como novos subsídios para resolução de tarefas futuras e outros contextos matemáticos, favorecendo o reconhecimento da importância de regras ou generalizações.

Não basta sintetizar ideias, mas sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações (CANAVARRO, 2011; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013; CYRINO; TEIXEIRA, 2016).

Ao planejar uma aula assente no EEM, primeiro o professor precisa compreender que se trata de uma perspectiva de ensino centrada no aluno, e que o professor tem papel fundamental, mas de natureza diferente do ensino tradicional. O professor precisa conhecer todas as fases da aula para conseguir interligá-las por meio de tarefas de natureza exploratória e, para isso, a ação de antecipar é basilar, e está estreitamente relacionada ao planejar.

1.3 Contexto e Pressupostos Metodológicos

Como citado anteriormente, o planejamento das aulas ocorreu no decorrer do ano de

2020, motivado pela suspensão das aulas presenciais e pelo ensino remoto. Dessa forma, uma das primeiras questões que nos colocamos foi se seria possível desenvolver aulas assentes no EEM no ERE de forma síncrona, e quais seriam os encaminhamentos que teríamos que adaptar para que isso fosse viável. Portanto, trata-se de um estudo qualitativo e de cunho interpretativo (CRESWELL, 2010), visto que objetiva discutir o planejamento de aulas assentes no EEM no contexto do ERE comprovando sua viabilidade a partir da prática da primeira autora. O ERE implica práticas de EEM porque é necessário considerar a disponibilidade de recursos tecnológicos que viabilizarão as aulas bem como a organização dos grupos de alunos.

Para essas adaptações, utilizamos como suporte o quadro *Ações intencionais do professor na prática de EEM*, de Oliveira, Menezes, Canavarro (2013), o qual ampliamos e complementamos, antecipando ações do professor ancoradas na prática profissional da primeira autora. Tais práticas apoiam-se nos dezesseis anos de experiência docente no ensino de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, e de sua experiência com o ensino remoto nos seis primeiros meses da suspensão das aulas presenciais durante a pandemia.

As aulas foram planejadas especificamente para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que têm entre 10 e 11 anos de idade, precisam de orientação quanto aos estudos, e auxílio, até mesmo com os artefatos tecnológicos. Portanto, buscamos estruturar quadros que considerassem, inclusive, essas necessidades. De certa forma, com alguns meses de experiência da primeira autora como professora de Matemática no ERE, a realidade dos alunos ficou mais clara, quanto ao acesso a artefatos, o tipo de conexão com a internet, e como eram ou não acompanhados pela família em relação aos estudos. Mesmo assim, fizemos um formulário para que informassem que tipo de aparelho dispunham para assistir às aulas, o tipo de conexão com a internet, e horários possíveis para reuniões síncronas do grupo. Alguns alunos não possuem internet de qualidade, e compartilham o celular/notebook com a família (irmãos, pais), só tendo acesso ao equipamento quando os pais chegam do trabalho. Portanto, a primeira questão a ser considerada é que, no ERE, as aulas síncronas nem sempre podem ocorrer no horário das aulas no ensino presencial. Por isso, ao levantar a disponibilidade dos alunos, propusemos várias opções de horários, inclusive depois das 18h, para as reuniões dos grupos.

Com o intuito de nos prepararmos para resolver esses possíveis problemas, de articular as TD às diferentes fases do desenvolvimento da aula assente no EEM, e de nortear o trabalho do professor no ERE, incorporamos ao quadro elementos da TD nas dinâmicas da aula, seja como meio para organização e desenvolvimento da aula (*WhatsApp*, *Google Meet*, *Google*

Drive[1]), ou como meio de ensino e de aprendizagem (*applets*, *GeoGebra*), e as ações esperadas dos alunos no decurso da aula para cada fase do EEM, de forma remota e síncrona. Entretanto, no nosso caso, realizamos em um mesmo encontro as fases da *introdução da tarefa* e *realização da tarefa*; e em outro, as fases de *discussão coletiva da tarefa* e *sistematização das aprendizagens matemáticas*. É importante relembrar que, antes mesmo da pandemia que assolou o mundo em 2020, já estávamos planejando as aulas assentes no EEM utilizando as TD como processo de ensino e de aprendizagem em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. Por isso, os quadros foram planejados antes da pandemia para o ensino presencial, e depois revistos e utilizados por nós no desenvolvimento de seis aulas no contexto do ERE.

1.4 O Planejamento de uma Aula Assente na Perspectiva do EEM durante o ERE

Antes de desenvolver uma aula na perspectiva do EEM, é necessário que o professor planeje e replaneje sua aula, sendo a antecipação uma das etapas mais importantes da prática do professor (STEIN *et al.*, 2008; CANAVARRO, 2011; CYRINO; TEIXEIRA, 2016). Cyrino e Teixeira (2016, p. 86) trazem um *Framework* sobre a ação de antecipar do professor, com os seguintes elementos:

> • Estabelecer os objetivos específicos da aula.
> • Escolher/adaptar/elaborar a(s) tarefa(s), considerando:
>   • os objetivos da aula;
>   • a natureza da tarefa, priorizando aquelas de elevado nível de demanda cognitiva;
>   • os conhecimentos prévios dos alunos;
>   • os recursos disponíveis na escola.
> • Resolver a(s) tarefa(s).
> • Prever possíveis resoluções, dúvidas e erros dos alunos.
> • Pensar em possíveis questionamentos, orientações ou outros recursos que podem ser sugeridos aos alunos, cuidando para manter o nível de demanda cognitiva.
> • Estabelecer conexões entre:
>   • as resoluções previstas;
>   • as resoluções previstas e os conhecimentos matemáticos a serem desenvolvidos em sala de aula.

[1] *G-Suite for Education* é um pacote de produtos do *Google* para escolas, que oferece editor de texto (*Google* Documentos), apresentação de slides (*Google* Apresentações), planilhas de texto (*Google* Planilhas), armazenamento na nuvem (*Google* Drive) e *Jamboard*. Também disponibiliza o *Google Meet,* que é um serviço de comunicação por videoconferência gratuito para até 250 pessoas, que pode ser utilizado no navegador de internet, ou instalando o aplicativo para dispositivos móveis. É possível compartilhar a tela do dispositivo do usuário, apresentando documentos, imagens e qualquer outro tipo de arquivo. Essas reuniões podem ser compartilhadas por *link* para que os participantes acessem, e podem ser gravadas e posteriormente compartilhadas para que sejam revistas ou visualizadas por quem não participou. *WhatsApp* é um comunicador instantâneo gratuito que utiliza conexão do celular com a internet (*wi-fi* ou dados móveis). É possível realizar troca de mensagens e ligações, compartilhar imagens, fotos, documentos, vídeos, contatos, áudio, entre outros arquivos.

Então, após decidirmos que trabalharíamos com turmas de 6º ano do Ensino Fundamental e que utilizaríamos TD como processo de ensino e de aprendizagem, elaboramos os objetivos específicos de cada aula/tarefa, as tarefas, os quadros de antecipação/orientação para cada tarefa e os planos de aulas. Seguimos todas as ações previstas por Cyrino e Teixeira (2016). Tivemos muito trabalho nas tentativas de estruturar as tarefas, os quadros de antecipação/orientação e os planos de aula, já que, nesse momento da pesquisa, o contexto mudou, e o ERE tornou-se a realidade. Assim, os quadros de antecipação/orientação com as ações dos alunos e professor, as sistematizações das aprendizagens matemáticas do conteúdo e as tarefas que integram os planos de ensino foram discutidos e validados pelos integrantes do *Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística* – GEPTEMatE. Apesar das dificuldades e do trabalho que tivemos, acreditamos, sem dúvida alguma, que o sucesso ou não do desenvolvimento da aula pautada no EEM depende dessa etapa de antecipar. Isto porque,

> ao antecipar, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática (CANAVARRO, 2011, p. 13).

Portanto, ao antecipar, o professor se coloca em dois papéis distintos, o de professor desenvolvendo uma aula assente no EEM − com mudanças extremas de comportamento e atitudes); e o de aluno − resolvendo as tarefas, verificando possíveis equívocos, levantando ideias, experiências. Essa empatia permite que o professor reflita e “considere também as características dos alunos, o modo como eles se envolvem com as tarefas que são propostas, e os seus conhecimentos prévios, para que se possa prever intervenções a serem realizadas para auxiliá-los no processo de compreensão e resolução” (CYRINO; TEIXEIRA, 2016).

Serrazina (2012, p. 273) afirma que, para o professor ensinar Matemática, deve: “(i) ter presente o currículo de Matemática que tem de ensinar; (ii) identificar a matemática essencial e pertinente para trabalhar com os seus alunos naquele momento; e (iii) exigir rigor matemático, no quê e no como”. Para isso, o planejamento é essencial, e “o professor deve ter em mente a relação entre como é o pensamento e a aprendizagem do aluno quando se envolve na realização de uma dada tarefa e a meta de aprendizagem definida” (SERRAZINA, 2012, p. 274). A *comunicação* e os *ambientes e recursos digitais* são essenciais na organização para aula no contexto do ERE.

Quanto à *comunicação*:

- Optamos por formar grupos de *WhatsApp* antes mesmo da pandemia. Esse é um hábito da professora no início do ano letivo com todas as suas turmas. Entretanto, quando o ERE iniciou, a professora optou por incluir os pais dos alunos dos 6º anos no grupo para esclarecer dúvidas e compartilhar informações sobre a nova realidade;
- Planejamos que os grupos de alunos teriam entre três e seis integrantes. Por isso, antes de formar os grupos, criamos um formulário no *Google Formulários*, que consistia em verificar a disponibilidade de dias e horários, tipo de internet (3G, *wi-fi*) e artefato disponível (celular, *tablet*, computador com caixa de som e microfone, *notebook*).
- Para cada um dos grupos formados, criamos um grupo de *WhatsApp* para repasse de informações, como lembrar os alunos do encontro um dia antes, alertá-los para carregar o celular/*tablet* etc.; ou seja, quanto às questões de organização.

Quanto ao *ambiente e recursos digitais*:

- Após verificar o tipo de internet (3G, *wi-fi*) e saber o tipo de artefato disponível, solicitamos que os alunos testassem os *applets* que seriam utilizados para resolução das tarefas, como o *Google Sala de Aula* e o *Google Meet*, os quais eram alguns dos meios que os alunos que participaram da pesquisa já estavam habituados, pois a professora já os utilizava com eles;
- Sugerimos que os alunos escolhessem o local da casa com menor possibilidade de interferência externa, pois já havíamos passado por situações em que o barulho da casa (TV, música, pessoas transitando) interferia nas reuniões.

Para facilitar a articulação entre as TD e o EEM no ERE, construímos quadros (Quadro 1 a 4) que orientam a organização e ação em cada fase de desenvolvimento das aulas síncronas, sendo planejados de acordo com nossa prática docente. Estruturamos um quadro para cada fase da aula: as três primeiras colunas de cada quadro referem-se às ações intencionais do professor, que compreendem a organização para aula no contexto do ERE, promoção da aprendizagem e gestão da aula; e a quarta coluna de cada quadro refere-se ao papel esperado dos alunos.

Especificamente para a fase de *introdução da tarefa*, na coluna *promoção da aprendizagem matemática* descrevemos orientações para auxiliar o professor a garantir a compreensão da tarefa pelos alunos, incentivando-os a resolvê-la. Na coluna *gestão da aula*, tratamos dos materiais sugeridos para o aluno, do tempo de cada fase e como elas serão desenvolvidas − o que se espera que façam em cada uma das fases seguintes, de como o grupo deve se comportar no sentido da colaboração, respeito com colegas e professora, troca de ideias e informações, além de como devem ser os registros da resolução da tarefa pelo grupo −

individual, uma única resolução, se deve ser no caderno ou documento compartilhado. Na última coluna explicitamos o que esperamos dos alunos na fase de *introdução da tarefa*.

Quadro 1.1 – Ações intencionais do professor na prática do EEM e o papel esperado dos alunos na fase Introdução da Tarefa

INTRODUÇÃO DA TAREFA (IT)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
Comunicação: - Formar grupos de mensagens instantâneas para organização da aula e comunicação; - Verificar disponibilidade de acesso simultâneo realizando uma consulta de disponibilidade; - Formar os grupos de acordo com a disponibilidade da consulta, definindo formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos); - Agendar o encontro não presencial dos grupos e confirmar presença (podendo ser agendamentos simultâneos, a critério do professor); - Lembrar os alunos sobre o encontro um dia antes e no dia da aula; - Lembrar os alunos de carregar os dispositivos móveis antecipadamente (celulares...). **Ambientes e recursos digitais:** - Verificar qual(is) artefato(s) os alunos têm disponível(is) para acessar (celular, *tablet*, computador, sistema operacional, tipo de internet); - Definir qual(is) meio(s) será(ão) utilizado(s) para o desenvolvimento da aula (ambiente/site/aplicativo); - Verificar a compatibilidade dos artefatos disponíveis com os meios que será(ão) utilizado(s): celular, *tablet*, computador, sistema operacional; solicitando que o aluno teste o acesso ao ambiente/site/aplicativo e comunique qualquer incompatibilidade ou problema; - Orientar para que escolham um	**Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:** - Familiarizar com o contexto da tarefa; - Verificar se os alunos interpretam adequadamente a tarefa (o que precisam fazer); - Estabelecer objetivos (o que se quer saber). **Promover a adesão dos alunos à tarefa**: - Estabelecer conexões com experiência anterior; - Desafiar para o trabalho. **Encorajar os alunos para o uso das TD como meio de acesso ao conhecimento matemático:** - Desafiar para o uso do artefato disponibilizado para resolução da tarefa.	**Organizar o trabalho dos alunos:** - Disponibilizar os materiais da aula (tarefa); O professor pode gravar vídeo com as seguintes informações, para evitar ter que repetir para cada grupo: a) Estipular tempo para o trabalho em cada uma das fases da aula; b) Informar quais artefatos serão necessários; c) Informar onde estão disponibilizados os materiais da aula (tarefa); d) Explicar como acessar e utilizar os materiais disponibilizados, caso os alunos não os conheçam (mesmo tendo solicitado verificação - instrumentação); e) Informar como serão realizados os registros da resolução da tarefa (apenas um integrante do grupo com tela compartilhada, todos os integrantes, digitado, escrita manual, *print* de telas, etc.); - Combinar como o grupo realizará a apresentação na fase de discussão da tarefa (enviar registros antecipadamente para que o professor compartilhe com os demais alunos ou o próprio grupo irá apresentar); - Ler a tarefa com os alunos e explicar termos desconhecidos e tirar	- Informar a disponibilidade de agenda e o(s) artefato(s)disponível(is) para participação da aula não presencial simultânea; - Realizar os testes de compatibilidade dos artefatos antecipadamente; - Acomodar-se em um ambiente silencioso da casa para que não interfira na comunicação e participação na aula; - Participar do encontro não presencial simultâneo; - Compreender como a aula e o tempo serão distribuídos; - Entender cada fase da aula, tendo claro o que deve ser feito em cada uma delas; - Anotar informações, caso necessário; - Entender o contexto da tarefa; - Sanar dúvidas e interpretações; - Compreender os objetivos estabelecidos; - Verificar quais materiais estão disponíveis para resolução da tarefa;

INTRODUÇÃO DA TAREFA (IT)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
ambiente silencioso da casa para que não interfira na comunicação e participação na aula.		dúvidas.	- Esclarecer sobre os artefatos disponíveis.

Fonte: Ampliado e complementado de Oliveira, Menezes, Canavarro (2013, p. 33).

Ao realizar a *introdução da tarefa* no desenvolvimento da pesquisa, corroboramos a importância da coluna de organização para aula, visto que alguns alunos relataram que haviam esquecido do encontro, ou ainda que esquecem de colocar o celular para carregar. Por isso, o envio dos lembretes no dia anterior ao encontro é necessário. Quanto à promoção da aprendizagem matemática, foi perceptível que os alunos participantes estavam empolgados, focados em iniciar a resolução da tarefa.

Embora a sugestão seja de fazer a *introdução da tarefa* e *realização da tarefa* na mesma reunião, optamos por repetir algumas orientações em relação à organização para a aula não presencial em todos os quadros.

No momento da *realização da tarefa*, o papel do professor quanto à *promoção da aprendizagem matemática* está em interagir com os alunos, utilizando o quadro de antecipação/orientação da tarefa, promovendo a interação entre alunos e alunos. O professor não dá respostas diretas, mas auxilia os grupos a resolverem a tarefa por meio de questionamentos e pistas, não validando ou refutando as respostas/ideias dos alunos. Na *gestão da aula*, previmos a ausência do professor na reunião para que os alunos desenvolvam o trabalho autônomo, sendo necessário combinar um meio de comunicação (*WhatsApp*, por exemplo), para que, caso os alunos precisem ou terminem a tarefa, chamem o professor. Durante o desenvolvimento do plano de ensino, observamos que isso foi importante para que os alunos se empenhassem na resolução da tarefa, expressassem suas ideias e ouvissem as ideias dos colegas, e negociassem significados matemáticos. A organização para a fase seguinte, de *discussão coletiva da tarefa*, acontece ainda nesta fase, quando o professor combina com os alunos como farão a apresentação da resolução da tarefa para os demais colegas. Em nossa pesquisa, orientamos os alunos a indicar qual(is) aluno(s) seria(m) o(s) responsável(is) pela explicação, quem compartilharia a tela, ou seja, como fariam a apresentação para os demais colegas.

Quadro 1.2 – Ações intencionais do professor na prática do EEM e o papel esperado dos alunos na fase Realização da Tarefa

REALIZAÇÃO DA TAREFA (RT)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
Encontro não presencial simultâneo: - Orientar como o aluno deve proceder caso a internet pare de funcionar ou tenha qualquer outro tipo de contratempo (falta de luz, temporal, etc.); - Orientar como entrar em contato com o professor (caso necessário) nos momentos de trabalho autônomo dos grupos. **Ambientes e recursos digitais:** - Orientar para que escolham um ambiente silencioso da casa para que não interfira na comunicação e participação na aula.	**Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:** - Colocar questões e dar pistas; - Sugerir representações; - Focar ideias produtivas; - Pedir esclarecimentos e justificativas; - Orientar como os registros serão compartilhados entre o grupo e o professor (se acesso simultâneo na mesma tela ou cada tela independente). **Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:** - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos; - Cuidar de não validar ou refutar as respostas dos alunos. **Encorajar os alunos para o uso da TD como meio de acesso ao conhecimento matemático:** - Mediar o uso da TD pelos alunos para que o artefato se transforme em instrumento; - Questionar como a utilização do artefato interfere na resolução da tarefa (aspectos positivos e negativos); - Pedir para que os alunos expliquem como interpretam as respostas devolvidas pelo instrumento.	**Promover o trabalho de pares/grupos:** - Regular as interações entre alunos; - Sair do ambiente de reunião com o grupo nos momentos de trabalho autônomo dos alunos. **Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:** - Pedir registros escritos individuais e/ou do grupo, como fotos do caderno, documentos compartilhados *on-line*, ou *prints* de tela; - Preparar os alunos para uma possível apresentação do grupo na fase de discussão da tarefa. **Organizar a discussão a fazer:** - Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes); - Sequenciar as resoluções selecionadas para a próxima fase (*discussão coletiva da tarefa*).	- Engajar-se na resolução da tarefa; - Trabalhar em grupo; - Ouvir e ser ouvido; - Conjecturar e/ou refutar, experimentar, (re)elaborar ideias; - Trocar ideias, explicações e justificativas com os colegas; - Refletir sobre suas ideias e a dos colegas; - Comunicar/explicar ideias de forma oral e escrita; - Organizar informações para inserir no artefato para resolução da tarefa; - Inserir informações no artefato disponibilizado; - Ler e interpretar as informações resultantes do instrumento; - (Re)elaborar ideias para inserir no instrumento; - Colaborar; - Trocar ideias, explicações e justificativas com o professor; - Registrar a resolução da tarefa conforme combinado com o professor (individual e/ou do grupo); - Planejar e organizar a explicação do seu grupo para a classe, caso o professor solicite.

Fonte: Ampliado e complementado de Oliveira, Menezes, Canavarro (2013, p. 33).

Planejamos as aulas de forma que as fases de *introdução da tarefa* e *realização da tarefa* fossem desenvolvidas com grupos compostos de três a seis alunos, sendo realizadas em sequência, em um mesmo dia, por um tempo mínimo de cinquenta minutos, e no máximo cento e trinta minutos de reunião síncrona, com cada grupo.

Já para as fases de *discussão coletiva da tarefa* e *sistematização das aprendizagens matemáticas*, prevemos um tempo de no mínimo quarenta e no máximo noventa minutos. Sugerimos que estas fases sejam realizadas em sequência com todos os alunos, ao mesmo tempo e no mesmo encontro síncrono, mas em dia diferente das fases anteriores, para que o professor tenha tempo hábil para organização e para leitura e seleção dos grupos que irão apresentar a tarefa, segundo os critérios estabelecidos por ele no seu plano de ensino. Em nossa experiência, isso foi fundamental para que pudéssemos organizar as apresentações de forma que os apontamentos dos alunos fossem melhor aproveitados, e não se constituísse um processo à parte, centrado no professor.

Na *discussão coletiva da tarefa*, recomendamos que o professor releia a tarefa com os alunos e, a seguir, estabeleça a ordem de apresentação dos grupos. Caso algum grupo não apresente, é importante esclarecer os motivos, seja por resoluções muito parecidas, tempo escasso, etc. Esperamos que os alunos reflitam sobre as ideias dos colegas, esclareçam dúvidas, fazendo emergir a comunicação, reflexão e colaboração para o aprendizado de matemática.

Quadro 1.3 – Ações intencionais do professor na prática do EEM e o papel esperado dos alunos na fase Discussão Coletiva da Tarefa

DISCUSSÃO COLETIVA DA TAREFA (DCT)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
Comunicação: - Agendar o encontro não presencial e simultâneo de todos, já repassando a ordem de apresentação e o tempo previsto para cada grupo; - Lembrar os alunos sobre o encontro um dia antes e no dia; - Lembrar os alunos de carregar os dispositivos móveis antecipadamente (celulares). **Ambientes e recursos digitais:** - Verificar qual(is) artefato(s) os alunos têm disponível(is) para acessar (celular, *tablet*, computador, sistema operacional, tipo de internet); - Definir qual(is) meio(s) será(ão) utilizado(s) para o	**Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:** - Pedir explicações claras das resoluções; - Pedir justificativas sobre os resultados e as formas de representação utilizadas; - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas; - Questionar como o artefato utilizado auxiliou no processo de resolução da tarefa; - Verificar se o uso do artefato promoveu a compreensão das ideias matemáticas; - Questionar como teriam resolvido caso não tivessem disponíveis os artefatos. **Regular as interações**	**Criar ambiente propício à apresentação e discussão:** - Gerir o tempo das discussões; - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelas diferentes explicações apresentadas; - Orientar os alunos a desligarem o microfone quando não estiverem falando; - Orientar como os alunos devem se comportar em ambientes virtuais de reunião, alertando para como podem solicitar a palavra (chat, levantar a mão,	- Prestar atenção e compreender as resoluções dos colegas; - Refletir sobre as apresentações e resoluções dos colegas; - Esclarecer dúvidas sobre as apresentações e resoluções dos colegas; - Colaborar com os colegas; - Explicar a resolução do grupo para os colegas (caso tenha sido solicitado pelo professor); - Responder às dúvidas e aos questionamentos dos colegas;

DISCUSSÃO COLETIVA DA TAREFA (DCT)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
desenvolvimento da aula (ambiente/site/aplicativo); - Verificar a compatibilidade dos artefatos disponíveis com os meios que será(ão) utilizado(s): celular, *tablet*, computador, sistema operacional; solicitando que o aluno teste o acesso ao ambiente/site/aplicativo e comunique qualquer incompatibilidade ou problema; - Orientar para que escolham um ambiente silencioso da casa para que não interfira na comunicação e participação na aula.	**entre os alunos na discussão**: - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas; - Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções; - Identificar e colocar erros matemáticos das resoluções em discussão; - Identificar e colocar diferentes formas de utilização e interpretação do instrumento em discussão.	por exemplo). **Gerir relações entre os alunos:** - Definir a ordem das apresentações; - Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções; - Promover e gerir as participações dos alunos na discussão.	- Explicar como foi utilizado o artefato para resolução da tarefa; - Esclarecer como o artefato interferiu na resolução da tarefa (aspectos positivos e negativos); - Refletir sobre e explicar se e como poderiam resolver a tarefa, caso não tivessem os artefatos disponíveis.

Fonte: Ampliado e complementado de Oliveira, Menezes, Canavarro (2013, p. 33).

Quanto à *organização para aula no contexto ERE,* incluímos a forma de registro, esclarecendo como deverão ser efetuados os registros da sistematização do conteúdo, se devem registrar no caderno, ou utilizar editor de texto, etc., além da forma de envio desses registros para o professor − enviar foto por *e-mail*, *Google Sala de aula* ou compartilhar documento, etc.). Na nossa experiência, percebemos que alguns grupos tiveram mais facilidade em trabalhar com documentos *on-line* em que os componentes dos grupos registravam as ideias/respostas ao mesmo tempo. Um grupo preferiu o registro escrito no caderno, compartilhando as fotos das resoluções do grupo e depois escolhiam um dos registros para apresentar na fase de *discussão coletiva da tarefa*.

Na *promoção da aprendizagem matemática*, o professor deverá ter claro quais ideias devem ser institucionalizadas, identificando conceitos e procedimentos matemáticos, generalizando ideias, e resgatando conhecimentos prévios dos alunos para alicerçar novas ideias e conhecimentos. Assim, o professor poderá retomar resoluções apresentadas e sistematizar o(s) objetivo(s) da tarefa. Serrazina (2012, p. 271) ressalta que o professor não pode introduzir cada um dos conteúdos matemáticos *soltos/desgarrados* dos outros, "mas tem de estabelecer conexões entre os vários domínios da matemática e relacionar o que os alunos já sabem com aquilo que vão aprender, não esquecendo aquilo que irão aprender no futuro". Para a *gestão da aula*, o professor deve gerir o ambiente de forma que os alunos saibam como interagir, questionar, além de verificar se os registros foram realizados. Em nossa pesquisa, optamos para que cada aluno enviasse seus registros individuais da sistematização via plataforma *Google Sala de Aula*.

Quadro 1.4 – Ações intencionais do professor na prática do EEM e o papel esperado dos alunos na fase Sistematização das Aprendizagens Matemáticas

SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS (SAM)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
Comunicação: - Agendar o encontro não presencial e simultâneo de todos; - Lembrar os alunos sobre o encontro um dia antes e no dia; - Lembrar os alunos de carregar os dispositivos móveis antecipadamente (celulares ...). **Ambientes e recursos digitais:** - Verificar qual(is) artefato(s) os alunos têm disponível(is) para acessar (celular, *tablet*, computador, sistema operacional, tipo de internet); - Definir qual(is) meio(s) será(ão) utilizado(s) para o desenvolvimento da aula (ambiente/site/aplicativo); - Verificar a compatibilidade dos artefatos disponíveis com os meios que será(ão) utilizado(s): celular, *tablet*, computador, sistema operacional, solicitando que o aluno teste o acesso ao ambiente/site/aplicativo e comunique qualquer incompatibilidade ou problema; - Orientar para que escolham um ambiente silencioso da casa para que não interfira na comunicação e participação na aula. **Forma de registro:** - Definir como serão realizados os registros da sistematização (escrita manual no caderno, utilização de editor de texto, outra forma).	**Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:** - Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas; - Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização; - Reconhecer o valor de uma regra com letras; - Suscitar ideias, conceitos e relações matemáticas mediadas pelas TD; - Mostrar outras formas de utilização das TD disponíveis, caso possível. **Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:** - Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes; - Reforçar aspectos-chave para o seu desenvolvimento. **Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:** - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados; - Mostrar problemas/tarefas diferentes, mas que poderiam ser	**Criar ambiente adequado à sistematização:** - Focar o trabalho dos alunos no momento de sistematização coletiva; - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada; - Orientar os alunos a desligarem o microfone quando não estiverem falando; - Orientar como os alunos devem se comportar em ambientes virtuais de reunião, alertando para como podem solicitar a palavra (*chat*, levantar a mão, por exemplo). **Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:**	- Prestar atenção no encaminhamento dessa fase pelo professor; - Colaborar com a sistematização das aprendizagens; - Registrar a sistematização para estudar ou consultar; - Refletir sobre a sistematização, não ficando com dúvidas; - Compreender a importância das generalizações, regras, conceitos matemáticos; - Compreender como foi utilizada a TD para resolução da tarefa; - Refletir se e como as TD interferiram na resolução da tarefa; - Refletir sobre como poderiam resolver a tarefa, caso não tivessem a TD disponível.

SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS (SAM)			
PROFESSOR			**ALUNOS**
Organização para aula no contexto do ERE	**Promoção da aprendizagem matemática**	**Gestão da aula**	**Papel esperado dos alunos**
Forma de envio do registro: - Definir como serão enviados os registros da sistematização (envio de foto para o professor por e-mail, via *Google Sala de Aula* ou outro meio*;* compartilhamento *on-line* de documento, etc.).	resolvidas seguindo as ideias apresentadas na sistematização; - Discutir como seria possível a resolução da tarefa, caso a TD não pudesse ser utilizada; - Apresentar outras maneiras de resolução da tarefa, caso necessário.	- Verificar se os registros foram realizados (envio de foto ou arquivo).	

Fonte: Ampliado e complementado de Oliveira, Menezes, Canavarro (2013, p. 33).

Salientamos que as aprendizagens matemáticas não acontecem isoladamente, mas nas relações interpessoais entre os sujeitos da sala de aula − professor e alunos e nos discursos que constroem em conjunto (WELLS, 2004). Por meio da tarefa, as interações sociais se manifestam e, ainda, as formas de como comunicar e de como agir e reagir guiam professor e alunos em suas ações e nos processos de negociação de significados, aceitando ou não as diversas considerações que venham a surgir, (re)elaborando ideias de forma individual e em grupo (GUERREIRO, 2014). Na próxima seção esclarecemos os motivos dessas escolhas.

1.5 Considerações, Perspectivas e Conclusões

Embora reconheçamos as dificuldades que a pandemia e o ERE carregam, acreditamos ser possível superar a lógica reprodutivista do ensino tradicional, neste contexto. Nesse sentido, propomo-nos a estudar o EEM no contexto do ERE como alternativa ao ensino direto, por se tratar de uma metodologia de ensino e de aprendizagem com foco no aluno. Sabemos que o EEM é uma prática exigente, tanto do professor quanto do aluno, pois requer do professor um planejamento minucioso, prevendo situações que os alunos possam enfrentar e meios para auxiliá-los, e que, mesmo com os quadros de antecipação/orientação, podem surgir situações não previstas, para as quais não se tenha respostas prontas. No ERE esse desafio é maior, pois, além das situações cotidianas da sala de aula, é necessário prever possíveis situações relacionadas ao uso da TD e sua instabilidade, como queda de energia, problemas com internet e/ou equipamentos.

Elencamos algumas diferenças entre o planejamento de aulas assentes no EEM na perspectiva do ERE e no ensino presencial:

- Apesar de planejarmos a aula para que todos os alunos participem, sabemos que isso é uma utopia − ao menos na escola pública −, já que nem todos os alunos dispõem de equipamentos e internet de qualidade. Assim, o professor precisa adaptar a aula assente no EEM para esses alunos que não conseguem participar das reuniões síncronas, ou seja, ter um planejamento alternativo;
- A fase *introdução da tarefa*, que em sala de aula seria realizada com todos os alunos, ou seja, ao mesmo tempo, no ERE não entendemos como a melhor solução. Isto porque nem todos os alunos possuem disponibilidade de tempo − muitos cuidam de irmãos menores para os pais trabalharem pois, as escolas de Educação Infantil também tiveram suas atividades presenciais suspensas. Também há casos de alunos que só têm acesso ao equipamento quando os pais chegam do trabalho;
- Na fase de *realização da tarefa*, quando no ensino presencial, o professor circularia pela sala atendendo aos grupos de acordo com a necessidade de cada um, no ERE, entendemos ser necessário adaptar, de forma que cada grupo realize a tarefa em horários diferentes, de acordo com a disponibilidade do grupo. Isto devido aos motivos elencados no item anterior e porque, em nossos testes, verificamos ser tumultuado trabalhar com várias reuniões ao mesmo tempo (áudio sobrepõe). Porém, avaliamos que o professor deve se ausentar em alguns momentos durante a *realização da tarefa* para que os alunos tenham autonomia para trabalhar. Isto implica em que o professor se ausente da reunião, mas ainda assim esteja disponível a qualquer momento para que, caso os alunos precisem, possa atendê-los. Assim, enquanto no ensino presencial, na fase da *realização da tarefa* o tempo é o mesmo para todos os grupos, pois trabalham concomitantemente, no ERE o tempo gasto pelo professor nesta fase é multiplicado pelo número de grupos;
- A fase *discussão coletiva da tarefa*, que no ensino presencial, para apresentar sua resolução do grupo, os alunos podem ir para o quadro registrar suas conclusões, ou apresentar no projetor multimídia − caso tenha disponível na escola −, no ERE é necessário que eles compartilhem a tela para que os outros vejam o que fizeram − foto do caderno ou documento compartilhado, visto que na fase da *realização da tarefa* não são todos os alunos que compartilham seus registros, pode ocorrer de os registros dos alunos de um mesmo grupo serem diferentes. Isto porque um aluno não vê o que o outro está registrando, apesar de estarem conversando, interagindo um com o outro, os registros podem ser individuais e cada aluno organizar de uma forma. Por isso, planejamos que os grupos usassem documentos compartilhados *on-line* para resolverem a tarefa, mas devido a alguns usarem apenas o celular para participar da reunião,

muitos não conseguiram acessar o documento, a reunião e o *applet* ao mesmo tempo;

- Para a fase de *sistematização das aprendizagens matemáticas* no ensino presencial, o professor pode utilizar o quadro para escrever sobre as apresentações de slides ou material utilizado para esta fase. No ERE é necessário que o professor, dependendo dos registros e explicações que deseja fazer, disponha de mesa digitalizadora, *tablet* ou outro dispositivo que facilite o registro de ideias para interagir com os alunos.

Frente às discussões acima relacionadas a cada uma das fases do EEM, planejamos o menor número possível de reuniões síncronas por aluno para completar cada tarefa. Assim, para que cada aluno tenham apenas duas reuniões síncronas por semana, sugerimos que as fases de *introdução da tarefa* e de *realização da tarefa* aconteçam em um mesmo dia com cada grupo, e as fases de *discussão coletiva da tarefa* e de *sistematização das aprendizagens matemáticas* sejam realizadas em outro dia com todos os alunos.

Desse modo, assumimos como uma possibilidade, no contexto do ERE, o EEM articulado às TD, em que os alunos constroem conhecimento matemático individual e coletivamente a partir da mediação cultural do professor. Também admitimos que o EEM se trata de uma metodologia ativa[1], inovadora e desafiadora para professores, pois significa metamorfosear a própria prática.

Em nossa prática docente, não tínhamos dúvida quanto à importância do planejamento. No entanto, planejar uma aula assente no EEM, independentemente de ser no ensino presencial ou no contexto do ERE, é mais trabalhoso, exigindo tempo maior que o planejamento de uma aula tradicional. A ação de antecipar exige que o professor se coloque no lugar do aluno, favorecendo que ele compreenda as dificuldades, facilidades, possíveis raciocínios e ideias dos alunos, podendo traçar estratégias de como agir perante cada situação. Salientamos que os quadros de antecipação/orientação não são estáticos, podendo ser complementados para cada aula ou turma.

Acreditamos, também, que são necessários outros estudos que pautem o planejamento de aulas assentes no EEM. Entretanto, na situação atual brasileira, em que professores têm pouca carga horária (hora-atividade) para preparar suas aulas, bem como executar todo o trabalho inerente ao ensino − elaboração de avaliações e suas correções, elaboração de materiais e estudo, preenchimento de registros de classe, entre outros −, é muito difícil que o professor, por si só, planeje aulas assentes no EEM e elabore ou adapte tarefas exploratórias. Por isso,

[1] Segundo Bacich e Moran (2018), uma metodologia ativa é aquela desenvolvida de forma criativa, centrada na atividade e autonomia do aluno e com a intenção de proporcionar a aprendizagem.

consideramos que um banco de planejamentos e tarefas de natureza exploratória facilitaria a prática dos professores no desenvolvimento de aulas centradas nos alunos.

Aliás, acreditamos que, para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática, maior número de hora-atividade é um ponto importante, pois toda mudança exige estudo e planejamento. Também sentimos necessidade de formações continuadas dos professores que não sejam esporádicas e desvinculadas de sua prática, muitas vezes não condizentes com as necessidades dos professores de Matemática. Assim, salientamos a necessidade de formações continuadas aos professores da Educação Básica em parceria entre as Secretarias de Educação e as Universidades, instituições de pesquisa. Acreditamos que esse vínculo seria profícuo a ambas as instituições, pois favoreceria que as pesquisas tivessem caráter mais prático e, por outro lado, garantiria formação continuada de qualidade aos professores, condizentes com suas realidades e necessidades. No entanto, essas parcerias devem ser sustentadas e institucionalizadas como política pública, de responsabilidade do Estado e não das Universidades.

Por último, concluímos ser possível planejar e desenvolver aulas assentes no EEM no ERE utilizando os quadros reelaborados, ao refletir sobre este estudo. Entretanto, consideramos pertinentes investigações empíricas que corroborem e/ou ampliem as discussões relacionadas aos quadros teóricos construídos, no que se refere ao papel esperado dos alunos quanto às ações intencionais do professor na prática do EEM aliado às TD no ERE.

REFERÊNCIAS

BACICH, L; MORAN, J. **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora**: Uma Abordagem Teórico-Prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In: VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - Sipem, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**... SBEM, v. VII. p. 1-12, 2018.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais no Ensino Exploratório de Matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 738-747, 2019.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. Classroom organization and dynamics. In B. C, A. H & M. O (Eds.). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986, p. 309-365.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quatro ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf; acesso em 15 fev. 2019, às 7h30.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011. Disponível em https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf; acesso em 22 jul. 2019, às 7h.

CEALE. **Glossário Ceale**: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte, 2014. ISBN 978-85-8007-079-8. Disponível em http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale; acesso em 8 set. 2020.

CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, Ademir Donizeti. Obstáculos e Dificuldades Apresentados por Professores de Matemática Recém-Formados ao Utilizarem Modelagem Matemática em suas Aulas na Educação Básica. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 760-776, ago. 2017. DOI: 10.1590/1980-4415v31n58a12

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Eds). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, p. 243-307, 1986. DOI: 10.1007/978-94-009-4504-3_7

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa***:* métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Ensino Exploratório e os Casos Multimídia na Formação de Professores que Ensinam Matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.) **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 19-32.

CYRINO, M. C. C. T; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II, n. 2. Brasília, 1989. p. 15-19.

D'AMBROSIO, U. **Sociedade, Cultura, Matemática e Seu Ensino**. Educação e Pesquisa. São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

DEWEY, J. **Logic**: The theory of inquiry. New York: Henry Holt and Company, 1938.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 205-214, 2019.

GUERREIRO, A. Comunicação matemática na sala de aula: conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas. In:

PONTE, J. P. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: IE, p. 237-260, 2014.

MENEZES, L.; OLIVEIRA, H.; CANAVARRO, A. P. **Descrevendo as Práticas de Ensino Exploratório da Matemática**: o caso da professora Fernanda. Actas VII CIBEM. Montevideu, Uruguay: CIBEM, 2013.

MOREIRA, J. A. M.; HENRIQUES, S.; BARROS, D. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. **Dialogia**, São Paulo, n. 34, p. 351-364, jan./abr. 2020. DOI: 10.5585/dialogia.n34.17123

OLIVEIRA, H.; CYRINO, M. C. C. T. Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: One study with prospective mathematics teachers. **SISYPHUS**, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013. Disponível em https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/93; acesso em 27 mar. 2019, às 5h30.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p.11-34, 2005.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: IE, p. 13-30, 2014.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Mathematics teachers' knowledge and practices. Em A. Gutierrez e P. Boero (Eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: Past, present and future. Roterdham, The Netherlands: Sense Publishers, p. 461-494, 2006.

POWELL, A. B.; BAIRRAL, M. **A Escrita e o pensamento matemático**: Interações e potencialidades. Papirus Editora, 2014.

SERRAZINA, M. L. M. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 266-283, 2012.

SIERPINSKA, A. **Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism.** In H. Steinbring, M. G. B. Bussi e A. Sierpinska (Eds.). Language and communication in the mathematics classroom. Reston, VA: NCTM, p. 30-62, 1998.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p. 313-340, 2008. DOI: 10.1080/10986060802229675

UNESCO. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. São Carlos:

EdUFSCar, 2016.

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE, NRICH - **Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning**. Disponível em https://nrich.maths.org; acesso em 12 mar. 2020, às 5h20.

VALENTE, G. S. C.; MORAES, E. B.; SANCHEZ, M. C. O.; SOUZA, D. F.; PACHECO, M. C. M. D. O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: Reflexões sobre a prática docente. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 9, p. e843998153, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i9.8153.

WELLS, G. **Dialogic inquiry**: Towards a sociocultural practice and theory of education. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

WHEATLEY, G. H. **The role of reflection in mathematics learning. Educational Studies in Mathematics**, v. 23, p. 529-541, 1992. DOI: 10.1007/BF00571471.

2 FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM[1]

Vania Sara Doneda de Oliveira[2]
Maria Ivete Basniak[3]

Resumo: Este ensaio teórico tem como objetivo refletir sobre o ensino e a aprendizagem de frações a partir da problematização das múltiplas interpretações que envolvem esse objeto matemático, em uma perspectiva histórica e epistemológica. As frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, articulando-se individualmente e entre si. Nesse sentido, ao menos cinco interpretações devem ser consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador. Comumente, o ensino de frações inicia pela perspectiva do particionamento (parte-todo), o que acarreta obstáculos epistemológicos, visto que, nesta perspectiva de ensino, as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados, pois parte da contagem do todo e das partes consideradas utilizando números naturais sem que ocorra a escolha da unidade de medida. Com isso, a introdução de frações pela interpretação parte-todo confunde-se com as ideias e as propriedades dos números naturais. A fim de que os alunos compreendam as diferenças entre o conjunto dos números racionais em relação aos números naturais, admite-se que a introdução ao ensino de frações seja realizada pela interpretação medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, porque coincide com a gênese histórica das frações, que emergem da necessidade de medir quantidades contínuas.

Palavras-chave: Números Fracionários. Números Racionais. Comparação Multiplicativa.

FRACTIONS AND THEIR MULTIPLE INTERPRETATIONS: REFLECTIONS ON TEACHING AND LEARNING

Abstract: This theoretical essay as aim at reflecting on the teaching and learning fractions from multiple interpretations problematization which encompass this mathematic object in a historical and epistemological perspective. Fractions do not have a single definition or interpretations, but They assume different ones and They are a multiple meanings idea tangle that articulate individually among them. Hereupon, at least five interpretations should be considered when teaching fractions: measure, part-whole, quotient, reason, and operator. Commonly, teaching fractions starts by partitioning perspective (part-whole), what entails epistemological obstacles, because by this teaching perspective, rules and procedures stand out in understanding the meanings, by reason of it starts by counting the whole and parts considered, using natural numbers without measurement unit choice. Thereby, introduction of fractions by part-whole interpretation cause confusion with ideas and properties of natural numbers. For students understanding the differences among the elements of rational numbers regarding the natural numbers, it is assumed that introduction of fractions teaching should be carried out by interpretation of measure, understood as a multiplicative comparison relation among quantities, because coincides with the fractions historical genesis, which emerge from the necessity to measure continuous quantities.

Keywords: Fractional Numbers. Rational Numbers. Multiplicative Comparison.

[1] Artigo publicado em 07/07/2021 na Revista de História da Educação Matemática, v. 7, p. 1-20, disponível em http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/388.

[2] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br

[3] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

2.1 Introdução

As discussões aqui realizadas foram motivadas pelas inquietações da primeira autora, enquanto professora de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio da rede estadual de ensino do Paraná, quanto ao ensino de frações.

O *Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações* (PARANÁ, 2018), fundamentado na *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC (BRASIL, 2018), é o documento norteador para todas as instituições de ensino públicas e particulares, de Educação Infantil e de Ensino Fundamental do referido Estado, elaborado pela Secretaria de Estado de Educação – SEED-PR. Esse documento apresenta a contextualização legal para a implantação da BNCC, um breve histórico da educação paranaense, os princípios orientadores que norteiam a elaboração dos currículos escolares, e a definição dos direitos e objetivos de aprendizagem por etapas e anos de escolaridade, segundo suas especificidades.

Contudo, a SEED-PR criou outro documento voltado apenas para a rede estadual de ensino, o *Currículo da Rede Estadual Paranaense* – CREP (PARANÁ, 2019), que segundo a secretaria, complementa o *Referencial Curricular do Paraná*. Esse documento, apesar de ter sido elaborado em 2019 sem o conhecimento e sem a colaboração dos professores da rede estadual, só foi apresentado na semana anterior ao início das aulas em 2020, não havendo oportunidade de discussão ou contribuição. Isto gerou desconforto aos professores, porque tal documento inclui, altera e exclui elementos da BNCC.

Apesar de a BNCC destacar a importância de propiciar aos alunos tarefas que envolvam medições, para mostrar a necessidade de um novo campo numérico, no *Referencial Curricular do Paraná* (PARANÁ, 2018) e no CREP (PARANÁ, 2019), não se encontrou, explicitamente nos objetivos de aprendizagem ou conteúdos, a medição como caminho para construção do campo numérico dos números racionais. Neste último documento identifica-se apenas a associação de frações como parte-todo e como resultado de divisão. Desta forma, o ensino do conceito de frações é orientado apenas para a comparação parte-todo, que se fundamenta na contagem de um todo e na contagem das partes tomadas, utilizando números naturais, e os objetivos estão voltados para que os alunos operem algoritmos com frações, sem a devida preocupação com a construção do novo campo numérico dos números racionais.

Em contrapartida, estudos de Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983), Lamon (2012) e outros remetem à importância de ensinar diferentes interpretações de números racionais para os estudantes, de modo que se estabeleça uma base sólida para a compreensão das frações. Tal compreensão é fundamental para o desempenho matemático do estudante durante toda sua vida escolar, além de ser essencial para o entendimento de outros conteúdos e tópicos importantes da Matemática, como Álgebra (BAILEY *et al*., 2012; TORBEYNS *et al*., 2015; POWELL, 2018A, 2018B, 2019A, 2019B, 2019C, 2020; SCHEFFER; POWELL, 2019; KIEREN, 1980; BEHR *et al*., 1983; LAMON, 2012).

Para compreender frações, é necessário um rol de conceitos e relações que se articulam individualmente e entre si (KIEREN, 1976; 1980). Desta forma, as frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, que se relacionam aos números racionais e outros conteúdos. Enquanto Kieren (1980) nomeou esses múltiplos significados ou interpretações de construtos, Behr *et al*. (1983) chamou-os de subconstrutos.

Assim objetiva-se, neste ensaio teórico, refletir sobre o ensino e a aprendizagem de frações a partir da problematização das múltiplas interpretações que envolvem esse objeto matemático, em uma perspectiva histórica e epistemológica. Conforme Barbosa (2018, p. 43), em um ensaio teórico "não há delimitação prévia de *corpus* da literatura, sendo que o pesquisador mobiliza a bibliografia conforme a necessidade para construir sua argumentação". Desta forma, a discussão está fundamentada nos autores supracitados, os quais introduzem a problemática referente às múltiplas interpretações das frações e sua importância para o ensino e para a aprendizagem.

Primeiramente, diferenciam-se números fracionários, fração e números racionais, discute-se a imbricação entre o senso numérico e o senso fracionário, e como as características do primeiro refletem no segundo. Em seguida, apresentam-se as diferentes interpretações das frações e suas implicações para a compreensão dos números racionais. Ao final, discute-se a compreensão dessas questões para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

2.2 Iniciando a Discussão: Números Fracionários, Fração e Números Racionais

No decorrer dos estudos sobre frações, considerou-se necessário esclarecer e discutir os diferentes significados dos termos *números racionais*, *números fracionários*, *fração* e *representação fracionária*. Isto porque a prática docente permite perceber que esses termos se confundem erroneamente e são associados a apenas uma interpretação, a parte-todo.

Caraça (1951) descreve que os números racionais surgiram da necessidade do homem de comparar grandezas, quando apenas os números naturais não eram suficientes para resolver certos tipos de problemas com medidas. Assim, a importância dos números racionais é inegável (BEHR *et al*., 1983).

Para Behr *et al.* (1983, p. 91, tradução nossa), "o conceito de número racional está entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante o Ensino Fundamental". Esses autores complementam a importância desse tópico matemático sob três perspectivas: prática, psicológica e matemática. Quanto à perspectiva prática, os autores afirmam que manipular as interpretações de número racional contribui muito para o desenvolvimento da capacidade de compreender e resolver problemas da realidade. Quanto à perspectiva psicológica, os mesmos autores acreditam que a compreensão dos números racionais auxilia na evolução intelectual das crianças, expandindo as estruturas mentais necessárias ao seu desenvolvimento. Por último, sobre a perspectiva matemática, os autores afirmam que o entendimento dos números racionais constitui a base para a compreensão das operações algébricas elementares.

Assim, o ensino tradicional de frações, alicerçado apenas na concepção parte-todo, apresenta diversos obstáculos que podem comprometer o entendimento do conceito de frações, entre os quais salientamos:

- as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados (interpretações);
- não há necessidade de determinar uma unidade de medida;
- a introdução de frações como parte-todo (contagem) não é desvinculada das ideias e das propriedades dos números naturais, sendo desnecessária a construção do novo campo numérico - números racionais, o que dificulta a compreensão de números fracionários (BEHR *et al.*, 1983; BRASIL, 1998).

Além disso, muitos professores não aceitam que um número fracionário $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ pode pertencer ao conjunto dos números irracionais, mas aceitam frações algébricas no conjunto dos números reais (SILVA, 2005).

De acordo com Lamon (2012), todos os números racionais podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, mas nem toda fração $\frac{a}{b}$ representa um número racional. Como exemplo deste último caso, a autora cita $\frac{\pi}{2}$, que embora seja uma fração, ou em outras palavras, tenha representação fracionária, não é um número racional. Por outro lado, os números racionais possuem outras representações: números decimais, dízimas periódicas e porcentagem.

Assim, fração ou representação fracionária é qualquer notação do tipo $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e

$a, b \in \mathbb{R}$, e o termo número fracionário indica aquele que pode ser representado por uma classe de frações − frações equivalentes – que Silva (2005) expõe como exemplo, o número fracionário $\frac{\sqrt{2}}{2}$, podendo ser representado por uma classe de frações: $\left\{\frac{2\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi}, \dots\right\}$.

Esclarecidos esses termos e suas diferenciações, a seção que segue discute a imbricação entre os sensos numérico e fracionário..

2.3 O Senso Numérico e o Senso Fracionário

O senso numérico envolve a habilidade de aproximar e julgar o tamanho dos números, o que inclui o conhecimento sobre os números, suas operações e como utilizar esses conhecimentos para resolver problemas e calcular, além da escolha da representação numérica mais adequada dentro de um contexto e/ou para resolver problemas (POWELL; ALI, 2018).

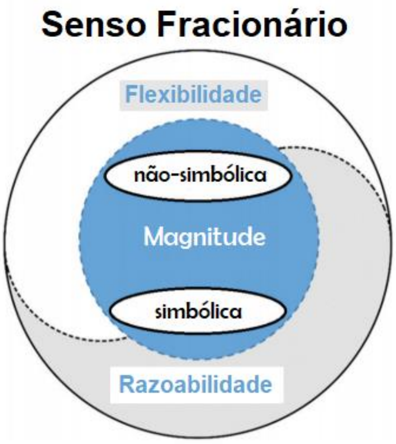
Desta forma, reconhecer a magnitude de um número é essencial para o senso numérico, e se estende para o senso fracionário, um subconjunto do senso numérico. Por isso se faz necessário definir o significado de magnitude. Powell (2019d, p. 3), fundamentado em Carraher (1996), afirma que “magnitude ou magnitude absoluta é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida”. Assim, magnitude é o tamanho de um número, ou seja, a quantidade representada por ele. Essa ideia imediata e intuitiva está implicitamente relacionada à maioria dos processos matemáticos. Portanto, uma pessoa analisa a magnitude de um número sempre que estimar, ordenar, pensar sobre o resultado de um cálculo. Os números naturais e racionais têm magnitude, sendo uma característica de todos os números reais (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2019a, 2019b, 2019c).

Powell e Ali (2018) sintetizam as características do senso numérico que se refletem no senso fracionário. Eles apontam três categorias que se sobrepõem e interagem entre si: flexibilidade, razoabilidade e magnitude. A “flexibilidade se refere a conceitos, representações e estratégias de cálculo. Isso implica na habilidade de trabalhar com frações, sejam elas concebidas como relação parte-todo, quociente, medida, razão ou operador” (POWELL; ALI, 2018, p. 236, tradução nossa). Inclui, também, as frações simbólicas e não-simbólicas[1],

[1] As magnitudes numéricas podem ser representadas de forma simbólica ou não-simbólica. A forma simbólica requer linguagem e é escrita utilizando dígitos que estejam associados a determinadas quantidades (3; 0,25; 27). A forma não simbólica não requer linguagem, utiliza pontos, figuras, objetos que representam uma quantidade de forma abstrata (Espadinha, 2015).

possibilitando uma mudança de representação da forma escrita e visualização dessas frações para a considerada mais adequada. A razoabilidade implica na avaliação dos resultados ao operar, aproximar ou comparar frações, levando a reflexões sobre como uma operação envolvendo frações pode alterar um número; ou, ainda, qual a consequência de realizar uma operação com um número fracionário, sendo este menor, maior ou igual a 1. Assim, "uma vez que o cálculo tenha sido realizado, a razoabilidade do resultado seria considerada. Como uma continuação da expressão de senso fracionário, razoabilidade chama plausibilidade para a questão" (POWELL; ALI, 2018, p. 236, tradução nossa). Juntamente com flexibilidade e razoabilidade, a compreensão da magnitude é o conceito central do senso fracionário (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Senso Fracionário



Fonte: Powell e Ali, 2018, p. 237 (tradução nossa).

Uma observação importante é que, ao pensar na magnitude de uma fração, ela deve ser reconhecida como número, por isso está no centro do senso fracionário, permeada pela flexibilidade e razoabilidade, que se interconectam.

No entanto, há vários obstáculos encontrados por professores para ensinar, e por alunos em compreender e operar com frações. Muitas pesquisas (BAILEY *et al*., 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015; POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) têm procurado identificar falhas no ensino e no aprendizado de frações, além de indicar diferentes abordagens com vistas a superar tais dificuldades.

Para que o senso fracionário seja instigado, o professor deve promover situações que possibilitem experimentações dos diversos significados para os números racionais, de forma que as interconexões possam ser estabelecidas e compreendidas. Powell (2018a) afirma que é necessário encontrar uma nova ontologia para melhorar a epistemologia de frações. Para isso, é necessário recorrer à Ciência Neurocognitiva e à História da Matemática (POWELL, 2018a; 2018b). Isto porque os diferentes significados de frações não se resumem no conceito matemático de número racional, e uma revisão histórica e epistemológica desses significados auxilia na compreensão dos significados das frações nas culturas antigas e no contexto em que elas foram utilizadas.

Os egípcios utilizavam frações como inverso de números inteiros, e por isso há um entendimento de que eles utilizavam, de maneira quase exclusiva, apenas frações unitárias (ROQUE, 2012). As frações comuns, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, eram representadas por símbolos próprios. As demais frações eram representadas por números inteiros com um símbolo oval em cima, simbolizando frações $\frac{1}{n}$ (ROQUE, 2012). Gairín (1998) acredita que as frações egípcias surgiram do contexto de resolução de problemas de divisão igualitária de grandes quantidades de magnitudes, e por isso foi necessária a criação de um sistema de representação para quantidades não inteiras.

Diferentemente do povo egípcio, os babilônios usavam um sistema de numeração posicional de base sessenta, e para medir, utilizavam unidades, múltiplos e submúltiplos sexagesimais. Apesar de ser bem parecido com o sistema decimal, eles não tinham um sinal de separação entre a parte inteira e a fracionária. Gairín (1998, p. 38, tradução nossa) afirma que "esse sistema de representação, com o conhecimento que temos atualmente, parece confuso, pois falta um símbolo para nomear as posições vazias (nosso zero atual) e indicar a separação entre partes inteiras e não inteiras (o ponto decimal atual)". Entretanto, ainda hoje utilizamos essas representações nas medições de horas e de ângulos.

Tanto para egípcios quanto para babilônios, as frações surgiram para registrar a medida de quantidades de terra, área, tempo, peso e impostos (ROQUE, 2012). Já os pitagóricos não trataram a razão entre dois números inteiros de fração ou outro tipo de número, mas a interpretaram como uma relação de tamanhos de duas magnitudes do mesmo tipo. Mais tarde, os pitagóricos admitiram que havia razões que não podiam ser expressas por números inteiros. Essas razões incomensuráveis, que hoje chamamos de números irracionais, os pitagóricos chamavam de inexprimíveis ou que não estavam certas. Entretanto, os gregos, na astronomia, usavam o sistema importado dos babilônios, o sistema sexagesimal, incluindo as frações, utilizando um grau como equivalente a sessenta minutos, e cada minuto subdividido em sessenta segundos (GAIRÍN, 1998).

Smith (1953), citado por Gairín (1998), acredita que herdamos a forma de representar frações dos hindus, mas a barra foi introduzida pelos árabes. A ideia de frações, para os árabes, está associada a uma razão "como uma relação ou proporção de variação entre valores de diferentes moedas" (GAIRÍN, 1998, p. 40, tradução nossa). Contudo, foi na China que as frações decimais começaram a ser utilizadas, mas passaram mil anos até serem incorporadas e substituíssem as frações unitárias ou sexagesimais.

Portanto, das discussões acima, percebemos que, historicamente, as frações foram construídas a partir de diferentes necessidades e significações (KIEREN, 1980; BERH *et al.*, 1983).

Nesse sentido, pesquisadores como Kieren (1976; 1980) e Berh *et al.* (1983) afirmam que, para aprender frações, é necessário compreender seu conceito, que é bastante complexo, pois as frações não podem ser definidas por um único significado, mas por um emaranhado de relações e de ideias interconectadas. Em outras palavras, para entender frações, é preciso conhecer suas diferentes interpretações (KIEREN, 1980), as quais discutimos na subseção que segue.

2.4 As Interpretações das Frações e a Compreensão dos Números Racionais

Nesta subseção são discutidas as múltiplas interpretações das frações a partir dos estudos de Kieren (1976, 1980), Behr *et al.* (1983), Escolano (2007) e Lamon (2012).

Kieren (1976), já na década de 1970, alertava quanto ao pouco interesse na natureza dos números racionais, estando o ensino centrado apenas em procedimentos de resolução, sendo insuficiente para alicerçar a compreensão dos alunos sobre conteúdos matemáticos mais avançados, como Álgebra ou Análise. O autor salienta que, quando o ensino de frações é focado apenas na resolução de cálculos, o aluno precisa adquirir diferentes habilidades para operar, mas elas não auxiliam na compreensão dos diferentes significados das frações. Estudos e experiências docentes demonstraram que tais problemas apontados são os mesmos que o ensino de frações atual ainda não superou, cinco décadas depois. Isto pode ser constatado questionando a um estudante do Ensino Fundamental, Médio e até mesmo do Ensino Superior, sobre, por exemplo, por que, na soma de frações com denominadores iguais repete-se o denominador e soma-se os numeradores, enquanto na soma de frações com denominadores diferentes, recorre-se ao mínimo múltiplo comum? A resposta é: *Porque é a regra*!

Assim, Kieren (1976) destaca a necessidade de o aluno ter oportunidade de estudar as diferentes interpretações de frações, para que seja capaz de compreender adequadamente os aspectos algébricos que são inerentes aos conceitos de números racionais. O autor cita sete interpretações:

> 1. Os números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.;
> 2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (pelo nosso sistema numérico) para os números inteiros;
> 3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6},...\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, ...\}$ são números racionais;
> 4. Os números racionais são números na forma $\frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e $q \neq 0$. Nessa forma, os números racionais são números de "proporção";
> 5. Os números racionais são operadores multiplicativos;
> 6. Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$; e
> 7. Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica (Kieren, 1976, p. 109-110, grifos do autor, tradução nossa).

Segundo Kieren (1976, p.120, tradução nossa), "os elementos de um campo quociente são números da forma $\frac{b}{a}$ que representam soluções para as equações da forma $ax = b$, onde a e b são números inteiros", e $a \neq 0$. No entanto, em 1980, o autor reorganizou essas sete interpretações em cinco: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador, defendendo a necessidade de serem compreendidas cada uma separadamente, bem como as relações entre elas, para a apropriação dos números racionais.

Ainda para Kieren (1980), as interpretações parte-todo e razão, parte-todo e quociente, e parte-todo e medida estão intimamente ligados. Sobre as interpretações parte-todo e razão, ele distingue que, enquanto nas relações parte-todo, o todo é dividido em partes iguais e destaca-se a ideia de equivalência, as relações de razão ressaltam comparações quantitativas de duas qualidades. Como exemplo desta última interpretação, cita a razão que representa o número de meninos em relação a uma classe, em que o todo inclui todos os alunos, meninos e meninas; e a parte, representa apenas os meninos. O autor conclui que as relações parte-todo são um caso especial de relações de razão, e a interpretação quociente diferencia-se da parte-todo por envolver situações diferentes. Nesta última interpretação, "a quantificação do resultado da divisão de uma quantidade em um determinado número de partes está relacionada, em última instância, à Álgebra de equações lineares" (KIEREN, 1980, p. 135, tradução nossa). Sobre a interpretação medida, Kieren (1980, p. 136, grifo do autor, tradução nossa) afirma que

> [...] as tarefas de medição significam a atribuição de um número a uma região (tomada aqui no sentido geral desta palavra; pode ser 1-, 2- ou 3-dimensional ou ter alguma outra característica). Isso geralmente ocorre por meio de uma iteração do processo de

> contagem do número de unidades inteiras utilizáveis para "cobrir" a região e, em seguida, subdividir igualmente uma unidade para fornecer o ajuste apropriado. O foco, aqui, está na unidade arbitrária e sua subdivisão, e não nas relações parte-todo.

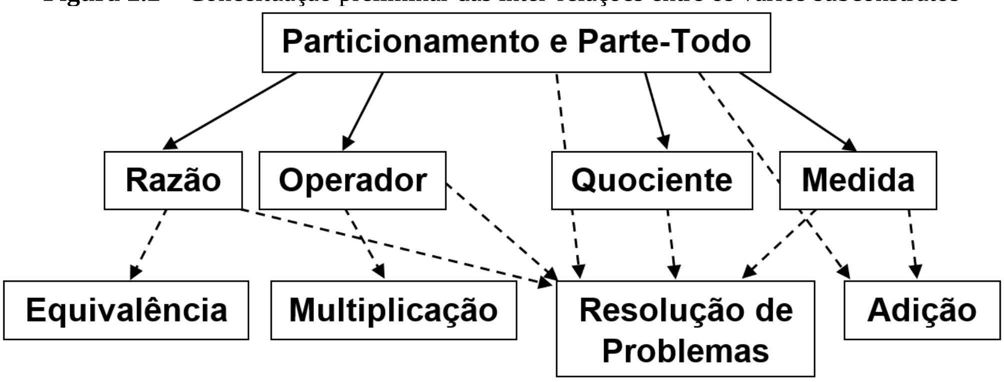
O autor relata, ainda, que a interpretação do operador subsidia a compreensão de multiplicação de números racionais como elementos da Álgebra de funções, do tipo $f(x) = \frac{a}{b}x$, com $b \neq 0$. Behr *et al.* (1983) relacionam essa interpretação com ideias contextualizadas, em que a medida de uma quantidade sofre algum tipo de transformação. Neste sentido, Escolano (2007, p. 56, tradução nossa) complementa que o número racional positivo expressa a medida de uma quantidade de magnitude em situações de *parte de parte,* "que quantificam a medida das quantidades de magnitude que sofrem alguma transformação".

Portanto, Behr *et al.* (1983) redefinem e subdividem algumas das categorias apontadas por Kieren (1976), e listam sete interpretações: medida fracionária, razão, taxa, quociente, coordenada linear, decimal e operador. Não é raro que alguns autores considerem a interpretação parte-todo e medida como sinônimos. Behr *et al.* (1983, p. 100, tradução nossa), por exemplo, acreditam que a "medida do número racional representa uma reconceituação da noção de parte-todo da fração" e afirmam que

> [...] parece plausível que o subconstruto parte-todo, baseado tanto em quantidades contínuas quanto discretas, represente uma construção fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional. É, além disso, um ponto de partida para o ensino envolvendo outros subconstrutos (Behr *et al.,*1983, p. 101, tradução nossa).

Estes mesmos autores apresentam a Figura 2.2 como significado de uma conceituação prévia das relações mútuas entre as múltiplas interpretações.

Figura 2.2 – Conceituação preliminar das inter-relações entre os vários subconstrutos



Fonte: Behr *et al.*, 1983, p. 100 (tradução nossa).

Observamos na imagem que, embora os autores citem sete interpretações, na Figura 2.2, apenas cinco são identificadas. Isto porque, para os autores, a interpretação da fração como razão pode ser entendida como taxa e proporção. Assim, a ideia de razão está associada à comparação entre duas quantidades de mesma grandeza ou mesma natureza.

Escolano (2007, p. 53, tradução nossa), ao realizar um estudo sobre as diferentes interpretações, afirma que, para reconhecer a fração como razão, é necessário estabelecer uma comparação multiplicativa entre quantidade, e "para cada a unidades de *M1* há b unidades de *M2"*.

> 1º Uma quantidade de magnitude, au1, da magnitude M1, é medida com a unidade de medida, u2, de outra quantidade de magnitude, b2, da magnitude M2. A fração como razão ab u1/u2 expressa a medida da quantidade au1, quando considerada como a unidade de medida (u2), que é a unidade da magnitude M2, ou seja, expressa a medida de au1 por unidade de medida (u2) da quantidade bu2.
> 2º As quantidades envolvidas atendem à condição de proporcionalidade, ou seja, que uma variação multiplicativa em uma das quantidades (au1 da magnitude M1 ou bu2 da magnitude M2) produz o mesmo efeito na outra quantidade. Portanto, as quantidades envolvidas são proporcionais (ESCOLANO, 2007, p. 53, tradução nossa).

Para Behr *et al.* (1983), uma fração pode ser, também, um quociente indicado; isto é, o resultado de uma divisão indicada em que podemos interpretar o símbolo $\frac{a}{b}$ como uma forma de escrever a operação $a \div b$. O resultado dessa divisão é uma equivalência. Exemplos: $\frac{18}{3}$ é equivalente a 6; $\frac{2}{5}$ é equivalente a 0,4. Nesse contexto, esses autores afirmam que os números racionais "[...] podem ser usados para definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades de uma perspectiva puramente dedutiva; todos os algoritmos são derivados de equações através das propriedades do campo", e ainda, que "esse nível de sofisticação geralmente requer estruturas intelectuais que ainda não estão prontas em crianças até os 14 anos porque relaciona números naturais a sistemas algébricos abstratos" (BEHR *et al.*, 1983, p. 95, tradução nossa).

Portanto, para Behr *et al.* (1983), a interpretação da fração como quociente indicado pode criar obstáculos didáticos, o que ocorre, segundo Escolano (2007), se considerado apenas o uso de divisões exatas, pois os alunos podem acreditar que não existam outras frações além daquelas que resultam nesse tipo de divisão. Por isso devem ser consideradas tarefas contextualizadas, que possibilitem essa interpretação de frações como quociente indicado, não usando apenas divisões exatas, pois é a base para a construção de ideias algébricas abstratas.

Lamon (2012) admite cinco interpretações dos números racionais: comparações parte-todo com unitização, medida, operador, quociente e razão; as quais, segundo a autora, estão muito interligadas. No entanto, para a mesma autora, nem todas as interpretações fornecem acesso igual ao entendimento profundo do conceito de fração, e nenhuma interpretação é perfeita isoladamente. Para a interpretação do operador, Lamon (2012, p. 191, tradução nossa) afirma que é necessário pensar "nos números racionais como funções".

> Simplificando, a noção do operador de números racionais é sobre encolher e aumentar, contrair e expandir, aumentar e reduzir, ou multiplicar e dividir. Operadores são transformadores que
> • aumentam ou diminuem segmentos de linha;
> • aumentam ou diminuem o número de itens em um conjunto de objetos discretos; ou
> • pegam uma figura no plano geométrico, como um triângulo ou retângulo, e a mapeiam em uma figura maior ou menor com a mesma forma (LAMON, 2012, p. 191, tradução nossa).

Lamon (2012) descreve duas interpretações para a compreensão de quociente: a divisão partitiva e a divisão por cota. Na divisão partitiva, a ideia é de uma divisão justa, igualitária; enquanto a divisão por cota é de uma taxa.

Ela ainda compreende que "uma comparação parte-todo designa um número de partes iguais de uma unidade, do número total de partes iguais em que a unidade é dividida", e a unitização está intimamente relacionada ao conceito de frações equivalentes (LAMON, 2012, p. 145, tradução nossa). Também, ressalta que o professor, ao ensinar frações, deve fazer uso de unidades discretas e contínuas de vários tipos, e que as unidades devem ser compostas por mais de um objeto, além de instruir que não é possível realizar comparações de frações cujas unidades sejam diferentes.

Para a interpretação *medida*, a autora faz referências a pontos na reta numérica, argumentando que esta ideia de indicar a posição da fração na reta numérica auxilia os estudantes a construir a noção de densidade, de senso de ordem e magnitude dos números racionais, além de aprimorar a ação de medir na referida reta.

Esta interpretação de medida da autora difere daquela de Powell (2018a, 2019c), para quem a medida é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. Powell realiza estudos sobre aprendizagem de frações na perspectiva de medição fazendo uso das barras *Cuisenaire*.

Para esse autor, ao utilizar as barras *Cuisenaire*[1], é possível progredir de frações não-simbólicas para simbólicas, além de oportunizar que os alunos interajam com "objetos ou quantidades visíveis e tangíveis, comensuráveis e contínuos" (POWELL, 2019a, p. 9, tradução nossa). Isto porque, diferentemente da perspectiva da partição (parte-todo), em que objetos discretos são contados, a perspectiva da medição permite a comparação de quantidades contínuas. Powell (2018b; 2019b) descreve o Modelo Instrucional 4A, "que consiste em quatro fases de implementação de uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos, utilizando barras de Cuisenaire" (POWELL, 2018b, p. 409-410, tradução nossa). Esta "sequência consiste em uma sucessão coerente e flexível de tarefas destinadas a capacitar os alunos a educar sua consciência sobre as ideias de um tópico matemático" (POWELL, 2018b, p. 410, tradução nossa), possibilitando que os alunos desenvolvam uma linguagem da relação comparativa multiplicativa entre pares de quantidades utilizando as barras *Cuisenaire*. Além do mais, estudos de Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) e Powell e Ali (2018) relatam que a neurociência cognitiva reconhece correlatos neurais comuns de frações simbólicas e não-simbólicas.

Essa diversidade de interpretações citados pelos diferentes autores (KIEREN, 1976, 1980; BEHR *et al.*, 1983; ESCOLANO, 2007; LAMON, 2012) remete à necessidade de trabalhar essas variadas interpretações com os estudantes, de modo que se construa uma base sólida para a compreensão das frações.

Quanto à concepção parte-todo, Kieren (1980) considera que está intimamente ligada às interpretações razão, quociente e medida como discutimos acima; já Behr *et al.* (1983) consideram que ela é reconceituada a partir da interpretação medida do número racional; e Lamon (2012) discute essa interpretação como comparações com unitização, que deve ser estudada associada às frações equivalentes. Entretanto, apesar desses autores compreenderem que a fração como parte-todo é fundamental para a compreensão das demais interpretações, Escolano e Gairín (2005), fundamentados na didática da matemática de Brousseau (1983), alertam que a introdução ao ensino de frações como parte-todo é prejudicial para o ensino de frações, porque causa diversos obstáculos didáticos. Isto porque, normalmente, o conteúdo é introduzido a partir de uma figura dividida em partes iguais, em que algumas dessas partes estão sombreadas e, a partir disso, os alunos devem escrever a fração representada pela parte

[1] Powell (2019a; 2019c) explica que as barras *Cuisenaire* foram criadas pelo professor belga Emile Georges Cuisenaire (1891-1975), que relacionou atributos, como cores e tamanhos. É um material manipulativo composto de paralelepípedos de "quantidades mensuráveis de dez cores e comprimentos diferentes" (Powell, 2019c, p. 703). As sequências de cores e comprimentos do material físico são: branca (1 cm), vermelha (2 cm), verde-clara (3 cm), roxa (4 cm), amarela (5 cm), verde-escura (6 cm), preta (7 cm), marrom (8 cm), azul (9 cm) e laranja (10 cm). Barras de mesma cor têm o mesmo comprimento.

sombreada. Assim, o ensino de frações inicia a partir de um exercício baseado na dupla contagem, utilizando os números naturais, e desconsidera que

> [...] contagem e medição são atividades de natureza diferente que exigem diferentes técnicas e processos. Consequentemente, números naturais e números racionais são representados por sinais diferentes, os relacionamentos e operações entre eles também têm significados diferentes, e os algoritmos de cálculo usados nos dois campos numéricos também são diferentes (ESCOLANO; GAIRÍN, 2005, p. 25).

Portanto, a relação parte-todo não surge da necessidade de resolver um problema que não tem solução no conjunto dos números naturais, mas das necessidades educacionais. A fração parte-todo é usada apenas para representar uma situação com símbolos, não sendo usada para medir, comparar ou distribuir (ESCOLANO, 2007).

> A *relação parte-todo* aparece como consequência de um processo gradual de abandono do significado da medida com objetos reais, que inicialmente se manifesta no fato de os autores dos textos escolares optarem por evocar a medida (medida evocada) e, posteriormente, usar de maneira encoberta a magnitude de superfície, e com a ajuda de gráficos bidimensionais, perguntar "que parte de uma região é outra região" (medição aparente).
> Consequentemente, trata-se de um recurso didático que surge para evitar atividades de medição com objetos tangíveis, possivelmente porque os processos de medição em sala de aula geram dificuldades, como gerenciamento de materiais, controle da diversidade de resultados obtidos, ou aparecimento de interferências no ensino do sistema métrico decimal (ESCOLANO, 2007, p. 81, grifo do autor, tradução nossa).

Lamon (2012) corrobora a crítica de Escolano (2007) sobre o ensino de frações, focando apenas na interpretação parte-todo, chamando a atenção para a necessidade de promover situações de ensino que ultrapassem a manipulação de símbolos e permitam fazer conexões entre o significado da representação fracionária em diferentes situações. Isto porque

> Ter uma compreensão madura dos números racionais implica muito mais do que ser capaz de manipular símbolos. Significa ser capaz de fazer conexões com muitas situações diferentes modeladas por esses símbolos. As comparações parte-todo não são matematicamente ou psicologicamente independentes de outros significados, mas ignorar essas outras ideias na instrução deixa uma criança com uma compreensão deficiente das próprias frações parte-todo, e com uma base empobrecida do sistema de números racionais, dos números reais, dos números complexos, e todas as ideias matemáticas e científicas superiores que se baseiam nesses sistemas de números (LAMON, 2012, p. 32-33, tradução nossa).

Experiências de docência na Educação Básica levam a concordar com os problemas salientados pela autora, os quais trazem dificuldades à compreensão dos números racionais como campo diverso dos números naturais, causados pelo ensino de frações apenas como parte-todo baseado na dupla contagem utilizando números naturais, como é discutido na seção que segue.

2.5 Compreensões e Reflexões Quanto ao Ensino e Consequente Aprendizagem da Relação Frações x Números Racionais

Os estudos e discussões abordadas neste ensaio teórico salientam a importância da compreensão das múltiplas interpretações e significados que as frações podem assumir, bem como a articulação entre elas para que o conceito de fração seja realmente compreendido e se possa minimizar o insucesso no ensino de frações.

Scheffer e Powell (2019) investigaram livros didáticos do 4º ano do Ensino Fundamental contemplados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e concluíram que a interpretação parte-todo é predominante em todas as obras analisadas, que os exemplos abordam a ideia de divisão do inteiro em partes iguais e utilizam alimentos. Isso pode ser um indício sobre o insucesso do ensino de frações no Brasil e que preocupa a comunidade de educadores e pesquisadores em Educação Matemática. Apesar disso, autores de livros didáticos insistem em apresentar frações aos alunos trazendo pizzas e figuras divididas.

Essa introdução do conteúdo de frações a partir de um todo que é dividido em partes iguais destoa da história da matemática, mesmo que, na prática, dificilmente seja possível reparti-lo de forma exatamente igual, como sugerem exemplos comumente encontrados nos livros didáticos, como o da divisão de uma pizza em tantas fatias do mesmo tamanho. Além disso, as operações com frações são admitidas como regras a serem aplicadas sem associar a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes à equivalência de frações, por exemplo, que é utilizada somente para simplificar o resultado final. Outro problema observado nos livros didáticos é que as demais representações de números racionais, como decimais e porcentagens, são trabalhadas como conteúdo à parte, desconectado das frações, como se fossem conteúdos diferentes.

Neste sentido, o entendimento de frações é fundamental para o desempenho matemático do estudante durante toda sua vida escolar, além de ser essencial para a compreensão de outros conteúdos e tópicos importantes da Matemática, como Álgebra, Funções e Equações. Assim, as interpretações das frações aplicam-se não somente aos números racionais, mas a outros campos da Matemática também, porque envolvem a compreensão de que uma mesma representação matemática possui mais de um significado. Isto requer que as frações ocupem lugar de destaque no currículo escolar do Ensino Fundamental e Médio.

Portanto, o estudo de frações pode ocasionar implicações para a compreensão de conteúdos basilares da Matemática, acarretando dificuldades na aprendizagem matemática em toda a vida escolar do aluno, desencadeando problemas também ao ensino de Matemática, uma vez que, sem compreender esses obstáculos didáticos, o professor não sabe como trabalhar com o aluno para que supere essas dificuldades.

Por isso, Powell (2018a, p. 79) reconhece que "as pesquisas em Educação Matemática não têm avançado a prática do ensino de frações e operações com frações para que os estudantes possam construir e apropriar o conhecimento com facilidade". Este autor vai além, sendo categórico ao afirmar que a compreensão e o entendimento de frações é um marco de justiça social. Citando Ritchie e Bates (2013), Powell (2018a) argumenta que os números fracionários influenciam o futuro dos alunos quanto ao mercado de trabalho e renda familiar, tendo papel fundamental na equidade social. O autor também comenta sobre o americano Bob Moses (defensor dos direitos civis dos afrodescendentes nos anos 60 e fundador do *Algebra Project*) e seus colegas (1989, 1994), que lutam pelo direito de grupos marginalizados e estudantes afrodescendentes a terem acesso à Álgebra. Como as frações são determinantes para o aprendizado de Álgebra, consideram esse conhecimento fundamental para a equidade social.

No Quadro 1, destacamos as interpretações mais comuns citadas pelos autores, as quais exemplificamos.

Quadro 2.1 – Interpretação X Ideias e Significados Relacionados

Interpretação	**Ideias e Significados Relacionados**
Parte-todo	Ideia de parte de um todo. Sendo $\frac{a}{b}$ em que a é a parte considerada e b é o todo. É necessário compreender que a é parte de um mesmo todo. **Exemplo**: um retângulo é dividido em 5 partes iguais e tomam-se 3 partes, temos a fração $\frac{3}{5}$.
Quociente	Ideia de partição e quotização. Na partição, o todo tem que ser repar212tido em partes iguais para um grupo definido. Exemplo: repartir 12 brigadeiros para 6 crianças. Quantos brigadeiros cada criança irá receber? Na quotização, o total de elementos já está definido, e o que precisamos encontrar é o número de grupos que podem ser feitos com o todo. **Exemplo**: temos 12 brigadeiros e queremos distribuir 3 brigadeiros para cada criança. Quantas crianças irão receber brigadeiros?
Razão	Ideia de razão ou taxa. A razão é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza. Exemplo: em uma sala de aula de 20 meninas e 10 meninos, podemos afirmar que a razão do

Interpretação	Ideias e Significados Relacionados
	número de meninas para o número de meninos é $\frac{2}{1}$ ou 2:1. A taxa é uma extensão do construto de razão e é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de grandezas diferentes, em que a segunda grandeza depende da primeira. **Exemplo**: a velocidade que normalmente é expressa em quilômetro por hora ou metro por segundo.
Operador	Ideia de *encolher* ou *esticar*, ou ainda, *ampliar* ou *reduzir*. Está associado à ideia de função $f(x) = \frac{a}{b}x$, com $b \neq 0$. Ao ser aplicada em grandezas contínuas, tem-se a noção de *encolher* ou *esticar*, ou ainda, *ampliar* ou *reduzir*, e o todo é transformado. **Exemplo**: Ao calcular $\frac{2}{5}$ do número 30, aplicamos uma redução do número 30. Se calcularmos $\frac{5}{2}$ do número 30, o efeito é de ampliação.
Medida	Ideia de medir como ação. Medir exige comparação e ordenação. Para expressar essa magnitude, é necessária a representação fracionária, caso a medida não seja inteira; e a escolha de uma unidade de medida. **Exemplo**: Medir o comprimento de uma folha de papel e expressar essa medida com representação fracionária, utilizando um lápis como unidade de medida.

Fonte: As autoras (2020).

Observamos, no Quadro 2.1, as diferentes ideias associadas às variadas interpretações e à complexidade, necessidade e importância de que sejam discutidas com os alunos no ensino de frações. Assim, mais do que habilitar os alunos a operar com frações, temos que ofertar a eles situações com experiências variadas com as múltiplas interpretações. Por isso, o ensino e a aprendizagem de frações devem ser uma preocupação dos educadores matemáticos. Kieren (1976) já defendia que a compreensão dos números racionais era mais importante do que a simples habilidade de operar com esse sistema numérico. Isto também fica claro quando esse mesmo autor associa uma ou outra interpretação ao número real, à Álgebra de equações, à probabilidade e às estatísticas descritivas e inferenciais (KIEREN, 1980).

Então, assim como Powell (2018a, 2019c), acredita-se que a introdução ao ensino de frações deve ser realizada com a interpretação das frações como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, porque:

- coincide com a gênese histórica das frações, que surgiu da necessidade de medir quantidades contínuas;
- a magnitude numérica é considerada;
- há necessidade de determinar uma unidade de medida;

- há ruptura com a ideia e propriedades dos números naturais, sendo necessário um novo campo numérico dos números racionais, favorecendo a compreensão dos números fracionários.

Considera-se que cada uma das interpretações de fração é importante, e todas devem ser apresentadas e discutidos com os estudantes para construir, de maneira sólida, o conceito de números racionais como campo diverso dos números naturais, pelos motivos já apresentados.

Quanto à introdução de frações, aponta-se que a perspectiva da medição é a mais apropriada pelos motivos já elencados. No entanto, é necessário discutir as diferentes concepções das frações e suas devidas diferenciações e associações, sem serem ensinadas como conteúdos diversos como, por exemplo, a fração como quociente, que muitas vezes só é usada na transformação da fração para números decimais. Assim, a questão está em como e quando cada interpretação deve ser ensinada, o que precisa levar em consideração para a apropriação e compreensão dos alunos de que contar e medir são atividades associadas, porém distintas.

Para isso, são necessários estudos empíricos que esclareçam quando e como ensinar cada interpretação de fração, favorecendo sua compreensão, diferenciação e associação aos demais conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BARBOSA, J. C. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e Distanciamentos. *In*: OLIVEIRA, A. M. P. de; RAMALHO, M. I. **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática** [livro eletrônico]. Ortigão. Brasília: SBEM, 2018. Coleção SBEM. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_.pdf. Acesso em: 20 jan. 2020.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A., **Rational Numbers Concepts** in Acquisition of Mathematics Concepts and Process, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de fevereiro de 2020.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Portugal, 1951.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza del Número Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESCOLANO, R. V. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente**. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007.

ESPADINHA, T. B. **O Desenvolvimento das Representações da Magnitude de Números Fracionários.** 2015. 72 f. – Faculdade de Psicologia, Medicina, Ciências e Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa 2015.

GAIRÍN, J. M. **Sistemas de representación de números racionales positivo**s **- Un estudio con maestros en formación**. Tese, Universidad de Zaragoza, 1998.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Do Paraná**: Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669. Acesso em: 10 fev. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba, PR: SEED/PR, 2019. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669. Acesso em: 10 fev. 2020.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM**: **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM**, Cascavel, Pr, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Inicias. **XIII ENEM**, Brasil, jun. 2019d. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1258/1834. Acesso em: 05 maio 2020.

POWELL, A. B. Consequências de Olhares Filosóficos e Históricos na Aprendizagem de Frações. In**: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - XXIV EBRAPEM**, 2020, Cascavel, Pr. Palestra de abertura. Cascavel: Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=K02feUaQzRA. Data de acesso: 25 nov. 2020.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012 - versão kindle.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez. 2019.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

TORBEYNS, J. SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.

3 FRAÇÕES: COMPREENSÕES DE ALUNOS DE 6º ANO EM PRÁTICAS DE ENSINO EXPLORATÓRIO ORIENTADAS PELA PERSPECTIVA DA MEDIÇÃO

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]

Resumo: Neste artigo se investigou a compreensão por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre os números racionais como campo numérico diverso dos números naturais, a partir de práticas pedagógicas remotas orientadas pelo Ensino Exploratório de Matemática (EEM) abordando as frações na perspectiva da medição. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, cuja análise de dados considerou os registros escritos dos alunos, gravações das reuniões e transcrições, em que se buscou identificar elementos que revelem e evidenciem se e como os alunos compreendem as frações como medida. Como resultado, verificou-se que os alunos compreenderam a diferença da magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, quando conseguiram comparar frações, e compreenderam que frações equivalentes têm o mesmo tamanho (mesma medida), mas podem ser escritas por representações simbólicas diferentes e, que, quando se multiplicam frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos fatores, o que não ocorre nos números naturais. Conclui-se que as compreensões dos alunos foram suscitadas nas práticas desenvolvidas, as quais favoreceram pensarem sobre os números racionais do ponto de vista epistemológico antes do simbólico, contrapondo o simbólico com os significados e sentidos decorrentes das representações não simbólicas.

Palavras-chave: Números Fracionários. Perspectiva da Medição. Tarefas de Natureza Exploratória. Ensino Exploratório de Matemática. Ensino Remoto.

FRACTIONS: UNDERSTANDINGS BY 6th GRADE STUDENTS IN EXPLORATORY TEACHING PRACTICES GUIDED BY THE MEASUREMENT PERSPECTIVE

Abstract: This paper has investigated the comprehension by students at 6th Grade Elementary School on rational numbers as a numerical field other than naturals numbers, from remote pedagogical practices guided by Exploratory Teaching of Mathematics (ETM) approaching fractions in measurement perspective. This is a qualitative research of interpretative nature, whose data analysis considered reports by students, meeting recordings and transcriptions, in which was searched for identifying elements that reveal and make evident whether and how students understand fractions as measure. As a result, it was verified that classes based on ETM make possible that students understand difference in the numerical magnitude of natural numbers for fractional numbers, when they can compare fractions, and they understood that equivalent fractions have the same size (same measure), but they may be written by different symbolic representations. Regarding the product, students have concluded that when fractions different from zero and one are multiplied, multiplication result can be lower than one of the factors, and it does not occur with natural numbers. It is concluded that the students' understandings were raised in the developed practices, which favored thinking about rational numbers from an epistemological point of view before the symbolic one, contrasting the symbolic with the meanings and senses arising from non-symbolic representations.

Keywords: Fractional Numbers. Measurement Perspective. Tasks of an Exploratory Nature. Exploratory Teaching of Mathematics. Remote teaching.

---

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

3.1 Introdução

Percebemos, pela nossa experiência docente, que o ensino de frações prioriza procedimentos sobre como operar frações decorando regras, o que não colabora para promover situações que favoreçam a compreensão pelos alunos das diferentes interpretações de uma fração. Hiebert e Behr (1991) apontam que o ensino de frações deve dar mais importância ao significado do que ao símbolo, e segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, "a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais" (BRASIL, 1998, p. 101). Reflexos do ensino podem ser observados na aprendizagem dos alunos quando, por exemplo, o estudante utiliza as propriedades dos números naturais para operar ou comparar frações (BEHR *et al.*, 1983). Essas dificuldades ecoam além do Brasil, pois Fazio e Siegler (2011) constataram que estudantes de várias partes do mundo têm dificuldades com frações. Outro problema apontado por Campos e Rodrigues (2007), citando Caraça (1951), é quanto ao entendimento do conceito de unidade como referencial a ser tomado para resolver problemas, o que, segundo os autores, está associado a esse conceito ser pouco explorado no ensino de números racionais. Lopes (2008, p. 20) critica o desconhecimento da "história do conceito de frações, bem como de suas componentes, epistemológica e cognitiva" pela maioria dos professores e autores de materiais didáticos. O autor denuncia que

> O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções"[1], cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico (LOPES, 2008, p. 20-21).

Portanto, ao invés de ensinar procedimentos, precisamos de práticas de ensino que favoreçam a compreensão dos alunos em relação às interpretações[2] das frações. Nesse contexto, o EEM é uma abordagem de ensino e de aprendizagem que permite que o professor conduza

[1] Carroções podem ser explicados como "as expressões numéricas que ocupavam uma folha inteira de caderno" (BRASIL, 2014).

[2] Estudos de Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983), Lamon (2012) e outros remetem à importância de ensinar diferentes interpretações de números racionais para os alunos, de modo que se estabeleça uma base sólida para a compreensão das frações. As frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, se articulando individualmente e entre si. Nesse sentido, ao menos cinco interpretações devem ser consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021).

suas aulas em uma perspectiva diferente do modelo de ensino tradicional ou direto, centrado nesse mesmo professor. Esse processo de comunicação consiste na transmissão dos conteúdos matemáticos pelo professor para os alunos, seguido de exercícios de aprendizagem e fixação, pressupondo que os estudantes aprendem por reprodução (PONTE, 2005).

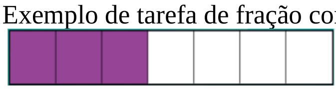
Para isso, o professor deve planejar e desenvolver situações de aprendizagem para os alunos com tarefas que sejam provocadoras e sequenciadas, de forma a oportunizar que os estudantes conheçam e façam matemática com significado, além de desenvolver competências, como resolução de problemas, raciocínio e comunicação (CANAVARRO, 2011; PONTE, 2014).

Orientados por essa perspectiva, planejamos aulas para o desenvolvimento de tarefas de natureza exploratória sobre o ensino de frações na perspectiva da medição para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Paraná. No entanto, com a suspensão das aulas presenciais em março de 2020, em razão da pandemia ocasionada pela disseminação da doença Covid-19, precisamos rever nosso planejamento docente, reestruturando as aulas, as tarefas e a forma/meio que seriam desenvolvidas com os alunos (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021). Esse cenário, por um lado preocupante e desolador, constituiu-se, por outro, desafiador e propulsor para problematizar questões, como a que nos propomos a investigar neste artigo, que embora envolva muitas outras variáveis, centramos, aqui, na compreensão dos números racionais como campo numérico diverso dos naturais por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental. Assim, discutimos a necessidade de uma nova ontologia para o ensino e para a aprendizagem de frações: a perspectiva da medição (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2019b), e como ela pode contribuir para a compreensão dos números racionais e suas diferentes interpretações (DONEDA DE OLIVEIRA; BASNIAK, 2021).

3.2 O Ensino de Frações para Compreensão dos Números Racionais

Scheffer e Powell (2019) analisaram livros didáticos atuais do 4º ano do Ensino Fundamental que tratavam do conteúdo de frações, e entre outros apontamentos, verificaram que a abordagem de frações como parte-todo é a que predomina. Essa maneira de abordar frações, associada à ideia de parte-todo, utilizando figuras e/ou objetos particionados, tem o intuito de dar subsídios concretos e visuais ao aluno (POWELL, 2018a). No entanto, Lamon (2001, p.150) destaca que, “matematicamente e psicologicamente, a interpretação parte/todo da fração não é suficiente como base para o sistema de números racionais”. Powell (2018a; 2018b) alerta que o conceito de fração trabalhado nas escolas, em que uma área ou conjunto discreto é dividido em partes iguais, em uma perspectiva de partição, restringe a compreensão dos alunos. Essa abordagem de divisão de um inteiro em partes iguais não é suficiente para fundamentar o conceito de frações. O que encontramos nos livros didáticos é que, ao introduzir o conceito de frações como parte-todo, apresenta-se esse tipo de exemplo e/ou tarefa: escreva na forma de fração a parte sombreada da figura.

Figura 3.1 – Exemplo de tarefa de fração como parte-todo



Fonte: As autoras (2020).

Escolano e Gairín (2005) constatam que esse tipo de exemplo ou tarefa não contribui para o ensino e a aprendizagem de frações, pois obriga o aluno a: interpretar a representação gráfica do todo e da parte sombreada, e fazer a transferência dessas representações gráficas para as simbólicas; fazer uma dupla contagem, utilizando números naturais, do todo e das partes sombreadas; e representar, de forma simbólica, os resultados dessas contagens, colocando uma linha para separar o todo (resultado dessa contagem é escrito abaixo da linha) e as partes sombreadas (resultado dessa contagem é escrito e acima da linha).

Dentre alguns problemas ocasionados pelo ensino de fração exclusivamente como parte-todo, Escolano e Gairín (2005) salientam o conhecimento adquirido de forma visual, geralmente pela divisão de figuras geométricas regulares, destacando uma parte e desprezando a medição de magnitude. Em outras palavras, o ato de medir é simplesmente ignorado, bastando fazer uma dupla contagem com números naturais. Para medir é necessária uma unidade, mas nessa abordagem, não é necessário que o aluno saiba qual é a unidade para resolver a tarefa: basta fazer a dupla contagem com números naturais, não havendo a necessidade de um conjunto numérico diferente, o conjunto dos números racionais.

Por isso, conhecer e discutir as propriedades e diferenças entre os números naturais e os números fracionários[1] possibilita que os alunos reflitam e compreendam que são campos numéricos diversos. Isto porque a reflexão sobre essas propriedades favorece o entendimento de magnitude numérica, as diversas representações simbólicas, densidade, e produto e quociente. Obersteiner *et al.* (2019) *apud* Powell (2019b) sintetizam essas diferenças, conforme síntese do Quadro 3.1.

[1] Compreendido como aquele que pode ser representado por uma classe de frações (frações equivalentes) (SILVA, 2005).

Quadro 3.1 – Diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários

Categoria de Propriedades	Propriedades	
	Números Naturais	**Números Fracionários**
Sinalização de magnitude numérica	Mais dígitos, quanto maior a magnitude: 123 > 23. Numeral maior, maior número: 9 > 3.	Nem o número de dígitos no numerador ou denominador, nem as magnitudes dos dígitos determinam a magnitude da fração: $\frac{8}{9} > \frac{123}{432}$. Numerais maiores não indicam maior número: $\frac{99}{1000} < \frac{4}{3}$.
Representação simbólica	Não usando operações, a magnitude tem uma única representação simbólica: a magnitude de um conjunto de três itens é simbolizada unicamente com o número 3.	Não usando operações, a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas: um item e meio $= \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \cdots$
Densidade	Cada número natural tem unicamente um antecessor imediato, um sucessor imediato ou ambos: Para o 5, o antecessor imediato é 4 e o sucessor imediato é 6. Entre quaisquer dois números naturais, o número de números naturais é finito: entre 2 e 7 há quatro números naturais, 3, 4, 5 e 6.	Cada fração não possui nenhum antecessor imediato ou sucessor imediato. Entre quaisquer duas frações existem infinitas outras frações. $\frac{2}{7}$ não é antecessor imediato da $\frac{3}{7}$. Entre as duas frações existe, por exemplo, este conjunto infinito de frações: $\left\{\frac{13}{42}, \frac{11}{35}, \frac{9}{28}, \frac{7}{21}, \frac{5}{14}, \ldots\right\}$.
Produto e Quociente	Multiplicação pode ser definida como adição repetida: 3 + 3+ 3 +3 = 4 × 3. Multiplicar dois números naturais diferentes de 1 ou 0 entre si produz um resultado (produto) maior que os fatores: 4 × 3 = 12, 12 > 4 e 12 > 3. Dividir quaisquer dois números naturais que sejam diferentes de 1 produz um quociente menor do que o dividendo: 12 ÷3 = 4, 4 < 12.	Multiplicação como adição repetida é uma definição insuficiente: $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$, mas $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ não. Multiplicar duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode produzir um resultado (produto) menor que um dos dois fatores: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$, $\frac{1}{3} > \frac{2}{15}$ e $\frac{2}{5} > \frac{2}{15}$. Dividindo-se duas frações diferentes de 1 entre si pode resultar em um quociente maior que o dividendo: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$, $2 > \frac{1}{2}$ e $2 > \frac{1}{4}$.

Fonte: Adaptado de Obersteiner *et al*. (2019) apud Powell (2019b).

Observando o Quadro 3.1, constatamos que o estudo de frações, abordando apenas a perspectiva do particionamento, não permite diferenciar todas as propriedades dos racionais, porque essa abordagem está muito relacionada à contagem, confundindo-se com as propriedades dos naturais. Desta forma, o aluno não assume a fração como um novo número, por se tratar de uma situação descritiva (parte como numerador e todo como denominador).

Em seus estudos, Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) utiliza as barras *Cuisenaire* físicas para que os alunos possam progredir das frações não-simbólicas para as simbólicas. Tais barras permitem a comparação de quantidades contínuas.

Sabemos que os estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental já possuem conceitos e ideias pré-estabelecidos sobre frações, sejam eles adquiridos por meio de experiências vividas dentro da escola ou fora dela. Ainda, que a maioria dos estudantes desse ano escolar é capaz de quantificar, ordenar, classificar, relacionar, comparar, comprar, vender e medir. Perez (2008, p. 41-42) explica que

> o tema grandezas e medidas tem um cunho social muito forte e por isso as crianças, quando vêm para a escola, já realizaram algumas experiências mesmo que informais, com medidas, seja em jogos, brincadeiras ou outras atividades do seu dia a dia.

Esse conhecimento dos alunos não pode ser descartado, mas deve ser destacado quanto a sua importância e percepção no cotidiano dos estudantes. Isto porque, a partir do momento que acordamos, começamos a medir: medimos o tempo e organizamos nossos afazeres diários em função do tempo, a quantidade de alimento a ser consumida (massa), a temperatura dos alimentos que consumimos, o tamanho do copo e a quantidade de líquido que será colocada dentro desse copo, etc. É lógico que algumas dessas atividades não requerem precisão de medidas, basta aproximar. Perez (2008, p. 42) alerta que "o ato de medir requer experiência e prática em estimativas, classificações e seriações, além de estabelecer o atributo da grandeza que se quer medir", não sendo uma tarefa fácil para as crianças.

Na história da Matemática, verificamos que a primeira ideia de número racional está associada à representação da medida de quantidades de magnitudes. Para Powell (2019b, p. 03), a magnitude é uma propriedade de todos os números reais, e

> a magnitude absoluta é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida.

Dessa forma, o ensino de frações por meio da medição é fundamentado na ideia de magnitudes, mas, para isso, é necessário estabelecer uma unidade de medida. Portanto, a história dos números racionais está intimamente ligada à necessidade de padronização de unidades de medidas, ao sistema métrico decimal, e ao sistema internacional de medidas (RUSSELL, 1967; GAIRÍN, 1998; BEHR *et al.*, 1983; PEREZ, 2008, ROQUE, 2012). No entanto, precisamos diferenciar grandezas, como o que é passível de medida, de quantidade, o que é de fato medido e indicado por números (RUSSELL, 1967). Assim, comprimento, área, volume, etc., são considerados grandezas de diferentes ordens, e o número encontrado ao realizar a medição é a quantidade. Como exemplos, podemos citar: 3 *cm*, 1,4 *m²*, 20 *l* (PEREZ, 2008). Powell (2019b, p. 58) afirma que "a quantidade física que expressa magnitude mais direta e inequivocamente que outras é a de comprimento".

Ao apoiar o ensino de frações na medição, evocamos o sentido de relação; ou seja, "uma fração é definida como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis da mesma espécie" (POWELL, 2019c, p. 709). Assim, para Scheffer e Powell (2019), uma abordagem coerente e sólida para o ensino e a aprendizagem de frações está na história das frações, que surgiram devido à necessidade de medição. Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), documento que regulamenta as competências gerais e específicas, as habilidades e as aprendizagens essenciais para todos os estudantes do Brasil referente à Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), no que diz respeito ao conteúdo de números racionais, pontua que:

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (BRASIL, 2018, p. 269).

Desta forma, nosso estudo se fundamenta nesse novo caminho epistemológico para o conhecimento fracionário, que não se baseia na contagem ou partição, mas se sustenta na história dos números racionais como medida e na magnitude das frações. Assim, contribui para o desenvolvimento do senso fracionário, que abarca os seguintes componentes: a *flexibilidade*, que envolve as diferentes representações de uma mesma fração e a escolha daquela mais adequada; a *razoabilidade*, que implica na avaliação se o que foi flexibilizado ou calculado está correto; e a *magnitude* como conceito central (POWELL; ALI, 2018).

Além disso, acreditamos que o EEM se constitui em um grande desafio para professores porque, além das escolhas criteriosas das tarefas, as atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir as aulas, demandam bastante atenção e seu papel é ativo, mas de natureza diversa do ensino dito tradicional ou direto (PONTE, 2005; MENEZES; OLIVEIRA; CANAVARRO, 2013), como discutimos brevemente na subseção que segue.

3.3 O Ensino Exploratório de Matemática

A metodologia ativa e inovadora do Ensino Exploratório de Matemática - EEM exige mudanças de atitudes tanto de professores quanto de alunos. Do professor é necessário estudo, planejamento, organização, reflexão, conhecer e conduzir a aula para que as dimensões do EEM se manifestem: *inquiry*, reflexão, comunicação e colaboração[1]. Do aluno é necessário protagonismo para resolução da tarefa, e isto exige adaptação a essa nova metodologia, compreender que o trabalho é coletivo, refletir e comunicar suas ideias e raciocínios, e refletir sobre as ideias dos colegas em um processo dialógico de colaboração. Assim, ao contrário do ensino tradicional, em que o professor desenvolve suas aulas assentes em práticas expositivas e diretas (PONTE, 2005), no EEM, o aluno é o protagonista e o professor é o mediador.

A fim de orientar e organizar as ações do professor, Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases, que Cyrino e Teixeira (2016) admitem ser quatro:

1ª) *Introdução da tarefa* (IT): é o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase, bem como o tempo destinado às fases de desenvolvimento e discussão das resoluções da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa;

2ª) *Realização da tarefa* (RT): nesta fase, os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias e conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida, é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolvê-la em sala de aula. Essa preparação busca antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que saiba como agir, e não valide ou refute ideias;

3ª) *Discussão coletiva da tarefa* (DCT): para este momento, o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam elas corretas ou não, para que, na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões;

4ª) *Sistematização das aprendizagens* (SAM): o papel do professor é estruturar e organizar as aprendizagens matemáticas. Não basta sintetizar ideias, mas sistematizar e

[1] As dimensões do EEM são discutidas nos trabalhos de Estevam e Basniak (2019).

institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Além disso, o EEM sustenta-se em uma seleção criteriosa de tarefas pelo professor, que são resolvidas em um ambiente que promova a comunicação entre alunos e alunos, e alunos e professor, com ênfase para as discussões coletivas, proporcionando negociações de significados matemáticos e desenvolvimento de raciocínios (MENEZES; OLIVEIRA; CANAVARRO, 2013; PONTE, 2005).

3.4 Contexto e Pressupostos Metodológicos

Para atingir o objetivo deste trabalho, planejamos e organizamos situações de aprendizagem por meio de tarefas de natureza exploratórias sobre o conteúdo de frações que fossem desafiantes e devidamente sequenciadas, a fim de que os alunos compreendessem frações como medida. A fim de que assim, os alunos pudessem compreender frações equivalentes, (re)conhecer formas de representações de frações, bem como compreender magnitude e capacidade de operar com frações; ou seja, o desenvolvimento do senso fracionário (POWELL; ALI, 2018). A transposição do campo dos números naturais para os números racionais está entre as ideias matemáticas mais importantes e complexas que os alunos do Ensino Fundamental precisam compreender, além de se tratar de conteúdo elementar para compreensão de outros conteúdos, como Álgebra, por exemplo (BEHR *et al*., 1983).

Portanto, se planejar tarefas de natureza exploratória não é algo simples, no contexto do ensino remoto, foi mais desafiante e complexo, especialmente por envolver os números racionais. Assim, nossas ações, antes e durante as aulas, foram orientadas pelos quadros reelaborados por Oliveira e Basniak (2021), que sustentam ações intencionais do professor, assentes no EEM, envolvendo Tecnologias Digitais – TD, e o papel esperado dos alunos em todas as fases de gestão da aula: IT, RT, DCT e SAM. Esses quadros foram norteadores para o desenvolvimento das aulas no ensino remoto, e uma discussão pormenorizada desses aspectos pode ser encontrada em Oliveira e Basniak (2021). Nesses quadros, procuramos registrar e antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos e, por isso, eles foram atualizados durante o desenvolvimento das tarefas realizadas neste trabalho. Afirmamos que não se trata de quadros estáticos, pois é possível que sejam ampliados e ajustados de acordo com novos elementos: questionamentos, equívocos, estratégias de resolução, etc.

Todas as tarefas, quadro de orientação/antecipação, bem como os planos de aulas foram discutidos e validados em reuniões síncronas (*lives*[1]) via *Google Meet*[2] pelos integrantes do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE, e foram essenciais para a validação do planejamento, dos objetivos, das ações dos alunos e professor, além da sistematização das aprendizagens matemáticas do conteúdo.

As aulas remotas foram desenvolvidas com alunos de duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino, que tinham entre 11 e 13 anos, e já haviam estudado frações em anos anteriores do Ensino Fundamental. Por isso, as frações simbólicas foram abordadas juntamente com não-simbólicas, mas não foi o foco do trabalho analisar as diferenças e implicações disso, pois as análises foram centradas na compreensão dos alunos acerca das frações na perspectiva da medição.

Foram convidados todos os alunos dessas turmas em que a professora pesquisadora trabalhou no ano de 2020. Dos 61 alunos, 30 preencheram os termos de assentimento e consentimento da pesquisa, e 22 deles participaram do início ao fim da pesquisa.

Para organizar os encontros, os alunos preencheram um formulário do *Google Formulários,* elaborado pela professora pesquisadora, informando dias e horários disponíveis, o tipo de conexão com a internet e artefatos disponíveis (computador, *notebook*, celular ou *tablet*). Com estas informações, seis grupos foram constituídos, com cinco alunos em cada um.

No Quadro 3.2, explicitamos a organização final dos grupos, os pseudônimos escolhidos pelos próprios alunos, os equipamentos e conexão disponível, além dos dias e horários dos encontros dos grupos (*lives*).

Quadro 3.2 – Organização dos encontros semanais

Grupos	Participantes	Artefatos Disponíveis	Conexão	Dia da Semana e Horário
G1	Docinho, Doguinha, Florzinha, Fofinha, Lindinha e Thor	Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi*	Terças-feiras às 8h

[1] Utilizamos o termo *live* para reuniões síncronas (ao vivo) transmitidas via internet por meio de redes sociais, como Facebook, Instagram, ou ainda via *Google Meet* (a interação entre os participantes pode ocorrer por meio de áudio e/ou vídeo e/ou mensagens escritas - *chat*) ou *Youtube* (a interação ocorre apenas por mensagens escritas - *chat*).

[2] *Google Meet* é uma solução desenvolvida pela *Google,* que oferece serviço de comunicação por videoconferência gratuito para até 250 pessoas para contas institucionais. Pode ser utilizado no navegador de internet ou instalando o aplicativo *Google Meet* para dispositivos móveis. Os participantes podem compartilhar a tela do seu dispositivo apresentando documentos, imagens e qualquer outro tipo de arquivo. Essas reuniões podem ser facilmente compartilhadas por *link* para que os participantes acessem, e podem ser gravadas e posteriormente compartilhadas para que sejam revistas ou visualizadas por quem não participou.

G3	Boom, Flora, Maluquinha, Mazarect e Olívia	*Notebook* e celular	*Wi-fi* e Dados Móveis	Terças-feiras às 18h30min
G4	Anubis, Bob, Fifo, Magrão, Spider-man e Ymercurius	Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi*	Quartas-feiras às 10h
G5	Luffy, Mulher Maravilha, Poster, Viúva Negra, Zorro	Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi*	Quartas-feiras às 14h40min
Todos os alunos participantes e não participantes da pesquisa		Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi* e Dados Móveis	Sextas-feiras às 14h40min

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Portanto, os dados coletados são decorrentes de vinte e oito (28) reuniões, todas realizadas via *Google Meet*, sendo: sete (07) reuniões com o G1[1], seis (06) reuniões com G4, seis (06) reuniões com G5, e três (03) reuniões com o G3[2], além de seis (06) reuniões com todos os alunos, participantes e não participantes da pesquisa[3]. A aula foi gerida em fases, e em uma mesma reunião (*live),* tivemos a IT e RT para cada um dos grupos. Em outra reunião (*live)* com todos os alunos, foi realizada a DCT e a SAM, com pelo menos um dia de intervalo entre as duas primeiras fases. Em todas as tarefas utilizamos o *applet* das *Barras Cuisenaire*[4] e na Tarefa 4, utilizamos também, os *applets Quadriláteros*, *Fraction Models e Prova sem palavras*.

No Quadro 3.3 explicitamos as tarefas desenvolvidas, seus objetivos e as datas de desenvolvimento das fases de cada tarefa, bem como o tempo das gravações, totalizando 2454 minutos, quase 41 horas.

Quadro 3.3 – As tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados

Tarefa	**Objetivo(s)**	**Dias de desenvolvimento das fases e minutos gravados**		
		IT e RT		**DCT e SAM**
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	15/09/2020 G1: 124 min G3: 99 min	16/09/2020 G4: 100 min G5: 61 min	18/09/2020 Todos os alunos 91 min
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; - Compreender a representação fracionária.	22/09/2020 G1: 107 min G3:87 min	23/09/2020 G4: 97 min G5: 80 min	25/09/2020 Todos os alunos 66 min
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 2)	- Comparar frações; - Compreender a adição de frações de mesma unidade de medida.	29/09/2020 G1: 112 min G3: 75 min	30/09/2020 G4: 105 min G5: 82 min	02/10/2020 Todos os alunos 112 min

[1] Este grupo teve uma reunião a mais porque os integrantes não conseguiram terminar a tarefa em dois encontros.
[2] O G3 reuniu-se menos vezes e, portanto, não realizaram as tarefas 3 e 4, pois são alunas que têm maiores dificuldades de acesso à internet e de disponibilidade de equipamentos para acesso às reuniões.
[3] Para as fases de DCT e SAM, todos os alunos das duas turmas dos 6º anos foram convidados a participar, mesmo não fazendo parte dos grupos participantes da pesquisa.
[4] Optamos por utilizar o *Applet* das *Barras Cuisenaire* disponível no site NRICH em https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html.

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento das fases e minutos gravados		
		IT e RT		DCT e SAM
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; - Compreender adição e subtração de frações de unidades de medida diferentes.	14/10/2020 G1:95 min	14/10/2020 G4: 96 min G5:53 min	16/10/2020 Todos os alunos 76 min
Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros	- Compreender multiplicação de frações; - Associar a representação decimal à representação fracionária; - Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros. - Compreender os números racionais como campo diverso dos números naturais.	20/10/2020 G1:126 min 21/10/2020 G1: 60 min G4: 100 min G5:82 min	28/10/2020 G1:85 min G4:97 min G5:71 min	23/10/2020 Todos os alunos 46 min 30/10/2020 Todos os alunos 69 min

Fonte: As autoras (2020).

Nas reuniões síncronas, a fim de que os alunos tivessem mais autonomia para realizar as tarefas, na fase de *realização da tarefa*, a professora, embora permanecesse conectada todo o tempo, depois de orientar os alunos quanto ao desenvolvimento da tarefa, desligava o áudio e a câmera e informava aos alunos que, caso precisassem de auxílio, deveriam chamá-la no grupo do *WhatsApp*.

Nesta pesquisa, procuramos por elementos que revelem e evidenciem se e como os alunos compreendem: as frações como medida; a magnitude de frações; que para uma mesma magnitude há uma infinidade de representações (frações equivalentes); que os números racionais não têm um sucessor e antecessor imediato, e que na multiplicação de números racionais, o resultado pode ser menor que um dos fatores. Portanto, trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, cuja análise de dados considerou os registros escritos dos alunos, gravações das reuniões e transcrições.

A fim de atingir o objetivo deste artigo, as análises foram estruturadas da seguinte maneira: primeiramente, analisamos os registros das reuniões das fases de DCT e SAM (reuniões gravadas via *Google Meet*, transcrições e registros escritos), buscando identificar, nos diálogos e registros dos alunos, evidências de suas diferenciações e compreensões sobre as frações como medida e das propriedades e diferenças entre números naturais e números racionais: magnitude de frações, frações equivalentes e as diferenças entre operar com números naturais e frações (Quadro 3.1). Em seguida, analisamos os vídeos, transcrições desses vídeos e registros escritos das fases de IT e especialmente do DCT, a fim de identificarmos como a dinâmica das tarefas e das aulas assentes no EEM contribuíram para essas compreensões.

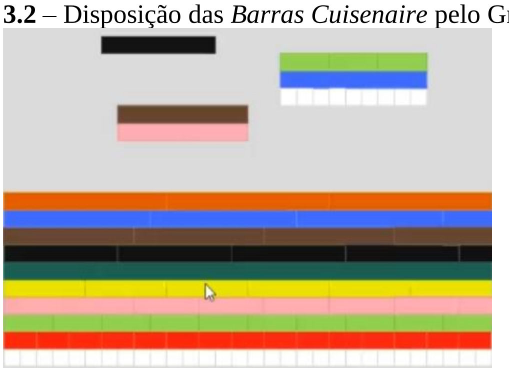
A fim de situar o leitor quanto ao desempenho dos alunos ao longo das aulas, analisamos as tarefas na ordem em que foram propostas e desenvolvidas (Tarefa 1, Tarefa 2 - parte 1 e 2, Tarefa 3 e Tarefa 4), e de/em todas elas, apresentamos excertos da DCT de um mesmo grupo, por ser a fase em que os alunos expressam suas ideias de forma mais organizada, deixando claro suas (in)compreensões.

3.5 Análise dos Dados

A Tarefa 1, disponível no Apêndice B, teve como objetivo provocar os alunos a compreenderem a fração como medida e, para isso, precisavam medir o comprimento horizontal da região cinza do *applet*. Para que conseguissem responder à questão, os grupos precisavam discutir como fariam para determinar o comprimento horizontal total da região do *applet* usando as barras que, inteiras, não completavam o comprimento.

A medida do comprimento horizontal do *applet* encontrada pelo G5 foi de 30 barras brancas. Para isso, eles dispuseram todas as barras na tela para realizar a medição, e fizeram algumas comparações entre as barras (Figura 3.2), explicando o raciocínio na DCT, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

Figura 3.2 – Disposição das *Barras Cuisenaire* pelo Grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Poster: *Bem, vamos começar primeiro pelo* [bloco] *rosa. O rosa faltou a metade porque, como o rosa representa quatro blocos brancos, então, o que faltou foram dois blocos brancos. Então, podemos constatar que faltou a metade dele.*
O azul deu $\frac{1}{3}$*, porque o azul, se perceber, ele vale nove blocos brancos, e o que faltou deu três blocos brancos.*

Poster: *O outro foi o* $\frac{2}{7}$*, que foi o preto, porque o preto representa sete blocos brancos, e ele não tinha uma conta como as outras* [referindo-se a fazer equivalência de frações]*, igual à rosa e a azul. Então seria completo. Então, colocamos como* $\frac{2}{7}$ *porque faltou dois blocos* brancos [mostram no *applet* conforme a figura 3.2].

Tarefa 1 – G5. DCT, 18/09/2020.

Verificamos que o G5 expressa a ideia de equivalências de frações, apesar de não verbalizar de forma sistematizada. Conseguem associar que $\frac{2}{4}$ equivalem a $\frac{1}{2}$ (no momento da explicação, eles apontaram as barras no *applet* e compararam a barra rosa com a branca, e com a barra vermelha); portanto, utilizaram mais que uma unidade de medida. Assim como $\frac{3}{9}$ que equivale a $\frac{1}{3}$, compararam a barra azul com a branca, e a azul com a verde-clara.

Embora na apresentação do G5 pareça que as ideias foram construídas de forma rápida pelo grupo, essas conclusões demandaram 1 hora de discussão durante a fase de RT, pois tiveram dúvidas sobre *comprimento horizontal* e recorreram ao buscador do *Google* para esclarecer. Depois, para fazerem o registro do *comprimento horizontal*, os alunos não lembraram de utilizar frações. Comentaram sobre usar decimais, porcentagens, mas não lembraram de frações, e pediram ajuda da professora para indicar qual seria a melhor forma para registrar. Primeiramente, a professora questionou se não haveria uma forma mais precisa para nomear essas medidas que faltavam, mas como o grupo não lembrou, ela perguntou se lembravam de ter estudado frações. A partir de então, começaram a discutir sobre qual fração usar e como comparar as barras para nomear suas medidas que não completavam o *comprimento horizontal*. Isto nos dá indícios de que, embora os alunos tivessem estudado frações nos anos anteriores, não associavam a ideia de medir, e assim, consideramos que a intervenção do professor foi necessária para que realizassem a tarefa. Ao compararem as barras branca e rosa, concluíram que duas barras brancas seriam a metade da rosa, explicando que faltavam duas barras brancas para completar a rosa, e isso era exatamente a metade da rosa. Já para as demais barras, precisaram da intervenção da professora, que questionou como haviam pensado a rosa, com qual barra a haviam comparado, e só então conseguiram expressar o *comprimento horizontal* usando as outras barras como medida.

Na fase de RT, o G4 também precisou da intervenção da professora para entender o que era o *comprimento horizontal,* pois confundiram com área. A professora questionou quanto a como poderiam descobrir o que isso significava, e os alunos recorreram ao buscador *Google*. Depois disso, dispuseram as barras da direita para a esquerda e concluíram que a medida do *comprimento horizontal* era de 31 barras brancas. Começaram a registrar, equivocadamente, todas as medidas que faltavam para completar o *comprimento horizontal,* como *meio*. Só depois do questionamento da professora sobre o que era *meio,* e da sugestão para compararem a barra da cor que faltava para completar o comprimento horizontal com a barra branca, o grupo conseguiu nomear as medidas que faltavam. A interação entre os alunos do G4 na RT foi importante para que eles considerassem as frações como unidade de medida, e pudessem nomeá-las como, por exemplo, quando Bob afirmou que não estava entendendo a tarefa. Para lhe explicar, os alunos alinharam na tela as barras branca, vermelha, verde-clara e rosa, como pode ser observado na Figura 3.3 e lido no excerto a seguir.

Figura 3.3 – Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 4

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Ymercurius: *Olha a diferença da barra branca e olha a diferença da barra vermelha.*
Magrão: *É um bloco de diferença.*
Anubis: *É a metade.*
Bob: *Então o branco é a metade do vermelho, e depois o vermelho é a metade do verde, e vai indo assim?*
Magrão: *Não. O branco é* $\frac{1}{3}$ *da barra verde-clara.*
Professora: *Coloca a verde-clara com a branca pra ele ver... Está vendo que a verde-clara são 3 brancas, então a branca...*
Ymercurius e Magrão: *É* $\frac{1}{3}$ *da verde-clara.*
Anubis: *O verde é* $\frac{3}{4}$.
Magrão: *É* $\frac{1}{4}$.
Anubis: *Eu estou vendo a verde-clara com a rosa, não a branca com a rosa.*
Professora: *O aluno Anubis está falando que a verde-clara é* $\frac{3}{4}$ *da rosa. Vocês concordam?*
Magrão: *Sim.*

Tarefa 1 – G4. RT, 16/09/2020.

A seguir, Anubis sugere a Ymercurius (que está compartilhando a tela com as barras *Cuisenare* dispostas para medição do *comprimento horizontal*) que faça todas as comparações das medidas das barras vermelha, verde-clara, rosa, amarela, verde-escura, preta, marrom, azul e laranja, todas com a branca (figura do lado direito).

Figura 3.4 – Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 4: à direita, as medições do comprimento horizontal; à esquerda, comparação de todas as barras com a barra branca

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Depois de muitas discussões e questionamentos da professora (utilizando o quadro de orientações), ainda na fase de RT, os alunos do G4 explicaram o item *b* da tarefa:

Professora: [...] *A preta ficou que comprimento?*
Anubis: *4 barras e* $\frac{3}{7}$.
Professora: *E a marrom?*
Anubis: *3* [referindo-se às barras inteiras] *e* $\frac{7}{8}$.
Ymercurius: *A azul é 3* [referindo-se às barras inteiras] *e* $\frac{4}{9}$, *e a laranja 3* [referindo-se às barras inteiras] *e* $\frac{1}{10}$.

Tarefa 1 – G4. RT, 16/09/2020.

Assim como o G4 e o G5, os grupos G1 e G3 conseguiram criar critérios para nomear as medidas que faltavam para completar o *comprimento horizontal*. Na fase de SAM, os alunos registraram no caderno vários exemplos de nomenclatura de frações, além de um breve relato do contexto histórico das frações como medida.

Na continuidade, para consolidarmos a ideia da fração como medida (apesar de não explicitarmos nos objetivos) e a fim de que compreendessem a representação fracionária, propusemos a Tarefa 2 parte 1 (Apêndice D), em que os alunos realizaram medições da barra escolhida pelo grupo com barras de outras cores para estabelecer relações de equivalência, representando-as algebricamente.

Todos os grupos, coincidentemente, utilizaram as mesmas letras para representar as barras e escolheram o mesmo critério para não repetir as letras. Utilizaram o adjetivo da cor (clara: C, escura: E) e para a barra azul, escolheram a segunda letra do nome da cor (Z), conforme a Figura 3.5.

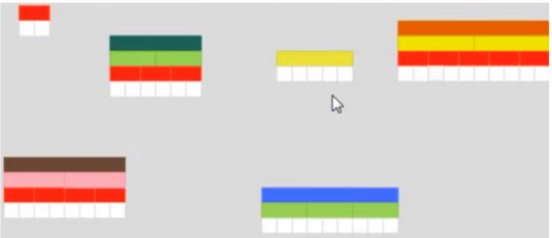
Figura 3.5 – Resolução do item *a* da Tarefa 2 (parte 1) por todos os grupos

Branca = B	Vermelha = V	Verde-Clara =C	Rosa = R	Amarela = A
Verde-Escuro = E	Preta = P	Marrom = M	Azul = Z	Laranja = L

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Segundo os relatos dos alunos, eles nunca haviam trabalhado com letras na Matemática. Mesmo assim, todos os grupos, depois de muitas discussões, conseguiram escrever equações de equivalências entre as barras escolhidas por cada grupo. Na fase de DCT, os alunos do G5 apresentaram a Figura 3.6 para explicar aos colegas como realizaram as medições das barras vermelha, verde-escura, laranja, marrom e azul.

Figura 3.6 – Resolução do item *b* da Tarefa 2 (parte 1) pelo Grupo 5



BARRA V	BARRA E	BARRA L	BARRA M	BARRA Z
1 v = 2 B	1 E= 6 B	1 L= 2 A	1 M= 2 R	1 Z= 3 C
1 B= $\frac{1}{2}$ V	1 E= 3 V	1 L= 5 V	1 M=4 V	1 Z= 9 B
	1 E= 2 C	1 L= 10 B	1 M= 8 B	1 C= $\frac{1}{3}$ Z
	1 B= $\frac{1}{6}$ E	1 A= $\frac{1}{2}$ L	1 R= $\frac{1}{2}$ M	1 B= $\frac{1}{9}$ Z
	1 V= $\frac{2}{6}$ E	1 V= $\frac{1}{5}$ L	1V= $\frac{1}{4}$ M	
	1 C= $\frac{3}{6}$ E	1 B= $\frac{1}{10}$ L	1 B= $\frac{1}{8}$ M	

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Ainda na fase de DCT, o G5 mostrou, em sua apresentação, ter compreendido a magnitude de frações, como pode ser constatado no excerto a seguir.

Poster: *Uma barra marrom pode ser equivalente a duas barras rosa, e uma barra marrom pode ser equivalente a quatro barras vermelhas, e assim por diante...*
Professora: *E o que vocês entenderam por equivalente?*
Poster: *Equivalente é o que pode ser, por exemplo, com números diferentes* [referindo-se aos algarismos do numerador e denominador], *mas o valor pode ser igual.*

Tarefa 2 (parte 1) – G5. DCT, 25/09/2020.

Nesta tarefa, as discussões que permearam os grupos foram quais barras de mesma cor poderiam ser utilizadas para medir exatamente a barra escolhida (surgiram ideias de números primos, múltiplos e divisores), e a forma de registrar as equações de equivalências. Depois de compreendido que deveriam escrever relações de equivalências da maior barra para a menor, e da menor barra para a maior, todos os grupos conseguiram atingir o objetivo da tarefa.

Essa discussão foi enfatizada na SAM realizada logo após a DCT, para que os alunos compreendessem a magnitude de fração; ou seja, que uma fração possui infinitas representações simbólicas. Os alunos registraram no caderno que, apesar de a fração ser escrita com dois algarismos (ou mais) separados por uma barra, trata-se de um único número racional, e o(s) algarismo(s) acima da barra é o numerador, e o que está(ão) abaixo é o denominador.

O objetivo da parte 2 da Tarefa 2 (Apêndice F) está relacionado à como a compreensão de frações equivalentes contribui para o desenvolvimento do senso fracionário (flexibilidade, razoabilidade e magnitude), pois, para somar, subtrair e comparar frações com unidades de medidas diferentes (denominadores diferentes), é necessário que o aluno escolha a fração mais apropriada para que consiga comparar e/ou operar com elas, e depois verifique se o resultado faz sentido (razoabilidade) (POWELL; ALI, 2018).

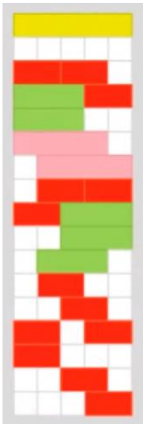
Para resolver a segunda parte da Tarefa 2, os alunos precisaram formar combinações de barras de cores diferentes que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas, e depois comparar as frações encontradas utilizando os sinais matemáticos < e > (menor e maior). Os alunos demoraram para realizar tais combinações. Depois, com a mediação da professora, os grupos conseguiram estabelecer relações aditivas e comparativas com frações de mesma unidade de medida. O G5 conseguiu realizar todas as combinações possíveis para a barra amarela, e apresentou a resolução da tarefa aos colegas da seguinte maneira.

Luffy: *A gente escolheu a barra amarela, e a gente fez 16 combinações* [...].

Professora: *Esse grupo fez todas as possibilidades de barra.*

Luffy: *A gente fez 15 aqui* [além da amarela], *mas colocamos 10* [referindo-se à quantidade de adições escritas], *porque no final, só vai ficar repetindo as mesmas coisas. Lembrando que* $\frac{1}{5}$ *representa a branca,* $\frac{2}{5}$ *representa a vermelha,* $\frac{3}{5}$ *representa a verde-clara,* $\frac{4}{5}$ *representa a rosa, e* $\frac{5}{5}$ *representa a amarela. Aqui, como vocês podem ver, a gente fez* $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$, *que seria 5 barras brancas que equivalem a uma barra amarela inteira. Aqui* $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ *equivale a* $\frac{5}{5}$, *e quer dizer duas vermelhas mais uma branca equivale à amarela.* $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$, *quer dizer a barra verde-clara mais uma barra vermelha representa* $\frac{5}{5}$ *ou a barra inteira.* $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$ *quer dizer que a rosa mais a branca equivale a uma amarela. E aqui vai continuar repetindo, só. E ficou assim, a figura:*

Figura 3.7 – Registros da Tarefa 2 (parte 2) pelo Grupo 5



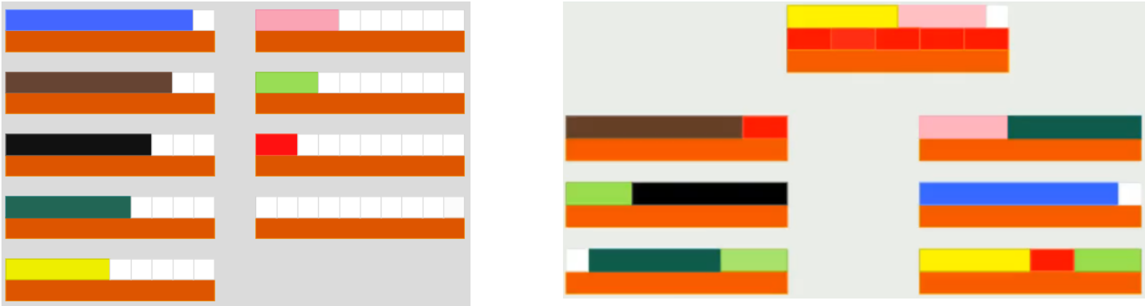
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Luffy: *Agora vamos para a d*) [lê o enunciado da questão]. *Aqui,* $\frac{1}{5}<\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}<\frac{5}{5}$; $\frac{5}{5}>\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}<\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}<\frac{5}{5}$; $\frac{2}{5}<\frac{4}{5}$; $\frac{5}{5}>\frac{1}{5}$, *e é isso.*

Tarefa 2 (parte 2) – G5. DCT, 02/10/2020.

O G1 não realizou todas as combinações de cores diferentes possíveis para a barra laranja (até porque seriam 512 combinações diferentes!), mas com as combinações formadas, conseguiram escrever relações aditivas e comparativas de frações (Figura 3.8).

Figura 3.8 – Resolução do item *b* da Tarefa 2 (parte 1) pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Esse grupo cometeu alguns equívocos quanto à unidade de medida na DCT, e tal dificuldade é apontada por Caraça (1951) e Campos e Rodrigues (2007), conforme excerto a seguir.

Docinho: *A gente fez assim porque a gente achou melhor de entender.* [...] *O laranja foi o que a gente escolheu das barras para fazer, e* $1L = \frac{2}{10} + \frac{8}{10}$ *da B. O branco, a gente só usou para complementar a conta das barras:* $1L = \frac{5}{10}$ *do amarelo* $+ \frac{5}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{3}{10}$ *do verde-claro* $+ \frac{7}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{6}{10}$ *do verde-escuro* $+ \frac{4}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{4}{10}$ *do rosa* $+ \frac{6}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{8}{10}$ *do marrom* $+ \frac{2}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{7}{10}$ *do R* $+ \frac{3}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{10}{10}$ *do branco.*

Professora: *[..] Então, deixa eu complementar uma coisa para vocês. Lembra que a professora falou da unidade de medida antes? Aqui é a mesma coisa. Quando você fala* $\frac{5}{10}$ *de A, não é de A, porque você está falando que uma laranja é igual a uma amarela mais cinco brancas, certo?*

Docinho: *Sim.*

Professora: *Vamos observar as barras Cuisenaire* [professora escreve na tela das barras *Cuisenaire*]. *A amarela é cinco décimos da laranja, e não da amarela, porque A são cinco décimos, mas são cinco décimos da laranja, e a barra branca B é um décimo da laranja.*

Docinho: *Então são todos L?*

Professora: *Todos são L.*

[...]

Professora: *O que a verde-escura é da laranja, por exemplo, quantos décimos?*

Docinho: *Seis décimos.*

Professora: *Isso, mas, então, a verde-escura é seis décimos de quem?*

Docinho: *Da laranja.*

Professora: *Isso. Quando vocês escreveram seis décimos da escura, não é da escura, é da laranja, porque se eu for pensar na verde-escura... A verde-escura em relação a ela mesma é quanto?*

Spider-man $\frac{6}{6}$.

Professora: $\frac{6}{6}$ *ou 1. A vermelha é que fração da verde-escura?*

Docinho: $\frac{2}{6}$.

Tarefa 2 (parte 2) – G1. DCT, 02/10/2020.

O excerto do G1 evidencia que a unidade de medida não havia sido compreendida, sendo necessária a mediação da professora, como pode ser lido no excerto a seguir, ocorrido na fase de RT, para conseguirem realizar a comparação multiplicativa das frações de quantidade.

Professora: [...] *Que combinação nós temos aí?*

Doguinha: *Uma amarela + uma rosa + uma branca.*

Professora: *A amarela é qual fração da laranja?*

Doguinha: *Metade.*
Professora: *E a rosa é que fração da laranja?*
Doguinha: $\frac{4}{10}$.
Professora: *E a branca é que fração da laranja?*
Doguinha: $\frac{1}{10}$.
Professora: *Então, olha o que a Doguinha falou:* $\frac{1}{2}+\frac{4}{10}+\frac{1}{10}$, *e isso dá quanto?*
Doguinha: *10.*
Professora: *10 o que?*
Doguinha: $\frac{10}{10}$.
Professora: *E a amarela, ao invés de escrevermos meio, podemos escrever como? Ela é que fração da laranja?*
Doguinha: $\frac{5}{10}$.

Tarefa 2 (parte 2) – G1. RT, 29/09/2020.

Apesar de confundirem a unidade de medida, os alunos mostraram que compreenderam frações equivalentes (flexibilidade), bem como a adição de unidades de medidas iguais.

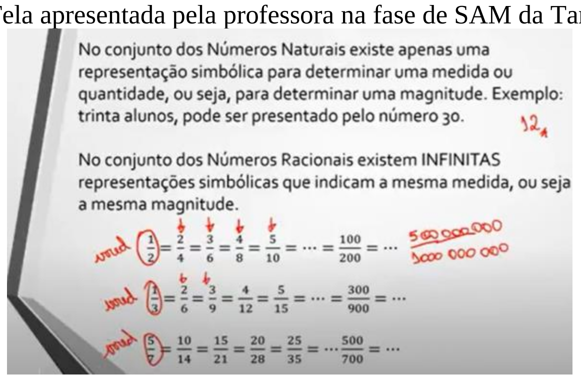
Todos os grupos estabeleceram relações aditivas, realizando corretamente a adição de frações de mesma unidade de medida, e comparações em relação à magnitude das frações. O excerto abaixo, do G4 na fase de RT, relata algumas adições do item b da tarefa, e evidencia que a unidade de medida escolhida, no caso a barra amarela, foi compreendida como uma medida inteira.

Spider-man: *Eles colocaram o nome do amarelo de 1. Eu coloquei* $1=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$ *daí, a outra que eu fiz é* $1=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$.

Tarefa 2 (parte 2) – G4. RT, 02/10/2020.

Na SAM, o enfoque foi registrar no caderno sobre adição, subtração e comparação de frações de mesma unidade de medida, frações irredutíveis e equivalentes, destacando que uma fração pode ser representada por infinitas frações simbólicas de mesma magnitude (frações equivalentes), aguçando o sentido de flexibilidade.

Figura 3.9 – Tela apresentada pela professora na fase de SAM da Tarefa 2 (parte 2)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Na sequência, a Tarefa 3 (Apêndice H) teve como objetivo comparar e compreender a adição e a subtração de frações de unidades de medidas diferentes (denominadores diferentes), e teve início com o jogo do trem. Esse jogo utiliza barras *Cuisenaire* e pode ser jogado individualmente ou em duplas, de forma que cada jogador ou dupla escolhe apenas uma cor de barra para jogar. Na sequência, os jogadores comparam suas barras e sempre joga (acrescenta mais uma barra da mesma cor) aquele que estiver com o trem menor. O jogador que deixar o seu trem do mesmo tamanho do adversário, ganha o jogo. Após jogarem algumas vezes, os alunos deveriam escolher uma rodada do jogo e indicar a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro. Com as frações estabelecidas, os grupos deveriam comparar essas frações e realizar as operações de adição e subtração.

Todos os grupos, após algumas jogadas, reconheceram que, para vencer o jogo, é necessário escolher a barra menor que a do adversário. Nesta tarefa, o G5 escolheu a rodada em que jogam com o trem (barras) vermelho e azul; e na fase da DCT, explanaram suas conclusões aos colegas da seguinte maneira:

Luffy: *A estratégia para você vencer sempre é escolher as barras menores e a branca é invencível. A vermelha equivale a* $\frac{1}{9}$ *do seu vagão, e a azul equivale à metade do seu vagão.*

Professora: *Metade do trem?*

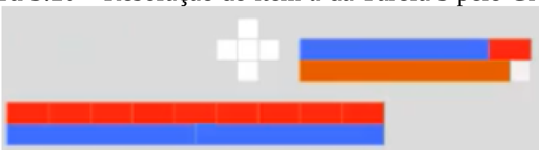
Luffy: *Sim, daí, agora, as equivalências a gente fez assim: a vermelha representa* $\frac{1}{9}$*, então a gente só fez vezes dois, que ficou* $\frac{2}{18}$*, e* $\frac{1}{2}$ *a gente pode colocar de vários jeitos, como* $\frac{9}{18}$ *e* $\frac{3}{6}$*.*

Professora: *Porque vocês usaram como medida a barra verde-clara também...*

Luffy: *Sim, para medir a azul. E a fração* $\frac{1}{2}$ *é maior do que a fração* $\frac{1}{9}$*, porque* $\frac{1}{2}$ *equivale a 50% do trem, e* $\frac{1}{9}$ *equivale por volta de 10 ou 11% do trem. Agora, a letra d) da tarefa, a gente transformou a fração* $\frac{1}{2}$ *em* $\frac{9}{18}$*, e a* $\frac{1}{9}$ *em* $\frac{2}{18}$ *para a gente conseguir somar e chegar à conclusão que* $\frac{2}{18}+\frac{9}{18}$ *equivale a* $\frac{11}{18}$*. Agora, o item e)* $\frac{1}{2}$ *equivale a* $\frac{9}{18}$*, e* $\frac{1}{9}$ *equivale a* $\frac{2}{18}$*, e* $\frac{9}{18}-\frac{2}{18}$ *equivale a* $\frac{7}{18}$*.*

Tarefa 3 – G5. DCT, 16/10/2020.

Figura 3.10 – Resolução do item *d* da Tarefa 3 pelo Grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

O grupo criou o símbolo de cruz com barras brancas para indicar que, à direita do símbolo, está a soma de $\frac{1}{9}+\frac{1}{2}$. Para isso, eles alinharam a barra azul e a vermelha lado a lado, e depois, com as barras laranja e branca (embaixo), comprovaram que o total é $\frac{11}{18}$ (Figura 3.10). Já o G1 escolheu a barra azul e a rosa, e os integrantes apresentaram dificuldade, na fase de RT, em relação à compreensão da magnitude, porque usavam as propriedades dos números naturais para operar com frações. Assim, não conseguiram associar, apenas com as representações fracionárias simbólicas, que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{9}$. Eles mesmos relataram esse problema quando responderam ao questionamento da professora sobre o porquê consideraram a barra azul, $\frac{1}{9}$, maior que a barra rosa, $\frac{1}{4}$. O excerto a seguir, embora extenso, expressa, ao mesmo tempo, a dificuldade dos alunos e o potencial das discussões coletivas para auxiliá-los a diferenciar os números naturais dos racionais, e ainda, a importância de tarefas de natureza exploratória nesse processo.

Professora: *Então, que fração é maior?*
Docinho: *A rosa… ah não, a azul.*
Professora: *Então, que fração é a azul, que vocês escreveram lá na letra a?*
Docinho: $\frac{1}{4}$ *e a rosa* $\frac{1}{9}$.
Professora: *Então, vocês vão dizer o que é maior que o quê? Vocês podem escrever azul é maior que rosa, ou seja...*
Docinho: *Professora, mas a rosa que é maior que azul...*
Professora: *Onde que a rosa é maior do que azul?*
Docinho: *Porque ali está* $\frac{1}{9}$ *e o azul está* $\frac{1}{4}$.
Professora: *Mas o que você está vendo, Docinho? Nas barrinhas?*
Docinho: *Ali na tela, bem no canto, elas estão exatas, bem igualzinho* [referindo-se ao trem azul e rosa].
Professora: *Não, olhe para os vagões, você precisa comparar só um vagão de cada. Quem é maior?*
Lindinha: *O azul.*
Professora: *E que fração o azul é?*
Docinho: $\frac{1}{4}$.
Professora: *Então você tem que dizer que* $\frac{1}{4}$ *é o que?*
Docinho: *Maior que* $\frac{1}{9}$*?*
Professora: *Vocês concordam, gente?*
Lindinha: *Eu sim.*
Docinho: *Eu acho que é menor do que* $\frac{1}{9}$*, professora.*
Professora: *Mas o que você está vendo? Você está vendo que a azul é maior. Por que você não está entendendo que a fração da azul é maior?*
Lindinha: *Professora, ela está dizendo que o* $\frac{1}{9}$ *é maior que* $\frac{1}{4}$ *porque o 9 é maior que o 4.*
Professora: *O algarismo maior na fração não significa que a fração seja maior, porque veja, vocês concordam que a rosa é menor, não concordam?*
Lindinha: *Sim.*
Docinho: *Sozinha é.*
Professora: *Então a fração, por exemplo,* $\frac{1}{9}$*, ela é maior ou menor que* $\frac{1}{4}$*?*
Docinho: $\frac{1}{9}$ *é maior que* $\frac{1}{4}$.
Professora: *Mas não é o que você está vendo...*
Docinho: *É.*
Professora: *Como é que vocês conseguem explicar isso para mim?*
Lindinha: *Porque a gente não pode representar maior ou menor pelos números* [referindo-se aos algarismos do denominador], *mas sim pelas barras.*

Professora: *Pela medida da barra, você quer dizer, né?*
Lindinha: *Isso.*
Professora: *Tenta entender, Docinho.*
Docinho: *Eu entendi professora.*
Professora: *Então, pensando na medida, por que a rosa é menor do que azul em relação à fração? É esse tipo de coisa que eu estou pedindo para vocês pensarem. Primeiro, registrem ali o que vocês entenderam. O que vocês vão escrever ali na letra c)?*
Docinho: *Eu escrevi assim: a maior fração é a da barra azul, que é $\frac{1}{4}$, e é maior que $\frac{1}{9}$. Daí eu falei que a gente não pode falar que é maior que pelos números* [referindo-se aos algarismos do denominador], *e sim pelas barras que medimos.*

Tarefa 3 – G1. RT, 16/10/2020.

O G1, ao resolver a tarefa 3, confundiu a propriedade de sinalização de magnitude numérica dos números naturais, que indica que numeral maior significa maior número, com as propriedades dos números fracionários, em que algarismos maiores, tanto no numerador quanto no denominador, não significam maior número ou magnitude. Entretanto, depois de esclarecida essa dificuldade com as intervenções da professora, e a professora pedindo para compararem outras barras de unidades de medidas diferentes, o G1 conseguiu compreender a propriedade de magnitude numérica dos números fracionários e avançar quanto às equivalências de frações para realizar as operações de adição e subtração de frações de unidades de medidas diferentes, não encontrando dificuldades em realizar tais operações. Isso mostra que a possibilidade de manusear/representar as medidas a partir das barras reflete a emergência de dificuldades epistemológicas que revelam, inclusive contradições. A contraposição da representação simbólica e não simbólica da medida suscita o raciocínio dos alunos para pensarem e perceberem as diferenças entre os números naturais e os racionais, algo pouco presente nas aulas de Matemática e nos livros didáticos, mas que se mostra essencial para a compreensão dos números racionais.

Já na fase de DCT, os alunos explicitaram que compreenderam a magnitude das frações unitárias estudadas, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

Docinho: *A maior fração é a do azul, que é $\frac{1}{4}$ e é maior do que $\frac{1}{9}$, pois não podemos dizer que é maior que pelos números* [referindo-se aos algarismos do denominador], *e sim independente das barras que medimos.*
Professora: *Explica para os colegas o que você quis dizer com isso.*
Lindinha: *A gente falava que $\frac{1}{9}$ era maior do que $\frac{1}{4}$ por causa dos números, porque 9 é maior do que 4. Só que daí a professora explicou que a gente tem que usar como medida as barras, e daí, como a gente viu que a azul é maior do que a rosa, daí $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{9}$.*
Professora: *E se vocês olharem aqui, comparando só a barra rosa com a barra azul, é possível verificar qual é maior?*
Lindinha: *Sim.*
Professora: *Isso para a fração $\frac{1}{9}$ e para a fração $\frac{1}{4}$?*
Lindinha: *Daí é só pegar uma barra azul e uma rosa, que vai perceber qual é maior.*

Docinho: *O resultado dessas frações é* $\frac{13}{36}$*, porque* $\frac{1}{4}$ = $\frac{9}{36}$ + $\frac{1}{9}$ = $\frac{4}{36}$ *dá* $\frac{13}{36}$*. Daí a gente colocou esses números, porque são equivalentes a* $\frac{1}{9}$ *e* $\frac{1}{4}$*.*

Professora: *Exato. Olha só, elas fizeram aqui* $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$*, e daí elas trocaram isso pelas equivalências* $\frac{1}{4}$ *é* $\frac{9}{36}$ *e* $\frac{1}{9}$ *é* $\frac{4}{36}$*, que é o rosa, e daí e disso elas chegaram à conclusão que dava* $\frac{13}{36}$*, e elas puderam fazer a medição disso com as barras brancas, que dava* $\frac{13}{36}$*, certo? Próximo, Docinho, da subtração.*

Docinho: *O resultado da subtração é* $\frac{5}{36}$ *porque* $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$ *que é igual a* $\frac{9}{36}-\frac{4}{36}=\frac{5}{36}$*, pois é só diminuir os numeradores, igual ao que a gente fez na conta de mais.*

Tarefa 3 – G1. DCT, 16/10/2020.

Assim como o G1, o G4 também associou que algarismos maiores das frações indicariam fração maior. Contudo, ainda na fase de RT, essas diferenças entre as propriedades dos números fracionários e naturais foi discutida e esclarecida. Na DCT, notamos que os alunos compreenderam a magnitude da fração e conseguiram escolher as frações mais apropriadas (equivalentes) para realizar as operações de adição e subtração. Por isso, dado o objetivo da tarefa, na fase de SAM, essas diferenças entre as propriedades de sinalização de magnitude numérica e representação simbólica dos números naturais e fracionários foram reforçadas, realizando o jogo do trem, com as barras rosa e preta, discutindo suas equivalências, comparação, adição e subtração. Foi explanado e registrado no caderno sobre frações unitárias, ressaltando que quanto maior a unidade de medida (denominador), menor é o número fracionário; ou seja, sua magnitude. Além disso, os alunos registraram no caderno sobre a densidade dos fracionários, que diferentemente do campo dos naturais, em que há sempre um sucessor e um antecessor imediato (exceto para o zero), os números fracionários não possuem nenhum antecessor ou sucessor imediato, pois entre quaisquer frações existem infinitas outras.

Quanto à tarefa 4, disponível no Apêndice J e L, apesar de não termos planejado, tivemos que dividi-la em duas partes, pois as fases de IT e RT dos itens *a* e *b* demoraram cerca de 2 horas para o grupo G1. Então, prevendo que todos os grupos demorariam em média o mesmo tempo, realizamos apenas os itens *a* e *b* da tarefa, em uma semana (incluindo a DCT e SAM) e na outra semana, realizamos todas as fases da aula sobre os itens *c* e *d*.

Esta última tarefa teve como objetivos que os alunos compreendessem a multiplicação de frações, associassem a representação decimal à representação fracionária, além de que relacionassem a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros. Também os alunos foram provocados a encontrar a(s) diferença(s) existentes entre a multiplicação de números racionais quando comparadas aos números naturais. Para isso, além das barras *Cuisenaire*, foram sugeridos aos alunos outros três *applets: Quadriláteros, Prova sem palavras e Fraction Models.*

O G5, ao completar a tabela, escreveu frações equivalentes e irredutíveis, e suas respostas evidenciam que compreenderam a propriedade dos números fracionários, de que, ao multiplicarmos duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si, pode-se chegar a um produto menor que um dos dois fatores, conforme excerto a seguir.

Luffy: [Lê o item *c* da tarefa e responde] *Os números racionais nem sempre aumentam* [referindo-se aos resultados dos produtos], *enquanto os números naturais sempre aumentam de quantidade* [referindo-se aos resultados dos produtos]. *Então, ali, 0,8 vezes 1,6 é igual 1,28; e ali, como vocês podem ver, 2 vezes 5 dá 10. Nos racionais, se o fator for multiplicado por um outro fator maior que 1 inteiro, sempre o resultado é maior, já se for multiplicado por um fator menor que 1 inteiro, o resultado sempre é menor.*

Tarefa 4 – G5. DC, 30/10/2020.

Para preencher os quadros e responder à questão que pedia para diferenciarem a multiplicação dos naturais e dos racionais, os grupos G4 e G5 recorreram aos *applets* sugeridos, mas o G1 recorreu às barras *Cuisenaire* para comparar frações. Isto porque não conseguiram identificar se, por exemplo, o comprimento do retângulo 1 (fator) era maior ou menor que o resultado da área desse retângulo. Apesar de o G1 explicar com representações decimais (zero vir antes da vírgula) a propriedade dos números racionais sobre o resultado da multiplicação ter fator maior, menor ou igual a um dos fatores, constatamos que também compreenderam isto nas representações fracionárias, porque recorreram às barras *Cuisenaire* para comparar dois décimos e doze centésimos na fase de RT, como explicaram na fase de DCT.

Lindinha: *Nos números racionais, nem sempre o resultado é maior que o fator, pois quando fizemos as equivalências, os resultados deram que alguns davam maior, outros menores e outros iguais. Quando o zero vem antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser menor do que os fatores. Quando qualquer número sem ser zero vir antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser maior que o fator. Quando o resultado é igual a 1* [referindo-se ao produto], *os fatores vão ser iguais a 1.*

Professora: *Vocês estão olhando o que elas escreveram ali, retângulo 1, lá da tabela. Podem ler...*

Lindinha: *R1* $=\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$ [referindo-se ao comprimento]. *Daí* $\frac{6}{10} = \frac{60}{100}$ [referindo-se à largura], *que são maiores que* $\frac{12}{100}$ [referindo-se à área].

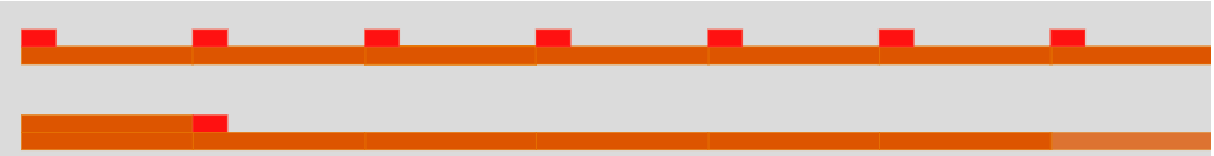
Professora: *O que vocês fizeram? Vocês pegaram os valores lá da tabela e fizeram o quê?*

Docinho: *A gente usou as barras Cuisenaire para saber quem era maior* [referindo-se a comparar os fatores e o produto].

Tarefa 4 – G1. DC, 30/10/2020.

O G1 dispôs as barras *Cuisenaire* conforme a Figura 3.11, a seguir.

Figura 3.11 – Resolução do item *b* da Tarefa 4 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

O G1 nem precisou terminar de dispor todas as barras (10 barras laranjas) para comparar $\frac{2}{10}$ e $\frac{12}{100}$, concluindo que $\frac{2}{10}$ é equivalente a $\frac{20}{100}$, e o produto $\frac{12}{100}$ é menor que os dois fatores $\frac{20}{100}$ e $\frac{60}{100}$. Para completar a tabela referente ao Retângulo 1, o G1 precisou recorrer às frações simbólicas para analisar os resultados, mas para os quadriláteros seguintes não foi necessário.

3.6 Considerações Finais

Desde o início dos nossos estudos, propusemo-nos a abordar as frações como medida e a discutir, em cada tarefa proposta, uma ou mais diferenças entre as propriedades dos números naturais e números fracionários, como a sinalização de magnitude numérica, representação simbólica e produto. Em vista disso, planejamos, elaboramos e desenvolvemos aulas assentes em práticas exploratórias que contribuíssem para o esclarecimento das frações como outro campo numérico, a partir da interpretação de fração na perspectiva da medição, bem como o desenvolvimento do senso fracionário, de maneira que as categorias apontadas por Powell e Ali (2018), flexibilidade, razoabilidade e magnitude, fossem consideradas.

Devido à pandemia no ano de 2020, ousamos desenvolver esse trabalho em aulas remotas e assentes no EEM. A metodologia do EEM, que se fundamenta na resolução em grupo de tarefas de natureza exploratória, possibilitou que ideias matemáticas emergissem, bem como a negociação de significados matemáticos durante a resolução das tarefas. Mais do que realizar procedimentos, os alunos foram estimulados a resolver as tarefas comunicando ideias e argumentando sobre o que estavam pensando. Salienta-se assim a importância de tarefas de natureza exploratória centradas no aluno, que além de reproduzir algoritmos, sejam questionados os resultados que encontram, refletindo sobre o que estão estudando e, assim, em uma relação dialógica e colaborativa, sejam capazes de aprender.

Verificamos que os alunos que participaram de todas as aulas compreenderam a diferença na magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, conseguindo estabelecer relações multiplicativas entre as barras *Cuisenaire* e nomeá-las. Também compararam frações e entenderam que frações equivalentes têm o mesmo tamanho (mesma medida), mas podem ser escritas por representações simbólicas diferentes. Em outras palavras, foram capazes de flexibilizar as frações utilizando as mais adequadas para realizar operações (frações equivalentes). Ao fazer isso, também foram provocados pela professora a argumentar sobre a razão de os resultados encontrados estarem certos; ou seja, porque seriam coerentes, o que envolve a razoabilidade do senso fracionário. Quanto ao produto, concluíram que, quando multiplicamos frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos dois fatores, o que não ocorre nos naturais.

Essas diferenças entre as propriedades dos números naturais e números fracionários foram importantes para que os alunos compreendessem que as frações são outro campo numérico. Os alunos questionaram a professora o porquê nunca tinham estudado frações dessa forma. Também, constatamos que os alunos não estão acostumados a não ter a resposta direta do professor. Em muitos momentos, a professora foi questionada sobre a razão de não responder se estava certo ou errado o que o grupo estava pensando.

Concluímos que a abordagem do EEM para o ensino de frações na perspectiva da medição, permeado pelo uso dos *applets*, permitiu aos alunos pensarem sobre os números racionais do ponto de vista epistemológico antes do simbólico, contrapondo o simbólico com os significados e sentidos decorrentes das representações não simbólicas. Portanto, as compreensões dos alunos foram suscitadas nas práticas desenvolvidas, especificamente no EEM abordando frações como medida, de maneira concatenada e orientada ao raciocínio matemático dos alunos, considerando inclusive seus conhecimentos prévios sobre as frações, que é explicitado no questionamento dos alunos sobre por que não aprenderam assim.

Por último, acreditamos ser necessários outros trabalhos pautados na perspectiva do EEM com intuito de trabalhar as múltiplas interpretações das frações, especialmente na perspectiva da medição. Também acreditamos existir uma lacuna sobre quando, em que sequência e como ensinar cada interpretação das frações para os estudantes do Ensino Fundamental e Médio.

REFERÊNCIAS

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. p. 91-125. New York, NY: Academic Press, 1983.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de fevereiro de 2020.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 4, p. 68-93, 2007.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In: CANAVARRO, P., SANTOS, L., BOAVIDA, A., OLIVEIRA, H., MENEZES, L.; CARREIRA, S. (Orgs.). **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012**: Práticas de Ensino da Matemática. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2012. p. 255-266.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Portugal, 1951.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 7 jul. 2021.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza Del Número Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. Teaching fractions. Educational practices series. Geneva: **International Academy of Education-International Bureau of Education**. v.22, 2011.

GAIRÍN, J. M. **Sistemas de representación de números racionales positivo**s **- Un estudio con maestros en formación**. Tese, Universidad de Zaragoza, 1998.

HIEBERT, J.; BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In: HIEBERT, J. BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3 ed. Reston: NCTM, 1991. p.1-18.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p.125-150, 1980.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LAMON, S. J. Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In: CUOCO, A.; CURCIO, F. (Eds.). **The Roles of Representations in School Mathematics** - 2001 Yearbook (p. 146-168). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema. Acesso em: 10 abr. 2020.

MENEZES, L.; OLIVEIRA, H.; CANAVARRO, A. P. **Descrevendo as Práticas de Ensino Exploratório da Matemática:** o caso da professora Fernanda. Actas del VII CIBEM. Montevideu, Uruguay: CIBEM, 2013.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-29, 2021. DOI: https://doi.org/10.46551/emd.e202108

PEREZ, M. **Grandezas e Medidas: representações sociais de professores do ensino fundamental**. 2008. Tese. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/ handle/1884/16117. Acesso em: 14 de jun. de 2020.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. (Ed.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: IEUL, 2014.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM**: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM**, Cascavel, Pr, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)**: Contribuições para Pesquisa e Ensino. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012 - versão Kindle.

RUSSELL, B. El significado de magnitud. In.: RUSSELL, B. **Los principios de la Matemática**. 2. ed. Madrid: Espaca – Calpe S. A., cap. XIX, p. 193-212, 1967.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez. 2019.

4 *APPLETS* NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM OLHAR PARA O ENSINO REMOTO EMERGENCIAL A PARTIR DA GÊNESE INSTRUMENTAL

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]

Resumo: Este artigo investiga as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática desenvolvidas no Ensino Remoto de Emergência. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, realizada com alunos de duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. A Gênese Instrumental é a lente teórico-metodológica para analisar a ação intencional do sujeito que utilizando esquemas mentais de uso, transforma o artefato em instrumento. Os resultados revelaram que: o *applet Barras Cuisenaire* permitiu, aos alunos, mobilizar estratégias para realizar comparações multiplicativas entre as barras e estabelecer equivalência de frações, compreendendo a representação simbólica e a sinalização de magnitude numérica; o *applet Quadriláteros* permitiu, aos alunos, realizar a medição dos quadriláteros (lados, perímetros e áreas); o *applet Fraction Models*, possibilitou aos alunos validar ou não a mesma magnitude das representações fracionárias e decimais. A associação dos três *applets* favoreceu que os alunos compreendessem a propriedade produto que, ao multiplicar duas frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos dois fatores.

Palavras-chave: Frações como medida. Ensino Exploratório de Matemática. Instrumentalização. Instrumentação. Números Racionais.

APPLETS IN LEARNING FRACTIONS: A LOOK FROM INSTRUMENTAL GENESIS TO EMERGENCY REMOTE TEACHING

Abstract: This article investigates contributions by the *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* and *Fraction Models* for learning fractions from the perspective of measurement in classes based on Exploratory Mathematics Teaching developed during the Emergency Remote Teaching. It is about a qualitative interpretative research was performed with students of 6th grade groups of Elementary School. Instrumental Genesis is the theoretical-methodological lens to analyze the intentional action of the subject, who using mental schemes of use, transforms the artifact into an instrument. *Barras Cuisenaire* allowed students mobilize strategies to carry out multiplicative comparisons among the *rods* and establish equivalence of fractions understanding symbolic representation and numerical magnitude signaling. The *applet Quadriláteros* allowed students performing quadrilateral measurement (sides, perimeters, and areas), and using the applet *Fraction Models* they validate or not the same magnitude of fractional and decimal representations. Associating the three *applets* favored students to understand the product property, which when multiplying two fractions different from zero and one, multiplication result may be less than one of the two factors.

Keywords: Fractions as measure. Exploratory Mathematics Teaching. Instrumentalization. Instrumentation. Rational Numbers.

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

4.1 Introdução

Em nossa prática docente, identificamos a nossa dificuldade em ensinar e, consequentemente, dos alunos em compreenderem os números racionais como campo diverso dos números naturais. Esta dificuldade é saliente quando, por exemplo, adicionam frações de numeradores diferentes somando seus numeradores e denominadores, e pode estar associada ao ensino de frações centrado na perspectiva parte-todo (ESCOLANO; GAIRÍN, 2005; LAMON, 2012). Com uma perspectiva diferente para o ensino de frações, Powell (2018; 2019a) utiliza as *Barras Cuisenaire* físicas para que os alunos possam progredir das frações não-simbólicas para as simbólicas, sob a perspectiva da medição.

Compreendemos a tecnologia como produção humana (Vieira Pinto, 2005) que está inserida no cotidiano das pessoas para atividades vinculadas à comunicação pessoal e/ou situações de trabalho, e admitimos Tecnologias Digitais (TD) como "um conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1)" (CEALE, 2014, n.p.). Assim, neste trabalho, adotamos o termo TD para nos referirmos aos artefatos que utilizam tecnologia digital em seu processo de desenvolvimento, como computador, *tablet*, celular, internet, *software*s, objetos de aprendizagem, *applets*[1], entre outros.

Neste sentido, a Gênese Instrumental (GI) de Rabardel (1999) como lente teórica-metodológica nos permitiu compreender esquemas desenvolvidos pelos alunos no uso dos *applets* e consequentemente, para a resolução das tarefas, elucidando como acontecem as mobilizações complexas do pensamento quando o artefato é transformado em instrumento. Bittar (2011, p. 169) afirma que "é importante salientar que essa abordagem teórica também pode ser e é utilizada para investigar a aprendizagem com instrumentos, ou seja, para estudar como o aluno aprende na presença de instrumentos". Assim, a GI nos permitiu compreender e analisar como o uso de artefatos se associam aos conhecimentos empregados pelos alunos ao desempenhar uma determinada tarefa.

Especialmente no momento em que o mundo foi assolado pela pandemia causada pela doença COVID-19 e o Ensino Remoto de Emergência (ERE) tornou-se uma realidade, discutir tecnologia no espaço escolar, ou permeando esse espaço, não é uma opção, mas uma necessidade. Pois, as instituições de ensino precisaram se adaptar de forma emergencial ao novo contexto. Isto levou à adoção forçada de TD para práticas de ERE que ocorreram sem nenhum

[1] Consideramos um *applet* uma aplicação que é executada dentro de um *site* ou programa maior e que não necessita de instalação no artefato utilizado como, por exemplo, animações, simuladores, jogos, entre outros.

planejamento (Moreira, Henriques e Barros, 2020). Desta forma, o ERE “ganhou protagonismo em um momento de crise, colocando os docentes frente aos desafios de construir novas formas de ensinar-aprender, ressignificando suas práticas pedagógicas” (Valente *et al.*, 2020, p. 10).

Compreendemos que, no ERE, a TD é utilizada como meio de acesso, e sem ela não há ERE. Entretanto as metodologias de ensino utilizadas por muitos professores no contexto do ERE foram utilizadas para corroborar práticas tradicionais de ensino (MOREIRA; HENRIQUES; BARROS, 2020; VALENTE *et al*, 2020). Porém, consideramos ser necessário e possível incorporar, mesmo no ERE, novas metodologias de ensino que sirvam de mediação entre as representações, conceitos e relações matemáticas. Assim, investigamos as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM) desenvolvidas no Ensino Remoto de Emergência (ERE). Trocar o cenário de lápis e papel para simuladores, *software*s de geometria dinâmica, entre outros, além de acelerar o processo de visualização das representações, conceitos e relações matemáticas, possibilita construir, desconstruir e reconstruir tais representações de forma dinâmica.

As frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, se articulando individualmente e entre si, dentre as quais destacam-se: parte-todo, razão, operador, quociente e medida e operador. Acreditamos que o ensino de frações deve considerar essas diferentes interpretações como discutimos brevemente na subseção que segue.

4.2 A Introdução ao Ensino de Frações

Segundo Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983) e Lamon (2012), a compreensão do conceito de frações é fundamental para o desempenho matemático dos alunos, além de ser essencial em outros conteúdos da Matemática, como Álgebra (BAILEY *et al.*, 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015; POWELL, 2018, 2019a). Ademais, Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983) e Lamon (2012) sublinham a necessidade de que os alunos sejam apresentados a diferentes interpretações de números racionais (KIEREN, 1980).

Behr *et al*. (1983, p. 91, tradução nossa), afirmam que “os conceitos de número racional estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante o Ensino Fundamental”. Embora Behr *et al*. (1983) acreditem que a interpretação parte-todo é fundamental para o conceito de número racional e o considerem importante para o ensino das demais interpretações, professores e autores de livros didáticos parecem utilizar essa interpretação como definição de fração. Lamon (2012, p. 33, tradução nossa, grifos do autor) critica essa abordagem, salientando que a palavra *fração* não remete unicamente a interpretação parte-todo, o que gera obstáculos à compreensão dos números racionais:

> [...] a restrição da instrução à interpretação de parte-todo deixou os alunos com uma noção empobrecida dos números racionais, e cada vez mais os professores estão se tornando conscientes das interpretações alternativas, e referindo-se a elas como *operador*, *medida*, *proporção* e *quociente*. As comparações parte-todo estão em pé de igualdade com as outras interpretações e não merecem mais a distinção de serem sinônimos de *frações*.

Escolano e Gairín (2005) e Lamon (2012) alertam que a introdução ao conceito de número racional pela interpretação parte-todo conduz a obstáculos epistemológicos, devido à necessidade de realizar uma dupla contagem (do todo e das partes tomadas), utilizando os princípios dos números naturais. Ainda segundo esses autores, são os fins didáticos que justificam a introdução ao estudo de frações por essa interpretação, porque permite que os alunos consigam manipular rapidamente as representações fracionárias/símbolos, sem compreender sua densidade fracionária e magnitude numérica, que estão associadas à ideia de medida.

Portanto, assim como Powell, acreditamos que a introdução do ensino de frações deve ser realizada com a interpretação das frações como medida, visto que essa relação de comparação multiplicativa entre quantidades vai ao encontro do surgimento histórico das frações (POWELL, 2018, 2019A; ROQUE, 2012), e assim, favorecem que os alunos percebam a necessidade de um novo campo numérico, os números racionais. Como citado anteriormente, em seus estudos, Powell (2018, 2019a) utiliza as *Barras Cuisenaire* físicas em suas pesquisas sobre o ensino de frações na perspectiva da medição.

Buscamos, em nossos estudos, considerar essas questões, que são permeadas por nuances do contexto em que a pesquisa se desenvolveu, as quais apresentamos na seção que segue.

4.3 Caracterização da Pesquisa e Coleta de Dados

Para nossa investigação, estruturamos aulas assentes no EEM para serem desenvolvidas no ERE, para as quais planejamos e elaboramos quatro tarefas de natureza exploratória para alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Para cada tarefa, foi proposto um ou mais *applets* com intuito de favorecer a compreensão dos alunos sobre frações como medida, e que eles identificassem as diferenças entre as propriedades dos números naturais e números fracionários, como *sinalização de magnitude numérica* (algarismos maiores na fração não determinam a magnitude da fração); *representação simbólica* (há uma infinidade de representações fracionárias para uma mesma magnitude); *densidade* (número fracionário não possui antecessor ou sucessor imediato); e *produto* (multiplicar duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode produzir um produto menor que um dos dois fatores) (OBERSTEINER *et al*., 2019 *apud* POWELL, 2019b).

Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, cujos dados empíricos foram coletados em duas turmas do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Paraná, em que a primeira autora era professora regente de Matemática no ano de 2020. A coleta dos dados foi realizada entre os meses de setembro e outubro de 2020. Em meados de agosto, foi enviado um formulário elaborado pela professora-pesquisadora solicitando informações sobre dias e horários para aulas síncronas (*lives*), tipo de dispositivo disponível (computador, *notebook*, celular) e tipo de conexão com internet (*wi-fi* ou dados móveis). Do total de setenta e um (71) alunos, trinta (30) retornaram o formulário e os termos de assentimento e consentimento da pesquisa preenchidos.

4.3.1 Organização e Caracterização dos Alunos e dos Recursos Disponíveis para o ERE

Os alunos que participaram da pesquisa são identificados por pseudônimos escolhidos por eles, conforme termos de assentimento e consentimento assinados. Na primeira coluna do Quadro 4.1, identificamos os grupos pela letra G e numeração sequencial. Na segunda coluna, ao lado do pseudônimo, identificamos o(s) equipamento(s) que dispunham para o ERE. Quanto ao tipo de conexão, apenas Boom, Flora e Maluquinha, todas do G3, tinham disponíveis apenas dados móveis. Todos os demais alunos tinham acesso à internet banda larga. Na terceira coluna informamos os dias e horários das *lives*.

Quadro 4.1 – Organização dos encontros semanais

Grupos	Participantes e Artefatos Disponíveis	*Lives*
G1	Docinho (celular), Doguinha (*notebook* e celular), Florzinha (celular), Fofinha (celular), Lindinha (celular) e Thor (computador sem som e celular).	Terças-feiras às 8h
G3	Boom (celular), Flora (celular), Maluquinha (celular), Mazarect (*notebook*) e Olívia (computador).	Terças-feiras às 18h30min
G4	Anubis (*notebook* e celular), Bob (celular), Fifo (celular), Magrão (computador e	Quartas-feiras

Grupos	Participantes e Artefatos Disponíveis	*Lives*
	celular), Spider-man (celular) e Ymercurius (computador e celular)	às 10h
G5	Luffy (computador e celular), Mulher Maravilha (celular), Poster (*notebook* e celular), Viúva Negra (celular), Zorro (celular)	Quartas-feiras às 14h40min
Todos os alunos das duas turmas de sexto ano, participantes e não participantes da pesquisa, que tivessem possibilidade de participar.		Sextas-feiras às 14h40min

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Desta forma, cada aluno deveria participar de duas (2) *lives* por semana via *Google Meet*[1], e seus registros do desenvolvimento das tarefas e sistematizações das aprendizagens matemáticas seriam postados no *Google Classroom*[2].

4.3.2 O EEM e a Organização das Aulas no ERE

O EEM é uma abordagem exigente para alunos e professores. Estudos (PONTE, 2005; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2012; BASNIAK; ESTEVAM, 2018, 2019) discutem que tarefas de natureza exploratória instigam os alunos a elaborar e a discutir diferentes estratégias para sua resolução, incentivando a comunicação das ideias individuais e a construção de ideias coletivas, oportunizando a reflexão e análise de informações em um trabalho colaborativo para a construção de aprendizagens matemáticas e negociação de significados. Por isso, o EEM é apontado como alternativa ao ensino tradicional ou direto (PONTE, 2005), em que prevalece a máxima: professor explica o conteúdo, passa exemplos, alunos assimilam e reproduzem a aprendizagem com exercícios de fixação.

Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem que as aulas no EEM sejam planejadas e desenvolvidas em fases, que Cyrino e Teixeira (2015) admitem ser quatro: *Introdução da tarefa*, *Realização da tarefa*, *Discussão coletiva da tarefa*, e *Sistematização das aprendizagens*.

A fim de garantir a negociação de significados, elaboração e reelaboração de ideias, conceitos e relações matemáticas, as aulas assentes no EEM no contexto do ERE necessitam das TD para que seja possível a resolução de tarefas em grupo de forma síncrona, e posteriormente realizadas as discussões e sistematização das aprendizagens matemáticas, com todos os grupos de alunos, também de forma síncrona. Portanto, a organização das aulas

[1] *Google Meet* é uma solução desenvolvida pela empresa *Google,* que oferece serviço de comunicação por videoconferência gratuito para até 250 pessoas para instituições educacionais.
[2] É um recurso da *Google* de gerenciamento de conteúdo para instituições educacionais. Possibilita a criação de salas de aulas virtuais que facilitam a comunicação, compartilhamento de atividades, conteúdos, trabalhos e avaliações. Outros recursos da *Google,* como *Google Meet*, *Google Drive*, *Jamboard*, entre outros podem ser utilizados dentro do *Google Classroom*.

aconteceu de forma diferente no ERE. Seguimos as orientações de Oliveira e Basniak (2021), que trazem quadros com as ações intencionais do professor na prática do EEM no ERE para cada uma de suas fases. Organizamos a realização de uma *live* para cada grupo de alunos para cada introdução e desenvolvimento da tarefa, e uma segunda *live* para cada discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas com todos os alunos (Quadro 4.2).

Estruturamos, para cada aula, tarefas a serem desenvolvidas utilizando *applets* específicos, como explicamos na seção que segue.

4.3.3 As Tarefas e os *Applets* Sugeridos

Neste artigo, discutimos o uso, pelos alunos, dos *applets*: *Barras Cuisenaire, Fraction Models* e *Quadriláteros.* Os grupos resolveram quatro (4) tarefas, e a Tarefa 2 e Tarefa 4[1] foram subdivididas em parte 1 e parte 2. Cada tarefa foi desenvolvida na perspectiva do EEM, e foram planejadas para que todas as fases sugeridas por Cyrino e Teixeira (2016) fossem realizadas dentro da mesma semana. No Quadro 4.2 identificamos cada uma dessas tarefas, os objetivos e os *applets* utilizados.

Quadro 4.2 – As tarefas de natureza exploratória, objetivos e *applets* sugeridos

Tarefa	Objetivo(s)	*Applet(s)* Sugerido(s)
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	*Barras Cuisenaire*
Tarefa 2: Medindo com *Barras Cuisenaire* (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; e - Compreender a representação fracionária.	*Barras Cuisenaire*
Tarefa 2: Medindo com *Barras Cuisenaire* (Parte 2)	- Comparar frações; e - Compreender a adição de frações de mesma unidade de medida.	*Barras Cuisenaire*
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; e - Compreender adição e subtração de frações de unidades de medidas diferentes.	*Barras Cuisenaire*
Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros (Parte 1 e 2)	- Compreender multiplicação de frações; - Associar a representação decimal à representação fracionária; - Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros; e - Compreender os números racionais como campo diverso dos números naturais.	*Barras Cuisenaire;* *Quadriláteros;* *Fraction Models.*

Fonte: As autoras (2020).

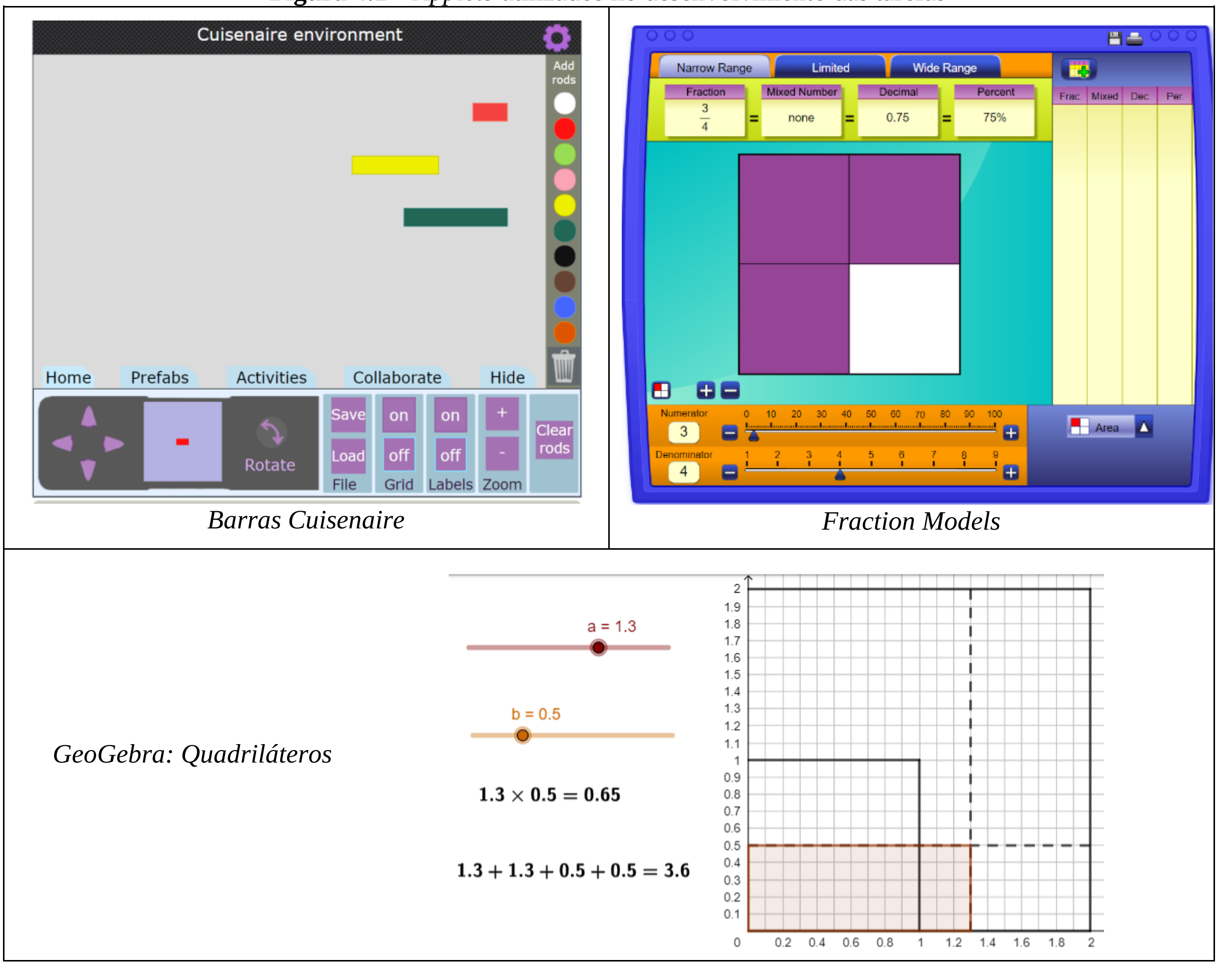
Para todas as tarefas sugerimos as *Barras Cuisenaire*, que apesar de não possuírem uma

[1] A Tarefa 4 foi planejada sem subdivisão, mas ao desenvolver as fases de *Introdução da Tarefa* e Realização da Tarefa com o G1, foi preciso subdividir, pois os alunos não conseguiram resolver toda a tarefa no tempo planejado. Desta forma, subdividimos a Tarefa 4 da seguinte forma: parte 1 com os itens *a* e *b*; e parte 2 com os itens *c* e *d*.

unidade de medida padronizada, como as barras físicas (centímetro), a barra branca pode ser tomada como referência para todas as demais barras: a barra vermelha mede duas brancas; a barra verde-clara, três brancas; e assim sucessivamente. Entretanto, como as barras não possuem um valor pré-estabelecido, a mesma barra pode assumir valores diferentes, dependendo da comparação realizada.

Para a Tarefa 4, sugerimos o *applet Quadriláteros*, no qual é possível construir quadrados e retângulos, alterando seu comprimento e largura ao mover o controle deslizante *a* e *b*, sendo possível visualizar, na tela, a área e o perímetro calculados. Também sugerimos o *applet Fraction Models*, no qual é possível escrever a representação fracionária na parte inferior do *applet* digitando no campo *Numerador* e *Denominador*; ou arrastando o indicador no valor desejado; ou ainda, clicando nos botões de menos ou mais, retornando, então, à representação pictórica, a forma mista da fração (caso tenha), a decimal e percentual. Na Figura 4.1 encontram-se os *applets* utilizados.

Figura 4.1 – *Applets* utilizados no desenvolvimento das tarefas



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A GI nos forneceu subsídios para compreender a elaboração dos esquemas mentais no uso dos *applets* e a forma como os *applets* interferem no pensamento dos alunos e vice-versa, para a compreensão das frações como medida, como detalhamos, na seção que segue.

4.4 A Gênese Instrumental como Lente Teórica e Metodológica

A GI, embasada na teoria da Ergonomia Cognitiva e nas ideias de Vygotsky, foi desenvolvida por Rabardel (1995) estudando a ação do sujeito mediada por um instrumento.

Esta perspectiva, fundamenta-se no processo de transformação do artefato em instrumento, como uma construção intencional do sujeito que se apropria do artefato, e por meio do desenvolvimento de esquemas mentais de utilização, torna-o útil: constitui um instrumento, de acordo com os esquemas de utilização que atribui ao artefato.

Drijvers *et al.* (2010, p. 108, tradução nossa) destacam que "Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa". Assim, o instrumento é mais que um artefato, sendo uma construção individual para cada pessoa, por meio de esquemas de utilização próprios (RABARDEL, 1995; BITTAR, 2011). Portanto, "[...] o instrumento não é algo pronto e acabado; ele pode ser elaborado e reelaborado pelo sujeito ao longo das atividades realizadas com o artefato, agora um instrumento, uma vez que já sofreu a ação do sujeito" (Bittar, 2011, p. 162). Desta forma, o(s) esquema(s) de utilização associado(s) ao artefato pode(m) ser resultado(s) de "uma construção própria do sujeito, autonomamente ou através da apropriação de esquemas sociais pré-existentes" (ALMEIDA; OLIVEIRA, 2009, p. 88), sendo diferente para cada pessoa, pois "o instrumento como artefato é constituído no(s) uso(s) que o sujeito faz dele.

Além da distinção entre artefato e instrumento, as dimensões da instrumentalização e da instrumentação abordam a dupla relação entre sujeito e artefato. Enquanto na instrumentalização, o sujeito se apropria do artefato e o adequa ao seu trabalho; na instrumentação, as potencialidades e limitações do artefato colaboram para estruturar a atividade do sujeito (RABARDEL, 1995; ALMEIDA; OLIVEIRA, 2009; BASNIAK; ESTEVAM, 2019; BUENO; BASNIAK, 2020). Pensando nas TD que permeiam o processo de ensino e de aprendizagem, consideramos que, enquanto a instrumentação "refere-se à forma como o artefato afeta o comportamento e o pensamento do aluno", a instrumentalização "diz respeito à forma como o pensamento do aluno afeta o artefato" (BASNIAK; ESTEVAM, 2019, p. 741). Assim,

> A gênese instrumental é um processo complexo que busca a integração entre as características do artefato (potencialidades e limitações) e as atividades do sujeito. Este processo ocorre em duas direções: na direção interna, do próprio sujeito, denominada instrumentação, e na direção externa, do artefato, denominada instrumentalização (PADILHA; BITTAR, 2013, p. 7).

Para a análise dos dados sob a perspectiva da GI, consideramos:

- *Sujeito*: o aluno que, ao empregar esquemas individuais no artefato, transforma este artefato em instrumento único. Particularmente, dado o contexto de desenvolvimento da pesquisa, os artefatos/instrumentos, foco deste artigo, são os diretamente relacionados ao ensino e à aprendizagem de frações como medida: os *applet;*.
- *Esquemas*: remetem ao "conjunto estruturado dos caracteres generalizáveis das atividades de utilização dos instrumentos" (RABARDEL, 1999, p. 210, tradução nossa); e
- *Instrumento*: nasce da relação entre o sujeito e o objeto, em que o artefato somado ao(s) esquema(s) de utilização que esse sujeito emprega neste artefato, transforma-o em instrumento.

Explicitamos no Quadro 4.3 os descritores da instrumentação e instrumentalização associados aos *applets* relacionados ao nosso planejamento para o ensino de frações na perspectiva da medição.

Quadro 4.3 – Elementos da GI, o sujeito e os *applets*

	INSTRUMENTAÇÃO	INSTRUMENTALIZAÇÃO
O sujeito	- Elabora ideias e/ou as generaliza a partir do que lê no *applet*; - Utiliza as ferramentas do *applet* para elaborar ideias e/ou generalizá-las; - Apropria-se das características e potencialidades do *applet* para realizar medições; e - Utiliza o *applet* para determinar e/ou comprovar frações equivalentes.	- Compreende o funcionamento e manipula o *applet*; - Tem noção das possibilidades e limites do *applet*; - Consegue criar/adaptar o *applet* para resolver a tarefa; - Investiga os componentes e funcionalidades do *applet*; - Explora os recursos disponíveis no *applet*; e - Se apropria das características e potencialidades do *applet* para realizar a tarefa.
Barras Cuisenaire	- Realiza medições; - Estabelece relações comparativas; e - Estabelece relações de equivalência.	- Percebe barras sobrepostas; - Realiza comparações multiplicativas; - Utiliza as barras para elaborar ideias e/ou generalizá-las; e - Realiza comparações entre barras de mesma cor ou cores diferentes alinhadas lado-a-lado, e barras de mesma cor ou cores diferentes alinhadas abaixo.
Quadri-láteros	- Representa os quadriláteros solicitados; - Associa o comprimento e largura aos controles deslizantes; - Associa a representação decimal à fracionária; - Identifica quando os quadriláteros não satisfazem as condições solicitadas.	- Move os controles deslizantes e observa as mudanças relacionadas ao comprimento, largura, área, perímetro e valores mostrados no *applet*; e - Utiliza o *applet* para encontrar/comprovar frações equivalentes.
Fraction	- Associa a representação decimal à	- Altera numerador e denominador e observa as

	INSTRUMENTAÇÃO	INSTRUMENTALIZAÇÃO
Model	representação fracionária; e - Faz uso de frações equivalentes.	representações decimal, pictórica e percentual que o *applet* retorna; e - Compreende a unidade de medida escolhida.

Fonte: As autoras (2020).

Reiteramos que esses descritores foram antecipados por nós a partir de nossa intenção com os *applets*. Na seção que segue, a partir da análise dos dados, identificamos aqueles que foram salientes durante as aulas.

4.5 Análise dos Dados

A fim de situar o leitor quanto ao uso dos applets pelos alunos, e o processo de GI ao longo das aulas, analisamos as resoluções e discussões das seguintes tarefas: Tarefas 1, por ser a primeira em que foram utilizadas as Barras Cuisenaire; Tarefa 3, dado o objetivo da tarefa, que exigia que os alunos compreendessem a magnitude de frações; e Tarefa 4, por utilizarmos outros applets além das Barras Cuisenaire. Para analisar a evolução dos alunos durante as tarefas, optamos por apresentar excertos de um mesmo grupo, o G1, por ter sido aquele que explicitou mais claramente suas dúvidas e (in)compreensões ao longo do desenvolvimento das tarefas. Cabe informar que, no momento de desenvolvimento da tarefa pelo grupo, muitas vezes a professora fechava a câmera e o áudio para que os alunos desenvolvessem um trabalho autônomo, e quando necessário, chamavam a professora pelo grupo de whatsapp

Para resolver a Tarefa 1, os alunos precisavam determinar o comprimento horizontal total da região do applet usando as barras, que inteiras, não completavam o comprimento.

Figura 4.2 – Tarefa 1: *Qual o comprimento?*

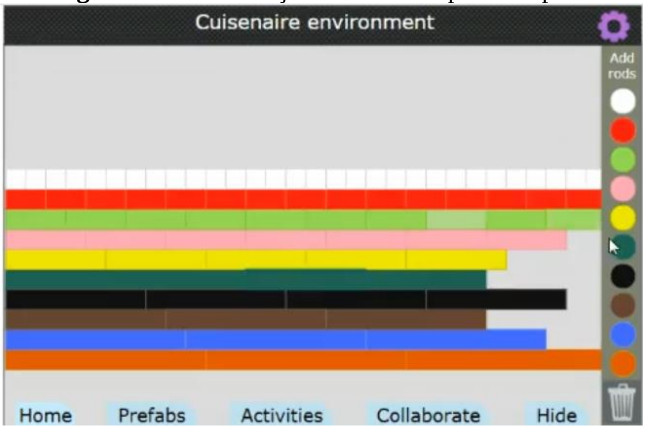
Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

1) Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar cliquem na cor desejada.
   a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Façam isso para todas as cores.
   b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

Fonte: As autoras (2020).

Após ler a tarefa com os alunos, a professora perguntou quem poderia compartilhar a tela para a resolução da tarefa, e o grupo indicou o Thor. Nesta tarefa, o microfone do computador de Thor estava com problema, por isso interagia pelo *chat* do *Google Meet*. Ele alinhou todas as barras no *applet* conforme exposto na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Qualquer uma das *Barras Cuisenaire* pode ser usada como referencial de unidade de medida, visto que não possuem um valor fixo de unidade. Assim, olhando para as barras dispostas (instrumentação), os alunos precisavam decidir (instrumentalizar) como fariam para responder à questão, estabelecendo como unidade de medida a cor utilizada para medir o comprimento horizontal do *applet*. Entretanto, inicialmente, passaram a usar aproximações/estimativas para as partes das barras que faltavam para completar o comprimento horizontal da região do *applet*, sem nomear as barras utilizando cores diferentes. Por exemplo, em relação à barra azul, concluíram que a medida do comprimento era de 3,30 barras azuis. Iniciou-se, então, uma discussão sobre como nomear o pedaço da barra azul que faltava para completar o comprimento horizontal do *applet*.

Docinho: *Ô professora! Então a gente pode colocar os bloquinhos brancos ali, e ver quanto que dá? [instrumentalização]*
Professora: *Vocês sabem que são nove [barras] brancas para uma azul, certo? Vocês me falaram isso antes.*
Lindinha: *Certo.*
Professora: *Que uma azul são nove brancas. Mas, para completar aquele pedaço, quantas branquinhas completam [...]?*
Docinho: *Três. Completam três, professora.*
Professora: *Coloque as branquinhas lá [instrumentação]. Vocês enxergam que são três que faltam. Só que, na tarefa, não fala que pode completar com três brancas, você tem que falar em azul. Que pedaço é esse, que medida que é essa em relação à azul?*
Docinho: *Professora, assim, se fosse medir a azul contando com as brancas ali, daria três quadradinhos.*
Professora: *Então é três o quê?*
Docinho: *Três e trinta.*
Professora: *Três o quê?*
Thor: *[digita no chat da reunião] nonos.*
Professora: *Thor digitou lá.*

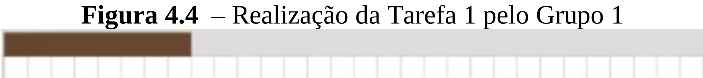
Docinho: *Três nonos.*

Tarefa 1 – G1. Realização da Tarefa, 15/09/2020.

A partir dos questionamentos da professora, os alunos usaram a barra branca como unidade de medida e passaram a realizar comparações multiplicativas entre as barras, utilizando o *applet* para validar as ideias iniciais.

Para a barra marrom, optaram por alinhá-la acima das barras brancas e, ao comparar o que o *applet* retornou (instrumentação), concluíram que a barra marrom media oito (8) barras brancas (Figura 4.4).

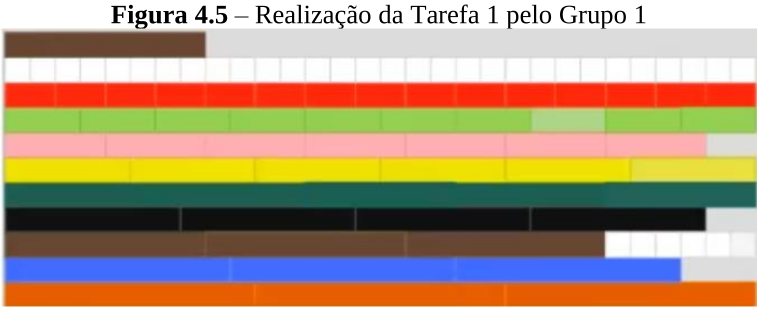
Figura 4.4 – Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Entretanto, Doguinha equivocou-se ao nomear a parte que faltava para completar o comprimento horizontal de $\frac{3}{8}$. Thor, percebendo isso, começou a dispor seis (6) barras brancas no espaço que faltava para completar o comprimento horizontal do *applet* (instrumentalização), alinhadas com a barra marrom (entre as barras azuis e pretas), conforme a Figura 4.5.

Figura 4.5 – Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Doguinha: *A marrom é três oitavos.*
Thor: [Escreve no chat da reunião depois de dispor as barras brancas ao lado direito das barras marrons] *6 oitavos.*
[...]
Docinho: *Para completar ali, faltam seis barras brancas, e não três. Igual ao que o Thor colocou ali, então são seis oitavos.*
Lindinha: *Ah, tá, então vão ser três barras* [inteiras] *e seis oitavos.*

Tarefa 1 – G1. Realização da Tarefa, 15/09/2020

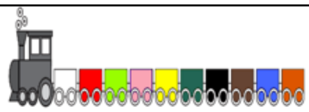
Assim Thor, não podendo justificar suas ideias falando, utilizou o *applet*, mobilizando uma estratégia de resolução (completar o pedaço que faltava das barras marrons utilizando as brancas como unidade de medida), e depois ele escreveu no *chat 6 oitavos*. O artefato (*applet*) foi transformado em instrumento por meio da estratégia de comparação, e a instrumentalização foi identificada quando Thor encontrou uma estratégia utilizando o artefato para comprovar/demonstrar sua ideia para os colegas. Para as demais barras que não completavam o comprimento horizontal, Thor, a pedido dos colegas, completou com barras brancas os comprimentos das barras rosas, pretas e azuis, conseguindo medir esses *pedaços*.

A Tarefa 3 teve início com o *jogo do trem* (Figura 4.6).

Figura 4.6 – Tarefa 3: *Jogo do Trem*

3) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

Vamos fazer o jogo do trem. Chamaremos de *vagão* cada barra e de *trem* o alinhamento horizontal de um ou mais *vagões*.



Para isso cada grupo deve se dividir em duplas ou jogam dois e um espera, para jogar na próxima rodada. Cada dupla ou jogador escolhe um vagão. O jogo do trem funciona assim:

- Cada dupla ou jogador só utilizará o vagão escolhido para jogar, ou seja, sempre a barra de mesma cor.
- O vagão escolhido por cada jogador (ou dupla) serão colocados alinhados verticalmente na tela.
- Inicia jogando quem escolher o vagão mais curto.
- Joga sempre quem tem o trem mais curto, até que fique com o trem maior que adversário.
- O jogo acaba quando os trens ficarem do mesmo tamanho.
- Ganha o jogo a dupla ou jogador que colocar o último vagão.

Após jogarem algumas vezes respondam:

a) Qual(is) a(s) melhor(es) estratégia(s) para ganhar o jogo? Após a finalização de uma rodada do jogo, considerando cada um dos trens separadamente, escreva a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro.

b) Observando as frações escritas no item a, construam trens do mesmo tamanho de cada vagão de cada um dos jogadores. Mas há uma condição: os trens devem ser da mesma cor. Escrevam as frações equivalentes, respectivas aos trens e vagões.

c) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual dessas duas frações é maior?

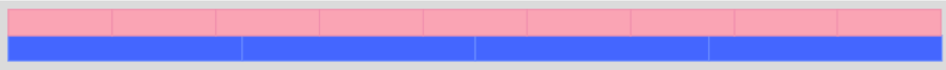
d) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual o resultado da soma dessas frações? Expliquem representando com as barras Cuisenaire.

e) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual o resultado da subtração da fração maior menos a fração menor? Expliquem representando com as barras Cuisenaire.

Fonte: As autoras (2020).

Esse jogo utiliza as *Barras Cuisenaire* e pode ser jogado individualmente ou em duplas, de forma que cada jogador ou dupla escolhe apenas uma cor de barra para jogar, conforme regras citadas na Tarefa 3 (Figura 4.6). Após algumas rodadas do jogo, os alunos deveriam escolher uma delas e registrar no caderno ou arquivo a fração que o vagão de cada trem representava em relação ao seu trem inteiro. O G1 escolheu a rodada abaixo (Figura 4.7).

Figura 4.7 – Realização da Tarefa 3 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

O G1 identificou corretamente as frações como a representação de $\frac{1}{4}$ para o vagão azul e $\frac{1}{9}$ para o rosa. Ao comparar essas frações, para determinar qual das frações era maior, Docinho, depois de ter anunciado que $\frac{1}{4}$ era maior que $\frac{1}{9}$, voltou atrás e disse que não achava que isso estava certo, que ela acreditava ser ao contrário. Frente ao questionamento da professora sobre sua dúvida, Lindinha explicou, como pode ser lido no excerto a seguir, que Docinho estava comparando apenas os denominadores da fração.

Professora: *Mas o que você está vendo, Docinho? Você está vendo que a azul é maior. Por que você não está entendendo que a fração da azul é maior?*

Lindinha: *Professora, ela está dizendo que o $\frac{1}{9}$ é maior que $\frac{1}{4}$ porque o 9 é maior que o 4.*

Tarefa 3 – G1. Realização da Tarefa, 15/09/2020.

Apesar de ver que barra azul $\frac{1}{4}$ era maior que a rosa $\frac{1}{9}$, a aluna não havia compreendido a propriedade de *sinalização de magnitude numérica* da fração, e assim, não conseguia compreender que a fração $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{9}$, pois o número 9 é maior que o número 4 no conjunto dos números naturais. Frente ao exposto por Lindinha, Docinho afirmou que não se deve comparar as frações pelos números (referindo-se ao denominador), mas pelas *Barras Cuisenaire*. A professora precisou intervir, explicando que as *Barras Cuisenaire* e suas respectivas frações representam a mesma magnitude. Depois, a professora solicitou que o G1 comparasse as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$. Para isso, alinharam as barras brancas e amarelas verticalmente no *applet,* como se fossem fazer o jogo do trem, sendo capazes de realizar a comparação entre as barras. O uso do *applet* possibilitou que os alunos visualizassem e compreendessem a magnitude dessas frações na perspectiva da medição, revelando o processo de instrumentação.

Na Tarefa 4, outros *applets,* além das *Barras Cuisenaire* foram utilizados.

Figura 4.8 – Tarefa 4: *Área e Perímetro de Quadriláteros*

4) Abram o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*). Movimentem os controles deslizantes *a* e *b*, observem o que ocorre na figura representada e respondam.

a) O que é alterado na figura representada pelo GeoGebra com a movimentação dos controles deslizantes *a* e *b*?

b) Considerando que a área de quadrados e retângulos é o resultado da multiplicação do comprimento pela largura e que perímetro é a soma de todos os lados, utilize o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/(se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*) e o *applet* Fraction Models disponível em https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/, para completar a tabela referente aos lados, perímetros e áreas dos quadriláteros em suas representações decimais e fracionárias.

	Retângulo 1		Quadrado 2		Retângulo 3	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO	0,2				0,7	
LARGURA	0,6			$\frac{9}{10}$		
PERÍMETRO						
ÁREA					0,35	

	Quadrado 4		Retângulo 5		Quadrado 6	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO			4,5			
LARGURA						
PERÍMETRO			13			$\frac{24}{5}$
ÁREA	1					

Parte 2

c) Retomem a tarefa anterior. Observem as tabelas e respondam: Qual(is) diferença(s) existe(m) na multiplicação dos Números Racionais, quando comparada(s) aos Números Naturais. É possível afirmar que na multiplicação dos Números Racionais os resultados sempre aumentam? Expliquem o raciocínio de vocês e, se necessário, explorem mais o arquivo do GeoGebra, testando diferentes valores.

Fonte: As autoras (2020).

Na fase de resolução da *tarefa* 4 parte 1, Lindinha, do G1, foi escolhida pelo grupo para compartilhar a tela do celular com o *applet Quadriláteros* para que o grupo pudesse discutir a sua manipulação (esquemas de utilização do artefato). Depois de manipular o *applet Quadrilátero* e escolher a versão para computador para melhorar a visualização, ela começou a arrastar para direita e para esquerda os controles deslizantes *a* e *b* (instrumentação). Depois de algum tempo de discussão do grupo sobre o uso do *applet* (instrumento), Docinho descreveu a relação entre os controles deslizantes e os lados do quadrilátero:

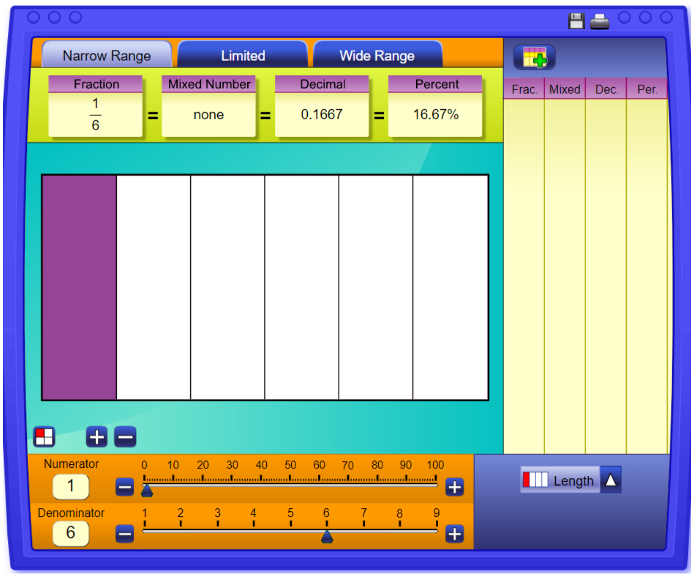
Docinho: *Eu fiz assim na primeira: Quando movimentamos o controle* a, *ele* [comprimento] *vai para um lado e para o outro; e quando movimentamos* b [controle deslizante b], *ele* [largura] *vai para cima e para baixo; mas também, quando movimentamos o* a *e o* b, *a gente forma quadriláteros que podem ser alto, baixo, largo e comprido. O* a [controle deslizante a] *forma o comprimento e o* b [controle deslizante b], *a altura.*

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Depois, para o item *b* da tarefa, a primeira preocupação do grupo foi que, para completar a tabela, teriam que usar dois *applets*. Considerando que no ERE para as discussões em grupo não é possível compartilhar a tela de ambos os *applets* ao mesmo tempo, a professora chamou a atenção para que observassem os valores e cálculos que apareciam abaixo dos controles deslizantes no *applet Quadrilátero*. Com esses questionamentos, os alunos perceberam que tais valores estavam relacionados ao perímetro e à área dos quadriláteros e, portanto, os valores solicitados na tabela da Tarefa 4, referente à representação decimal dos Retângulos 1, 3 e 5 e dos Quadrados 2, 4 e 6, estavam explícitos no *applet*.

Já para realizar as conversões da representação fracionária para decimal ou vice-versa, os alunos utilizaram outro *applet*, o *Fraction Models*. Neste *applet*, o aluno indica o numerador e o denominador (instrumentalização), e o *applet* retorna uma figura de área, representação fracionária, número misto (se houver), decimal e porcentagem, as quais os alunos precisavam interpretar (instrumentação). Os alunos do G1 utilizaram esse *applet* para conferir se a representação decimal do Retângulo 1 (tabela da Tarefa 4), dois décimos (0,2), seria igual à representação fracionária, $\frac{2}{10}$. Para isto, eles colocaram 2 no numerador e 10 no denominador, e o *applet* retornou a notação decimal 0,2. No entanto, ao conferir se o perímetro do Retângulo 1, cuja representação decimal é 1,6, colocaram no *applet* o 1 no numerador e o 6 no denominador (instrumentalização). Como resultado, o *applet* mostrou o decimal 0,1667, conforme a Figura 4.9.

Figura 4.9 – Uso do *applet Fraction Models* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Com isso, concluíram que a representação fracionária não era a desejada (instrumentação). Então, a professora perguntou para o grupo como é feita a leitura de 1,6 e Docinho respondeu dezesseis (16) décimos. Frente a isso, a professora incentivou-os a inserir essa informação no *applet*. Lindinha, quem estava compartilhando a tela, inseriu 16 no espaço destinado ao numerador e 10 no denominador, e com isso verificaram que a representação decimal no *applet* resultou em 1,6. A seguir, para verificar se estavam corretos quanto à representação fracionária da medida da área, 0,12, perceberam que o *applet Fraction Models* é limitado ao denominador 25, e por isso chamaram a professora para auxiliar.

Docinho: *E doze cem avos… Aqui tem 100?* [procurando no *applet* como inserir 100 no denominador].
Lindinha: *Não, só chega até o 25… Professora, tá online?*
Professora: *Oi, gente, pode falar.*
Docinho: *Aqui não tem 100!* [referindo-se ao *applet Fraction Models*].
Professora: *E agora?*
Docinho: *É que ali na área, eu acho que é* $\frac{12}{100}$ *(doze cem avos) mas aqui não tem 100.*

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

O *applet Fraction Models* é limitado à unidade de medida 100 (denominador), indo no máximo até 25. A professora explicou que o *cem avos* (fração de denominador cem) deve ser lido como centésimos, e pediu para que continuassem a tarefa completando a tabela referente aos demais quadriláteros, e enquanto isso, fossem pensando em como comprovar.

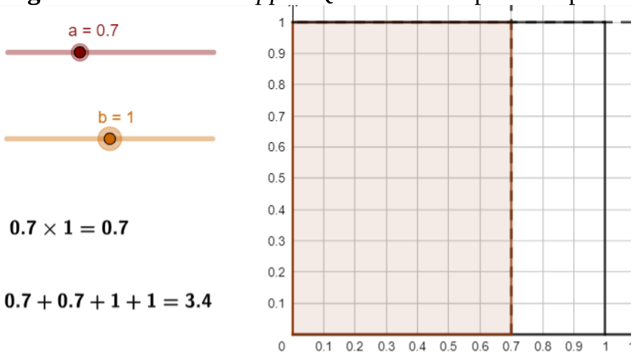
Passaram, então, a completar a tabela, referente ao Quadrado 2, cuja única informação era a largura, na representação fracionária, $\frac{9}{10}$. Para completar o comprimento, área e perímetro, tanto na representação decimal quanto fracionária, não tiveram dificuldades. Primeiro utilizaram o *applet Fraction Models,* inseriram 9 no numerador e 10 no denominador, para converter a representação fracionária $\frac{9}{10}$ para a decimal 0,9. Então, abriram o *applet Quadriláteros*, arrastaram os controles deslizantes *a* e *b* até a medida 0,9, e encontraram o perímetro e a área para completar a tabela referente às representações decimais (instrumentalização). Depois, retornaram no *applet Fraction Models* para conferir se o perímetro que escreveram na representação fracionária estava correto: inseriram 36 no numerador e 10 no denominador, e verificaram que era 3,6. Também ficaram inseguros quanto à representação fracionária da medida da área 0,81, pois já tinham constatado que o *applet Fraction Models* é limitado até o denominador 25. Então, mesmo com dúvidas, escreveram $\frac{81}{100}$, e prosseguiram com a resolução da tarefa referente ao Retângulo 3. Para este retângulo, foi informado o comprimento 0,7 e área 0,35.

Docinho: [...] *Então coloca aí, Lindinha, 0,7 de comprimento* [arrasta o controle deslizante *a* até a medida 0,7].
Lindinha: *Já coloquei.*
Docinho: *Agora vai colocando a largura* [arrastar o controle deslizante b] *até dar 0,35 ali, no vezes* [no valor da área].
Lindinha: *Olha, 3,4* [Lindinha arrasta o controle deslizante *b* até a medida 1].

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Essa discussão resultou na Figura 4.10:

Figura 4.10 – Uso do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1

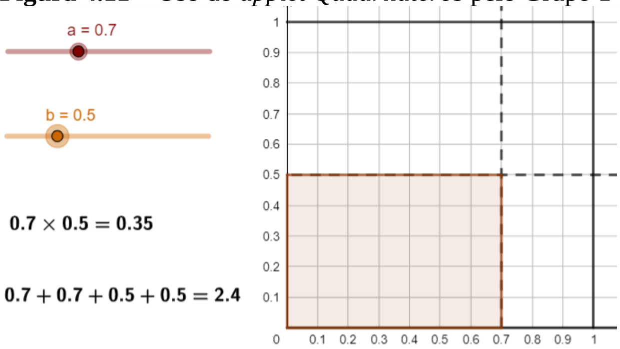


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Docinho: *Não, ali 0,7 vezes tal, tem que dar o resultado 35 [referente a 0,35 na medida da área].*
Lindinha: *É o de mais, né?* [referente ao cálculo do perímetro].
Docinho: *Não, o de vezes* [referente à área].
Lindinha: *Aí!* [Lindinha arrasta o controle deslizante *b* até o valor 0,5].
Docinho: *Ah, então é 0,5 a largura!*
Lindinha: *Porque você escolheu o 35?* [referindo-se a 0,35].
Docinho: *Porque ali, na área que a professora mandou no grupo* [referente a tabela da tarefa], *está 0,35, aí eu falei para você colocar o resultado 35 para ver qual que era o resultado da largura.*
Lindinha: *Ah, entendi!*
Docinho: *Agora o perímetro é 2,4. Então, ali na largura, vai ficar* $\frac{5}{10}$*, o perímetro vai ficar* $\frac{24}{10}$ *e a área* $\frac{35}{100}$.

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Figura 4.11 – Uso do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Quando os alunos representam o quadrilátero solicitado, associam comprimento e largura aos controles deslizantes dos quadriláteros, e vinculam a representação decimal à representação fracionária, revela-se a instrumentação. Já a ação de mover os controles deslizantes observando as mudanças relacionadas ao comprimento, largura, área, perímetro e valores mostrados no software está relacionada com a instrumentalização.

Nossa intenção era que os alunos concluíssem que, ao multiplicar frações cujos fatores sejam menores que 1 o produto é menor que os fatores; quando o produto é igual a 1, os fatores são também 1; e quando os fatores são maiores que um, o produto é maior que os fatores, ou seja, diferentemente dos números naturais, que o produto é sempre maior que os fatores, nas frações, essa não é uma regra. Assim, para completar a tabela da Tarefa 4, referente as representações do Quadrado 4, a única informação dada foi a da medida da área, 1, na representação decimal. Não houve dificuldades para encontrar a medida do comprimento e da largura, mas os alunos ficaram em dúvida quanto à representação fracionária dos números naturais. No momento do diálogo, que pode ser lido no excerto abaixo, Lindinha compartilhava o *applet Quadriláteros.*

Professora: [...] *Mas que fração vocês poderiam escrever para representar um?*
Docinho: *Um um?* [referindo-se à fração $\frac{1}{1}$].
Professora: *O que vocês acham? Tem outra?*
Docinho: *Não sei professora… é um inteiro.*
Lindinha: *½ professora?*
[...]
Docinho: *Tá, vou lá no outro applet* [referindo-se ao *applet Fraction Models* e passa a compartilhar a tela]. *Dá 1 por 1 professora, 1 no numerador e outro 1 no denominador* [insere no *Fraction Models* 1 no numerador e 1 no denominador, que retorna com a representação decimal igual a 1].
Lindinha: *E na de baixo* [referindo-se ao perímetro] *vai dar 4, o resultado do perímetro*.
Docinho: *Então vai dar 4 por 4... deixa eu ver…* [insere no *Fraction Models* 4 no numerador e 4 no denominador, que retorna com decimal igual a 1]... [Então, depois de alguns segundos de silêncio, a aluna coloca 16 no numerador e 4 no denominador, e verifica que essa fração $\frac{16}{4}$, retorna o decimal 4]. *Dá* $\frac{16}{4}$*professora.*
Lindinha: Então coloca $\frac{16}{4}$ [referindo-se ao preenchimento da tabela referente ao Quadrado 4, na representação fracionária do perímetro].
Docinho: *E na área...*
Lindinha: *Vai ser* $\frac{1}{1}$.

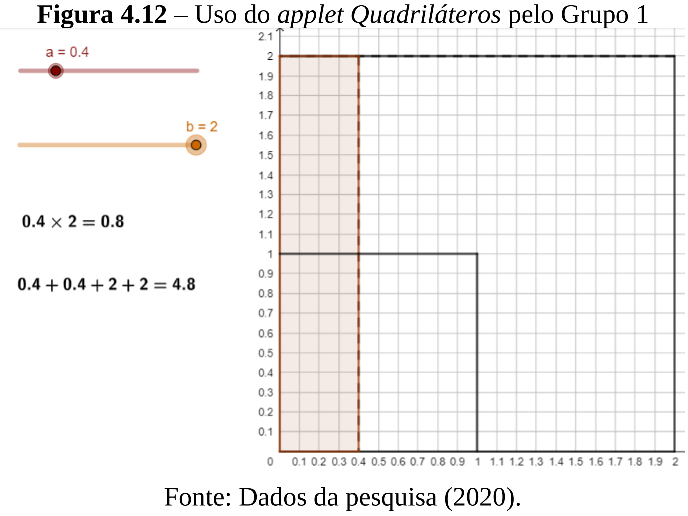
Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

A intenção de colocarmos comprimento e largura medindo 1 foi para que os alunos compreendessem que, na multiplicação de números racionais, multiplicar duas frações diferentes de 1 entre si pode produzir um resultado (produto) menor que um dos dois fatores. O comprimento e largura 1 seriam parâmetros para compreenderem isso.

Conforme disposto na tabela da Tarefa 4, referente Retângulo 5, as informações que os alunos tinham para preencher as representações decimais e fracionárias eram comprimento, 4,5; e perímetro, 13. Para encontrar a largura, precisariam subtrair, de 13, o dobro do comprimento, 9; e depois dividir o resultado por 2. No entanto, encontraram o seguinte problema: o *applet Quadriláteros* só aceita comprimento e largura até 2 de medida. Ao tentarem arrastar o controle deslizante *a* para a medida 4,5, perceberam essa limitação (instrumentalização). Depois de alguns minutos de discussão sobre essa questão, sem concluírem como fazer, decidiram deixar para responder essa questão sobre o Retângulo 5 depois, e trabalhar com o próximo quadrilátero, o Quadrado 6.

Na tabela da Tarefa 4, referente ao Quadrado 6 só foi informada a representação fracionária do perímetro, $\frac{24}{5}$. Então, Docinho, utilizando o *applet Fraction Model*, inseriu 24 no numerador e 5 no denominador, e concluiu que a representação decimal era 4,8 (instrumentação e instrumentalização). Lindinha estava compartilhando o *applet Quadrilátero*, e moveu os controles deslizantes *a* e *b* para que o perímetro medisse 4,8. No entanto, o quadrilátero deveria ser um quadrado.

Figura 4.12 – Uso do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



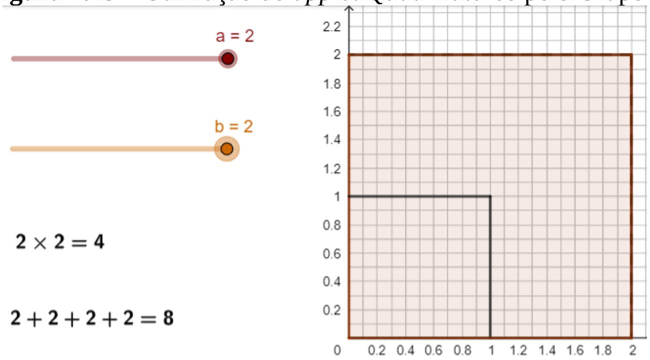
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Docinho: *Professora, mas daí o perímetro em representação fracionária deu* $\frac{24}{5}$*, mas a forma decimal deu 4,8* [observando que Lindinha encontrou um retângulo de perímetro 4,8 e não um quadrado].
Professora: *Ok, então coloca lá 4,8 no perímetro da tabela* [referente à conversão fracionária para a decimal].
Docinho: *Mas vai ficar aquele retângulo, professora* [referindo-se à Figura 4.12].
Professora: *Mas deveria ser um quadrado, não é?*
Docinho: *É.*
Professora: *Então vocês precisam descobrir que medida é para todos os lados. Essas medidas são iguais, e somadas devem medir 4,8.*
Docinho: *Coloca tudo no máximo, Lindinha* [referindo-se aos controles deslizantes *a* e *b*].
Professora: *Lembra o que é perímetro?*

Docinho: *Aham, agora vai diminuindo* [referindo-se aos controles deslizantes *a* e *b*] *para dar 4,8 ali* [referente ao resultado da soma do perímetro abaixo dos controles deslizantes].
Lindinha: *Nos dois?* [referente aos controles deslizantes *a* e *b*].
Docinho: *É.*
Lindinha: [Coloca os controles deslizantes *a* e *b* no máximo, 2, conforme a Figura 4.13].

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Figura 4.13 – Utilização do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

No excerto acima, Docinho percebeu que o quadrilátero formado está errado (instrumentação), apesar de a medida do perímetro estar certa. Então, a professora interveio para que os alunos se lembrassem do conceito de perímetro do quadrado. Nesse momento, Lindinha encontrou uma estratégia: colocar os controles deslizantes *a* e *b* no máximo, ou seja, com medida 2, e ir diminuindo-os até atingir o perímetro desejado, 4,8, cujo quadrilátero formado deve ser um quadrado. Notamos que a instrumentação é destacada quando os alunos se apropriam das características e potencialidades do *applet* para realizar medições, e observam as mudanças do perímetro e figura formada, relacionadas às alterações dos controles deslizantes. Eles continuaram a discussão:

Docinho: *Agora vai diminuindo* [referente ao controle deslizante *a*] *para dar 4.8* [referente ao perímetro].
Lindinha: [Vai arrastando o controle deslizante *a* para a esquerda, ou seja, diminuindo a medida, e para em 1,4].
Docinho: *Vai mais, mais para cima. Mais...* [querendo dizer para Lindinha mover o controle deslizante *a* para à esquerda].
Lindinha: *Espera aí…* [move o controle deslizante *a* até 1,2]
Docinho: *Mais, Lindinha. Para cima, não é para baixo* [querendo dizer para Lindinha mover o controle deslizante *a* para à esquerda].
Lindinha: [Move o controle deslizante *a* até a medida 2 novamente, e passa a mover o controle deslizante *b* até 1,7].
Docinho: *Isso! Não! Volta...*
Lindinha: [Move o controle deslizante *b* até o 2].
Docinho: *Aí! Não… Espera. Um pouquinho para baixo* [referente a mover o controle deslizante *b* para à esquerda].
Lindinha: [Diminui o controle deslizante *b* até a medida 0,4].
Docinho: *Aí, agora diminui o outro* [referente ao controle deslizante *a*].
Lindinha: [Diminui o controle deslizante *a* até a medida 0,4 também]... *Mas daí vai diminuir o outro também* [referente ao perímetro].

Professora: *Então comprimento e largura têm que ser maiores, não é?*

Lindinha: [Começa a aumentar as medidas dos controles deslizantes *a* e *b* de maneira igual: arrasta o controle deslizante *b* até 0,7, e a seguir, o controle deslizante *b* até 0,7. Observa o perímetro, 2,8, e move o controle deslizante *a* e depois o *b* até 1].

Docinho: *Deixa o* a *no 8 (referindo-se ao 0,8).*

Lindinha: [Arrasta o controle deslizante *a* até 2 e começa a diminuir, até atingir 1,4].

Docinho: *Aí! Agora aumenta o outro* [referindo-se ao controle deslizante *b*].

Lindinha: [Arrasta o controle deslizante *b* até atingir 1,4].

Docinho: *Professora, não tem como… Você fez isso antes para ver se dava certo?*

Professora [risos] *Lógico que tem! Está passando um pouquinho, não está? Então diminui as duas medidas um pouquinho...*

Docinho: *Diminui um, depois o outro* [referindo-se ao controle deslizante *a* e *b*].

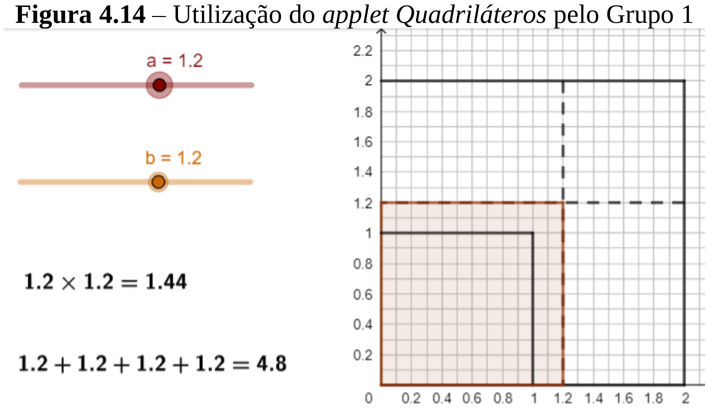
Lindinha: [Arrasta o controle deslizante *a* para a esquerda até atingir 0,7, e a seguir, arrasta para a direita, aumentando a medida de *a* até 1,2].

Professora: *Pensa assim, no Quadrado 4, você tinha comprimento 1 e largura 1, o perímetro deu 4, e vocês querem 4,8. Então, não é um pouquinho maior do que 1?*

Lindinha: [Move o controle deslizante *b* até 1,2] *Consegui professora! O perímetro deu 4,8 e na área deu 1,44.*

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Figura 4.14 – Utilização do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1

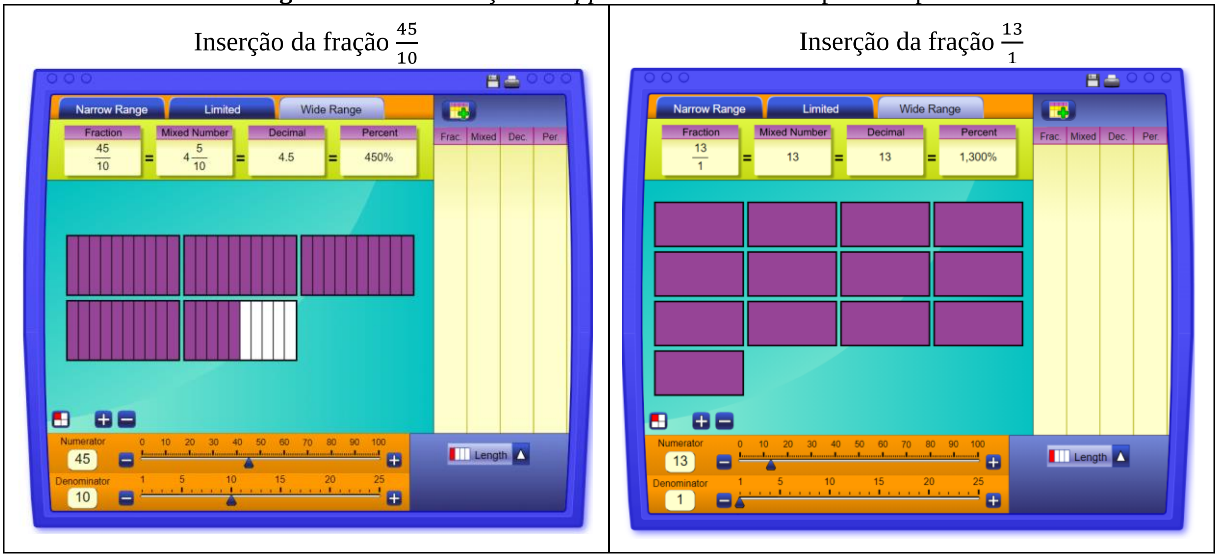


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A seguir, o grupo voltou para a tabela da Tarefa 4, coluna referente ao Retângulo 5. A professora relembrou que o perímetro é comprimento mais comprimento mais largura mais largura. Depois, pediu para refletirem sobre um retângulo de números inteiros como, por exemplo, de comprimento 2 e perímetro 16. Então, os alunos discutiram e concluíram que, nesse exemplo, a largura seria 6. Notamos que sem o apoio do *applet*, os alunos não conseguiram refletir sobre a situação apresentada no Retângulo 5, sendo necessária a intervenção da professora. Esse grupo, para fazer as representações fracionárias, precisaram do *applet Fraction Models* para ter certeza de que 4,5 é $\frac{45}{10}$ e 13 é $\frac{13}{1}$ (Figura 4.15), evidenciando o processo de instrumentação. Como já haviam passado duas horas de *live*, decidimos continuar a tarefa no dia seguinte[1].

[1] Foi o único grupo com o qual realizamos um encontro fora do planejado. Isso porque, depois do desenvolvimento da tarefa com o G1, subdividimos a tarefa para os demais grupos, sendo realizados os itens *a* e *b* em uma semana; e os itens *c* e *d* na semana seguinte.

Figura 4.15 – Utilização do *applet Fraction Models* pelo Grupo 1



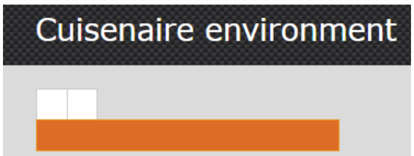
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

No dia seguinte, para resolver o item *c* da Tarefa 4, os alunos precisavam observar a tabela e responder quais seriam as diferenças existentes entre a multiplicação de números racionais e naturais. Depois de muitas discussões sobre essa questão, a professora pediu para que os alunos observassem novamente a tabela, e comparassem o comprimento e a largura do Retângulo 1, com sua área, ou seja, comparassem 0,2 e 0,6 com 0,12; ou ainda, na representação fracionária, $\frac{2}{10}$ e $\frac{6}{10}$ com $\frac{12}{100}$. No entanto, apesar de os alunos saberem que precisavam encontrar as frações equivalentes para comparar as frações, não sabiam como fazer isso. Ressaltamos que, nas Tarefas 2 e 3, abordamos equivalências de frações utilizando as *Barras Cuisenaire*. Entretanto, o grupo não lembrou de utilizar a multiplicação para encontrar as frações equivalentes, mas lembraram das *Barras Cuisenaire*.

Professora: *O que nós fizemos para encontrar as frações equivalentes?*
Docinho: *A gente usou as barras, professora.*
[...]
Lindinha: [Abre o *applet* das *Barras Cuisenaire*].
Professora: *Então monta ali, 2 décimos, o que é 2 décimos?*

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 21/10/2020.

Figura 4.16 – Utilização do *applet Barras Cuisenaire* pelo Grupo 1



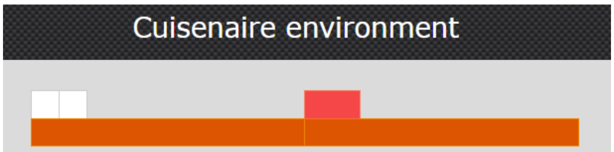
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Docinho: *Com o vermelho era mais fácil* [referente à Lindinha ter optado por usar 2 barras brancas ao invés da barra vermelha].

Professora: *Agora, você tem que fazer isso equivalente a 100. Então, quantas barras laranja você vai ter que colocar aí?*
Docinho: *90.*
Professora: *Então diminui o zoom [...]. Mas olha só, vocês vão conseguir imaginar uma coisa, coloca uma barra laranja ali do lado, a Docinho falou que tem que ser mais 9... 90. Só que, para cada barra laranja que você for colocar, tem que colocar mais 2 décimos, então coloca 2 décimos ali nessa barra* [Lindinha adiciona a barra vermelha em cima da barra laranja].

Tarefa 4 – G1. RT, 21/10/2020.

Figura 4.17 – Utilização do *applet Barras Cuisenaire* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Professora: *Aí, agora imagina isso quantas vezes.*
Docinho: *Dá 20.*
Professora: *Então vai ser 20 o que?*
Docinho: *20 centésimos.*

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 21/10/2020.

O grupo precisou das *Barras Cuisenaire* para compreender que $\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$ e comparar $\frac{20}{100}$ e $\frac{12}{100}$. Depois de analisarem cada um dos quadriláteros apresentados na tabela, o G1, na fase de Discussão Coletiva da Tarefa 4, parte 2, apresentou suas conclusões da seguinte forma:

Docinho: *Nos números racionais, nem sempre o resultado é maior que o fator, pois quando fizemos as equivalências, os resultados deram que alguns davam maior [sic], outros menores e outros iguais. Quando o zero vem antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser menor do que os fatores. Quando qualquer número sem ser zero vir antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser maior que o fator. Quando os números dão iguais, o resultado e o fator vão ser iguais.*

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 30/10/2020.

A limitação do *applet Fraction Models* quanto à unidade de medida 25 não impediu que os alunos do G1 comparassem ou convertessem decimais e frações de unidade de medida 100, porque utilizaram as *Barras Cuisenaire*. Reforçamos que, apesar de a professora ter sistematizado, na Tarefa 3, a equivalência de frações por meio das *Barras Cuisenaire* e também pela operação de multiplicação, os alunos não lembraram dessa última possibilidade, mas lembraram das *Barras Cuisenaire*.

4.6 Considerações Finais

Nosso objetivo foi investigar as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no EEM desenvolvidas ERE. Para isso, buscamos evidências dos processos de instrumentação e instrumentalização promovidos pela utilização dos *applets* no contexto do ERE em aulas assentes no EEM para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição.

Pelo fato de as *Barras Cuisenaire* não possuírem medida pré-estabelecida, existe a possibilidade de realizar diferentes comparações entre o comprimento das barras, favorecendo a compreensão de fração como medida, porque é indispensável escolher uma das barras para comparar, como a unidade de medida. Por exemplo, ao medir a barra verde-clara utilizando a barra verde-escura como unidade de medida, temos que a verde-clara mede metade $\frac{1}{2}$ da verde-escura; e se comparada a verde-clara com a azul, a mesma barra verde-clara mede a terça parte $\frac{1}{3}$ da barra azul, o que permitiu aos alunos, mobilizando estratégias para realizar comparações multiplicativas entre as barras, estabelecer equivalência de frações, compreendendo a propriedade *representação simbólica* (de que há uma infinidade de representações fracionárias para uma mesma magnitude). Além disso, ao terem que escolher e utilizar a unidade de medida mais conveniente para operar com frações de unidades de medidas diferentes, puderam compreender a propriedade dos números fracionários *sinalização de magnitude numérica*.

O *applet Quadriláteros* foi utilizado para realizar a construção e medição dos quadriláteros, seus perímetros e áreas; e o *Fraction Models* para validar se representações fracionárias e representações decimais tinham a mesma magnitude.

A associação dos três *applets*, na Tarefa 4, favoreceu que os alunos compreendessem as diferenças entre os números naturais e números fracionários, da propriedade *produto* (Obersteiner *et al.*, 2019 *apud* Powell, 2019b), que ao multiplicar duas frações diferentes de zero e um, seu resultado pode ser menor do que um dos dois fatores.

Em vários momentos da pesquisa, percebemos a forma como os *applets* influenciaram os pensamentos dos alunos, na instrumentação quando, por exemplo, acreditavam que a fração $\frac{1}{9}$ era maior que $\frac{1}{4}$, sem olhar para as *Barras Cuisenaire*. Ficou explícito, também, como as compreensões dos alunos moldaram o uso dos *appletsn* na instrumentalização quando, por exemplo, os alunos utilizaram as *Barras Cuisenaire* para encontrar a fração equivalente à unidade de medida 100.

A inserção dos *applets* no nosso trabalho pedagógico possibilitou que estudantes com diferentes aparatos tecnológicos (celulares, *tablets*, computadores) pudessem discutir, refletir, visualizar e reconhecer as frações como medida. No entanto, sabemos que nem todos tiveram a oportunidade de participar das aulas por indisponibilidade de equipamento ou internet. Isso inviabilizou o trabalho com esses alunos, e nesse sentido, salientamos que não conseguiríamos planejar e desenvolver as tarefas aqui propostas, no contexto do ERE, sem o uso dos *applets* citados, especialmente das *Barras Cuisenaire*, nas quais as tarefas se alicerçam, sendo necessárias para as explorações e compreensões dos alunos.

Os resultados revelam o potencial das aulas assentes no EEM aliado aos *applets* sugeridos para a aprendizagem de frações na perspectiva da medição, visto que sem a intervenção da professora, as tarefas e os *applets* por si só se mostram limitados. Neste sentido, um planejamento detalhado das aulas nessa perspectiva, especialmente com a elaboração de um quadro de antecipação de ações dos alunos e do professor é indispensável para que os objetivos das tarefas sejam atingidos.

Uma diferença a ser destacada quanto à utilização dos *applets* no ensino presencial e no remoto é que, nas aulas presenciais, os alunos poderiam trabalhar e visualizar dois ou mais *applets* ao mesmo tempo, o que não acontece no ERE, pois não existe possibilidade de compartilhar duas telas ao mesmo tempo via *Google Meet*.

Apontamos a necessidade de outras investigações que analisem as potencialidades do EEM articulado às TD sob a lente teórica da GI para o ensino e a aprendizagem de frações na perspectiva da medição, bem como outras interpretações. Salientamos, também, que os recursos de comunicação, como computador, celular, *whatsapp e Google Meet,* possibilitaram e são indispensáveis no desenvolvimento das aulas no ERE e, portanto, não são elementos neutros, e influenciam o ensino e o aprendizado no ERE. Contudo, neste trabalho, não analisamos sua relação com a aprendizagem das frações como medida, visto que teríamos que considerar outros descritores, o que pode ser investigado em outros trabalhos, a fim de compreender de que forma artefatos/instrumentos de comunicação influenciam o ensino e o aprendizado de Matemática no ERE.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 46, p. 349-365, 2013.

ALMEIDA, A. C.; OLIVEIRA, H. O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. **Quadrante**, v. 18, n. 1 e 2, p. 87-118, 2009.

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais do VII Sipem**. SBEM, v. VII. p. 1-12, 2018.

BASNIAK, M. I; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais no Ensino Exploratório de Matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 738-747, 2019.

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. **Rational Numbers Concepts** in Acquisition of Mathematics Concepts and Process, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Editora UFPR, Curitiba, n. especial 1/2011, p. 157-171.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **PARADIGMA**, *[S. l.]*, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In: CANAVARRO, P., SANTOS, L., BOAVIDA, A., OLIVEIRA, H., MENEZES, L.; CARREIRA, S. (Orgs.). **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012**: Práticas de Ensino da Matemática. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2012. p. 255-266.

CEALE. Glossário Ceale: **Termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores**. Belo Horizonte, 2014. ISBN 978-85-8007-079-8. Disponível em http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale; acesso em 8 set. 2020.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

DRIJVERS. P.; KIERAN, C.; MARIOTTI, M.-A.; AINLEY, J.; ANDRESEN, M.; CHAN, Y. C.; DANA-PICARD, T.; GUEUDET, G.; KIDRON, I.; LEUNG, A.; MEAGHERET, M. Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, LAGRANGE, J.B.C. Internacional Comission on Mathematical Instruction. Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain - **The 17th ICMI Study**. Springer: New York, 89-133, 2010.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza del Número

Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 1, p. 17-35, 2005.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p.125-150, 1980.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

MOREIRA, J. A. M; HENRIQUES, S.; BARROS, D. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. **Dialogia**, São Paulo, n. 34, p. 351-364, jan./abr. 2020. DOI: 10.5585/dialogia.n34.17123

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros. v. 5, n.11, p. 1-29, 2021. http://dx.doi.org/10.46551/emd.e202108

PADILHA, L. C. S.; BITTAR, M. Apropriação da Tecnologia por Professores de Matemática para fins Pedagógicos: Uma Abordagem Instrumental. *In*: XI Encontro Nacional de Educação Matemática **Anais [...]**. Curitiba, p. 1-15, 2013.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies:** une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P. Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In: BAILLEUL, M. (Ed.). *Actes de la Xème Ecole d'Été en Didactiques des Mathématiques*. Houlgate: IUFM de Caen, p. 202-213, 1999.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012 - versão Kindle.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.

VALENTE, G. S. C.; MORAES, E. B. de; SANCHEZ, M. C. O.; SOUZA, D. F. de; PACHECO, M. C. M. D. O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: Reflexões sobre a prática docente. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 9, p. e843998153, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i9.8153. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/8153. Acesso em: 01 dez. 2020.

VIEIRA PINTO, A. **O conceito de tecnologia.** Rio de Janeiro: Contraponto, v. 1, 2005.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão de pesquisa que norteou este trabalho diz respeito *às possibilidades e dilemas emergentes para o/no ensino e para a/na aprendizagem de frações na perspectiva da medição ao planejar e desenvolver aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental no contexto do Ensino Remoto de Emergência*. Assim, investigamos elementos específicos que permeiam tal questão, dentre os quais salientamos o planejamento das aulas, a compreensão dos pressupostos teóricos e epistemológicos das frações e de seu ensino, a aprendizagem dos alunos em aulas assentes no EEM e o papel dos *applets* nessa aprendizagem. Esses elementos nortearam e estruturaram cada um dos quatro capítulos/artigos que compõem a presente dissertação no formato *multipaper* (DUKE; BECK, 1999).

A dissertação desenvolvida nesse formato foi um grande desafio, ainda mais porque a professora pesquisadora estava há muito tempo longe da arte de ler e escrever artigos científicos. Além do desafio da escrita, estabelecer objetivos e constituir lentes teóricas para alicerçar e elucidar os objetivos a serem atingidos em cada artigo não foi uma tarefa simples. Outro desafio foi como concatenar vários artigos a fim de responder à questão geral da pesquisa. Isso implica em delimitar as problemáticas a serem discutidas e/ou analisadas em cada um dos artigos científicos. Por isso, por muitas vezes nossos artigos ficaram longos, confusos, cansativos de ler, perdendo sua objetividade, o que demandou esforço maior, especialmente para sintetizar o quadro teórico, a riqueza do contexto em que a pesquisa ocorreu, e na seleção dos excertos e episódios das aulas que explicitassem os resultados do trabalho. Apesar das dificuldades inerentes a uma dissertação *multipaper*, reconhecemos que a vantagem está associada à garantia do rigor científico, pois exige estudar com profundidade o quadro teórico, revisitar várias vezes os dados da pesquisa, selecionando aqueles mais relevantes. Além disso, artigos podem atingir mais o público ao qual se destina mais facilmente, em nosso caso, os professores, que têm pouco tempo para pesquisar ou estudar sobre sua prática.

Discutindo a questão geral da pesquisa

Desde o início do projeto de pesquisa, estava claro que trabalharíamos com alunos de 6º ano do Ensino Fundamental e com o ensino de Matemática associado ao uso de Tecnologias Digitais (TD). No decorrer das disciplinas do Programa de Pós-Graduação em Educação

Matemática (PRPGEM), eventos, leituras e participação no Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE, conhecemos o Ensino Exploratório de Matemática e a complexidade do ensino de frações. Assim, nosso objetivo delineou-se e se voltou para o ensino, principalmente para a aprendizagem a fração como medida, um dos conteúdos que hoje elencamos como um dos mais importantes, pois são estruturantes para outros conteúdos de matemática, e como explicitamos ao longo da pesquisa, dada sua complexidade, um dos mais desafiadores de serem ensinados. Desta forma, nossos estudos alicerçaram-se no EEM, nas frações como medida e nas TD, tudo isso, no contexto do ERE.

Para desenvolver aulas assentes no EEM foi preciso debruçarmo-nos sobre a literatura e incorporar as nuances que compõem essa metodologia de ensino desafiadora. Primeiro, compreender que as atitudes e ações do professor são muito diferentes do ensino tradicional, centrado no professor. Isto porque o papel desempenhado pelo professor no EEM é ativo, mas de natureza diferente do ensino tradicional. A atitude do professor é fundamental no desenvolvimento da aula, e suas ações e atitudes devem ser no sentido de não validar ou refutar ideias, mas conduzir para a resolução da tarefa por meio do *inquiry*, favorecendo a *reflexão*, *comunicação* e *colaboração* entre os alunos, dimensões estruturantes fundamentais do EEM. Assim, antes de desenvolver as aulas com os alunos, precisamos planejar e antecipar nossas ações e atitudes, e neste sentido, a elaboração de um quadro de antecipação para as possíveis dúvidas, questionamentos e resoluções dos alunos foi imprescindível, pois sem esses elementos, as tarefas poderiam ser comprometidas. Também, o papel dos alunos é muito diferente, pois se tornam o centro do seu aprendizado.

Acatamos as sugestões de Cyrino e Teixeira (2016) quanto à organização das aulas assentes no EEM, considerando quatro fases: 1º) *Introdução da Tarefa* − em que orientamos os alunos quanto à organização dos grupos, tempo, forma de registro, realizamos a leitura da tarefa e esclarecemos dúvidas quanto ao entendimento das tarefas; 2º) *Realização da Tarefa* − os alunos resolveram a tarefa em pequenos grupos, trocaram ideias, estratégias e conhecimento matemático. Para isso, os quadros de antecipação foram indispensáveis para agir, e não validar ou refutar as respostas dos alunos durante o desenvolvimento da tarefa, antecipando suas ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos e estratégias de resoluções; 3º) *Discussão Coletiva da Tarefa* − selecionamos e escolhemos a ordem dos grupos que apresentariam a forma como o grupo resolveu a tarefa para a turma toda, evidenciando as estratégias de resolução, fossem elas corretas ou não, para que, na troca coletiva, novas negociações de significados pudessem emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões; e 4º) *Sistematização das Aprendizagens Matemáticas* − sistematizamos e institucionalizamos as aprendizagens matemáticas envolvidas, e orientamos para que os alunos realizassem os registros da sistematização, de acordo com os apêndices neste trabalho.

Cabe salientar que nosso planejamento e delineamento já estavam definidos quando o ano de 2020 foi assolado pela pandemia da COVID-19, causada pelo novo coronavírus − Sars-Cov-2, impossibilitando as aulas presenciais e instituindo o ensino remoto de emergência (ERE). Nosso dilema foi realizar ou não a pesquisa nesse contexto, e então decidimos que a pesquisa continuaria.

Essa mudança drástica da forma de ensinar nos fez readequar os quadros de ações intencionais do professor na prática de EEM estruturado por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), já então os adaptados e complementados a partir das fases da aula e com a inclusão do uso das TD, e novamente adaptar e complementar para o contexto do ERE. Tal ação foi necessária para que pudéssemos ter claras quais as novas atitudes e práticas para o desenvolvimento das aulas. Uma ação errada ou ineficiente poderia comprometer a proposta da tarefa. Esses quadros reelaborados, além dos planejamentos, das tarefas e dos quadros de antecipação/orientação foram apresentados, discutidos e validados pelos integrantes GEPTEMatE.

Mesmo com o pouco tempo que tínhamos de experiência com o ERE, nossos planejamentos e desenvolvimento de aulas assentes no EEM no contexto do ERE revelaram um dilema que acompanha os professores cotidianamente desde a suspensão das aulas presenciais, que envolve a necessidade de que professor e alunos tenham condições de acesso à internet de qualidade, equipamento e local apropriado para trabalho e estudos, sem interferências externas. No caso do professor, ainda salientamos a necessidade de mais horas de planejamento, pois exige organização prévia do professor, e demanda mais horas de trabalho para acompanhamento dos alunos.

Foram muitas horas de estudos, planejamentos e discussões até a versão final das tarefas, dos quadros de antecipação/orientação das tarefas e dos planejamentos das aulas, sendo tudo isso discutido com a orientadora e com os integrantes do GEPTEMatE. Assim, denunciamos o fato de que, muitas vezes, os professores são cobrados por não se atualizarem ou por não inovarem em sala de aula. No entanto, essas mesmas instituições que cobram desconhecem e não oferecem formação que oriente a prática docente nesse sentido.

Essa fase da pesquisa foi detalhada no capítulo/artigo 1 desta dissertação, cujas discussões nos permitiram concluir que é possível planejar e desenvolver aulas assentes no EEM no ERE utilizando os quadros reelaborados.

Entretanto, também constatamos que há uma lacuna nas formações continuadas dos professores, as quais, além de esporádicas, são desvinculadas das nossas práticas enquanto professores de Matemática. Salientamos a necessidade de formações continuadas aos professores da Educação Básica em parceria entre as Secretarias de Educação e as Universidades, instituições de pesquisa. Acreditamos que esse vínculo favorece ambas as instituições, pois aproxima as pesquisas da prática e, por outro lado, poderia contribuir para garantir formação de qualidade aos professores, condizentes com suas realidades e necessidades dentro da sala de aula, melhorando o ensino e a aprendizagem. No entanto, essas parcerias devem ser sustentadas e institucionalizadas como política pública, de responsabilidade do estado e não das universidades.

Estudando sobre o EEM, verificamos que, para que pudéssemos oportunizar aos alunos conhecer e fazer Matemática com significado, seria essencial compreendermos não somente as bases ontológicas e epistemológicas do conteúdo a ser ensinado, mas as nuances do seu ensino também. Assim, em nossos estudos sobre frações e números racionais, deparamo-nos com o fato de que a aprendizagem de frações pode ocasionar implicações para a compreensão de conteúdos basilares da Matemática, como a Álgebra. Pois, como Kieren (1980) aponta, os números racionais apresentam aos alunos problemas algébricos em que é necessário compreender a noção de equivalência de frações, o conceito de inverso, generalização e abstração de ideias diferentes dos cálculos de números naturais e inteiros, sendo estes aspectos de generalização e abstração inerentes à Álgebra. Além disso, os números racionais compõem o conjunto dos números reais.

Portanto, consequentemente, a não compreensão de frações acarreta dificuldades na aprendizagem matemática em toda a vida escolar do aluno, desencadeando problemas também ao ensino de Matemática de forma geral, uma vez que, sem compreender esses obstáculos didáticos, o professor não sabe como trabalhar com o aluno para que supere essas dificuldades. Esse fato gerou, na professora pesquisadora, angústias e inquietações que a levaram considerar que, muitas vezes, não são os alunos que apresentam dificuldades em aprender frações, mas os professores que possuem dificuldades em ensinar o conteúdo, seja por formações deficientes ou insuficientes, ou por falta de incentivo e tempo para se atualizarem.

Assim, empenhamo-nos em estudar e discutir as diversas interpretações de frações, especialmente a interpretação de fração como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. Então, surgiu a necessidade de diferenciar e definir números racionais (aqueles que podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e $a, b, \in \mathbb{Z}$), fração ou representação fracionária (aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com b ≠ 0 e $a, b \in \mathbb{R}$), e números fracionários (aqueles que podem ser representados por uma classe de frações - frações equivalentes). Esses estudos foram sistematizados no capítulo/artigo 2 deste trabalho, constituindo um ensaio teórico em que discutirmos as implicações para o ensino e para a aprendizagem matemática da compreensão das interpretações das frações, considerando que ao menos cinco interpretações devem ser ensinadas aos alunos ao longo do Ensino Fundamental e Médio: medida, parte-todo, quociente, razão e operador.

Também constatamos que a introdução ao ensino de frações, como apresentada nos livros didáticos, realizada pela perspectiva do particionamento (parte-todo), ocasiona diversos obstáculos epistemológico. Entre eles pode ser citado que: as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados (interpretações); a contagem do todo e das partes consideradas utilizando números naturais; não há ruptura com as ideias e propriedades dos números naturais e a construção do novo campo numérico dos números racionais; e não há necessidade de escolha de uma unidade de medida. Em outras palavras, a introdução do ensino de frações pela perspectiva parte-todo confunde-se com as ideias e as propriedades dos números naturais. Com o ensino de frações exclusivamente como parte-todo, as operações com frações são admitidas como regras a serem aplicadas sem associar a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes à equivalência de frações, por exemplo, que é utilizada somente para simplificar o resultado final. Isso também foi uma surpresa para a professora pesquisadora, visto que já ignorava tais obstáculos, e que pode ser resultado da formação enquanto acadêmica de graduação, e das formações continuadas oferecidas pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná.

Por isso seguimos, na elaboração das tarefas, as orientações de Powell (2018a; 2019a), de que a introdução ao ensino de frações seja realizada com a interpretações medida, porque esta interpretação coincide com a gênese histórica das frações, que emerge da necessidade de medir quantidades contínuas (ESCOLANO, 2007). Na perspectiva das frações como medida, é necessário estabelecer uma unidade de medida para realizar comparações multiplicativas, e a equivalência de frações é fundamentada na magnitude numérica.

Denunciamos que, apesar de a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) destacar a importância de propiciar aos alunos tarefas que envolvam medições para mostrar a necessidade de um novo campo numérico, não encontramos, no *Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações* (PARANÁ, 2018) e no *Currículo da Rede Estadual Paranaense* – CREP (PARANÁ, 2019), explicitamente nos objetivos de aprendizagem ou conteúdos, a medição como caminho para construção do campo numérico dos números racionais. Encontramos apenas a associação de frações como parte-todo e como resultado de divisão.

Outro problema que observamos é que as demais representações de números racionais, como decimais e porcentagens, são trabalhadas como conteúdo à parte nos livros didáticos, desconectado das frações, como se fossem conteúdos diferentes. Buscamos amenizar esse problema, propondo a tarefa 4, que contempla essas três representações, embora estivéssemos cientes de que seriam necessárias mais tarefas que discutissem as diferentes interpretações das frações.

No desenvolvimento das aulas pudemos validar os quadros readaptados, ampliados e complementados que estão presentes do capítulo/artigo 1, e que orientaram a organização, gestão da aula e as aprendizagens matemáticas com ações do professor e do aluno em cada fase de desenvolvimento das aulas síncronas. Também validamos e complementamos os quadros de antecipação/orientação das tarefas, e comprovamos o quão essencial são tais quadros. É por meio das intervenções do professor que as ideias matemáticas dos alunos emergem para a resolução da tarefa. Por meio das provocações, arguições e pedindo explicações, os alunos refletem sobre suas ideias, colaboram com os colegas e comunicam suas (in)compreensões. Através dos quadros, o professor consegue reagir conforme as ações, questionamentos e (in)compreensões dos alunos.

Os resultados dos dados coletados nessas aulas e contexto foram analisados nos capítulos/artigos 3 e 4. No capítulo/artigo 3, investigamos a compreensão, por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, sobre os números racionais como campo numérico diverso dos naturais, a partir de práticas pedagógicas remotas orientadas pelo EEM, abordando as frações na perspectiva da medição. E, no capítulo/artigo 4, investigamos as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no EEM desenvolvidas no ERE.

As análises descritas no capítulo/artigo 3 revelaram que, durante as resoluções/discussões/sistematizações das tarefas elaboradas, o desenvolvimento das aulas assentes no EEM favoreceram para que os alunos compreendessem a diferença da propriedade de sinalização de magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, quando conseguiram comparar frações, e compreenderam que frações equivalentes têm o mesmo tamanho (mesma medida), mas podem ser escritas por representações simbólicas diferentes. Quanto ao produto, os alunos concluíram que, quando se multiplicam frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos fatores, o que não ocorre nos números naturais. A contraposição da representação simbólica e não simbólica da medida suscita o raciocínio dos alunos para pensarem e perceberem as diferenças entre os números naturais e os racionais, algo pouco presente nas aulas de Matemática e nos livros didáticos, mas que se mostra essencial para a compreensão dos racionais.

Além disso, constatamos que a proposta das aulas desenvolvidas no EEM também contribui para a formação de um estudante mais participativo e crítico. Em alguns momentos da pesquisa, a professora foi interrogada pelos alunos sobre o porquê ninguém os tinha ensinado frações daquela forma. Acreditamos que os questionamentos dos alunos se referem tanto à prática da professora orientada pelo EEM, quanto a abordagem do conteúdo de frações na perspectiva da medição. Desta forma, estas nossas ações permeadas pelo uso dos *applets* no contexto do ERE permitiu aos alunos pensarem sobre os números racionais do ponto de vista epistemológico antes do simbólico, contrapondo o simbólico com os significados e sentidos decorrentes das representações não simbólicas. Portanto, as compreensões dos alunos foram suscitadas nas práticas desenvolvidas, nomeadamente, na natureza delas, de maneira concatenada e orientada ao raciocínio matemático dos alunos, considerando inclusive seus conhecimentos prévios sobre as frações, que é explicitado no questionamento dos alunos sobre por que não aprenderam assim.

Outra potencialidade obtida nas análises dos dados é quanto ao desenvolvimento da habilidade de registro dos estudantes. Observamos que à medida que as aulas foram sendo desenvolvidas, a forma de registrar suas ideias e conclusões estavam mais detalhadas e claras em relação àquilo que estavam pensando, o que acreditamos também contribuir para outros conteúdos e outras disciplinas.

Diferente das aulas tradicionais de ensino, em que os alunos resolvem as tarefas individualmente, no EEM o trabalho em grupo é fundamental para a troca de negociação de significados. No entanto, nas aulas presenciais, a professora pesquisadora faria a Introdução da Tarefa com todos os alunos/grupos ao mesmo tempo, e em seguida, os grupos fariam a Resolução da Tarefa. A professora passaria pelos grupos acompanhando, intervindo, questionando. Com isto, provavelmente não conseguiria atender todos os grupos sempre que solicitassem sua presença, pois seriam sete grupos de cinco alunos em cada turma, visto que cada turma possui, em média, 35 alunos. No ERE, optamos por atender cada grupo individualmente nas fases de Introdução da Tarefa e Resolução da Tarefa, multiplicando o tempo pela quantidade de grupos. Assim, para aqueles que acreditam que no contexto do ERE o professor tem mais tempo ou não ensina, ou é mais fácil trabalhar nesse contexto, aqui fica nosso registro de que não é verdade.

Algo que nos afligiu muito durante o desenvolvimento das aulas é a exclusão daqueles alunos que, por falta de equipamentos e/ou acesso à *internet*, não puderam participar das aulas, cerca de 15 alunos das duas turmas estavam nessas condições. Aproximadamente 22 alunos simplesmente não participaram porque a participação síncrona não era obrigatória no ano de 2020, mas tinham acesso às tarefas, às gravações realizadas pela professora para a explicação e desenvolvimento das tarefas propostas, inclusive participavam da *live* das fases de Discussão Coletiva da Tarefa e Sistematizações das Aprendizagens Matemáticas.

Algo comum ao ERE e às aulas presenciais é que o EEM propicia o desenvolvimento de atitudes de respeito aos colegas, ouvir e discutir opiniões e argumentações diferentes, aceitação e superação dos próprios erros, compreender que os erros fazem parte da aprendizagem, que não há um único caminho para a resolução, e que resultados diferentes nem sempre significam que estão errados.

No capítulo/artigo 4, analisamos as influências dos *applets* para/na aprendizagem de frações como medida. Nosso intuito, desde o início do projeto de pesquisa, era utilizar tecnologias digitais, que depois foram adaptadas para/no ensino e para/na aprendizagem de frações como medida. Procuramos por *applets* que pudessem contribuir para os objetivos elencados, e após muita pesquisa e testes em dispositivos diversos, optamos pelas *Barras Cuisenaire* (utilizadas em todas as tarefas) e *Fraction Models*, do site da Nrich; e outros dois *applets*, *Quadriláteros* e *Prova sem Palavras*, disponíveis no *site Geogebra.org*.

Após leituras, a Gênese Instrumental foi a lente teórico-metodológica escolhida para analisar a ação intencional do sujeito (aluno), que utilizando esquemas mentais de uso, transforma o artefato (*applet*) em instrumento (para resolver a tarefa). As *Barras Cuisenaire* permitiram, aos alunos, mobilizar estratégias para realizar comparações multiplicativas entre as barras, estabelecer equivalência de frações, compreendendo a representação simbólica e a sinalização de magnitude numérica. O *applet Quadriláteros* permitiu que os alunos realizassem a medição dos quadriláteros (lados, perímetros e áreas), e com o *applet Fraction Models*, validaram ou não a mesma magnitude das representações fracionárias e decimais. A associação dos três *applets* favoreceu para que os alunos compreendessem a propriedade produto, que ao multiplicar duas frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos dois fatores.

No quadro 5.1 compilamos quais dilemas e possibilidades contatamos em nossa pesquisa.

Quadro 0.1 – Dilemas e possibilidades: para o ensino, no ensino, para a aprendizagem e na aprendizagem

	Dilemas	
	O que está posto	**Possibilidades**
Para o ensino	- Professor no centro do ensino com aulas tradicionais de matemática, em que o professor tem o controle sobre o que será abordado na aula. - Uso do livro didático e materiais prontos. - Menor tempo para o preparo das aulas, em que ainda assim a hora-atividade[1] é insuficiente. Formação continuada fragmentada, pautada em cursos esporádicos sobre assuntos específicos, sem acompanhamento.	- Ensino centrado no aluno pautado no Ensino Exploratório de Matemática, em que nem sempre o professor consegue prever o caminho que o aluno tomará. - Uso de TD e materiais elaborados pelo professor. - Maior tempo para preparo das aulas, em que a hora atividade é extrapolada em muito. - Formação continuada condizente com as necessidades emergentes da sala de aula, utilizando as pesquisas e conhecimentos produzidos nas Universidades.
No ensino	- Ensino de frações sustentado em regras e procedimentos e unicamente como parte-todo. - Desconhecimento dos professores das múltiplas interpretações de fração. - Não há discussão das diferenças entre o campo numérico dos racionais para os naturais. - As diversas representações dos números racionais são trabalhadas isoladamente, como se fossem conteúdos diferentes. - O ensino de frações não é considerado na compreensão de outros tópicos da Matemática, como Álgebra.	- Introdução do conceito de frações pela interpretação medida, como sendo uma relação de comparação multiplicativa. - Discussão das diferentes interpretações de fração. - Discussão das diferenças entre as propriedades dos números naturais e racionais. - Trabalhar com as diversas representações dos números racionais (decimais e porcentagens) como conteúdos relacionados. - Compreensão das implicações do ensino das frações para outros conteúdos
Para a aprendi-zagem	- O aluno recebe informações e reproduz o que *aprendeu*. - O aluno compreende a Matemática como algoritmos, procedimentos e regras, desconectada do cotidiano.	- Compreender que a Matemática vai além de procedimentos e regras, sendo um conhecimento produzido ao longo dos tempos e que contribui para a solução de problemas do cotidiano.
Na aprendi-zagem	- Alunos ouvem o professor e realizam exercícios de forma procedimental e individual.	Aulas assentes no EEM em que o aluno: - Trabalha em grupo, favorecendo o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração, dimensões fundamentais do EEM. - Compreende como a aula e o tempo serão distribuídos. - Entende cada fase da aula, tendo claro o que deve ser feito em cada uma delas. - Anota informações, caso necessário.

[1] Hora-atividade do professor é o tempo que o professor cumpre na instituição de ensino, mas fora da sala da aula que é utilizado para preparar aulas, corrigir provas trabalhos, realizar registros obrigatórios de documentos, e qualificação profissional.

	Dilemas	
	O que está posto	Possibilidades
		- Entende o contexto da tarefa. - Sana dúvidas e interpretações. - Compreende os objetivos estabelecidos. - Comunica-se oralmente. - Realiza registro escrito das (in)compreensões e ideias matemáticas. - Compreende a interpretação de frações como medida, sendo uma relação comparativa.

Fonte: As autoras (2020).

Apontamentos Finais

Em vários momentos da pesquisa, deparamo-nos com diferentes dilemas. O mais difícil, durante todo o estudo, foi compreender que era necessário desempenhar dois papéis: o de professora e o de pesquisadora. O papel de professora sempre se sobressaía ao de pesquisadora, e quando se colocava no seu papel de pesquisadora, era para julgar o desempenho do próprio papel como professora. Nesse sentido, o grupo de pesquisa e um texto de Gatti (2005), especialmente o trecho a seguir, foram motivadores para a superação desse dilema: aceitar que se tratam de dois papéis distintos, e que era necessário fazer uma pesquisa relevante, assumindo seu novo papel, de pesquisadora.

> O pesquisador precisa colocar-se a possibilidade de surpreender-se, senão, por que pesquisar? Num período transicional em que estruturações e desestruturações, normatizações e transgressões, imbricam-se dialeticamente, à pesquisa em educação surgem desafios consideráveis para a compreensão das tessituras das relações no ensinar e no aprender, na heterogeneidade contextual em que essas tessituras se fazem. Ainda, a própria compreensão da educação como propósito social e seu estatuto institucional requerem interrogações que transcendem sua modelagem por teorias ou filosofias que narram um real cada vez menos real (GATTI, 2005, p. 606-607).

Outros dilemas que permearam a pesquisa foram:

- O ERE fez emergir as desigualdades sociais, excluindo estudantes que não têm acesso a equipamentos e/ou *internet* de qualidade. Houve alunos que conseguiram participar das aulas síncronas e realizar as atividades no grupo (participantes da pesquisa), alunos que conseguiram apenas realizar as atividades propostas na plataforma (a professora elaborou vídeos explicativos para cada tarefa e auxiliou esses alunos por meio do comunicador instantâneo *whatsapp*), e os alunos que recebiam apenas atividades impressas (os quais receberam as tarefas adaptadas, pois a única orientação que recebiam era via texto escrito);

- Não reproduzir práticas de ensino ineficientes de sala de aula no contexto do ERE. Buscamos o EEM por ser uma prática inovadora, que concluímos também ser viável no ERE;
- A questão dos recursos e tempo de preparo das aulas assentes no EEM no contexto do ERE. A professora pesquisadora adquiriu, assim que o ERE foi instituído, uma mesa gráfica para as aulas remotas. Para o professor de matemática, é impraticável desenvolver aulas sem escrever e demonstrar. Outro fator foi o tempo despendido para elaboração de tarefas e quadro de antecipação/orientação, planejamento. Independentemente do fato de estarmos realizando uma pesquisa, o professor já não tem tempo suficiente para as atividades inerentes ao ensino, como preparação de aulas, preparação e correção de avaliações, preenchimento de documentos oficiais, registro de aulas e notas, quanto mais para planejar aulas inovadoras;
- Abandonar o livro didático, que é o material que o professor dispõe, e das orientações do CREP para buscar um ensino que rompa com a perspectiva de ensino exclusiva da interpretação de frações como parte-todo. Acreditamos que os professores desconheçam as múltiplas interpretações das frações. Foi pela oportunidade de cursar as disciplinas oferecidas pelo PRPGEM que deixamos de ser ignorantes quanto ao ensino de frações;
- Escolha de utilização do material físico ou digital. No contexto do ERE, essa resposta é óbvia, mas em contexto de aulas presenciais, dependerá dos recursos disponíveis na escola, para a qual nenhuma realidade é homogênea; e
- Fazer com que os resultados desta pesquisa cheguem até os professores, e não seja mais um estudo desconhecido. Esperamos realmente contribuir para que os estudos realizados cheguem até o professor, começando pela escola em que a professora trabalha.

Enfatizamos que não temos a intenção de apontar que o EEM é a única e/ou a melhor opção para o ensino e para a aprendizagem de Matemática, mas que é uma metodologia que contribui com reflexões e discussões na busca de um ensino inovador de Matemática, que atenda aos alunos dessa nova geração. É uma metodologia capaz de contribuir para a formação dos estudantes como indivíduos críticos, participativos, capazes de expressar e registrar ideias e argumentos, e solucionadores de problemas.

Inclusive, queremos apontar limitações em relação às características das tarefas exploratórias. Uma tarefa exploratória oferece desafio reduzido e é aberta, sendo definida pela alta demanda cognitiva necessária para resolvê-la. No entanto, pelo próprio caráter aberto das tarefas, pode ser um dificultador para os alunos e professor, caso este último não saiba conduzir os primeiros para a resolução da tarefa, ou ainda não consiga engajar os alunos e intervir de maneira que a tarefa não perca sua demanda cognitiva.

O desenvolvimento da primeira tarefa para a professora pesquisadora foi um fator de bastante insegurança e ansiedade. Apesar de já ter desenvolvido algumas aulas na perspectiva do EEM, utilizando tarefas de natureza exploratórias no ano anterior e desenvolvido as aulas piloto, tratava-se de um contexto novo para a professora pesquisadora e para os alunos. As dúvidas ficaram em torno de questões como: *será que os alunos entrarão nas reuniões? Será que se empenharão para resolver as tarefas? Se participaram da primeira tarefa, será que participarão das fases de discussão coletiva da tarefa e sistematizações das aprendizagens?* Essas questões foram sendo respondidas com o passar das aulas. Apesar de a quantidade de alunos que aceitaram participar da pesquisa ser um pouco menor do que o número de alunos que realmente participaram, a maioria dos alunos se mostrou empolgada e engajada na resolução das tarefas. Também, na primeira *live* para a apresentação dos grupos, os alunos ficaram ansiosos e nervosos, precisando do auxílio da professora pesquisadora. Inclusive, os alunos de um grupo faltaram na primeira apresentação por nervosismo. No entanto, para os demais encontros, foi interessante que se organizaram de maneira que mais alunos apresentassem, e os que haviam ficado nervosos na primeira apresentação conseguiram se soltar e apresentar as resoluções das tarefas.

Como os quadros de antecipação/orientação estavam bem detalhados e incorporados pela professora pesquisadora, foi possível segui-los, e estimular e engajar os alunos para resolução das tarefas propostas.

Quanto ao ERE, percebemos que se trata de um contexto excludente, já que os alunos que não possuem equipamentos e/ou internet de qualidade não têm a mesma igualdade para participação e acompanhamento das aulas. Por outro lado, sabemos que é uma imposição da atual conjuntura.

Assistir às gravações das aulas para elaboração dos artigos 3 e 4 proporcionou momentos de reflexão individual realizados pela professora pesquisadora. Apesar de não ser uma pesquisa da própria prática, é possível afirmar que contribuiu para o desenvolvimento profissional da professora.

Por último, queremos destacar que a profissão docente não poder ser isolada. Foi por meio das participações nas disciplinas do PRPGEM, no grupo de pesquisa, na discussão com colegas e orientadora que esta pesquisa foi planejada, construída e desenvolvida. Houve muitos momentos *solo*, mas diversos momentos coletivos.

Sugestões para trabalhos futuros

Nos últimos anos, as pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de frações têm sido retratadas em diversos trabalhos realizados pela comunidade de Educação Matemática, tanto no Brasil quanto no exterior, sendo consenso que o ensino e a aprendizagem de frações é um obstáculo a ser superado. Estudos de Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983) e Lamon (2012) sugerem que, para a compreensão efetiva de frações pelos alunos, é necessário apresentar-lhes diferentes interpretações ao longo da vida escolar. No entanto, não encontramos essas *diversas interpretações* nos livros didáticos ou nos programas que compõem o currículo escolar do Paraná (PARANÁ, 2018; 2019), prevalecendo a interpretação parte-todo.

Pela nossa experiência docente, acreditamos que muitos professores desconhecem as diferentes interpretações das frações. Fazer esse conhecimento chegar até os livros didáticos e até o professor de sala de aula é algo que consideramos pertinente.

Também há uma lacuna sobre quando, em que sequência e como ensinar cada interpretação das frações para os estudantes do Ensino Fundamental e Médio, seja na perspectiva do EEM ou por outras metodologias com intuito de trabalhar diferentes interpretações das frações, especialmente na perspectiva da medição.

Da mesma forma que acreditamos que as interpretações não são conhecidas pelos professores, o EEM também não o é. Acreditamos que o EEM é uma metodologia promissora capaz de transformar o modo de ensinar e de aprender Matemática. Para isso, também se faz necessário difundir essa metodologia, tornando-a conhecida pelos professores, incentivando seu estudo e sua prática. Para tanto, seria interessante criar um banco de aulas com planejamentos e tarefas para que professores pudessem se aventurar e descobrir essa metodologia de ensino, que certamente é um desafio para professores, mas que propicia e estimula os estudantes a compartilhar ideias, refletir e comunicar suas (in)compreensões, discutir estratégias de resolução das tarefas e negociar significados matemáticos. O fato de oportunizar o trabalho em grupo e autônomo favorece que os alunos assumam o centro do seu aprendizado.

Em nossas análises, as quatro dimensões do EEM não foram objeto da pesquisa (*inquiry*, reflexão, comunicação e colaboração), mas acreditamos na importância de mais estudos sobre elas.

Nossos estudos, planejamento e desenvolvimento das aulas e tarefas foram pensadas especificamente para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que têm entre 10 e 11 anos de idade, precisam de orientação quanto aos estudos, e auxílio, até mesmo com os artefatos tecnológicos. Para isso, adaptamos e consequentemente ampliamos o quadro de *ações intencionais do professor na prática* de EEM, conforme estruturado por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), incluindo a utilização das TD. Julgamos pertinente verificar as viabilidades desse quadro com estudantes de idade escolar diferentes da nossa pesquisa.

É óbvio que a tecnologia utilizada no ERE como meio de acesso para o desenvolvimento de aulas na perspectiva do EEM é imprescindível. Contudo, como os artefatos/aparatos não são neutros, seria interessante pesquisar como e de que forma os artefatos/instrumentos de comunicação influenciam o ensino e o aprendizado no ERE ou no ensino presencial.

REFERÊNCIAS[1]

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 46, p. 349-365, 2013.

ALMEIDA, A. C.; OLIVEIRA, H. O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. **Quadrante**, v. 18, n. 1 e 2, p. 87-118, 2009.
BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora**: Uma Abordagem Teórico-Prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BARBOSA, J. C. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e Distanciamentos. *In*: OLIVEIRA, A. M. P. de; RAMALHO, M. I.

[1] Excepcionalmente, esta seção contempla todos os trabalhos citados no decorrer da tese e não apenas aqueles presentes nas Conclusões e Considerações Finais.

Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática [livro eletrônico]. Ortigão. Brasília: SBEM, 2018. Coleção SBEM. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_.pdf. Acesso em: 20 jan. 2020

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais do VII Sipem**. SBEM, v. VII. p. 1-12, 2018.

BASNIAK, M. I; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais no Ensino Exploratório de Matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 738-747, 2019.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. p. 91-125. New York, NY: Academic Press, 1983.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. Classroom organization and dynamics. In B. C, A. H e M. O (Eds.). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986, p. 309-365.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Editora UFPR, Curitiba, n. especial 1/2011, p. 157-171, 2011.

BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars Before Researchers: on the centrality of the dissertation literature review in research preparation. **Educational Researcher**, v. 34, n. 6, p. 3-15, aug./sep., 2005.

BRASIL. Lei n. 14.040, de 18 de agosto de 2020. Estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020; e altera a Lei nº 11.947, de 16 de junho de 2009. **Diário Oficial da União**, Brasília, v. 158, n. 159, 19 ago. 2020 (a), p. 4. Seção 1. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2019-2022/2020/lei/L14040.htm. Acesso em: 19 out. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de fevereiro de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Documento orientador das ações de formação em 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BUENO; BASNIAK, 2020, p. 260-261. A construção de cenários animados no GeoGebra na mobilização de conhecimentos matemáticos por alunos com altas habilidades/superdotação. Revista Paradigma (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 4, p. 68-93, 2007.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In: CANAVARRO, P., SANTOS, L., BOAVIDA, A., OLIVEIRA, H., MENEZES, L.; CARREIRA, S. (Orgs.). **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012**: Práticas de Ensino da Matemática. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2012. p. 255-266.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemátic***a*, n. 115, p. 11-17, 2011. Disponível em https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf; acesso em 22 jul. 2019, às 7h.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Portugal, 1951.

CEALE. Glossário Ceale: **Termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores**. Belo Horizonte, 2014. ISBN 978-85-8007-079-8. Disponível em http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale; acesso em 8 set. 2020.

CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, A. D. Obstáculos e Dificuldades Apresentados por Professores de Matemática Recém-Formados ao Utilizarem Modelagem Matemática em suas Aulas na Educação Básica. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 760-776, ago. 2017. DOI: 10.1590/1980-4415v31n58a12

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Eds). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, p. 243-307, 1986. DOI: 10.1007/978-94-009-4504-3_7

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

CYRINO, M. C. C. T; OLIVEIRA, H. Ensino Exploratório e os Casos Multimídia na Formação de Professores que Ensinam Matemática. In:
CYRINO, M. C. C. T. (Ed.) **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 19-32.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debate***s*. SBEM. Ano II, n. 2. Brasília, 1989. p. 15-19.

D'AMBROSIO, U. **Sociedade, Cultura, Matemática e Seu Ensino**. Educação e Pesquisa. São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

DEWEY, J. L**ogic**: The theory of inquiry. New York: Henry Holt and Company, 1938.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 7 jul. 2021.

DRIJVERS. P.; KIERAN, C.; MARIOTTI, M.-A.; AINLEY, J.; ANDRESEN, M.; CHAN, Y. C.; DANA-PICARD, T.; GUEUDET, G.; KIDRON, I.; LEUNG, A.; MEAGHERET, M. Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, LAGRANGE, J.B.C. Internacional Comission on Mathematical Instruction. Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain - **The 17th ICMI Study**. Springer: New York, 89-133, 2010.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ESCOLANO, R. V. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente**. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza del Número Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESPADINHA, T. B. **O Desenvolvimento das Representações da Magnitude de Números Fracionários.** 2015. 72 f. – Faculdade de Psicologia, Medicina, Ciências e Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa 2015.

ESTEVAM, E. J. G. **Práticas de uma Comunidade de Professores que ensinam Matemática e o Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística**. 192f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 205-214, 2019.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. Teaching fractions. Educational practices series. Geneva: **International Academy of Education-International Bureau of Education**. v.22, 2011.

GAIRÍN, J. M. **Sistemas de representación de números racionales positivo**s **- Un estudio con maestros en formación**. Tese, Universidad de Zaragoza, 1998.

GATTI, B. A. Pesquisa, educação e pós-modernidade: confrontos e dilemas. **Cadernos de Pesquisa**. v. 35, n. 126, p. 595-608, 2005. Acesso em: 20 maio. 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0100-15742005000300004.

GUERREIRO, A. Comunicação matemática na sala de aula: conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas. In: PONTE, J. P. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: IE, p. 237-260, 2014.

HIEBERT, J.; BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In: HIEBERT, J. BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3 ed. Reston: NCTM, 1991. p.1-18.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p.125-150, 1980.

LAMON, S. J. Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In: CUOCO, A.; CURCIO, F. (Eds.), **The Roles of Representations in School Mathematics** - 2001 Yearbook (p. 146-168). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema. Acesso em: 10 abr. 2020.

MARINS, A. S. **Conhecimentos Profissionais mobilizados/ desenvolvidos por participantes do PIBID em práticas de Ensino Exploratório de Matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

MENEZES, L.; OLIVEIRA, H.; CANAVARRO, A. P. **Descrevendo as Práticas de Ensino Exploratório da Matemática:** o caso da professora Fernanda. Actas del VII CIBEM. Montevideu, Uruguay: CIBEM, 2013.

MERLI, R. F.; NOGUEIRA, C. M. I.; POWELL, A. B. Mudanças na pesquisa em educação matemática por conta do covid-19. **Anais do CIET:EnPED:2020 - (Congresso Internacional de Educação e Tecnologias | Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância)**, São Carlos, ago. 2020. ISSN 2316-8722. Disponível em: https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2020/article/view/1000. Acesso em 01 fev. 2021.

MOREIRA, J. A. M; HENRIQUES, S.; BARROS, D. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. **Dialogia**, São Paulo, n. 34, p. 351-364, jan./abr. 2020. DOI: 10.5585/dialogia.n34.17123

NRICH, UNIVERSITY OF CAMBRIDGE - **Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning**. Disponível em: <https://nrich.maths.org/>, Acesso em: 12 mar 2020.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013.

OLIVEIRA, H.; CYRINO, M. C. C. T. Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: One study with prospective mathematics teachers. **Sisyphus**, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-29, 2021.

PADILHA, L. C. S.; BITTAR, M. Apropriação da Tecnologia por Professores de Matemática para fins Pedagógicos: Uma Abordagem Instrumental. *In*: XI Encontro Nacional de Educação Matemática **Anais [...]**. Curitiba, 2013. p. 1-15.

PARANÁ. Decreto nº 4.258, de 17 de março de 2020. Altera dispositivos do Decreto nº 4.230, de 16 de março de 2020b, que dispõe sobre as medidas para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional decorrente do SARS COV 2 - COVID-19. **Diário Oficial do Estado**, Curitiba, v. 107, n. 10.647, 17 mar. 2020, p. 14. Disponível em: www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=232889&indice=1&totalRegistros=1&dt=26.2.2020.15.12.57.794. Acesso em: 18 out. 2020.

PARANÁ. Decreto nº 4.320, de 23 de março de 2020. Altera dispositivos do Decreto nº 4.312, de 20 de março de 2020 e do Decreto nº 4.230, de 16 de março de 2020a. **Diário Oficial do Estado**, Curitiba, v. 107, n. 10.653, 23 mar. 2020b. Disponível em: s://www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=233069&indice=1&totalRegistros=1&dt=26.2.2020.15.45.8.639. Acesso em: 24 mar. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba, PR: SEED/PR, 2019. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669. Acesso em: 10 fev. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Do Paraná**: Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669. Acesso em: 10 fev. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 1.016/2020** – GS/SEED de 03 de abril de 2020c. Disponível em: http://www.fiepr.org.br/assuntosLegislativos/uploadAddress/Resolucao-n-1.016.2020--GS.SEED%5B91882%5D.pdf

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 1.249/2020** – GS/SEED de 20 de abril de 2020d. Disponível em:

www.fiepr.org.br/assuntosLegislativos/uploadAddress/Resolucao-n-1.249.2020--GS.SEED%5B92288%5D.pdf. Acesso em: 10 out. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 1.522/2020** – GS/SEED de 07 de maio de 2020f. Disponível em http://www.fiepr.org.br/assuntosLegislativos/uploadAddress/Resolucao-n-1.522.2020--GS.SEED%5B92490%5D.pdf. Acesso em: 10 out. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resolução nº 3.817/2020** – GS/SEED de 25 de setembro de 2020g, altera a Resolução nº 1.522 – GS/SEED, de 7 de maio de 2020, para regulamentar a abrangência do sistema de aulas não presenciais.

PEREZ, M. **Grandezas e Medidas: representações sociais de professores do ensino fundamental**. 2008. Tese. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/ handle/1884/16117. Acesso em: 14 de jun. de 2020.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. (Ed.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: IEUL, 2014.

PONTE, J. P. da; CHAPMAN, Olive. Mathematics teachers' knowledge and practices. Em A. Gutierrez e P. Boero (Eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: Past, present and future. Roterdham, The Netherlands: Sense Publishers, p. 461-494, 2006.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM**: **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM**, Cascavel, PR, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Inicias. **XIII ENEM**, Brasil, jun. 2019d. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1258/1834. Acesso em: 05 maio 2020.

POWELL, A. B. Consequências de Olhares Filosóficos e Históricos na Aprendizagem de Frações. In**: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - XXIV EBRAPEM**, 2020, Cascavel, Pr. Palestra de abertura. Cascavel: Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=K02feUaQzRA. Data de acesso: 25 nov. 2020.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. ; BAIRRAL, M. **A Escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. Papirus Editora, 2014.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**: une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RODRIGUES, R. V. R. **O contexto de formação a partir da exploração de um caso multimídia: aprendizagens de futuros professores de matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012 - versão Kindle.

RUSSELL, B. El significado de magnitud. In.: RUSSELL, B. **Los principios de la Matemática**. 2. ed. Madrid: Espaca – Calpe S. A., cap. XIX, p. 193-212, 1967.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez. 2019.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: O Que Revelam as Pesquisas Publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **RPEM** - Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v. 09, n. 20, p. 08-37, nov.-dez. 2020.

SERRAZINA, M. L. M. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista Eletrônica de Educaçã***o*. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 266-283, 2012.

SIERPINSKA, A. Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism**.** In H. Steinbring, M. G. B. Bussi e A. Sierpinska (Eds.). **Language and communication in the mathematics classroom**. Reston, VA: NCTM, p. 30-62, 1998.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

STEIN, Mary Kay. et al. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p. 313-340, 2008. DOI: 10.1080/10986060802229675

TORBEYNS, J. SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.

UNESCO. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. São Carlos: EdUFSCar, 2016.

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE, NRICH - **Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning**. Disponível em https://nrich.maths.org; acesso em 12 mar. 2020, às 5h20.

VALENTE, G. S. C.; MORAES, E. B. de; SANCHEZ, M. C. O.; SOUZA, D. F. de; PACHECO, M. C. M. D. O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: Reflexões sobre a prática docente. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 9, p. e843998153, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i9.8153. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/8153. Acesso em: 01 dez. 2020.

VIEIRA PINTO, A. **O conceito de tecnologia.** Rio de Janeiro: Contraponto, v. 1, 2005.

WELLS, G. **Dialogic inquiry**: Towards a sociocultural practice and theory of education. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

WHEATLEY, G. H. **The role of reflection in mathematics learning. Educational Studies in Mathematics**, v. 23, p. 529-541, 1992. DOI: 10.1007/BF00571471.

APÊNDICE A – PLANO DE AULA TAREFA 1: QUAL O COMPRIMENTO?

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]
Validado pelos integrantes do GEPTEMatE[3]

1. Identificação

Nome: Vania Sara Doneda de Oliveira

Local: Colégio Estadual Marechal Rondon

Datas: 15/09 e 16/09 (introdução da tarefa e realização da tarefa)
18/09/2020 (discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens)

Duração: no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa e no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens.

Unidade Temática: Números e Álgebra

Objetos de conhecimento: números racionais (não negativos)

Conteúdo: Frações: Nomenclatura e Representações

Ano de Escolaridade: 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

2. Objetivos

Compreender fração como medida.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Internet, tarefa em arquivo (pdf, doc ou Google documentos), Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* das barras Cuisenaire, mesa digitalizadora.

4. Desenvolvimento da Aula

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br
[3] Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Para mais informações acesse http://prppg.unespar.edu.br/geptemate

ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2016) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa*. É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa*. Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa*. Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens*. O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar

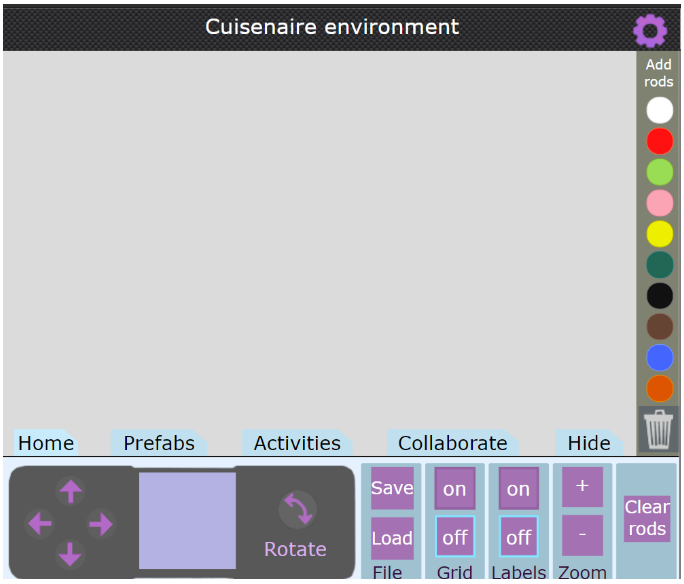
as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

4.1. Introdução da Tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa. Após essa explicação será disponibilizada a tarefa ao grupo.

Nesta tarefa, antes de realizar a sua leitura com os alunos, sugerimos que o professor dê um tempo para que os alunos explorem o *applet* e depois compartilhe com os colegas do grupo, as descobertas encontradas.



É importante que o professor conheça o *applet:*

A região cinza é o local onde as barras *Cuisenaire* serão dispostas.

- Para colocar as barras no *applet*: clique nos círculos coloridos na coluna à direita (Add rods). Se clicar mais de uma vez, as barras ficarão sobrepostas.

- Para mover as barras no *applet*: clique sobre a barra e arraste.

- Para excluir as barras: clique em cima da barra e arraste em direção a lixeira (coluna à direita).

- Para movimentar a tela do jogo: clique na região cinza da tela e arraste.

- Para aumentar ou diminuir o zoom: clique nos botões + ou – na coluna *Zoom*.

- Para salvar ou carregar arquivo: na coluna *File*, clique em *Save*, para salvar e *Load*, para carregar um arquivo salvo.

- Para deixar visível ou oculto o quadriculado na malha: na coluna Grid, clique em *on* para deixar visível e *off* para ocultar.

Nesta tarefa a malha deve ficar desabilitada porque pode induzir os alunos a contagem das barras.

Na sequência, a professora fará a leitura com os alunos da tarefa esclarecendo interpretações e/ou dúvidas, de forma que os alunos compreendam claramente aquilo que precisa ser realizado e se apropriem da tarefa. No item *a* da tarefa é solicitado que os alunos determinem o comprimento horizontal da região do *applet.* Utilizamos o termo comprimento horizontal da região do *applet*, para omitir o termo medida, que é objetivo da tarefa, ou seja, que os alunos percebam que com isso medirão a parte superior ou inferior do *applet*.

Relacionado a esta questão, é necessário salientar que um aluno deverá compartilhar sua tela, com o *applet*, com os demais colegas do grupo para que todos visualizem a mesma medida. Isso é importante porque o tamanho da tela varia de um dispositivo para o outro (celular/tablet/computador), o que é essencial para que os alunos compreendam que estão determinando o comprimento horizontal da região do *applet*.

4.2. Realização da Tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Tal quadro foi aprovado pelo grupo de estudos GEPTEMatE.

1) Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar cliquem na cor desejada.

    a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Façam isso para todas as cores.

Ações do aluno	**Ações do professor**
Medem o comprimento vertical da malha ao invés do horizontal.	Questionar o que é comprimento horizontal e o que é vertical. Questionar como explicariam qual é o comprimento horizontal da área do *applet* para outra pessoa entender.
Medem o comprimento horizontal corretamente.	Questionar qual a diferença entre horizontal e vertical. Questionar como fizeram.
Medem com barras de cores diferentes ao mesmo tempo.	Pedir para que releiam o enunciado.
Medem sem perceber que as barras ficaram sobrepostas.	Pedir para que observem as barras sobrepostas.
Medem com barras de mesma cor, mas não fazem a medição para todas as cores de barras.	Questionar sobre as outras cores (as que não foram utilizadas para medir o comprimento. Pedir para que releiam o enunciado no intuito de perceberem que é para determinar o comprimento para todas as cores.
Medem com barras de mesma cor e fazem a medição para todas as cores de barras.	Questionar o que perceberam ao medir. Que relações podem estabelecer entre as medições.
Não registram a falta de barras para completar o comprimento horizontal.	Questionar se o comprimento horizontal está completo com cada medição realizada. Pedir para que expliquem o que fizeram e como fizeram. Informar que no item *b* precisarão responder.
Registram a falta de barras para completar o comprimento horizontal.	Questionar como explicariam para que outra pessoa entenda o tamanho do pedaço da barra que falta. Informar que no item *b* precisarão

	responder.
Não conseguem determinar o comprimento horizontal da região do *applet* para cada cor de barra.	Pedir para comparar duas cores de barras sendo que uma cor completa todo o comprimento horizontal e outra cor que não completa todo o comprimento horizontal. Questionar o que deve ser feito com a barra da cor que não completa todo o comprimento horizontal. Pedir para verificarem o que acontece com cada cor de barra ao medir o comprimento horizontal. Pedir para que registrem o que perceberam. Informar que no item *b* precisarão responder.
Determinam o comprimento horizontal da região do *applet*.	Questionar o que observaram. Pedir para que registrem o que perceberam.
Não percebem que alguma(s) barra(s) está(ão) incompleta(s) na região visível do *applet*, ficando parte da barra oculta.	Pedir para que movam a região do *applet* de forma que as barras inteiras fiquem visíveis ou que diminuam o *zoom*.

b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não sabem responder.	Questionar quais barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Pedir para que verifiquem os registros. Pedir para que alinhem essas barras que não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*.
Respondem que falta um pedaço.	Questionar como explicariam o tamanho desse pedaço aos colegas. Pedir para que representem esse pedaço.
Respondem que é necessário usar barras de outras cores.	Pedir para que releiam o enunciado e notem que a medição do comprimento horizontal é com uma única cor por vez.

Respondem que é necessário quebrar/partir a barra, mas não sabem como medir a partição.	Questionar como poderiam medir utilizando as ferramentas do *applet*.
Respondem que é necessário quebrar/partir a barra e sabem como medir a partição.	Pedir para que expliquem de que forma fizeram isso. Questionar que nome dariam para esse pedaço. Pedir para que representem esse pedaço.
Respondem que o pedaço que falta é uma determinada fração (estimativa visual).	Questionar como poderiam medir utilizando as ferramentas do *apllet*. Sugerir que usem outras barras.
Não percebem que alguma(s) barra(s) está(ão) incompleta(s) na região visível do *applet*, ficando parte da barra oculta.	Pedir para que movam a região do *applet* de forma que as barras inteiras fiquem visíveis ou que diminuam o *zoom*.
Usam a régua para medir o *applet* na tela.	Pedir para que registrem como fizeram. Pedir para que utilizem as ferramentas do *applet*.
Os alunos representam o pedaço que falta.	Observar como os alunos estão representando o pedaço que falta. Questionar se há outras formas de representar esse pedaço. Pedir para que registrem detalhadamente.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entres elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Alinham as barras e não comparam a medida que falta para completara o comprimento com barras de outras cores				
Alinham as barras e comparam a medida que falta para completara o comprimento com barras de outras cores				
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				

Poderá ser discutido:

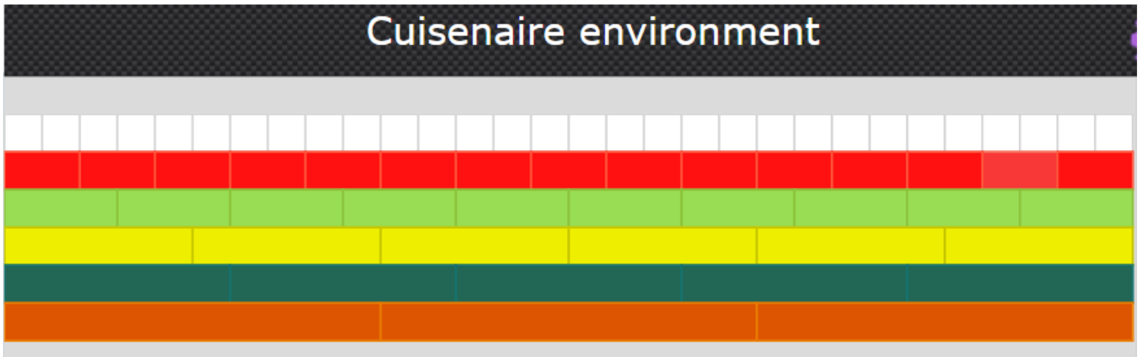
- A vista de uma sala de aula, por exemplo, como definir o que é comprimento e o que é largura?
- Que representação é possível fazer para auxiliar o entendimento?
- Ao medir com a barra branca faltou ou tem-se um número inteiro de barras?
- E com a barra vermelha? Faltou ou tem-se um número inteiro de barras?
- E com as demais cores de barras?
- Qual a unidade de medida utilizada?
- Por que foi comparada a barra preta com a branca e não com a verde-claro?
- Números primos, múltiplos e divisores.

4.4 Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa, na sequência, a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões coletivas da tarefa e as intervenções feitas pela professora durante as fases anteriores.

Apesar do objetivo da tarefa estar voltado para a fração como medida, caso em algumas das fases o subconstructo da fração como parte-todo surja, não é possível simplesmente ignorar. É necessário destacar que a fração como parte-todo é uma das muitas interpretações das frações. Mas, o objetivo desta tarefa é tratar da fração como medida, sua importância história e a transposição do conjunto dos números naturais para os números fracionários. Ainda que, para algumas pessoas, a representação fracionária pareça como sendo dois números (numerador e denominador), na verdade se trata de uma representação de um único número, uma fração.

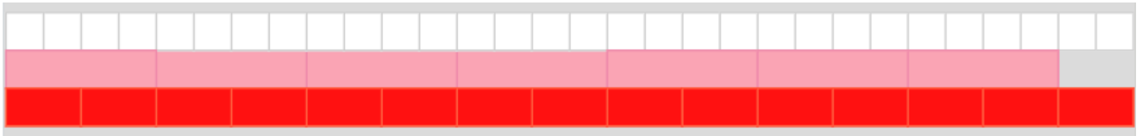
Quanto às questões da tarefa itens *a* e *b* pode-se propor que ao realizar a medição do comprimento horizontal da região do *applet* utilizando as mesmas cores de barras, tem-se:



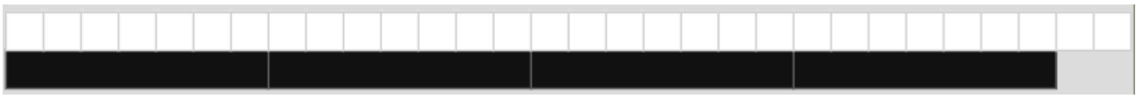
Assim, percebe-se que o comprimento horizontal da área do jogo pode ser medido por:

- 30 barras brancas ou
- 15 barras vermelhas ou
- 10 barras verde-claras ou
- 6 barras amarelas ou
- 5 barras verde-escuras ou
- 3 barras laranjas

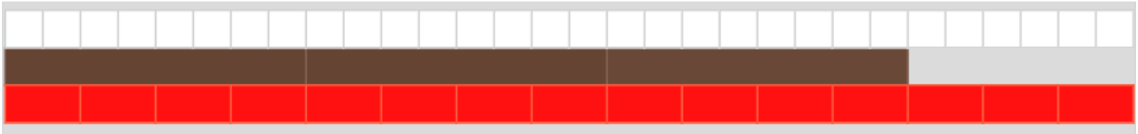
Para as cores de barras que não completam o comprimento horizontal apenas com barras inteiras é necessário comparar essas barras com outras:



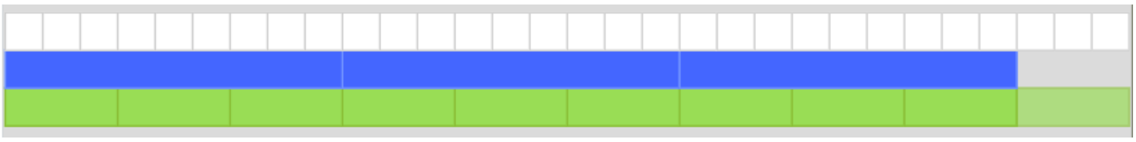
- 7 barras rosas e um meio da barra rosa ou 7 barras rosas e $\frac{1}{2}$ da barra rosa.
- 7 barras rosas e dois quartos da barra rosa ou 7 barras rosas e $\frac{2}{4}$ da barra rosa.



- 4 barras pretas e dois sétimos da barra preta ou 4 barras pretas e $\frac{2}{7}$ da barra preta.



- 3 barras marrons e seis oitavos da barra marrom ou 3 barras marrons e $\frac{6}{8}$ da barra marrom.
- 3 barras marrons e três quartos da barra marrom ou 3 barras marrons e $\frac{3}{4}$ da barra marrom.



- 3 barras azuis e três nonos da barra azul ou 3 barras azuis e $\frac{3}{9}$ da barra azul.
- 3 barras azuis e um terço da barra azul ou 3 barras azuis e $\frac{1}{3}$ da barra azul.

Todas essas medidas são equivalentes, ou seja: 30 barras brancas equivalem a 5 barras amarelas que equivalem a 3 barras azuis e três nonos da barra azul, e assim por diante…

A professora solicitará para que os alunos registrem no caderno:

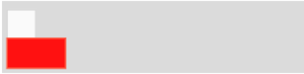
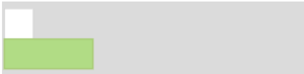
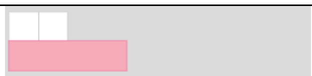
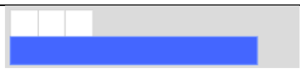
Ao se realizar medições, nem sempre haverá medidas inteiras, sendo necessário outras formas de representar essas medidas.

Tanto para os povos egípcios quanto para os babilônios, as frações surgiram para registrar a medida de quantidades de terra, área, tempo, peso. Para medir comprimentos, distância de terras e áreas, eles utilizavam cordas esticadas com nós. A distância entre os nós era a unidade de medida utilizada por eles.

Assim, é possível afirmar que as frações surgiram da necessidade do homem de comparar grandeza quando apenas os números naturais não foram suficientes para resolver certos tipos de problemas com medidas. O conjunto dos números racionais surgem para suprir essa lacuna.

Nesta tarefa a unidade de medida utilizada foram as barras *Cuisenaire*. Há unidades de medidas que são mais conhecidas e utilizadas que outras. Algumas unidades de medida de comprimento são: polegadas, jardas, centímetro, milímetro, metro, quilômetro, ano-luz.

As notações de frações e as representações com barras *Cuisenaire* são realizadas da seguinte forma:

metade ou um meio → $\frac{1}{2}$ →	
um terço → $\frac{1}{3}$ →	
dois quartos → $\frac{2}{4}$ →	
ou	
um meio → $\frac{1}{2}$ →	
um quinto → $\frac{1}{5}$ →	
dois sextos → $\frac{2}{6}$ →	
ou	
um terço → $\frac{1}{3}$ →	
seis sétimos → $\frac{6}{7}$ →	
três oitavos → $\frac{3}{8}$ →	
três nonos → $\frac{3}{9}$ →	
ou	
um terço→ $\frac{1}{3}$ →	
um décimo → $\frac{1}{10}$ →	
quatro doze avos → $\frac{4}{12}$ →	
ou	
dois sextos → $\frac{2}{6}$ →	
ou	
um terço → $\frac{1}{3}$ →	

5. Avaliação

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.

APÊNDICE B – TAREFA 1 - ALUNOS

Identificação dos Alunos	**Data: / /**

Aluno 1) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 2) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 3) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 4) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 5) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 6) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Tarefa 1: Qual o comprimento?

Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

1) Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar cliquem na cor desejada.

   a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Façam isso para todas as cores.

   b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

APÊNDICE C – PLANO DE AULA TAREFA 2: MEDINDO COM BARRAS CUISENAIRE (PARTE 1)

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]
Validado pelos integrantes do GEPTEMatE[3]

1. Identificação

Nome: Vania Sara Doneda de Oliveira

Local: Colégio Estadual Marechal Rondon

Datas: 22/09 e 23/09 (introdução da tarefa e realização da tarefa)
25/09/2020 (discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens)

Duração: no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa e no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens.

Unidade Temática: Números e Álgebra

Objetos de conhecimento: números racionais (não negativos)

Conteúdo: Frações: nomenclatura e representações; Frações equivalentes; Comparação de frações.

Ano de Escolaridade: 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

2. Objetivos

- Compreender fração como medida;
- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente;
- Compreender equivalência de frações;
- Compreender a representação fracionária.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* das barras Cuisenaire, mesa digitalizadora.

---

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br
[3] Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Para mais informações acesse http://prppg.unespar.edu.br/geptemate

4. Desenvolvimento da Aula

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o inquiry, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2016) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa*. É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa*. Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa*. Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias

de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens*. O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

4.1. Introdução da Tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa. Após essa explicação será disponibilizada a tarefa ao grupo.

A professora fará a leitura com os alunos da tarefa esclarecendo interpretações e/ou dúvidas, de forma que os alunos compreendam claramente aquilo que precisa ser feito e se apropriem da tarefa. As instruções de uso do *applet* encontram-se no apêndice 1 (Plano de Ensino da Tarefa 1).

4.2. Realização da Tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Seguem tarefas e quadros de antecipação.

2) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

a) Para facilitar as representações nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.

Branca = ___	Vermelha = ___	Verde-Clara = ___	Rosa = ___	Amarela = ___
Verde Escuro = ___	Preta = ___	Marrom = ___	Azul = ___	Laranja = ___

Ações do aluno	Ações do professor
Escolhem letras repetidas.	Pedir para que releiam novamente o enunciado e não repitam letras.
Escolhem letras não repetidas.	Questionar o que os motivou a escolheram essas letras.

b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida formem o máximo de combinações possíveis nessa condição.

Utilizem as representações do quadro do item *a* para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

Ações do aluno	Ações do professor
Usam combinações de barras que não são do mesmo tamanho que a barra escolhida.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e percebam que as combinações de barras devem ser do mesmo tamanho da barra escolhida.

Usam combinações de barras que são do mesmo tamanho que a barra escolhida, mas que não são da mesma cor.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e percebam que as combinações de barras devem ser da mesma cor.
Usam combinações de barras que são do mesmo tamanho e da mesma cor que a barra escolhida, mas não formam todas as possibilidades de mesmo tamanho.	Incentivar os alunos a procurarem outras possibilidades, questionando se já tentaram alternativas e seu resultado. Exemplo: Vocês já tentaram barras da cor vermelha? e da cor azul?
Usam combinações de barras que são do mesmo tamanho e da mesma cor que a barra escolhida e formam todas as possibilidades.	Questionar se realmente formaram todas as possibilidades. Questionar como chegaram a essa conclusão. Incentivá-los a registrar todas as representações matemáticas de equivalências.
Não compreendem como deve ser feita a representação matemática das equivalências utilizando as letras do item *a*.	Pedir para que olhem para as equivalências que fizeram e digam o que estão vendo. Exemplo, uma barra marrom tem o mesmo tamanho de quantas barras rosas? E uma rosa tem que tamanho da marrom? Verificar que letra utilizaram para a barra marrom e para a rosa; pedir para que substituam a palavra barra marrom e barra rosa pela letra correspondente escolhida pelo grupo e a expressão “do mesmo tamanho” por um símbolo matemático.
Fazem as representações matemáticas de equivalência utilizando as letras do item *a* e o sinal de igual (=), mas fazem apenas a relacionando a barra maior para a menor.	Questionar como seria a representação matemática de equivalência relacionando a barra menor para a maior. Exemplo, uma barra marrom tem o mesmo tamanho de duas barras rosas ou uma rosa tem que tamanho da marrom?
Fazem as representações matemáticas de equivalência utilizando as letras do item *a* e o sinal de igual (=), relacionando tanto a barra maior para a menor quanto da menor para a maior barra.	Questionar se isso faz sentido e se facilita a compreensão e/ou comunicação. Questionar o que é possível afirmar sobre as cores das barras e a quantidades de possibilidades de barras de mesma cor que juntas têm a mesma medida da barra escolhida.
Percebem que algumas barras têm mais quantidades de possibilidades de barras de mesma cor que juntas têm a mesma medida da barra escolhida.	Questionar por que isso acontece. Incentivá-los a estabelecer uma generalização.
Identificam as frações equivalentes, mas não registram as representações matemáticas de equivalência com o sinal de igualdade.	Questionar o que estão representando. Questionar que símbolo matemático pode ser utilizado para representar a equivalência.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entres elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

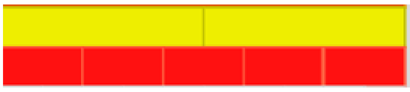
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Percebem que podem utilizar múltiplos ou divisores para realizar as comparações				
Fazem as medições por tentativa e erro				
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				

Como a proposta da tarefa é que os grupos escolham barras e a partir dessa escolha façam as representações matemáticas para todas as equivalências possíveis. A professora procurará entre os grupos, escolhas de barras de cores diferentes. Assim a turma poderá discutir todas as relações de equivalência para todas as barras, mesmo que seu grupo não tenha escolhido determinada cor.

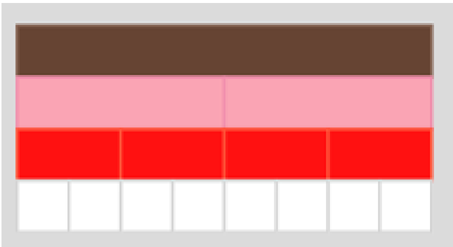
Aqui a professora destacará as representações algébricas realizadas pelos grupos, objetivando relacionar tanto da barra menor em relação à barra maior quanto da barra maior para a menor. Por exemplo, ao comparar a barra laranja com a amarela, tem-se as notações:

$l = 2a$ ou $a = \frac{1}{2}l$

Outras possibilidades de notação, que poderão ser exploradas de acordo com o que os grupos fizerem, são por exemplo:



$2a = 5v \rightarrow a = 2v + \frac{1}{2}v$



$1m = 2r = 4v = 8b \rightarrow 1m = \frac{2}{2}m = \frac{4}{4}m = \frac{8}{8}m$

$\frac{1}{2}m = \frac{2}{4}m = \frac{4}{8}m$

$\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}m = \frac{3}{4}m = \frac{6}{8}m$

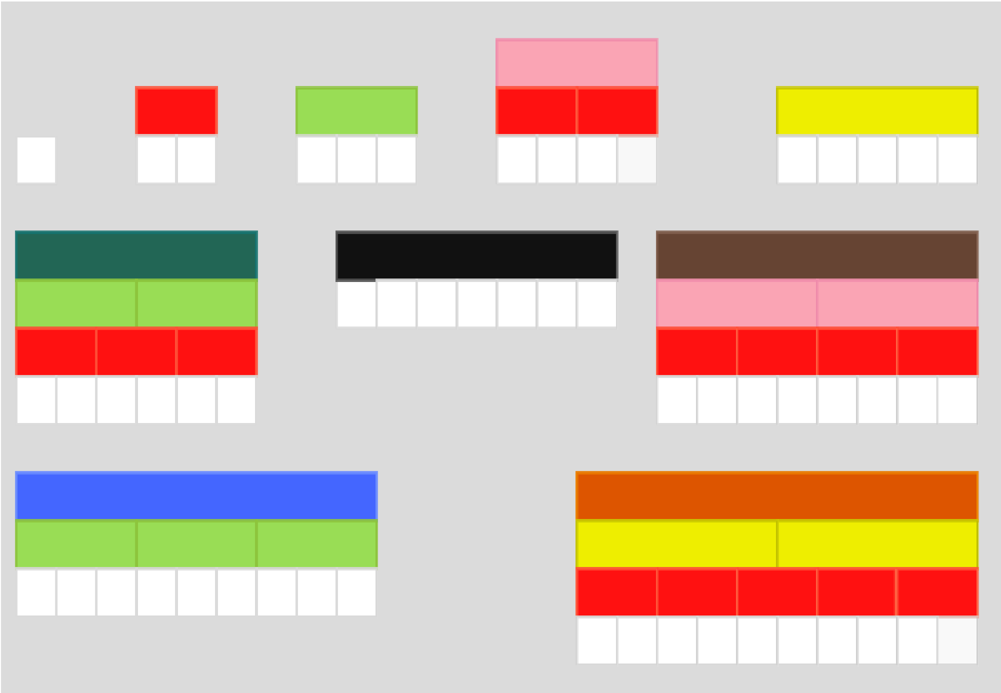
4.4 Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões e intervenções realizada pela professora durante as fases anteriores.

Quanto ao item *a* da tarefa, a professora em acordo com os alunos padronizará as letras junto com a turma observando quais letras foram mais comuns entre os grupos, discutindo a importância da padronização, para que todos entendam a linguagem matemática utilizada. Esse quadro deverá ser registrado pelos alunos.

Branca = b	Vermelha = v	Verde-Clara = c	Rosa = r	Amarela = a
Verde-Escuro = e	Preta = p	Marrom = m	Azul = z	Laranja = l

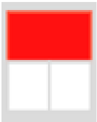
Para os itens *b* da tarefa, temos que:

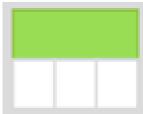


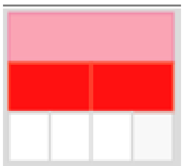
A partir das representações acima, a professora construirá o quadro a seguir para que os alunos percebam todas as representações de todos os pares de barras equivalentes. É importante ressaltar que com isso evocamos o sentido de relação, isto é, a comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis, fundamentado na ideia de magnitude de frações, além de promover o pensamento proporcional. No quadro, primeiramente o professor estabelecerá as relações algébricas equivalentes, comparando as barras e depois as frações equivalentes chamando a atenção dos alunos para o todo.

Essa tarefa é importante para que os alunos compreendam que uma mesma fração pode ser escrita com uma infinidade de representações, as frações equivalentes. E que para somar, subtrair e dividir frações com unidades de medidas diferentes, utilizamos frações equivalentes.

Os alunos deverão registrar no caderno o quadro e os textos que seguem:

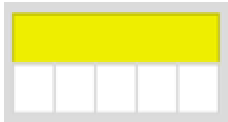
<table>
<tr><th colspan="12">EQUIVALÊNCIAS</th></tr>
<tr>
<td colspan="3">
$v = 2b$
$b = \frac{1}{2}v$

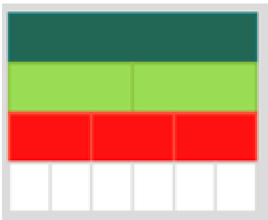
$1 = \frac{2}{2}$</td>
<td colspan="3">
$c = 3b$
$b = \frac{1}{3}c$

$1 = \frac{3}{3}$</td>
<td colspan="3">
$r = 2v = 4b$
$v = \frac{1}{2}r$
$b = \frac{1}{4}r$

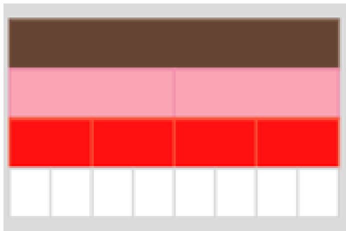
$v = 2b$
$b = \frac{1}{2}v$

$2b = \frac{1}{2}r$

$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$</td>
<td colspan="3">
$a = 5b$
$b = \frac{1}{5}a$

$1 = \frac{5}{5}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">
$e = 2c = 3v = 6b$
$c = \frac{1}{2}e$
$v = \frac{1}{3}e$
$b = \frac{1}{6}e$

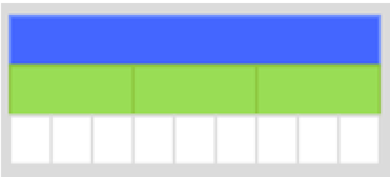
$2c = 3v = 6b$
$c = 3b$
$b = \frac{1}{3}c$

$v = 2b$</td>
<td colspan="4">
$p = 7b$
$b = \frac{1}{7}p$</td>
<td colspan="4">
$m = 2r = 4v = 8b$
$r = \frac{1}{2}m$
$v = \frac{1}{4}m$
$b = \frac{1}{8}m$

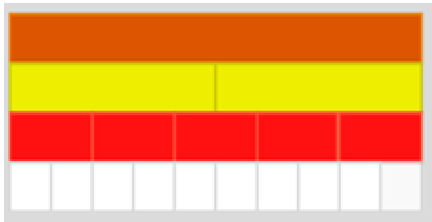
$2r = 4v = 8b$
$r = 2v = 4b$
$v = \frac{1}{2}r$
$b = \frac{1}{4}r$
$2b = \frac{1}{2}r$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="6">EQUIVALÊNCIAS</th></tr>
<tr>
<td colspan="2">$b = \frac{1}{2}v$

$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{6}{6}$
$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$</td>
<td colspan="2"></td>
<td colspan="2">$4v = 8b$ $3v = 6b$
$2v = 4b$ $v = 2b$
$b = \frac{1}{2}v$

$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$
$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">
$z = 3c = 9b$
$c = \frac{1}{3}z$
$b = \frac{1}{9}z$

$3c = 9b$
$c = 3b$
$b = \frac{1}{3}c$

$1 = \frac{3}{3} = \frac{9}{9}$
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$
$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$</td>
<td colspan="3">
$l = 2a = 5v = 10b$
$a = \frac{1}{2}l$ $v = \frac{1}{5}l$ $b = \frac{1}{10}l$

$2a = 10b$ $a = 5b$ $b = \frac{1}{5}a$

$5v = 10b$ $4v = 8b$
$3v = 6b$ $2v = 4b$
$v = 2b$ $b = \frac{1}{2}v$

$1 = \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$
$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$</td>
</tr>
</table>

Frações equivalentes são frações que representam a mesma medida. Dessa forma, observando a barra laranja, por exemplo, notamos que $1 = \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$, ou seja, uma barra laranja é equivalente a: $\frac{2}{2}$ da barra amarela, $\frac{5}{5}$ da barra vermelha, $\frac{10}{10}$ da barra branca. Ainda temos outras equivalências como $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, ou seja, duas barras vermelhas é equivalente a quatro barras brancas. Uma fração tem uma infinidade de frações equivalentes!!! Exemplo:

$$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{20}{70} = \cdots \frac{80}{280} = \cdots =$$

É importante compreender que, apesar da fração ser escrita com dois algarismos, trata-se de um único número, sendo que o algarismo que está acima da barra é o numerador e o algarismo abaixo da barra é o denominador.

Assim, na fração $\frac{1}{2}$ (um meio), temos que 1 é o numerador e 2 é o denominador. Na fração $\frac{2}{4}$ (dois quartos), 2 é o numerador e 4 é o denominador. Na fração $\frac{8}{5}$ (oito quintos), 8 é o numerador e 5 é o denominador. O denominador denomina a fração!

5. Avaliação

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.

APÊNDICE D – TAREFA 2 (PARTE 1) – ALUNOS

Identificação dos Alunos	**Data: / /**

Aluno 1) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 2) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 3) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 4) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 5) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 6) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1)

2) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

a) Para facilitar as representações nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.

Branca = ___	Vermelha = ___	Verde Clara = ___	Rosa = ___	Amarela = ___
Verde Escuro = ___	Preta = ___	Marrom = ___	Azul = ___	Laranja = ___

b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida formem o máximo de combinações possíveis nessa condição.

Utilizem as representações do quadro do item *a* para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

APÊNDICE E – PLANO DE AULA TAREFA 2: MEDINDO COM BARRAS CUISENAIRE (PARTE 2)

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]
Validado pelos integrantes do GEPTEMatE[3]

1. Identificação

Nome: Vania Sara Doneda de Oliveira

Local: Colégio Estadual Marechal Rondon

Datas: 29/09 e 30/09 (introdução da tarefa e realização da tarefa)
02/10/2020 (discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens)

Duração: no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa e no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens.

Unidade Temática: Números e Álgebra

Objetos de conhecimento: números racionais (não negativos)

Conteúdo: Operações com números racionais (não negativos)

Ano de Escolaridade: 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

2. Objetivos

- Comparar frações;
- Compreender a adição e subtração de frações de mesma unidade de medida.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* das barras Cuisenaire, mesa digitalizadora.

4. Desenvolvimento da Aula

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br
[3] Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Para mais informações acesse http://prppg.unespar.edu.br/geptemate

ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o inquiry, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2016) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa*. É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa*. Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa*. Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens*. O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar

as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

4.1. Introdução da Tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa. Após essa explicação será disponibilizada a tarefa ao grupo.

4.2. Realização da Tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Segue a continuação da tarefa 2 (parte 2) e os quadros de de antecipação/orientação.

c) Na primeira parte da tarefa vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.

O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.

Ações do aluno	**Ações do professor**
Formam combinações de barras que não são do mesmo tamanho que a barra escolhida.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e notem que as combinações de barras precisam ser do mesmo tamanho que a barra escolhida.
Formam combinações de barras que são do mesmo tamanho que a barra escolhida, mas que são apenas da mesma cor.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e percebam que as combinações de barras também podem ser formados por uma única cor e por cores diferentes.
Formam combinações de barras que são do mesmo tamanho que a barra escolhida, mas não formam todas as possibilidades de combinações de barras.	Incentivar os alunos a procurarem outras possibilidades, questionando se já tentaram outras alternativas e seu resultado. Exemplo: Vocês já tentaram com barras da cor vermelha? E da cor amarela? Qual foi o resultado? E juntar a barra de cor vermelha e amarela? E outras cores?
Formam combinações de barras que são do mesmo tamanho e formam todas as possibilidades de combinações de barras.	Questionar se seguiram alguma ordem para montar todas as possibilidades. Incentivá-los a registrar as representações matemáticas de equivalências.
Não compreendem como deve ser feitas as representações matemáticas de equivalências utilizando as letras da tarefa 2 item *a*.	Pedir para que olhem para as combinações de barras e digam o que estão vendo. Exemplo, uma barra marrom tem o mesmo tamanho de duas barras rosas. Questionar que letra utilizaram para a barra marrom e para a rosa. Agora tentem substituir a palavra barra marrom e rosa pela letra correspondente escolhida pelo grupo e a expressão “do mesmo tamanho” por um símbolo matemático.
Fazem as representações matemáticas de equivalências utilizando as letras da tarefa 2 item *a*, apenas para as combinações de barras de mesma cor.	Incentivá-los a formarem combinações para barras de cores diferentes como pede o enunciado da tarefa.
Fazem as representações matemáticas de equivalências utilizando as letras do item *a* para as combinações de barras de mesma cor e de cores diferentes.	Questionar se isso faz sentido e se facilita a compreensão e/ou comunicação.

Escolhem a barra branca, vermelha ou verde claro.	Desafiá-los a escolher outra cor de barra (de medida maior) e formar todas as combinações de barras possíveis.

d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos < e > as comparações entre as barras de cada combinação.

Ações do aluno	Ações do professor
Não entendem o que é para fazer.	Pedir para que releiam o enunciado. Pedir para que observem as combinações de barras formadas a partir da barra escolhida. Questionar quais frações estão observando em cada combinação. Pedir para que registrem as frações observadas utilizando os símbolos < e >.
Comparam frações de unidades de medidas diferentes.	Pedir para que releiam o enunciado. Lembrá-los que devem observar as combinações de barras de uma mesma unidade de medida, ou seja, da barra escolhida. Questionar quais frações irão comparar e como poderiam fazer a comparação.
Escolhem a barra branca, vermelha ou verde-clara.	Desafiá-los a escolher outra cor de barra de medida maior e formar todas as combinações de barras possíveis.
Confundem o símbolo < e >.	Lembrá-los que < significa menor que e > maior que.
Utilizam o símbolo < ou > para frações iguais.	Pedir para que leiam o que escreveram. Questionar se essa representação é correta e qual símbolo matemático poderiam usar.
Representam por meio de frações e utilizam os símbolos < e >.	Verificar se fizeram para todas as combinações de barras. Questionar se isso faz sentido e se facilita a compreensão e/ou comunicação.
Comparam uma barra em relação a outra e observam qual é a maior.	Pedir para que representem e registrem detalhadamente e perguntar como fariam se tivessem apenas a representação fracionária.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

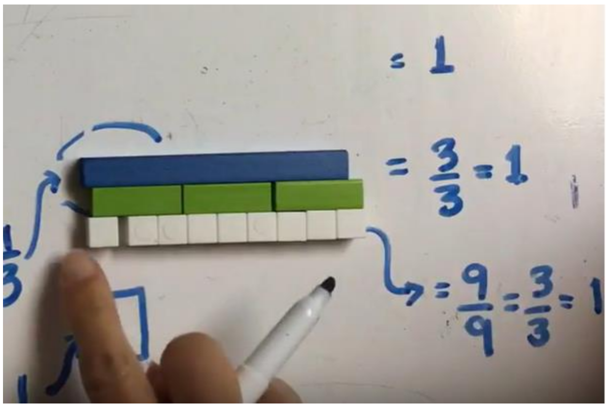
Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entres elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Seguem uma ordem lógica para realizar todas as comparações de barras				
Não seguem uma ordem lógica para realizar todas as comparações de barras				
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				

4.4 Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões e intervenções realizadas pela professora durante as fases anteriores.

A professora começará com as frações equivalentes comparando, por exemplo, a barra azul com as barras mas sem referenciar a unidade de medida como na tarefa anterior, para estabelecer algumas relações:



$$1 = \frac{3}{3} = \frac{9}{9}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

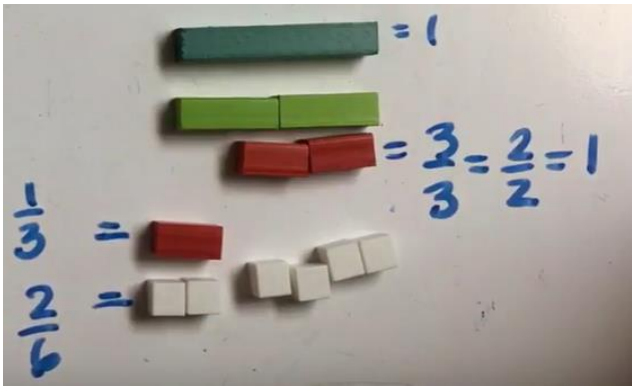
$$1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

Outro exemplo:



$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{6}{6}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

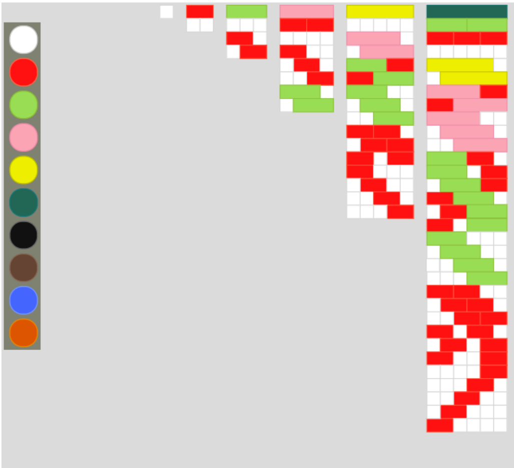
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

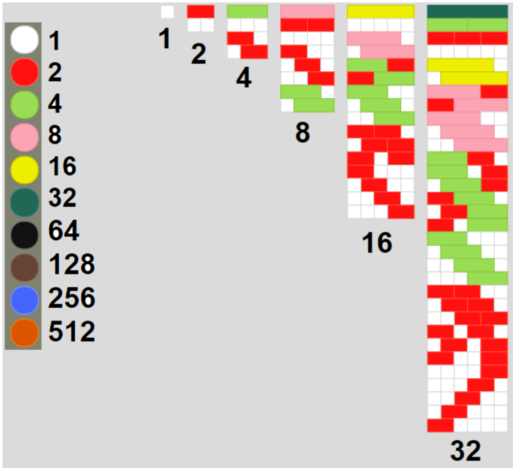
A ideia é que os alunos estabeleçam relação com as equivalências de frações e possam avançar no raciocínio de outras relações, como adição, subtração, multiplicação de um número inteiro por uma fração. Além disso, é importante definir frações irredutíveis.

Os alunos deverão registrar no caderno:

Uma fração é considerada irredutível quando o numerador e o denominador são números naturais e que não têm outros divisores comuns além de um, ou seja, são números primos entre si. No exemplo acima temos que $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, sendo $\frac{1}{3}$ a fração irredutível pois os números 1 (numerador) e 3 (denominador) só tem o um como divisor comum. Já no exemplo $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, temos as frações irredutíveis $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

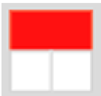
Quanto ao item *c*, as possibilidades de formação de combinações de barras diferentes são:





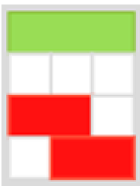
Os alunos farão o seguinte registro no caderno:

Observando a barra vermelha como unidade de medida encontra-se as seguintes equivalências:



$$1v = 2b \rightarrow 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \rightarrow 1 = 2\cdot\frac{1}{2} \rightarrow 1 = \frac{2}{2}$$

Observando a barra verde-clara como unidade de medida encontra-se as seguintes equivalências:



$$1c = 3b \rightarrow 1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \rightarrow 1 = 3\cdot\frac{1}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

$$1c = 1v + 1b \rightarrow 1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

$$1c = 1b + 1v \rightarrow 1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

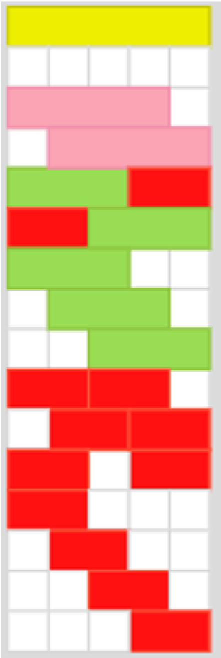
$$3b = 1v + 1b \rightarrow \frac{3}{3} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

É importante destacar que as equivalências não acontecem apenas entre as combinações de barras e a barra definida como a unidade de medida. Se a unidade de medida é a mesma, existem equivalências entre as combinações de barras também.

Observando a barra amarela encontra-se as seguintes equivalências:



$$1a = 5b \rightarrow 1 = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} \rightarrow 1 = 5 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1r + 1b \rightarrow 1 = \frac{4}{5}+\frac{1}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1b + 1r \rightarrow 1 = \frac{1}{5}+\frac{4}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1c + 1v \rightarrow 1 = \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1v + 1c \rightarrow 1 = \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

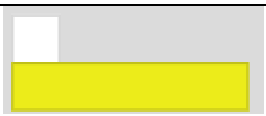
...

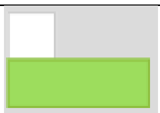
$$1b + 1r = 1v + 2b \rightarrow \frac{1}{5}+\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \frac{5}{5} = \frac{3}{5}+\frac{2}{5}$$

...

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Quanto ao item *d* da tarefa, a professora fará o quadro abaixo e pedirá para que os alunos registrem no caderno, observando que é possível realizar comparações de frações cuja unidade de medida são iguais. Ao observar a representação com as barras é possível extrair a unidade de medida, em seguida, é realizada a leitura e por último a notação fracionária baseada na leitura.

Representação com barras	**Unidade de Medida**	**Leitura**	**Notação Fracionária**
 	Amarela	Um quinto é menor que quatro quintos. ou Quatro quintos é maior que um quinto.	$\frac{1}{5} < \frac{4}{5}$ ou $\frac{4}{5} > \frac{1}{5}$

 	Verde-clara	Dois terços é maior que um terço. ou Um terço é menor que dois terços.	$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

5. Avaliação

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.

APÊNDICE F – TAREFA 2 (PARTE 2) – ALUNOS

Identificação dos Alunos **Data: / /**

Aluno 1) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 2) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 3) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 4) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 5) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 6) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 2)

c) Na primeira parte da tarefa vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.

O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.

d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos $<$ e $>$ as comparações entre as barras de cada combinação.

APÊNDICE G – PLANO DE AULA TAREFA 3: JOGO DO TREM

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]
Validado pelos integrantes do GEPTEMatE[3]

1. Identificação

Nome: Vania Sara Doneda de Oliveira

Local: Colégio Estadual Marechal Rondon

Datas: 14/10 (introdução da tarefa e realização da tarefa)

16/10/2020 (discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens)

Duração: no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa e no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens.

Unidade Temática: Números e Álgebra

Objetos de conhecimento: números racionais (não negativos)

Conteúdo: Operações com números racionais (não negativos)

Ano de Escolaridade: 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

2. Objetivos

- Comparar frações;
- Compreender adição e subtração de frações com unidades de medidas diferentes.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* das barras *Cuisenaire*, mesa digitalizadora.

4. Desenvolvimento da Aula

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do

---

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br
[3] Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Para mais informações acesse http://prppg.unespar.edu.br/geptemate

ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o inquiry, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2016) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa*. É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa*. Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa*. Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens*. O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar

as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

4.1. Introdução da Tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa. Após essa explicação será disponibilizada a tarefa ao grupo.

Como a proposta no primeiro item da tarefa é um jogo com as barras *Cuisenaire,* a professora acompanhará uma ou mais rodada do jogo a fim de esclarecer dúvidas quanto as regras do jogo .

4.2. Realização da Tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Segue a tarefa 3 e os quadros de antecipação/orientação.

3) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

Vamos fazer o jogo do trem. Chamaremos de *vagão* cada barra e de *trem* o alinhamento horizontal de um ou mais *vagões*.

Para isso cada grupo deve se dividir em duplas ou jogam dois e um espera, para jogar na próxima rodada. Cada dupla ou jogador escolhe um vagão. O jogo do trem funciona assim:

- Cada dupla ou jogador só utilizará o vagão escolhido para jogar, ou seja, sempre a barra de mesma cor.
- O vagão escolhido por cada jogador (ou dupla) serão colocados alinhados verticalmente na tela.
- Inicia jogando quem escolher o vagão mais curto.
- Joga sempre quem tem o trem mais curto, até que fique com o trem maior que adversário.
- O jogo acaba quando os trens ficarem do mesmo tamanho.
- Ganha o jogo a dupla ou jogador que colocar o último vagão.

Após jogarem algumas vezes respondam:

a) Qual(is) a(s) melhor(es) estratégia(s) para ganhar o jogo? Após a finalização de uma rodada do jogo, considerando cada um dos trens separadamente, escreva a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro.

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não conseguem responder, porque não compreendem alguma(s) regra(s) do jogo.	Acompanhar algumas rodadas e auxiliar nas regras do jogo.
Não sabem responder.	Questionar se jogaram várias vezes e sugerir para que registrem os resultados. Questionar se é melhor começar ou ser o segundo a jogar. Questionar se há relação entre o tamanho do vagão e quem ganha o jogo.
Respondem que utilizaram outras estratégias que não seja a escolha do vagão menor.	Questionar se isso sempre funciona. Pedir para que expliquem e demonstrem.
Respondem que sempre escolhem o vagão menor.	Questionar como concluíram isso. Questionar se isso funciona sempre. Questionar se é melhor começar ou ser o segundo a jogar.
Não escrevem corretamente a fração do vagão em relação ao trem inteiro	Questionar quanto é a medida total do trem em relação as barras brancas. Questionar que fração o vagão representa em relação ao total de barras brancas.

Escrevem corretamente a fração do vagão em relação ao trem inteiro	

b) Observando as frações escritas no item *a*, construam trens do mesmo tamanho de cada vagão de cada um dos jogadores. Mas há uma condição: os trens devem ser da mesma cor. Escrevam as frações equivalentes, respectivas aos trens e vagões.

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não entendem o que é para fazer.	Reler novamente o enunciado com os alunos. Pedir para que observem os trens formados de cada jogador ou dupla. Pedir para que mostrem o vagão e comuniquem que fração pode ser representada por esse vagão em relação ao trem inteiro.
Escrevem equivocadamente as frações que cada vagão de cada trem representa em relação ao trem inteiro.	Pedir para que expliquem como pensaram. Pedir para que mostrem o vagão e o trem. Perguntar que fração do trem inteiro o vagão representa.
Escrevem as frações que cada vagão de cada trem representa em relação ao trem inteiro.	Pedir para explicarem como pensaram. Questionar qual(is) barra(s), cor(es) de barra(s), podem ser utilizadas para estabelecer relações de equivalência entre os dois trens.
Não conseguem responder ou não entendem qual(is) barra(s), cor(es) de barra(s), podem ser utilizadas para estabelecer relações de equivalência entre os dois trens.	Lembrar que agora devem observar os trens e que podem usar barrar de outras cores, diferentes do vagão. Questionar se lembram o que é equivalência. Pedir para que tentem alinhar barras de mesma cor e verifiquem se há relações de equivalência entre os dois trens.
Respondem escrevendo algumas relações de equivalência entre os dois trens.	Pedir para que expliquem como pensaram. Questionar se encontraram todas as relações possíveis de equivalência entre os dois trens.

c) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual dessas duas frações é maior?

Ações do aluno	**Ações do professor**
Comparam frações de mesma unidade de medida.	Pedir para que observe um vagão em relação ao seu trem inteiro após uma rodada do jogo.

	Questionar quais frações irão comparar e como poderiam verificar qual é a maior.
Comparam frações de unidades de medidas diferentes, mas não conseguem verificar que uma fração é maior que a outra.	Relembrá-los da sistematização da tarefa anterior e questionar como foi possível comparar frações. Questionar de que forma o jogo do trem poderia ajudar a verificar qual fração é maior.
Fazem a equivalência de frações de unidades de medidas diferentes para uma mesma unidade de medida e conseguem verificar que uma fração é maior que a outra.	Questionar como fizeram a equivalência das frações para mesma unidade de medida. Questionar como verificaram que uma fração é maior que a outra.
Comparam corretamente e conseguem verificar que uma fração é maior que a outra.	Questionar como fizeram para determinar qual fração é maior.
Comparam um vagão em relação ao outro vagão e observam qual é o maior.	Pedir para que representem e registrem detalhadamente e perguntar como fariam se tivessem apenas a representação fracionária.
Respondem que não tem nenhuma fração entre as duas frações do item *b*.	Pedir que expliquem como concluíram isso.
Respondem que tem uma ou mais de uma fração entre as duas frações do item *b*.	Pedir para que registrem quais são. Questionar se não há outra fração entre essas apresentadas.
Respondem que tem infinitas frações entre as duas frações do item *b*.	Questionar como concluíram isso.

d) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual o resultado da soma dessas frações? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não fazem a soma corretamente.	Questionar de que forma realizaram a soma. Questionar se realizaram as equivalências de cada fração de cada fração antes de realizarem a soma. Questionar se utilizaram as barras *Cuisenaire* para conferir a operação.
Fazem a soma corretamente.	Questionar de que forma realizaram a soma. Questionar se utilizaram as barras *Cuisenaire* para conferir a operação.

e) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual o resultado da subtração da fração maior menos a fração menor? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.

Ações do aluno	Ações do professor
Não fazem a subtração corretamente.	Questionar de que forma realizaram a subtração. Questionar se realizaram as equivalências antes de realizar a subtração. Questionar se utilizaram as barras *Cuisenaire* para conferir a operação.
Fazem a subtração corretamente.	Questionar de que forma realizaram a subtração. Questionar se utilizaram as barras *Cuisenaire* para conferir a operação.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entres elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

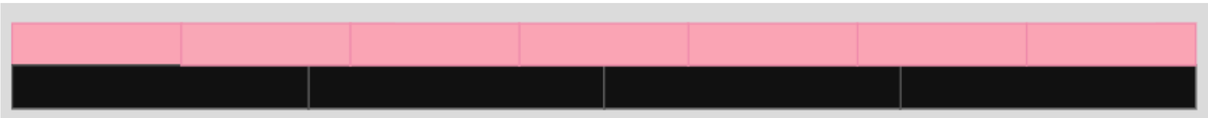
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				

4.4 Sistematização das aprendizagens

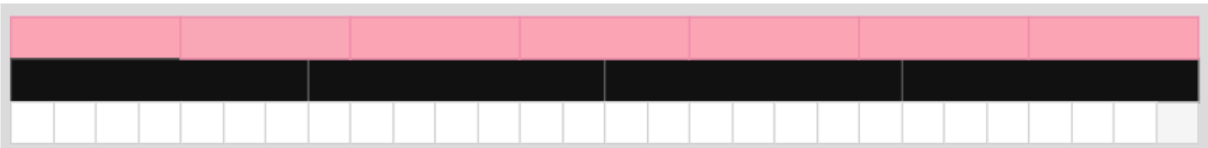
Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa, na sequência, a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões coletivas da tarefa e as intervenções feitas pela professora durante as fases anteriores.

Para o item *a*, a professora pode chamar atenção para o que acontece no jogo com os trens cujas medidas das barras são múltiplas ou primas entre si, ou múltiplas de um número comum às duas barras. Pode-se concluir então, que sempre a barra de menor medida vence o jogo.

Em relação ao item *b* da tarefa, os alunos precisaram escrever a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro, além de determinar barras que sejam comuns aos dois trens de maneira que possam escrever frações equivalentes. Espera-se que eles já tenham certa autonomia para registrar equivalências de frações, visto que já foram trabalhadas em tarefas anteriores. No exemplo abaixo temos que $\frac{1}{7}$ é a fração que o vagão rosa representa em relação ao trem rosa. E, $\frac{1}{4}$ é a fração que o vagão preto representa em relação ao seu trem inteiro.



Para registrar relações de equivalência entre os trens, neste caso, só é possível utilizar as barras brancas:



$\frac{1}{7} = \frac{4}{28}$; $\frac{2}{7} = \frac{8}{28}$; $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$; $\frac{4}{7} = \frac{16}{28}$; $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$; $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$; $\frac{7}{7} = \frac{28}{28}$ e $\frac{1}{4} = \frac{7}{28}$; $\frac{2}{4} = \frac{14}{28}$; $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$; $\frac{4}{4} = \frac{28}{28}$

É possível que sejam utilizadas outras barras além das brancas para registrar frações equivalentes de outras combinações de trens, no entanto, é importante que os alunos percebam que as barras brancas servem para todas as combinações (divisor 1).

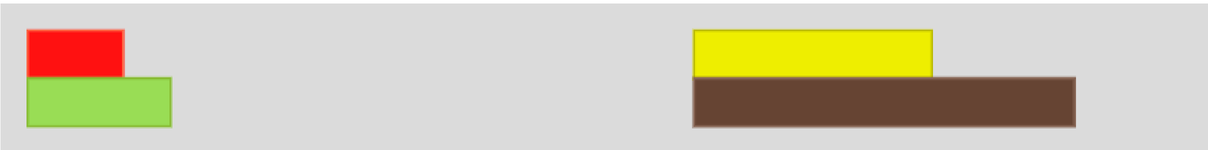
Na tarefa do item *c* foi solicitado que os alunos realizassem comparações entre frações unitárias (numerador igual a 1). É possível comparar as frações unitárias, como por exemplo, $\frac{1}{7}$ (rosa) e $\frac{1}{4}$ (preta) simplesmente observando o tamanho das medidas, neste caso, $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$ ou ainda $\frac{4}{28} < \frac{7}{28}$.

Ainda é possível concluir ao comparar frações unitárias (numerador 1) que quanto maior o denominador, menor a magnitude da fração. Exemplos: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \cdots \frac{1}{10} > \cdots \frac{1}{32} > \cdots \frac{1}{100} > \cdots$

A professora também irá exemplificar frações com numeradores diferentes de um. Os alunos deverão registrar no caderno:

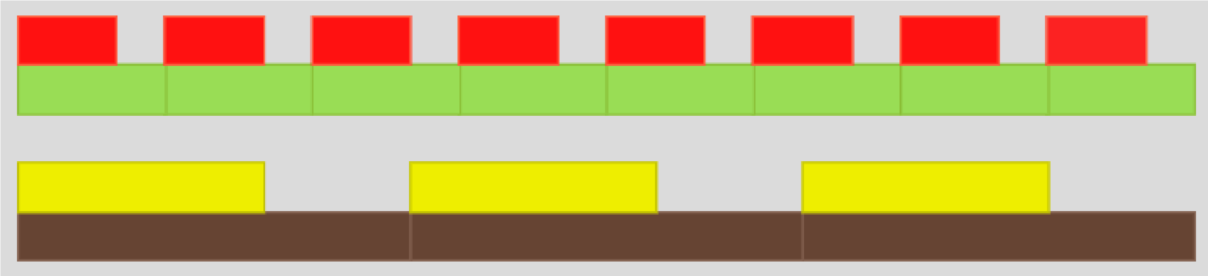
Para realizar a comparação de frações quando o numerador é diferente de um, precisamos seguir alguns passos. Por exemplo: qual fração é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{8}$?

1º) Colocando na região do jogo as medidas $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$.

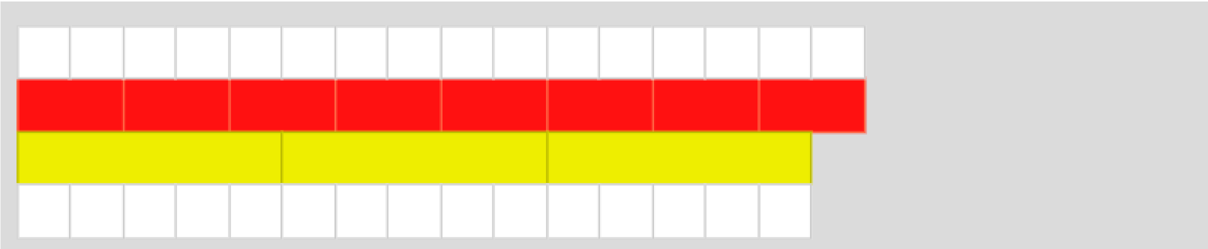


2º) Montamos a corrida do trem com os denominadores (barra verde-clara e marrom). Neste caso, são 8 vagões verde-claros e 3 vagões marrons, ou seja, fazemos a equivalência de frações utilizando a mesma unidade de medida.

3º) Fazemos a equivalência de frações. Para $\frac{2}{3}$ temos que para cada vagão (terço) verde-claro temos uma barra vermelha. Então se temos 8 vagões verde-claros (terço), temos também 8 vagões vermelhos. Para $\frac{5}{8}$ temos que para cada peça marrom temos uma barra amarela. Assim se temos 3 barras marrons, temos 3 barras amarelas.



4º) Alinhamos os trens de vagões vermelhos e trens de vagões amarelos. Podemos realizar a comparação: $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{5}{8}$, pois $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ e $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$. comparando $\frac{16}{24}$ e $\frac{15}{24}$, temos que $\frac{16}{24}$ é maior.

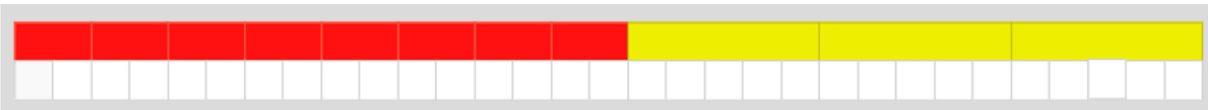


5º) Fazemos o registro matemático: $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ ou $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

É importante destacar para os alunos que uma das propriedades das frações é que nem a quantidade de dígitos no numerador ou denominador nem as magnitudes dos dígitos determinam a magnitude da fração: $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ ou ainda $\frac{250}{4000} < \frac{1}{6}$.

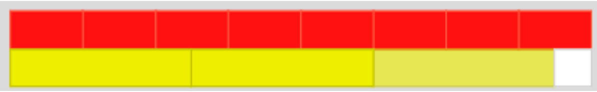
Ainda no item *c*, é possível questionar a quantia de frações existentes entre duas frações para que os alunos reflitam sobre a densidade dos números fracionários. Diferentemente do campo dos números naturais em que há sempre um sucessor imediato e um antecessor imediato (exceto para o número zero), os números fracionários não possuem nenhum antecessor ou sucessor imediato pois entre quaisquer frações existem infinitas outras frações. Entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ existe, por exemplo, este conjunto de frações: $\left\{\frac{2}{3}, \dots, \frac{63}{10}, \dots, \frac{16}{25}, \dots, \frac{13}{20}, \dots, \frac{131}{200}, \dots, \frac{5}{8}\right\}$.

Nos itens *d* e *e* da tarefa os alunos devem realizar respectivamente a adição e a subtração das frações. Para as duas operações a professora utilizará como exemplo as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$. A soma poderá ser representada com as barras *Cuisenaire* da seguinte forma:



Ao alinhar todas as barras vermelhas e amarelas é possível usar as barras brancas para medir as outras duas cores e assim determinar o comprimento equivalente dos dois trens: 31 barras brancas. Portanto, somar $\frac{2}{3}+\frac{5}{8}$ é equivalente a somar $\frac{16}{24}+\frac{15}{24}=\frac{31}{24}$.

Já para a subtração, podemos sobrepor as peças, verificando que a diferença entre a maior fração e a menor é $\frac{2}{3}-\frac{5}{8}$ que é equivalente a $\frac{16}{24}-\frac{15}{24}=\frac{1}{24}$.



5. Avaliação

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.

APÊNDICE H – TAREFA 3 – ALUNOS

Identificação dos Alunos **Data:** / /

Aluno 1) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 2) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

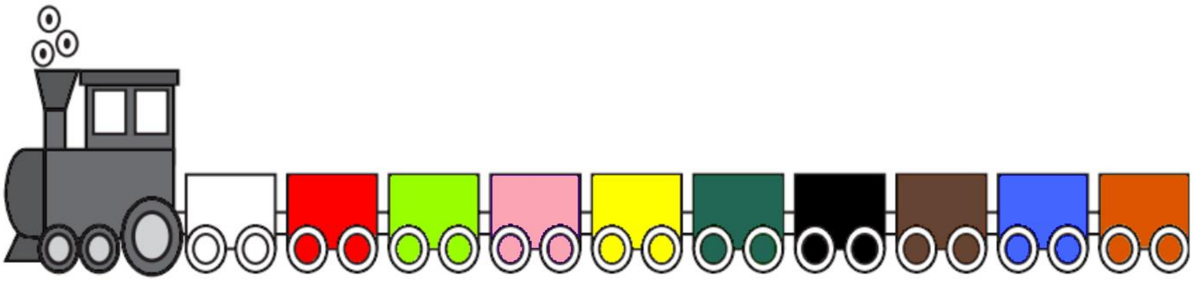
Aluno 3) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 4) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 5) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 6) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Tarefa 3: Jogo do Trem



3) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

Vamos fazer o jogo do trem. Chamaremos de *vagão* cada barra e de *trem* o alinhamento horizontal de um ou mais *vagões*.

Para isso cada grupo deve se dividir em duplas ou jogam dois e um espera, para jogar na próxima rodada. Cada dupla ou jogador escolhe um vagão. O jogo do trem funciona assim:

- Cada dupla ou jogador só utilizará o vagão escolhido para jogar, ou seja, sempre a barra de mesma cor.
- O vagão escolhido por cada jogador (ou dupla) serão colocados alinhados verticalmente na tela.
- Inicia jogando quem escolher o vagão mais curto.
- Joga sempre quem tem o trem mais curto, até que fique com o trem maior que adversário.
- O jogo acaba quando os trens ficarem do mesmo tamanho.
- Ganha o jogo a dupla ou jogador que colocar o último vagão.

Após jogarem algumas vezes respondam:

a) Qual(is) a(s) melhor(es) estratégia(s) para ganhar o jogo? Após a finalização de uma rodada do jogo, considerando cada um dos trens separadamente, escreva a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro.

b) Observando as frações escritas no item *a*, construam trens do mesmo tamanho de cada vagão de cada um dos jogadores. Mas há uma condição: os trens devem ser da mesma cor. Escrevam as frações equivalentes, respectivas aos trens e vagões.

c) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual dessas duas frações é maior?

d) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual o resultado da soma dessas frações? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.

e) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual o resultado da subtração da fração maior menos a fração menor? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.

APÊNDICE I – PLANO DE AULA TAREFA 4 (PARTE 1): ÁREA E PERÍMETRO DE QUADRILÁTEROS

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]
Validado pelos integrantes do GEPTEMatE[3]

1. Identificação

Nome: Vania Sara Doneda de Oliveira

Local: Colégio Estadual Marechal Rondon

Datas: 20/10 e 21/10/2020 (introdução da tarefa e realização da tarefa)
23/10/2020 (discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens)

Duração: no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa e no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens.

Unidade Temática: Números e Álgebra

Objetos de conhecimento: números racionais (não negativos); Unidades de medidas

Conteúdo: Operações com números racionais (não negativos); Unidades de medida

Ano de Escolaridade: 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

2. Objetivos

- Compreender multiplicação de frações de unidades de medidas iguais e diferentes;
- Associar a representação decimal à representação fracionária;
- Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros.
- Compreender os números racionais como campo diverso dos números naturais.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* do *GeoGebra*, site com *applet Fraction Models*, mesa digitalizadora.

---

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br
[3] Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Para mais informações acesse http://prppg.unespar.edu.br/geptemate

4. Desenvolvimento da Aula

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2016) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa*. É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa*. Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa*. Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias

de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens*. O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

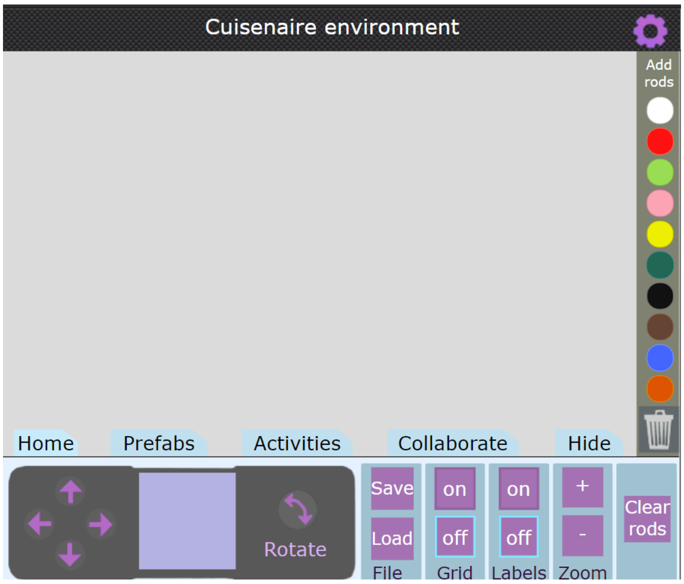
Assim, a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 4 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 50 minutos e no máximo 70 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 60 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

4.1. Introdução da Tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa.

Nesta tarefa, antes de realizar a sua leitura com os alunos, a professora irá explorar os *applets* sugeridos na tarefa com os alunos.

- *Barras Cuisenaire*: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html



A região cinza é o local onde as barras *Cuisenaire* serão dispostas.

- Para colocar as barras no *applet*: clique nos círculos coloridos na coluna à direita (Add rods). Se clicar mais de uma vez, as barras ficarão sobrepostas.

- Para mover as barras no *applet*: clique sobre a barra e arraste.

- Para excluir as barras: clique em cima da barra e arraste em direção a lixeira (coluna à direita).

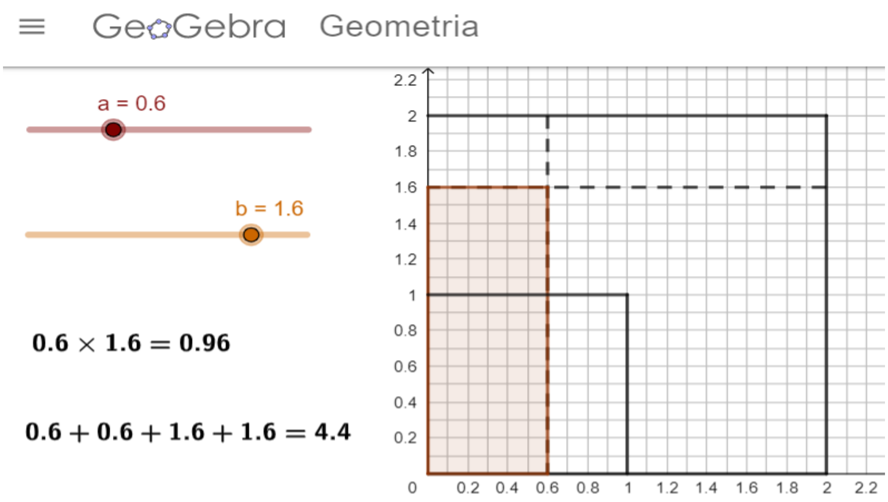
- Para movimentar a tela do jogo: clique na região cinza da tela e arraste.

- Para aumentar ou diminuir o zoom: clique nos botões + ou – na coluna *Zoom*.

- Para salvar ou carregar arquivo: na coluna *File*, clique em *Save*, para salvar e *Load*, para carregar um arquivo salvo.

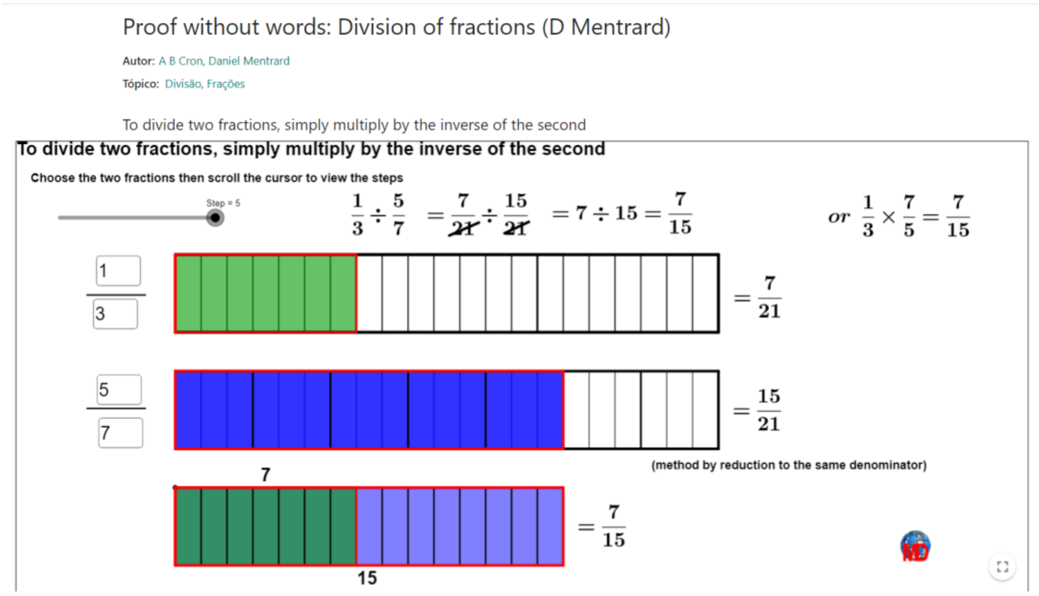
- Para deixar visível ou oculto o quadriculado na malha: na coluna Grid, clique em *on* para deixar visível e *off* para ocultar.

- *GeoGebra Quadriláteros*: https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções, versão para computador).



Neste *applet* os alunos devem alterar o valor dos controles deslizantes *a* e *b*. Para isso, basta arrastar o ponto destacado no controle *a* e *b*. Embaixo encontra-se os cálculos da área e do perímetro que se alteram conforme o valor do controle deslizante.

- *GeoGebra Prova sem Palavras*: https://www.geogebra.org/m/b4mdnfbs (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções, versão para computador).

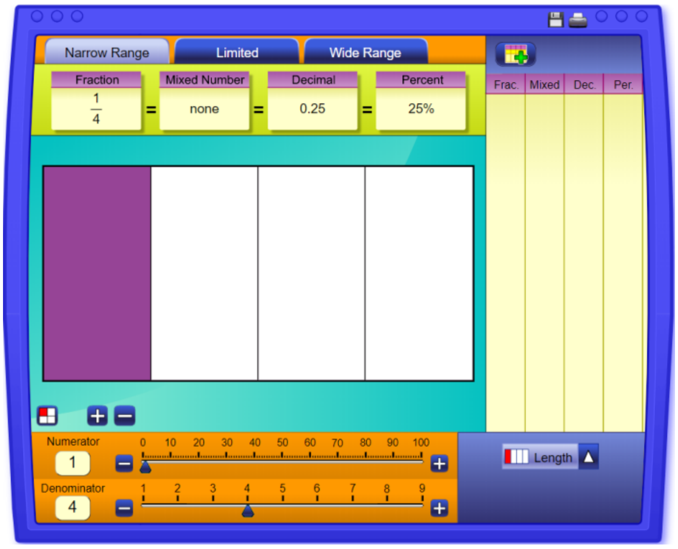


Neste *applet* é possível inserir as frações que se quer dividir e visualizar cinco passos até a resolução da divisão de duas frações. Cada passo é visualizado manipulando o controle deslizante *Step*. Infelizmente o *applet* tem uma limitação de não gerar a representação simbólica (desenho) das divisões com resultado maior que 1, apesar de mostrar o cálculo corretamente por meio das representações fracionárias.

- *Step=1*: o *applet* mostra as representações fracionárias e gráficas das duas frações inseridas pelo usuário.

- *Step=2*: o *applet* faz a representação gráfica das frações equivalentes com denominador comum.
- *Step=3*: o *applet* mostra a representação fracionária das frações equivalentes.
- *Step=4*: o *applet* exclui os denominadores comum e mostra os numeradores das frações equivalentes, o numerador da primeira fração equivalente dividido pelo numerador da segunda fração equivalente.
- *Step=5*: no último passo o applet mostra essa divisão na forma de fração e a representação gráfica da divisão e ainda demonstra, por meio de representação fracionária que é possível manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração.

- *Fraction Models*: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/



Neste *applet* é possível selecionar entre *Narrow Range* (denominadores de 1 a 9), *Limited* (denominadores 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 e 25) e *Wide Range* (denominadores de 1 a 25). Para escolher a fração basta arrastar a graduação do numerador ou denominador ou clicar nos botões + ou -. O *applet* mostra a representação fracionária (*Fraction)*, a forma de número misto (*Mixed Number*), a representação decimal (*Decimal*) e porcentagem (*Percent*). Também é possível alterar a visualização gráfica alternando entre *Lenght* (retângulos), *Area* (quadrados), *Region* (círculos) e *Set* (conjuntos de bolinhas, maçãs, estrelas ou borboletas). Do lado direito do applet é possível salvar algumas frações clicando no ícone . Ainda é possível salvar ou imprimir a tela com as frações construídas.

Após essas apresentações será disponibilizada a tarefa ao grupo.

4.2. Realização da Tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Segue a Tarefa 4 (parte 1) e os quadros de orientação/adaptação.

4) Abram o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se utilizar no celular, a visualização fica melhor com a opção versão para computador). Movimentem os controles deslizantes *a* e *b*, observem o que ocorre na figura representada e respondam.

a) O que é alterado na figura representada pelo GeoGebra com a movimentação dos controles deslizantes *a* e *b*?

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não sabem responder.	Pedir para que movam os controles deslizantes. Questionar o que acontece com a figura ao mexer o controle deslizante *a*. Questionar o que acontece com a figura ao mexer o controle deslizante *b*.
Respondem que o controle deslizante *a* altera a largura da figura e o *b* altera o comprimento.	Pedir para que expliquem o que é comprimento e o que é largura.
Respondem que o controle deslizante *a* altera o comprimento da figura e o *b* altera a largura.	Pedir para que expliquem o que é comprimento e o que é largura.

b) Considerando que a área de quadrados e retângulos é o resultado da multiplicação do comprimento pela largura e que perímetro é a soma de todos os lados, utilize o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções, versão para computador) e o *applet Fraction Models* disponível em https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/, para completar a tabela referente aos lados, perímetros e áreas dos quadriláteros em suas representações decimais e fracionárias.

Ações do aluno	Ações do professor
Não conseguem completar a tabela ou parte dela.	Pedir para que expliquem o que entenderam da tabela. Verificar se compreenderam que para a mesma figura há a representação decimal e fracionária e se perceberam que se trata de representações diferentes para a mesma magnitude numérica.
Não conseguem converter a representação decimal em fracionária.	Pedir para que leiam o número decimal. Pedir para que escrevam o que estão lendo na forma de fração.
Não conseguem converter a representação fracionária em decimal.	Questionar se não poderia ter uma fração equivalente que facilitaria essa conversão. Lembrá-los que podem utilizar o *applet Fraction Models*.
Erram o cálculo do perímetro.	Questionar o que é perímetro e como realizaram o cálculo.
Erram o cálculo da área.	Questionar o que é área e como realizaram o cálculo.
Erram o cálculo do comprimento ou largura.	Pedir para que mostrem na figura o que estão calculando e como o fizeram.
Completam a tabela corretamente.	Questionar como fizeram. Pedir para que expliquem o que é área e perímetro. Pedir para que expliquem como realizaram as transformações entre representações decimais e fracionárias.

	Retângulo 1		**Quadrado 2**		**Retângulo 3**	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO	0,2				0,7	
LARGURA	0,6			$\frac{9}{10}$		
PERÍMETRO						
ÁREA					0,35	

	Quadrado 4		**Retângulo 5**		**Quadrado 6**	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO			4,5			
LARGURA						

PERÍMETRO			13			$\frac{24}{5}$
ÁREA	1					

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entres elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Preenchem a tabela usando os *applets* sugeridos				
Preenchem a tabela usando as barras *Cuisenaire*				
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				

4.4 Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa, na sequência, a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões coletivas da tarefa e as intervenções feitas pela professora durante as fases anteriores.

É bem provável que na fase de *Discussão Coletiva da* Tarefa já tenha ficado claro que ao manipular os controles deslizantes *a* e *b* o comprimento e a largura se alteram e consequentemente a área e o perímetro dos quadriláteros.

A professora solicitará que os alunos registrem no caderno que o campo dos números racionais admite diferentes formas de representação: a representação decimal, a fracionária e a porcentagem. Outra observação é que

- Todo número natural pode ser escrito na forma de número racional na forma de fração ou de decimal;
- Todo número racional na forma de fração pode ser escrita na forma de número decimal;
- Todo número racional na forma de decimal pode ser escrito na forma de fração.

O preenchimento da tabela poderá ser feito da seguinte forma.

	Retângulo 1		**Quadrado 2**		**Retângulo 3**	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO	0,2	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	0,9	$\frac{9}{10}$	0,7	$\frac{7}{10}$
LARGURA	0,6	$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$	0,9	$\frac{9}{10}$	0,5	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
PERÍMETRO	1,6	$\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$	3,6	$\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$	2,4	$\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$
ÁREA	0,12	$\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$	0,81	$\frac{81}{100}$	0,35	$\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$

	Quadrado 4		**Retângulo 5**		**Quadrado 6**	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO	1	$\frac{1}{1}$	4,5	$\frac{45}{10}=\frac{9}{2}$	1,2	$\frac{6}{5}$
LARGURA	1	$\frac{1}{1}$	2,0 = 2	$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$	1,2	$\frac{6}{5}$
PERÍMETRO	4	$\frac{4}{1}$	13	$\frac{26}{2}=\frac{13}{1}$	4,8	$\frac{24}{5}$
ÁREA	1	$\frac{1}{1}$	9,0 = 9	$\frac{36}{4}=\frac{9}{1}$	1,44	$\frac{36}{25}$

É necessário discutir o valor posicional da representação decimal para que os alunos compreendam que, por exemplo, 0,4 é maior que 0,175.

Quanto a leitura de números decimais, temos que:

1º) lemos os inteiros;

2º) lemos a parte decimal, seguida da palavra:

- décimos (se houver 1 casa decimal). Exemplo: 2,4 □ dois inteiros e quatro décimos;
- centésimos (se houver 2 casas decimais). Exemplo: 0,25 □ vinte e cinco centésimos;
- milésimos (se houver 3 casas decimais). Exemplo: 12, 802 □ doze inteiros, oitocentos e dois milésimos.

Quando a parte inteira do número é zero, o número é menor que a unidade, ou seja, menor que um inteiro. Exemplo: 0,6; 0,054; 0,998.

Já, quando a parte decimal é nula, ou seja, zero ou inexistente, o número é inteiro. Exemplo: 16,0 = 16; 23,000 = 23.

5. Avaliação

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.

APÊNDICE J – TAREFA 4 (PARTE 1) – ALUNOS

Identificação dos Alunos	**Data: / /**

Aluno 1) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 2) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 3) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 4) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 5) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 6) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros (Parte 1)

4) Abram o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*). Movimentem os controles deslizantes *a* e *b*, observem o que ocorre na figura representada e respondam.

a) O que é alterado na figura representada pelo GeoGebra com a movimentação dos controles deslizantes *a* e *b*?

b) Considerando que a área de quadrados e retângulos é o resultado da multiplicação do comprimento pela largura e que perímetro é a soma de todos os lados, utilize o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/(se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*) e o *applet* Fraction Models disponível em https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/, para completar a tabela referente aos lados, perímetros e áreas dos quadriláteros em suas representações decimais e fracionárias.

	Retângulo 1		Quadrado 2		Retângulo 3	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO	0,2				0,7	
LARGURA	0,6			$\frac{9}{10}$		
PERÍMETRO						
ÁREA					0,35	

	Quadrado 4		Retângulo 5		Quadrado 6	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO			4,5			
LARGURA						
PERÍMETRO			13			$\frac{24}{5}$
ÁREA	1					

APÊNDICE K – PLANO DE AULA - TAREFA 4 (PARTE 2): ÁREA E PERÍMETRO DE QUADRILÁTEROS

Vania Sara Doneda de Oliveira[1]
Maria Ivete Basniak[2]
Validado pelos integrantes do GEPTEMatE[3]

1. Identificação

Nome: Vania Sara Doneda de Oliveira

Local: Colégio Estadual Marechal Rondon

Datas: 28/10/2020 (introdução da tarefa e realização da tarefa)
30/10/2020 (discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens)

Duração: no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa e no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens.

Unidade Temática: Números e Álgebra

Objetos de conhecimento: números racionais (não negativos); Unidades de medidas

Conteúdo: Operações com números racionais (não negativos); Unidades de medida

Ano de Escolaridade: 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

2. Objetivos

- Compreender multiplicação de frações;
- Associar a representação decimal à representação fracionária;
- Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros.
- Compreender os números racionais como campo diverso dos números naturais.

3. Recursos Didáticos Tecnológicos

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* do *GeoGebra*, site com *applet Fraction Models*, mesa digitalizadora.

---

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br
[3] Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE. Para mais informações acesse http://prppg.unespar.edu.br/geptemate

4. Desenvolvimento da Aula

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2016) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa*. É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa*. Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa*. Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias

de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens*. O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

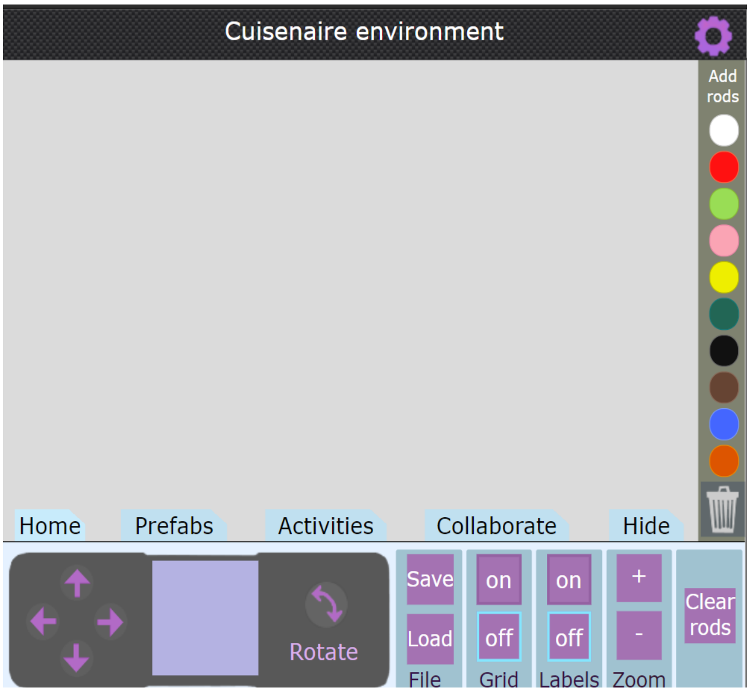
Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

4.1. Introdução da Tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa.

Nesta tarefa, antes de realizar a sua leitura com os alunos, a professora irá explorar os *applets* sugeridos na tarefa com os alunos.

- Barras *Cuisenaire*: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html



A região cinza é o local onde as barras *Cuisenaire* serão dispostas.

- Para colocar as barras no *applet*: clique nos círculos coloridos na coluna à direita (Add rods). Se clicar mais de uma vez, as barras ficarão sobrepostas.

- Para mover as barras no *applet*: clique sobre a barra e arraste.

- Para excluir as barras: clique em cima da barra e arraste em direção a lixeira (coluna à direita).

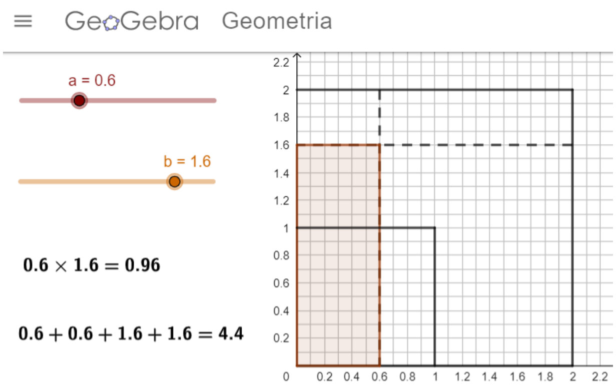
- Para movimentar a tela do jogo: clique na região cinza da tela e arraste.

- Para aumentar ou diminuir o zoom: clique nos botões + ou – na coluna *Zoom*.

- Para salvar ou carregar arquivo: na coluna *File*, clique em *Save*, para salvar e *Load*, para carregar um arquivo salvo.

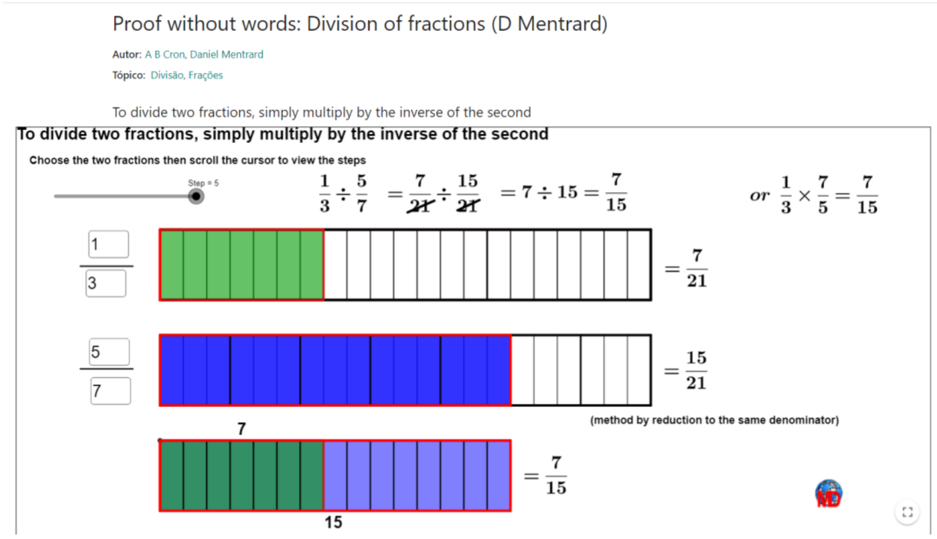
- Para deixar visível ou oculto o quadriculado na malha: na coluna Grid, clique em *on* para deixar visível e *off* para ocultar.

- *GeoGebra Quadriláteros*: https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções, versão para computador).



Neste *applet* os alunos devem alterar o valor dos controles deslizantes *a* e *b*. Para isso, basta arrastar o ponto destacado no controle *a* e *b*. Embaixo encontra-se os cálculos da área e do perímetro que se alteram conforme o valor do controle deslizante.

- *GeoGebra Prova sem Palavras*: https://www.geogebra.org/m/b4mdnfbs (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções, versão para computador).

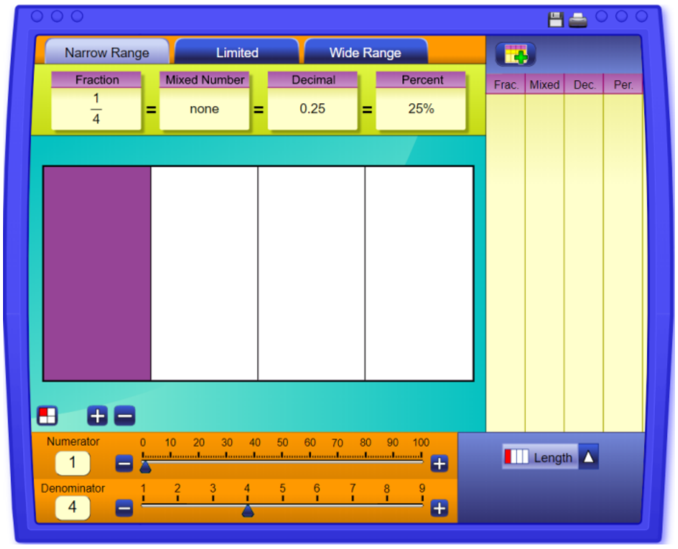


Neste *applet* é possível inserir as frações que se quer dividir e visualizar cinco passos até a resolução da divisão de duas frações. Cada passo é visualizado manipulando o controle deslizante *Step*. Infelizmente o *applet* tem uma limitação de não gerar a representação simbólica (desenho) das divisões com resultado maior que 1, apesar de mostrar o cálculo corretamente por meio das representações fracionárias.

- *Step=1*: o *applet* mostra as representações fracionárias e gráficas das duas frações inseridas pelo usuário.
- *Step=2*: o *applet* faz a representação gráfica das frações equivalentes com denominador comum.
- *Step=3*: o *applet* mostra a representação fracionária das frações equivalentes.

- *Step=4*: o *applet* exclui os denominadores comum e mostra os numeradores das frações equivalentes, o numerador da primeira fração equivalente dividido pelo numerador da segunda fração equivalente.
- *Step=5*: no último passo o applet mostra essa divisão na forma de fração e a representação gráfica da divisão e ainda demonstra, por meio de representação fracionária que é possível manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração.

- *Fraction Models*: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/



Neste *applet* é possível selecionar entre *Narrow Range* (denominadores de 1 a 9), *Limited* (denominadores 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 e 25) e *Wide Range* (denominadores de 1 a 25). Para escolher a fração basta arrastar a graduação do numerador ou denominador ou clicar nos botões + ou -. O *applet* mostra a representação fracionária (*Fraction)*, a forma de número misto (*Mixed Number*), a representação decimal (*Decimal*) e porcentagem (*Percent*). Também é possível alterar a visualização gráfica alternando entre *Lenght* (retângulos), *Area* (quadrados), *Region* (círculos) e *Set* (conjuntos de bolinhas, maçãs, estrelas ou borboletas). Do lado direito do applet é possível salvar algumas frações clicando no ícone . Ainda é possível salvar ou imprimir a tela com as frações construídas.

Após essas apresentações será disponibilizada a tarefa ao grupo.

4.2. Realização da Tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Segue Tarefa 4 (parte 2) e quadros de antecipação/orientação.

c) Retomem a tarefa anterior. Observem as tabelas e respondam: Qual(is) diferença(s) existe(m) na multiplicação dos números racionais, quando comparada(s) aos números naturais. É possível afirmar que na multiplicação dos números racionais os resultados sempre aumentam? Expliquem o raciocínio de vocês e, se necessário, explorem mais o arquivo do GeoGebra, testando diferentes valores.

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não sabem responder.	Pedir para que explorem o arquivo do GeoGebra com medidas inteiras ou para que pensem nas multiplicações entre números naturais e comparem com as multiplicações realizadas para calcular a área dos quadriláteros, tanto na representação fracionária quanto decimal. Pedir para que observem se há semelhanças ou diferenças.
Respondem que não há diferenças.	Pedir para que expliquem/demonstrem como concluíram isso. Pedir para que explorem o arquivo do GeoGebra Quadriláteros com medidas inteiras ou para que pensem nas multiplicações entre números naturais e comparem com as multiplicações realizadas para calcular a área dos quadriláteros.
Respondem que há diferenças, mas não sabem explicar.	Incentivar os alunos a expor suas ideias questionando o que acham que está diferente. Dar pistas no sentido de que percebam que nos números naturais o resultado é sempre maior que os fatores enquanto nos racionais nem sempre. Pedir para que observem os lados e os resultados dos retângulos e quadrados das tabelas.
Respondem que há diferenças e explicam que quando os fatores são menores que 1 o resultado da multiplicação é menor que os fatores.	Pedir para que expliquem como concluíram isso e incentivar para que registrem o raciocínio.

d) Calcule as divisões abaixo explicando detalhadamente como chegaram ao resultado. Se desejarem utilizem os *applets* a seguir para auxiliá-los.

- *Barras Cuisenaire*: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html
- *GeoGebra Quadriláteros*: https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*).
- *GeoGebra Prova sem palavras*: https://www.geogebra.org/m/b4mdnfbs (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*).
- *Fraction Models*: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/

i) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} =$ ii) $\frac{2}{5} \div \frac{6}{12} =$ iii) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} =$ iv) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} =$

Ações do aluno	**Ações do professor**
Não conseguem realizar a divisão.	Sugerir que utilizem os *applets* indicados na tarefa.
Realizam a divisão transformando fração em decimal.	Questionar como poderiam realizar a divisão sem transformar a fração em decimais.
Realizam a divisão de maneira equivocada.	Sugerir que utilizem os *applets* indicados na tarefa.
Realizam a divisão corretamente.	Pedir para que expliquem como pensaram e pedir para que registrem o raciocínio e procedimentos empregados.

4.3 Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entres elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Usam os *applet* para realizar a comparação entre medida de comprimento/largura e área				
Não usam os *applet* para realizar a comparação entre medida de comprimento/largura e área				
Repetem nos registros a divisão (apenas com os algoritmos)				
Registram no caderno o passo-a-passo explicando cada situação da divisão				
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				

4.4 Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa, na sequência, a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões coletivas da tarefa e as intervenções feitas pela professora durante as fases anteriores.

Quanto às diferenças entre a multiplicação dos números racionais e dos números naturais, devemos discutir que ao multiplicar duas frações, diferentes de 1 ou 0, o resultado pode ser menor que um dos dois fatores, como por exemplo, o cálculo das áreas dos retângulos 1 e 3 e do quadrado 2. Isso não acontece com os números naturais, pois ao multiplicar dois fatores, diferentes de 1 ou 0, o produto é sempre maior que os fatores. Podemos escrever genericamente que o algoritmo da multiplicação dos números racionais na representação fracionária é: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, com *a, b, c, d,* sendo números naturais e *b* e *d* diferentes de zero. Ainda podemos ter as frações de quantidades definidas por $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$. Por exemplo: $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$.

Ainda para os números racionais na forma fracionária ou decimal, a ideia de multiplicação como adição repetida é uma definição insuficiente:

- Na multiplicação de $2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$ vale a ideia de multiplicação como adição repetida, mas para $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ não vale.
- $2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8 + 0{,}8 = 1{,}6$ vale a ideia de multiplicação como adição repetida, mas para $0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$ não vale.

Para a divisão de dois números naturais diferentes de 1, sabemos que o resultado da divisão tem como quociente um número menor que o dividendo. Mas, no campo dos números racionais, ao dividirmos duas frações ou dois números decimais, diferentes de 1, pode-se obter um quociente maior que o dividendo. Como por exemplo,

- $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ ou $0{,}5 \div 0{,}75 = 0{,}666 \ldots$
- $\frac{2}{5} \div \frac{6}{12} = \frac{4}{5}$ ou $0{,}4 \div 0{,}5 = 0{,}8$
- $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = 2$ ou $0{,}333 \ldots \div 0{,}1666 \ldots = 2$
- $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} = 6$ ou $1{,}5 \div 0{,}25 = 6$

Podemos escrever genericamente que o algoritmo da divisão na representação fracionária dos números racionais é: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d}{1} \div \frac{c \cdot b}{1} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$, com *a, b, c, d,* sendo números naturais e *b* e *c* diferentes de zero. Por exemplo: $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} \div \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{4}{8} \div \frac{6}{8} = \frac{4}{1} \div \frac{6}{1} = \frac{4}{6}$ e que pode ser simplificada em fração irredutível $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

5. Avaliação

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.

APÊNDICE L – TAREFA 4 (PARTE 2) – ALUNOS

Identificação dos Alunos **Data: / /**

Aluno 1) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 2) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 3) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 4) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 5) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aluno 6) Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros (parte 2)

c) Retomem a tarefa anterior. Observem as tabelas e respondam: Qual(is) diferença(s) existe(m) na multiplicação dos números racionais, quando comparada(s) aos números naturais. É possível afirmar que na multiplicação dos números racionais os resultados sempre aumentam? Expliquem o raciocínio de vocês e, se necessário, explorem mais o arquivo do GeoGebra, testando diferentes valores.

d) Calcule as divisões abaixo explicando detalhadamente como chegaram ao resultado. Se desejarem utilizem os *applets* a seguir para auxiliá-los.

- *Barras Cuisenaire*: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html
- *GeoGebra Quadriláteros*: https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq (se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*).
- *GeoGebra Prova sem palavras*: https://www.geogebra.org/m/b4mdnfbs_(se usar o *applet* no celular, assinalar em opções do navegador, *versão para computador*).
- *Fraction Models*: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/

i) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} =$ ii) $\frac{2}{5} \div \frac{6}{12} =$ iii) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} =$ iv) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} =$